**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ
ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К 01.17.554

На правах рукописи
УДК: 517.956.6

АРКАБАЕВ НУРКАСЫМ КЫЛЫЧБЕКОВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2017

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Программирование» Ошского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Сопуев Адахимжан**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Джураев Абубакир Мухтарович** кандидат физико-математических наук, доцент **Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович**
Ведущая организация	Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, ул. Исанова 81а.

Защита диссертации состоится «20» октября 2017 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета К 01.17.554 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Институте природных ресурсов Южного отделения Национальной академии наук Кыргызской Республики и Жалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г.Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета.

Автореферат разослан «18» сентября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

Актуальность темы. Теория локальных и нелокальных задач для уравнений в частных производных второго, третьего и четвертого порядков все более активно используется при математическом моделировании в задачах влагопереноса, процессов теплообмена в смешанной среде, распространении электрических колебаний в составных линиях, совместно-раздельных течений вязко-упругой и вязкой жидкостей в трубе и других процессов, происходящих в неоднородных средах.

В приложениях встречаются случаи, когда вместо локальных условий берутся нелокальные условия, содержащие интегральные члены. Например, интегральные условия используются в тех случаях, когда область физических характеристик рассматриваемой среды недоступна для непосредственного измерения, но возможно получение дополнительной информации о характере процесса в виде какого-либо усреднения.

Краевые задачи с интегральными условиями для уравнения теплопроводности впервые изучена в работе Дж.Р. Канона (J.R. Cannon). Различные обобщения краевых задач с интегральными условиями для общего параболического уравнения рассмотрены в работах Л.И. Камынина. Среди последующих работ отметим работы Н.И. Ионкина, З.А. Нахушевой, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной, О.Ю. Данилкиной и других авторов, в которых изучались задачи с интегральными условиями для уравнений параболического и гиперболического типов второго порядка.

Краевые задачи для псевдопараболических уравнения третьего порядка с применением функции Римана изучены в работах Д. Колтона (D. Colton), М.Х. Шханукова, В.И. Жегалова, Е.А. Уткиной, В.А. Водаховой, Н.С. Попова, Н.Н. Евдокимововой, Н.В. Бейлиной, Б.С. Аблабекова, К.Г. Кожобекова и других.

Одним из новых разделов в теории уравнений смешанного типа является направление, в котором краевые задачи для уравнений смешанного типа изучаются с двумя линиями изменения типа. По данной тематике занимались М.М. Зайнулабидов, В.Ф. Волкодавов, М.М. Смирнов, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов, Б. Исломов, А. Сопуев и другие авторы.

Однако краевые задачи с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены, а также задачи склеивания с двумя линиями изменения типа для уравнений третьего порядка мало исследованы. В настоящей работе сформулированы и изучены локальные, нелокальные краевые задачи и задачи склеивания для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с интегральными условиями как с одной, так и с двумя линиями изменения типа, что и обусловливает актуальность работы.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнена в рамках проекта Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета МОиН КР по теме: «Изучение математических моделей гидроаэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы», № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012.

Цель и задачи исследования.

1. Доказательство существования и единственности решений локальных краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка;

2. Доказательство существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;

3. Доказательство однозначной разрешимости локальных и нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с одной линией изменения типа;

4. Доказательство однозначной разрешимости краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

<u>Методика исследования</u>. При построении представления решений уравнений использованы методы понижения порядка уравнения, сопряженные задачи и интегральные уравнения. Для доказательства существования и единственности решений применен метод редукции краевых задач к решению интегральных уравнений типа Фредгольма или Вольтерра, а также принцип сжатых отображений и метод последовательных приближений.

<u>Научная новизна полученных результатов</u>. Основные научные результаты:

1. Найдены достаточные условия существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;
2. Получены представления решений краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками;
3. Доказаны теоремы существования и единственности решений локальных и нелокальных задач склеивания для параболического и гиперболического уравнений типа третьего порядка с одной характеристической линией изменения типа;
4. Установлены теоремы существования и единственности решений краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя характеристическими линиями изменения типа.

<u>Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.</u> Результаты диссертации, связанные с исследованием локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка, могут быть использованы для развития теории краевых задач уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высокого порядков, а также при моделировании явлений и процессов теплообмена в смешанной среде, совместно-раздельных течений вязко-упругой и вязкой жидкостей в трубе, и других процессов, происходящих в двуслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами.

<u>Основные положения, выносимые на защиту</u>:

- Установление достаточных условий существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;
- Получение представления решений краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками;
- Доказательство теоремы существования и единственности решений локальных и нелокальных задач склеивания для параболического и гиперболического уравнений типа третьего порядка с одной характеристической линией изменения типа;
- Доказательство теоремы существования и единственности решений краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя характеристическими линиями изменения типа.

Апробация работы. Итоги исследования регулярно докладывались и обсуждались на конференциях, заседаниях кафедры, результаты докладывались: в работе школы-семинара «Фундаментальная и прикладная математика» (г. Бишкек, 2010 г.); на III Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Иссык-Куль, пансионат «Жаштык», 2010 г.); на Международном Конгрессе «The Turkic World Mathematical Society (TWMS) will hold its 4th Congress» (г. Баку, Азербайджан, 2011 г.), на IV Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященную 80-летию академика Иманалиева Мурзабека Иманалиевича (г. Бишкек, 2011 г.), на Международном Конгрессе «V Congress of the Turkic World Mathematicians» (Иссык-Куль, Аврора, 2014 г.); на I Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Молодежь, наука, технологии: новые идеи и перспективы» (РФ, г. Томск, ТГАСУ, 2014 г.); на Международном форуме, проведенной в Иссык-Куле (с. Бостери, 2015 г.).

Некоторые положения обсуждались также на семинаре «Уравнения в частных производных» (г. Ош, ОшГУ, 2010-2016 гг.), руководитель – д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.; межвузовском научном семинаре «Актуальные вопросы теории дифференциальных уравнений» ОшГУ, руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алымкулов К. (г. Ош, 2010-2016 гг.); на семинаре по дифференциальным уравнениям, руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алыбаев К.С. (г. Жалал-Абад, ЖАГУ, 2010-2016 гг.).

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 7 научных статей: [1] - [8], и тезисы трех научных докладов [9] – [11].

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах [1] – [3], [10, 11] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем существования и единственности решений, получение основных результатов – автору.

Структура, объем и краткое содержание диссертации: Диссертация состоит из введения, четырех глав, состоящих из 10 разделов, списка использованных источников из 72 наименований и заключения. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, формул, примеров – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста – 102 страницы.

Пользуясь, случаем, выражаю глубокую благодарность и искреннюю признательность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А. Сопуеву за постановку задач, за ценные и полезные советы, за постоянное внимание и обсуждение результатов работы.

Краткое содержание работы.

В главе 1 имеется обзор работ по теме диссертационной работы. **В разделе 1.1** содержится обзор работ, близких по теме диссертации. **В разделе 1.2** приведен обзор основных результатов, полученные в настоящей диссертации.

Во второй главе рассмотрены нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения в частных производных третьего порядка, когда уравнение характеристик имеет как кратные, так и некратные действительные характеристики.

В **разделе 2.1** в области $D=\{(x,y): 0<x<\chi(y),\ 0<y<h\}$ (рис. 1) для уравнения

$$u_{xxy}-y^p u_y+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0, \tag{1}$$

где $a(x,y), b(x,y), c(x,y), \chi(y)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\chi(h)=x_0>0, \chi(0)=\ell>0,\ p>0,\ \forall y\in[0,h]: x_0\le\chi(y)\le\ell,\ \chi'(y)\le 0 \tag{2}$$

изучается з**адача 2.1.1:** найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющую уравнение (1) в области D и следующим условиям:

$$u(0,y)+\int_0^{\chi(y)} P(x,y)u(x,y)\,dx=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u(\chi(y),y)+\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)u(x,y)\,dx=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{5}$$

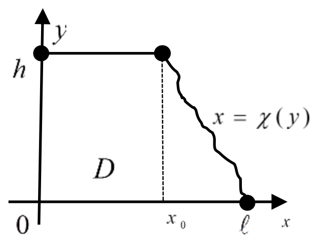


Рис. 1.

где $P(x,y), Q(x,y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$ – заданные функции, причем

$$\tau(0)+\int_0^{\ell} P(x,0)\tau(x)\,dx=\varphi_1(0),\ 0\le x\le\ell. \tag{6}$$

При $P(x,y)\equiv Q(x,y)\equiv 0$ задача 2.1.1 сводится к первой краевой задаче для уравнения (1). Отметим, что из условия (2) следует, что кривая $x=\chi(y)$ является монотонно не возрастающей функцией по y. Интегральные члены в краевых условиях означают наличие усредненных измеряемых величин.

Для решения задачи 2.1.1 сначала рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения

$$L[u] \equiv u_{xxy} - y^p u_y = f(x,y), (x,y) \in D \qquad (7)$$

с условиями

$$u(0,y) = g_1(y),\ u_x(0,y) = g_2(y),\ \ 0 \le y \le h,\ \ u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell, \qquad (8)$$

где $g_1(y), g_2(y)$ – функции из класса $C^1[0,h]$, причем $\tau(0) = g_1(0), \tau'(0) = g_2(0)$.

Интегрируя тождество

$$\vartheta L(u) - uL^*(\vartheta) = (\vartheta u_{\xi\eta} + \vartheta_{\xi\eta} u)_\xi - (\vartheta_\xi u_\xi + \eta^p \vartheta u)_\eta$$

и учитывая формулу Грина, будем иметь представление решение задачи (7) – (8):

$$\begin{gathered} u(x,y) = \tau(x) + \vartheta_\xi(x,y;0,y) g_1(y) - \vartheta(x,y;0,y) g_2(y) - \tau(0) + x\tau'(0) - \\ - \int_\delta^y \left[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) g_1(\eta) - \vartheta_\eta(x,y;0,\eta) g_2(\eta) \right] d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\eta, \end{gathered} \qquad (9)$$

где функция $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ определяется как решение следующей сопряженной задачи:

$$L^*[\vartheta] \equiv \upsilon_{\xi\xi\eta} + (\eta^p \vartheta)_\eta = 0,\ (x,y) \in D,\ (\xi,\eta) \in D, (\xi,\eta) \in D^*,\ \ D^* = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = \vartheta(x,y;x,\eta) = 0,\ (x,y) \in D, \eta \in [0,y],$$

$$\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = \vartheta_\xi(x,y;x,\eta) = 1,\ (x,y) \in D, \eta \in [0,y],$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = \omega(x,y;\xi),\ (x,y) \in D, \xi \in [0,x].$$

Здесь функция $\omega(x,y;\xi)$ определяется как решение задачи с начальными данными вдоль линии $\eta = y$:

$$\begin{cases} \vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y) - y^p \vartheta(x,y;\xi,y) = 0,\ \ 0 < \xi < x, \\ \vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = \vartheta(x,y;x,y) = 0,\ \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = \vartheta_\xi(x,y;x,y) = 1. \end{cases}$$

Решения указанных задач удается построить в явном виде:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = \eta^{-p/2} sh[\eta^{p/2}(\xi - x)],\ \ \omega(x,y;\xi) = y^{-p/2} sh[y^{p/2}(\xi - x)].$$

Полагая $f(x,y) \equiv -a(x,y)u_x - b(x,y)u_y - c(x,y)u$ из (9), будем иметь:

$$\begin{gathered} u(x,y) = u_0(x,y) + A_1(x,y) g_1(y) + B_1(x,y) g_2(y) + \int_\delta^x C_1(x,y;\xi) u(\xi,\eta) d\xi + \\ + \int_0^y \left[A_2(x,y;\eta) g_1(\eta) + B_2(x,y;\eta) g_2(\eta) \right] d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y C_2(x,y;\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\eta, \end{gathered} \qquad (10)$$

где $u_0(x,y)$, $A_2(x,y;\eta)$, $B_2(x,y;\eta)$, $C_2(x,y;\xi,\eta)$ – известные функции, выражающиеся через $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и коэффициенты уравнения.

Воспользовавшись условиями (3) и (4) из (10), получим:

$$\begin{gathered} H_{i1}(y) g_1(y) + H_{i2}(y) g_2(y) = \Phi_i(y) + \int_0^y \left[H_{i3}(y,\eta) g_1(\eta) + H_{i4}(y,\eta) g_2(\eta) \right] d\eta + \\ + \int_0^{\chi(y)} H_{i5}(y,\xi) u(\xi,y) d\xi + \int_0^{\chi(y)} d\xi \int_0^y H_{i6}(y,\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\eta,\ \ i = 1,2, \end{gathered} \qquad (11)$$

где $H_{ij}\,(i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,6})$, $\Phi_i\,(i = 1,2)$ – заданные функции, выражающиеся через функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и данные задачи 2.1.1.

Таким образом, разрешимость задачи 2.1.1 эквивалентным образом сводится к решению системы уравнений (10), (11), которая представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $u(x,y), g_1(y), g_2(y)$. Если выполняется условие

$$\Delta = H_{11}(y) H_{22}(y) - H_{12}(y) H_{21}(y) \ne 0, \qquad (12)$$

то система (10) и (11) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающее единственное решение.

В частности, при $P(x,y)=Q(x,y)=0$ имеем $\Delta=B_1(\chi(y),y)=-\vartheta(\chi(y),y;0,y)$. Так как $\forall y\in[0,h]:0<x_0\le\chi(y)\le\ell$, то $\vartheta(\chi(y),y;0,y)>0$. Следовательно, $\Delta\ne 0$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. Если выполнены условия (2), (6) и (12), то решение задачи 2.1.1 существует и единственно.

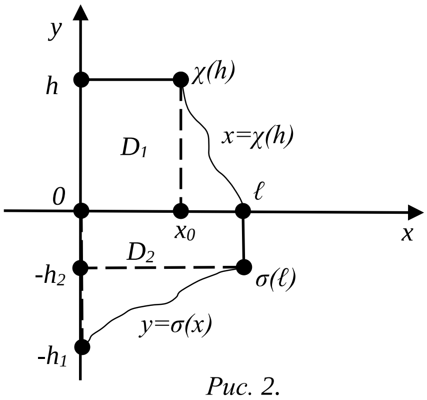


Рис. 2.

В **разделе 2.2** в области D, ограниченная линиями $x=0,-h_1\le y\le h$ $(h_1,h>0), y=\sigma(x),\ 0\le x\le\ell,$ $h_2=-\sigma(\ell),\ x=\ell,-h_2\le y\le 0(h_1\ge h_2),$ $x=\chi(y),\ 0\le y\le h,$ $y=h,\ 0\le x\le x_0=\chi(h)$ (рис. 2) рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-y^P u_y+a_1u_x+b_1u_y+c_1u=0,\ (x,y)\in D_1=D\cap(y>0), \tag{13}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy}-a_2u_x+b_2u_y+c_2u=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(y<0), \tag{14}$$

где $p>0,\ a_i,b_i,c_i\ (i=1,2)$, $\chi(y),\ \sigma(x)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\forall y\in[0,h]:x_0\le\chi(y)<\ell,\ \chi'(y)\le 0,\chi(0)=\ell,\ \forall x\in[0,\ell]:-h_1\le\sigma(x)\le -h_2,\ \sigma'(x)\ge 0,\sigma(0)=-h_1. \tag{15}$$

Задача 2.2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap\left[C^{2+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющую уравнению (13) и (14) в областях D_1 и D_2 соответственно, нелокальным условиям

$$\begin{aligned}
&u(0,y)+\int_0^{\chi(y)}P(x,y)u(x,y)dx=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h,\\
&u(\chi(y),y)+\int_0^{\chi(y)}Q(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,
\end{aligned} \tag{16}$$

и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ -h_1\le y\le 0,\ u(x,\sigma(x))=\psi(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{17}$$

где $P(x,y),\ Q(x,y),\varphi_i(y)\ (i=\overline{1,3})$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Пусть

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),0\le x\le\ell, \tag{18}$$

где $\tau(x),\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Для решения задачи 2.2.1 поступим следующим образом. Устремляя y к нулю из уравнения (13) имеем

$$\nu''(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+b_1(x,0)\nu(x)+c_1(x,0)\tau(x)=0,\ 0\le x\le\ell, \tag{19}$$

$\tau(x)=u(x,0),\ \nu(x)=u_y(x,0)$ – пока неизвестные функции.

Интегрируя дважды по x в пределах от 0 до x уравнение (19) будем иметь соотношение

$$\nu(x)=\nu_1(x)+r(x)\nu'(0)+\int_0^x K_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{20}$$

где $\nu'(0)$ неизвестная константа, $\nu_1(x),\ r(x),\ K_2(x,\xi)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 2.2.1.

С другой стороны, интегрируя тождество

$$uL_2(u)-uL_2^*(\vartheta)=(-\vartheta_\eta u_\eta+a_2\vartheta u)_\xi-(-\vartheta u_{\xi\eta}-\vartheta_{\xi\eta}u-b_2\vartheta u)_\eta,$$

по области $D_2^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$, вычисляя полученные криволинейные интегралы по границам области D_2^* с учетом условий (17) и (18), получим представления решения задачи 2.2.1:

$$u(x,y)=\vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x)-\vartheta(x,y;x,0)\nu(x)+\Phi_1(x,y)+$$
$$+\int_0^x V_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi,\ (x,y)\in D_2, \tag{21}$$

где $\Phi_1(x,y),\ V_1(x,y)$ – заданные функции, $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – является решением следующей сопряженной задачи:

$$L_2^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\eta\eta}-(a_2\vartheta)-(b_2\vartheta)+c_2\vartheta=0,\ \ \vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\quad \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\eta=y}=1,\ 0\le\xi\le x,$$
$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\omega_2(x,y;\eta),\ \ y\le\eta\le0,$$

а $\omega_2(x,y;\eta)$ – определяется как решение задачи

$$\vartheta_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)+a_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\quad \vartheta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_\eta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1.$$

Исключая $\nu(x)$ из (20) и (21) получим

$$u(x,y)=\vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x)+\int_0^x V_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi_2(x,y)+r_1(x)\nu'(0), \tag{22}$$

где $V_2(x,y,\xi),\ \Phi_2(x,y),\ r_1(x)$ – заданные функции.

Используя второе граничное условие (17) из (22), имеем

$$\vartheta_\eta(x,\sigma(x);\ x,0)\tau(x)=-\int_0^x V_2(x,\sigma(x);\ \xi)\tau(\xi)d\xi+\psi_1(x)-r_1(x)\nu'(0), \tag{23}$$

где $\psi_1(x)=\psi(x)-\Phi_2(x,\sigma(x))$.

Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ \vartheta_\eta(x,\ \sigma(x);x,0)\ne0, \tag{24}$$

то уравнение (23) запишем в виде

$$\tau(x)=\psi_2(x)+r_2(x)\nu'(0)+\int_0^x V_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{25}$$

где $\psi_2(x),\ r_3(x),\ V_3(x,\xi)$ – заданные функции.

Обращая уравнение (25), получим

$$\tau(x)=\psi_3(x)+r_3(x)\nu'(0), \tag{26}$$

где $\psi_3(x)=\psi_2(x)+\int_0^x R_2(x,\xi)\psi_2(\xi)d\xi,\quad r_3(x)=r_2(x)+\int_0^x R_2(x,\xi)r_2(\xi)d\xi,\quad R_2(x,\xi)$ – резольвента ядра $V_3(x,\xi)$. Нетрудно заметить, что из второго условия (16) вытекает условие согласования

$$\tau(\ell)+\int_0^\ell Q(x,0)\tau(x)dx=\varphi_2(0) \tag{27}$$

Если

$$r=r_3(\ell)+\int_0^\ell Q(x,0)\,r_3(x)dx\ne0, \tag{28}$$

тогда из (26), с учетом (27), (28), найдем

$$\nu'(0)=\frac{1}{r}\left[\varphi_2(0)-\psi_2(\ell)-\int_0^\ell Q(x,0)\psi_2(x)dx\right] \tag{29}$$

Подставляя значение $\nu'(0)$ из (29) в (26), окончательно найдем неизвестную функцию $\tau(x)$. Тогда из формулы (20) найдем и $\nu(x)$.

Подставляя найденные значения $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в представление (21) получим решение задачи 2.2.1 в области D_2.

После определения $\tau(x)$ решение задачи 2.2.1, как и в разделе 2.1.1, сводится к разрешимости системы уравнений вида

$$H_{i1}(y)g_1(y)+H_{i2}(y)g_2(y)=\Phi_i(y)+\int_0^y\left[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta)+H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)d\eta\right]+$$

$$+\int_0^{\chi(y)}H_{i5}(y,\eta)u(\xi,y)d\xi+\int_0^{\chi(y)}d\xi\int_0^y H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,\quad i=1,2,$$

где $u(0,y)=g_1(y), u_x(0,y)=g_2(y)$ а $H_{ij}\,(i=1,2;\ j=\overline{1,6})$ – заданные функции, разрешимость которого устанавливается при выполнения условия

$$\forall y\in[0,h]: H_{11}(y)H_{22}(y)-H_{12}(y)H_{21}(y)\neq 0. \qquad (30)$$

Таким образом, доказывается

Теорема 2.2.1. Если выполняются условия (15), (24), (28), (30) тогда решение задачи 2.2.1 существует и единственно.

В **разделе 2.3** области $D=\{(x,y):0<x<+\infty,\ 0<y<h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxx}-u_{xy}+c(x,y)u=f(x,y), \qquad (31)$$

где $c(x,y),\ f(x,y)$ – заданные функции.

Уравнение характеристик уравнение (31) имеет одну трехкратную действительную характеристику $y=0$, поэтому это уравнение часто называется уравнением с кратными характеристиками [1]. Однако, из-за наличия члена u_{xy}, постановка задачи и свойства решения уравнения (1) аналогичны параболическим уравнениям.

Задача 2.2.1. Найти в области D непрерывное и ограниченное вместе с производной u_x решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),\ 0\le y\le h\quad , \qquad (32)$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty\ , \qquad (33)$$

$$\int_0^\alpha u(x,y)\,dx=E(y),\ 0\le y\le h,\ \alpha=const>0, \qquad (34)$$

где $\varphi(y),\ \tau(x),\ E(y)$ – заданные функции, причем

$$c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{D}),\ E(y),\ \varphi(y)\in C^1[0,h],\quad \tau(x)\in C^3[0,+\infty)\,, \qquad (35)$$

$$\int_0^\alpha \tau(x)\,dx=E(0),\quad \tau(0)=\varphi(0). \qquad (36)$$

Введем обозначение

$$u_x(x,y)=\vartheta(x,y)\,. \qquad (37)$$

Пусть

$$u_x(0,y)=\theta(y)\,, \qquad (38)$$

где $\theta(y)$ – пока неизвестная функция. Тогда задача 2.1.2 сводится к следующей задаче:

$$\begin{cases}\vartheta_{xx}-\vartheta_y=F(x,y),\\ \vartheta(0,y)=\theta(y),\ 0\le y\le h,\ \vartheta(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty,\end{cases} \qquad (39)$$

где $F(x,y)=f(x,y)-c(x,y)u$.

Используя функцию $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$, и из представления решения задачи (39), получим

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}\left[c(\xi,\eta)\int_0^\alpha G(s,y;\xi,\eta)ds\right]u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (40)$$

где $\Phi_0(x,y)$ – известная функция. Обращая соотношение (40) относительно $\theta(y)$, как интегральное уравнение Абеля, имеем

$$\theta(y)=\theta_0(y)+\int_0^y H_1(y,\eta)\theta(\eta)d\eta+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha H_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+$$
$$+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} H_3(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (41)$$

где $\theta_0(y)=\frac{1}{\pi}\int_\eta^y\frac{E_1'(t)}{\sqrt{y-t}}dt$, а $H_1(y,\eta)$, $H_2(y,\xi,\eta)$, $H_3(y,\xi,\eta)$ – заданные функции, выражающиеся через коэффициенты уравнения и функции $G(x,y;\xi,\eta)$, удовлетворяющие следующим оценкам: $|H_1(y,\eta)|\le\frac{C_1}{\sqrt{y-\eta}}$, $|H_2(y,\xi,\eta)|\le\frac{C_2}{\sqrt{y-\eta}}$, $|H_3(y,\xi,\eta)|\le\frac{C_3}{\sqrt{y-\eta}}$,

$0\le x\le\beta$, $\beta>>0$, $|H_3(y,\xi,\eta)|\le\frac{C_4}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}}$, $x>\beta$.

Обращая уравнение (41) относительно $\theta(y)$, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью, имеем

$$\theta(y)=\theta_1(y)+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha T_1(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}T_2(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (42)$$

где $T_1(y;\xi,\eta)$, $T_2(y;\xi,\eta)$, $\theta_1(y)$ – известные функции, а $R(y,t)$ – резольвента ядра $H_1(y,\eta)$. Подставляя значение $\theta(y)$ из (42) в (40), получим

$$u(x,y)=\Phi_1(x,y)+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}K_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (43)$$

где $K_1(x,y;\xi,\eta)$, $K_2(x,y;\xi,\eta)$, $\Phi_1(x,y)$ – заданные функции.

Уравнение (43) представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, существование единственного решения которого доказывается методом последовательных приближений.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.2.1. Если выполнены условия (35) и (36), то существует единственное непрерывное и ограниченное решение задачи 2.2.1.

В **разделе 3.1** в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,-h_1<y<h\}$ $(\ell,h,h_1>0)$ для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\quad (x,y)\in D_1=D\cap(y>0) \qquad (44)$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(y<0) \qquad (45)$$

где a_2, b_2, d_2, c_2, e_2 – заданные функции, удовлетворяющие условия гладкости

$$a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2), b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),$$
$$c_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2),\ d_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2)\ e_2\in C(\overline{D}_2), \qquad (46)$$

изучается **задача 3.1.1:** *найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^{1+1}(D)\cap$ $\cap[C^{3+0}(D_1)\cap C^{2+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую уравнения (44) и (45) в областях* D_1 *и* D_2 *соответственно, краевые условия*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u(\ell,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \qquad (47)$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\quad -h_1\le y\le 0, \tag{48}$$

и условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \tag{49}$$

где $\varphi_i(y)\ (i=1,3),\ \chi_j(y)\ (j=1,2)$ *– заданные гладкие функции, удовлетворяющие условия гладкости*

$$\varphi_1(y),\varphi_3(y)\in C^2[0,h],\ \varphi_2(y)\in C^1[0,h],\ \chi_i(y)\in C^1[-h_1,0]\ (i=1,2) \tag{50}$$

и условия согласования

$$\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\ \varphi_2(0)=\chi_2(0). \tag{51}$$

Как было отмечено в разделе 2.1 уравнение (44) называется уравнением с кратными характеристиками, имеющим действительную характеристику $y=0$. Уравнение (45) часто называется псевдопараболическим уравнением. Это уравнение имеет двукратную действительную характеристику $y=0$ и однократную характеристику $x=0$. Поэтому в задаче 3.1.1 линия $y=0$ является двукратной характеристикой для обоих уравнений.

Введем обозначения $u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell,$ где $\tau(x),\ \nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Записав уравнение (44) в виде

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)-\varphi_1'(y), \tag{52}$$

где $\omega(y)$ – неизвестная функция, и при $y\to 0$ имеем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau''(x)-\nu(x)=\omega(0)-\varphi_1'(0). \tag{53}$$

Для получения второго функционального соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу: *найти функцию* $u(x,y)\in C^1(\overline{D}_2)\cap$ $\cap C^{1+1}(D_2)\cap C^{2+1}(D_2)$ *удовлетворяющую уравнение (45), краевые условия (48) и начальное условие* $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell.$

Методом сопряженных задач, примененным в разделе 2.1, получим представление вспомогательной задачи в виде

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\vartheta_\xi(x,y;x,0)\tau(x)+\int_0^x A_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\ &+\int_0^y\left[b_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\vartheta(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)\right]d\eta, \end{aligned} \tag{54}$$

где $A_1(x,y;\xi),\ B_1(x,y;\eta),C_1(x,y;\eta),E_1(x,y;\eta)$ – заданные функции, а функция $\vartheta(x,y,\xi,\eta)$ – является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} &L^*_{2(\xi,\eta)}(\vartheta(x,y;\xi,\eta))\equiv-\vartheta_{\xi\xi\eta}+(a_2\vartheta)_{\xi\xi}+(b_2\vartheta)_{\xi\eta}-(c_2\vartheta)_\xi-(d_2\vartheta)_\eta+e_2\vartheta=0,\\ &\qquad(\xi,\eta)\in D_2^*=\{(x,y):0<\xi<x,\ y<\eta<0\},\\ &\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),\ y\le\eta\le 0;\\ &\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),\ 0\le\xi\le x, \end{aligned} \tag{55}$$

где $\theta_1(x,y;\xi)$ – однозначно определяется как решение следующей начальной задачи:

$$\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ 0<\xi<x,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1.$$

При выполнении условия (46) однозначная разрешимость задачи (55) устанавливается методом интегральных уравнений.

Вычислив производную по y от $u(x,y)$ с использованием формулы (54), затем устремляя y к нулю, имеем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)\tau(x)+\int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau(\xi)d\xi+g_1(x), \tag{56}$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\vartheta(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_1(0).$

Исключая $\nu(x)$ из (53) и (56), получим

$$\tau''(x)=\omega(0)+a_1(x)\tau(x)+\int_0^x \tilde{A}_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\tilde{g}_1(x), \tag{57}$$

где $\tilde{g}_1(x)=g_1(x)-\varphi_1'(0),\ a_1(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0),\quad \tilde{A}_1(x,\xi)=A_{1y}(x,0;\xi),$ а $\omega(0)$ – неизвестная константа.

Решение уравнения (61) при начальных условиях

$$\tau(0)=\chi_1(0),\ \tau'(0)=\chi_2(0)$$

представим в виде

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\omega(0)x^2+\int_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_2(x), \tag{58}$$

где $A_2(x,\xi),g_2(x)$ – заданные функции. Неизвестную константу $\omega(0)$ определим из условия согласования $\tau(\ell)=\varphi_2(0)$. Тогда из (58) получим следующее интегральное уравнение для $\tau(x)$:

$$\tau(x)=g_3(x)+\int_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi-\frac{x^2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{59}$$

где $g_3(x)=g_2(x)+\frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(o)-g_2(e)]x^2$. После обращения вольтерровской части уравнения (40) приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(x)=g(x)+\int_0^\ell H(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{60}$$

где $H(x,\xi),g(x)$ – известные функции, а $R(x,t)$ – резольвента ядра $A_2(x,t)$.

Согласно общей теории интегральных уравнений, если

$$\ell H<1, \tag{61}$$

где $H=\max\limits_{0\le x,\xi\le\ell}|H(x,\xi)|$, то уравнение (60) имеет единственное решение.

Решение задачи 3.1.1 в области D_1 устанавилвается методом функции Грина.

Таким образом доказана

Теорема 3.1.1. Если выполняются условия (46), (50), (51) и (61), то решение задачи 3.1.1 существует и единственно.

В **разделе 3.2** для уравнений вида

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}+\mathrm{a(x,\,y)}u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{62}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxx}-u_{yy}=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{63}$$

где $D_1=\{(x,y):0<x<\ell,0<y<h_1\}$, $D_2=\{(x,y):0<x<\ell,-h_2<y<0\}$, $\ell,\,h_1,\,h_2>0,$ а $D=D_1\cup D_2$, рассматривается краевая задача 3.2.1: *найти в области D функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap[C^{2+1}(D_1)\cup C^{3+2}(D_2)]$, *удовлетворяющую уравнение (62) в области* D_1, *а в области* D_2 *– уравнение (63), а также же краевые условия:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1, \tag{64}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u(\ell,y)=\chi_2(y), u_x(\ell,y)=\chi_3(y),\ -h_2\le y\le 0$$
$$u(x,-h_2)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell \tag{65}$$

где $\varphi_i(y)\ (i=1,2),\ \chi_j(y)\ (j=\overline{1,3})$ *– заданные функции, причем*

$$\varphi_i(y)\in C^1[0,h_1]\ (i=1,\ 2),\ \chi_j(y)\in C^1[-h_2,0]\ (j=\overline{1,3}), \tag{66}$$

$$\psi(0)=\chi_1(-h_2),\ \psi(\ell)=\chi_2(-h_2),\quad \varphi_i^{(k)}(0)=\chi_i^{(k)}(0)\ \ (i=1,2;\ k=0,1)\,. \tag{67}$$

Отметим, что из постановки задачи 3.2.1 вытекают следующие условия сопряжения на линии $y=0$: $u(x,+0)=u(x,-0)$, $u_y(x,+0)=u_y(x,-0),\ 0\le x\le\ell$.

Относительно коэффициентов уравнения (62) предполагается выполнения следующих условий:

$$a(x,y)\in C(D_1)\cap C^{1+0}(D_1),\ \mathrm{b}(x,y)\in C(D_1)\cap C^{0+1}(D_1),\ c(x,y)\in C(\overline{D_1})\,. \tag{68}$$

Введем обозначения

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell\,, \tag{69}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Тогда в силу (67) имеем следующие условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \ \tau'(\ell)=\chi_3(0),\ \ \tau(\ell)=\varphi_2(0)=\chi_2(0), \tag{70}$$

$$\nu(0)=\varphi_1'(0)=\chi_1'(0)\,,\nu(\ell)=\varphi_2'(0)=\chi_2'(0)\,. \tag{71}$$

Переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (62), имеем

$$\nu''(x)+a(x,0)\tau'(x)+b(x,0)\nu(x)+c(x,0)\tau(x)=0,\ 0<x<\ell\,. \tag{72}$$

Основным результатом раздела 3.2 является доказательство теоремы единственности решения задачи 3.2.1.

Теорема 3.2.1. Если выполняются условия (66), (67), (68), (70), (71) и

$$\forall x\in[0,\ell]:c(x,0)\ne 0\,, \tag{73}$$

$$\forall x\in[0,\ell]:a(x,0)\ne 0,\ \frac{1-b(x,0)}{c(x,0)}\le 0\,, \tag{74}$$

$$\left.\begin{aligned}&\forall x\in[0,\ell]:b(x,h_1)\le 0,\\&\forall (x,y)\in D_1: a(x,y)+b_y(x,y)-2c(x,y)\ge 0,\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

то задача 3.2.1 имеет единственное решение.

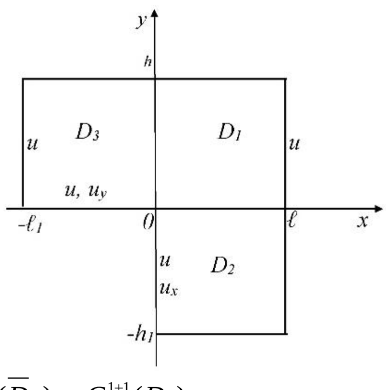
В **разделе 4.1** в области D, ограниченной отрезками прямых $x=0,\ y=-h_1$, $x=\ell, y=h, x=-\ell_1, y=0,\ (\ell,\ell_1,h,h_1>0)$ (рис. 3) рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1, \tag{76}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{77}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,\ (x,y)\in D_3, \tag{78}$$

где $a_i,d_i,b_j,c_j,e_j,(i=\overline{1,3},\ j=2,3)$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0),\ \ D_2=D\cap(x>0,y<0),\ \ D_3=D\cap(x<0,y>0)$.



Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned}&a_1,d_1\in C(\overline{D}_1),\ a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2),\ b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\ a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3),\\&b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3),\ c_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{1+0}(D_j), d_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{0+1}(D_j),\ e_j\in C(\overline{D}_j)\quad (j=2,3)\end{aligned} \tag{79}$$

Задача 4.1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_j)\cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_3)]\cap C^{3+0}$, $(i=1,2,3)$, удовлетворяющую уравнения (76), (77) и (78) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, краевые условия

$$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h,\quad u(0,y)=\chi_1(y),u_x(0,y)=\chi_2(y),-h_1\le y\le 0,$$
$$u(x,0)=\psi_1(x),u_y(x,0)=\psi_2(x),-\ell_1\le x\le 0 \tag{80}$$
и условия сопряжения
$$u(x,-0)=u(x,+0),u_y(x,-0)=u_y(x,+0),0\le x\le \ell,$$
$$u(-0,y)=u(+0,y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y),0\le y\le h, \tag{81}$$
где $\varphi_i(y),\chi_i(y),\psi_i(x)(i=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем
$$\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0]\,(i=1,2); \tag{82}$$
$$\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\psi_1(0)=\chi_1(0),\psi_2(0)=\chi_1'(0),\psi_1'(0)=\chi_2(0),\psi_2'(0)=\chi_2'(0). \tag{83}$$
Введем следующие обозначения:
$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),0\le y\le h,$$
$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),0\le y\le h, \tag{84}$$
где $\tau_1(x),\tau_2(y),\nu_1(x),\nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

Доказательство существования и единственности решений задач 4.1.1 устанавливается по следующему алгоритму:

1) Построим представление решения задачи 4.1.1 в области D_2 в виде
$$u(x,y)=\upsilon_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\upsilon(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \tag{85}$$
где $A_1(x,y;\xi),\ B_1(x,y;\eta),\ C_1(x,y;\eta),\ E_1(x,y;\eta)$ – заданные функции, а $\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ – является решением следующей задачи:
$$L_2^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{\xi\xi\eta}+(a_2\upsilon)_{\xi\xi}+(b_2\upsilon)_{\xi\eta}-(c_2\upsilon)_\xi-(d_2\upsilon)_\eta+e_2\upsilon=0,(\xi,\eta)\in D_2^*,$$
$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),y\le\eta\le 0, \tag{86}$$
$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),0\le\xi\le x,$$
где $\theta_1(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:
$$\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)=0,0<\xi<x,$$
$$\upsilon(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0,\upsilon_\xi(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=1. \tag{87}$$
Отметим, что задача (86), (87) решается эквивалентным сведением к интегральному уравнению Вольтерра вида
$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\int_x^\xi B(\xi,\eta,s)\upsilon(x,y;s,\eta)ds+\int_y^\eta a_2(\xi,t)\upsilon(x,y;\xi,t)dt+$$
$$+\int_x^\xi ds\int_y^\eta C(\xi,s,t)\upsilon(x,y;s,t)dt,$$
где $B(\xi,\eta,s)=b_2(s,\eta)-(\xi-s)d_2(s,\eta),C(\xi,s,t)=-c_2(s,t)+(\xi-s)e_2(s,t)$, которое допускает единственное решение из класса $C^{2+1}(D_2^*)$.

2) Из (85) найдем соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, полученное из области D_2:
$$\nu_1(x)=\upsilon_{\xi y}(x,0;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g_1(x), \tag{88}$$
где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\,\chi_1'(0)-\upsilon(x,0;0,0)\,\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\,\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\,\chi_2(0).$

3) Найдем соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1. Для этого, интегрируя уравнение (76) в пределах от 0 до x, имеем

$$u_{xx} - u_y = \omega(y) - a_1(x,y)u + \int_0^x \widetilde{d}_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi + T_0(x,y), \tag{89}$$

$$\widetilde{d}_1(\xi,y) = a_{1\xi}(\xi,y) - d_1(\xi,y), T_0(x,y) = a_1(0,y)\tau_2(y) - \tau_2'(y).$$

Отсюда, переходя к пределу при $y \to +0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = \omega(0) - a_1(x,0)\tau_1(x) + \int_0^x \widetilde{d}_1(\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi + T_0(x,0). \tag{90}$$

4) Исключая $\nu_1(x)$ из (88) и (90), получим интегральное уравнение

$$\tau_1(x) = g(x) + \int_0^\ell H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{91}$$

где $H_1(x,\xi)$, $g(x)$ – заданные функции.

Если

$$\ell H < 1, \tag{92}$$

то уравнение (91) имеет единственное решение, где $H = \max\limits_{0 \le x,\, \xi \le \ell} |H_1(x,\xi)|$.

5) Построим решения задачи 4.1.1 в области D_3, представимое в виде

$$u(x,y) = w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y) + \int_0^y A_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta + \int_0^x [B_2(x,y;\xi)\psi_1'(\xi) - \\ - w(x,y;\xi,0)\psi_2'(\xi) + C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi) + E_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi, \tag{93}$$

где $A_2(x,y;\xi)$, $B_2(x,y;\xi)$, $C_3(x,y;\xi)$, $E_2(x,y;\xi)$ – известные функции, выражающиеся через коэффициенты уравнения (78) и функции $w(x,y;\xi,\eta)$, которые определяются как решение задачи:

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_\xi - (d_3 w)_\eta + e_3 w = 0,\ (\xi,\eta) \in D_3^* = \{(\xi,\eta) : x < \xi < 0,\ 0 < \eta < y\},$$
$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = 0, w_\eta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = \exp\left(\int_x^\xi b_3(s,y)ds\right),\ x \le \xi \le 0,\quad w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = \theta_2(x,y;\eta), \tag{94}$$

где $\theta_2(x,y;\eta)$ – решение следующей начальной задачи:

$$w_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - [a_3(x,\eta)w]_\eta + c_3(x,\eta)w = 0, 0 < \eta < y,$$
$$w(x,y;x,\eta)|_{\eta=0} = 0, w_\eta(x,y;x,\eta)|_{\eta=0} = 1. \tag{95}$$

При выполнении условий (79) решение задачи (94), (95) существует и единственно.

6) Используя первое условие (79) и учитывая, что $w_\eta(-\ell_1,y;0,y) > 0$, из (4.1.32) получим

$$\tau_2(y) = \gamma(y) + \int_0^y H_2(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta, \tag{96}$$

где $H_2(y,\eta)$, $\gamma(x)$ – известные функции.

7) Определив $\tau_2(y)$ из (96), однозначно находим решение задачи 4.1.1 в области D_3 по формуле (93). Тогда и можно определить $\nu_2(y) = u_x(0,y)$.

8) Найдем решение задачи 4.1.1 в области D_1. Для этого решение уравнения (90), удовлетворяющее условиям

$$u_x(0,y) = \nu_2(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h,\ u(x,0) = \tau_1(x), 0 \le x \le \ell,$$

представим в виде

$$u(x,y)=-\int_0^y M(x,y,\eta)\omega(\eta)d\eta+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+T_1(x,y), \qquad (97)$$

где $M(x,y,\eta),\ K_1(x,y;\xi,\eta),\ T_1(x,y)$ – известные функции.

9) Используя условие $u(0,y)=\tau_2(y)$ из (97), получим интегральное уравнение для $\omega(y)$:

$$\omega(y)+\int_0^y M_y(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta=r_0'(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_{1y}(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

обращение которого имеет вид

$$\omega(y)=r(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta. \qquad (98)$$

10) Исключая $\omega(y)$ из (98) и (97) относительно $u(x,y)$, получим интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$u(x,y)=T(x,y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \qquad (99)$$

где $K(x,y;\xi,\eta),\ T(x,y)$ – известные функции, которые допускают единственное решение.

Таким образом, доказана

Теорема 4.1.1. Если выполняются условия (79), (82), (83) и (92), то задача 4.1.1 имеет единственное решение.

В **разделе 4.2** в области D, ограниченной отрезками прямых $x=0,\ y=-h_1,\ x=\ell,\ y=h,\ x=-\ell_1,\ y=0\ (h,h_1,\ell,\ell_1>0)$, рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1, \qquad (100)$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy}+a_2u_{xy}+b_2u_{yy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,(x,y)\in D_2, \qquad (101)$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,(x,y)\in D_3, \qquad (102)$$

где $a_i,d_i,b_j,c_j,e_j\,(i=\overline{1,3},\ j=2,3)$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0)$, $D_2=D\cap(x>0,y<0)$, $D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

В области D уравнения (100) – (102) можно рассматривать как уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами. Поэтому на линиях $y=0$ и $x=0$ потребуем выполнения условия сопряжений:

$$u(x,-0)=u(x,+0),u_y(x,-0)=u_y(x,+0),0\le x\le\ell, \qquad (103)$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h. \qquad (104)$$

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{gathered}a_1\in C^{1+0}(\overline{D}_1),d_1\in C(\overline{D}_1),a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\ b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+2}(D_2),c_2\in C(D_2)\cap C^{1+0}(D_2),\\ d_2\in C(D_2)\cap C^{0+1}\cap(D_2),e_2\in C(\overline{D}_2),\\ a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3),\ b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3),c_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+0}(D_3),\ d_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+1}(D_3),e_3\in C(\overline{D}_3).\end{gathered} \qquad (105)$$

Задача 4.2.1. В области D найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap \cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_i)]\cap C^{3+0}(D_1)(i=2,3)$, удовлетворяющую уравнения (100), (101) и (102) в областях D_1,D_2 и D_3 соответственно, условия сопряжений (103), (104) и краевые условия

$$\begin{gathered}u(\ell,y)=\varphi_1(y),u(-\ell_1,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h,\ u(x,0)=\psi_1(x),u_y(x,0)=\psi_2(x),-\ell_1\le x\le 0,\\ u(0,y)=\chi(y),-h_1\le y\le 0,\ u(x,-h_1)=\psi_3(x),0\le x\le\ell,\end{gathered} \qquad (106)$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2), \psi_j(x)(j=\overline{1,3}), \chi(y)$ – заданные функции, причем

$$\varphi_1(y)\in C^1[0,h], \varphi_2(y)\in C^2[0,h], \psi_i(x)\in C^1[-\ell,0]\,(i=1,2),$$
$$\psi_3(x)\in C^1[0,\ell], \chi(y)\in C^2[-h_1,0], \qquad (107)$$

$$\psi_1(0)=\chi(0), \varphi_2(0)=\psi_1(-\ell_1), \psi_2(0)=\chi'(0), \chi(-h_1)=\psi_3(0). \qquad (108)$$

Для решения задачи 4.2.1 введем следующие обозначения

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x), u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x), 0\le x\le \ell, \qquad (109)$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y), 0\le y\le h, \qquad (110)$$

где $\tau_i, \nu_i (i=\overline{1,2})$ – пока неизвестные функции.

Алгоритм решения задачи 4.2.1 такая же, как и в задаче 4.1.1.

1) Методом получения соотношений из областей D_1 и D_2 между функциями $\tau_2(x)$ и $\nu_1(x)$, при выполнении условия

$$\forall x\in[0,\ell] \quad \forall y\in[-h_1,0]: a_2(x,y)+yc_2(x,y)\ge 0, \qquad (111)$$

придем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на линии $y=0$

$$\tau_1(x)=\Psi(x)+\int_0^\ell K(x,t)\tau_1(t)dt, \qquad (112)$$

которая имеет единственное решение, если

$$\ell K<1, \qquad (113)$$

где $K=\max\limits_{0\le x,\,t\le\ell}|K(x,t)|$, а функции $K(x,t)$ и $\Psi(x)$ выражаются через данные задачи 4.2.1.

2) Аналогичным образом, при выполнении условия

$$\forall (x,y)\in \overline{D_3}: b_3(x,y)\ge 0, \qquad (114)$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода $x=0$

$$\tau_2(y)=\Phi(y)+\int_0^y K(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta,$$

допускающее единственное решение, где $K(y,\eta), \Phi(y)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 4.2.1.

3) Определив из (112), (114) функции $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$ соответственно, для $u(x,y)$ будем иметь интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$u(x,y)=T(x,y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

допускающее единственное решение. Здесь $T(x,y)$, $K(x,y;\xi,\eta)$ – известные функции, выражающиеся через данные задачи 4.2.1. Тем самым даказывается

Теорема 4.2.1. Если выполняются условия (105), (107), (108), (111), (113) и (114), то решение задачи 4.2.1 существует и единственно.

В **разделе 4.3** в области D, ограниченной отрезками прямых $x=0$, $y=-h_1$, $x=\ell$, $y=h$, $x=-\ell_1$, $y=0$ $(\ell,\ell_1,\mathrm{h},\mathrm{h}_1>0)$ рассматривается краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1, \qquad (115)$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+b_1(x,y)u_{xy}+d(x,y)u_y=0,\ (x,y)\in D_2, \qquad (116)$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+b_2(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_x=0,\ (x,y)\in D_3, \qquad (117)$$

где $b_i(i=1,2)$, d, c – заданные функции, а $\mathrm{D}_1=\mathrm{D}\cap(\mathrm{x}>0,\mathrm{y}>0)$, $\mathrm{D}_2=\mathrm{D}\cap(\mathrm{x}>0,\mathrm{y}<0)$, $\mathrm{D}_3=\mathrm{D}\cap(\mathrm{x}<0,\mathrm{y}>0)$.

Задача 4.3.1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap\left[C^{1+1}(D_1)\cup C^{2+1}(D_2)\cup C^{1+2}(D_3)\right]$, $u_{xxx}\in C(D_1)$, *удовлетворяющую уравнения (115), (116) и (117) в областях* D_1, D_2 *и* D_3 *соответственно, краевые условия*

$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1,\ \ u(0,y)=\chi_1(y),$

$u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0,\ u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0$

и условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell\ ,$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h$$

где $\varphi_i(y),\ \chi_i(y),\ \psi_i(x)(i=1,2)$ *– заданные гладкие функции, причем*

$$\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\ \chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\ \psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0](i=1,2),$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\ \psi_1(0)=\chi_1(0),\ \psi_2(0)=\chi_1'(0),\ \psi_1'(0)=\chi_2(0),\ \psi_2'(0)=\chi_2'(0).$$

Доказательство теоремы существования и единственности решения задача 4.3.1 устанавливается методом, изложенным в разделе 4.1.1.

Выводы

В диссертации сформулированы и исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с одной и двумя линиями изменения типа.

Отличительной чертой нелокальных задач является то что нелокальные условия задачи содержат интегральные члены, характеризующие определенные усредненные величины.

При решении задач использованы методы понижения порядка уравнений, метод сопряженных задач, метод редукции к интегральным уравнениям, принцип сжимающих отображений и метод последовательных приближений.

Найдены достаточные условия существования и единственности решений локальных и нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболических уравнений третьего порядка.

Получены представления решения задачи во всех рассматриваемых областях. При получении результатов по нелокальным задачам из-за наличия интегральных условий традиционные подходы видоизменены.

Результаты диссертации, связанные с исследованием задачи склеиваний для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка, могут быть использованы для развития теории краевых задач уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высокого порядков, а также при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных и кусочно-однородных средах с различными физико-химическими характеристиками.

Список опубликованных работ

1. Аркабаев, Н.К. Нелокальная задача с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н.К. Аркабаев // Вестник КРСУ. Том 10, №9. – 2010. – С. 150-153.
2. Аркабаев, Н.К. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя линиями изменения типа [Текст] / А. Сопуев, Н.К. Аркабаев // Вестник КНУ. Спец. вып. – 2011. – С. 136-138.
3. Аркабаев, Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н.К. Аркабаев // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2013. – №1. С. – 16-23.
4. Аркабаев, Н.К. Задача сопряжения для уравнений третьего порядка с интегральными условиями [Текст] / Н.К. Аркабаев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск. 47 – Бишкек: Илим, 2014 – С. 142-146.
5. Аркабаев, Н.К. Краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями [Текст] / Н.К. Аркабаев // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец. вып. – 2014, №3, 5 изд. – С. 22-27.
6. Аркабаев, Н.К. Краевая задача для смешанно-псевдопараболических уравнений с двумя линиями изменения типа [Текст] / Н.К. Аркабаев // Приволжский научный вестник (РФ), 2016, №5 (57) – С. 15-21.
7. Аркабаев, Н.К. Единственность решения задачи сопряжения для уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / Н.К. Аркабаев // Естественные и математические науки в современном мире СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международный научно-практической конференции» (РФ), 2016, №5 (40) – С. 74-79.
8. Аркабаев, Н.К. О краевой задаче для псевдопараболических уравнений с характеристикой линией склеивания / Н.К. Аркабаев // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. Спец. вып. – 2016, №1 (32). – С. 73-77.
9. Arkabaev, N.K. Conjugation problem for the third-order equation with integral conditions [Текст] / N.K. Arkabaev // Abstract book. Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bozteri, Kyrgyzctan, 5-7 June, 2015. – P. – 56.
10. Arkabaev, N.K. Problems of interface for linear pseudo-parabolic equations of the third order [Текст] / A. Sopuev, N.K. Arkabaev // Book of Abstracts. The 4^{th} congress of the TWMS. Baku, Azerbaijan, 1-3 Jule, 2011.- P. 276.
11. Arkabaev, N.K. Boundary value problems for third order equation with integral boundary conditions. [Текст] / A. Sopuev, N.K. Arkabaev // Abstract book. V Congress of the Turkic world mathematicians, 5-7 June, Issyk-Kul Aurora, 2014. – P.-136.

Аркабаев Нуркасым Кылычбековичтин «Үчүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн локалдык жана локалдык эмес чектик маселелер» деген темадагы 01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Ачкыч сөздөр: локалдык маселелер, локалдык эмес маселелер, жалгаштыруу маселелери, параболалык теңдемелер, гиперболалык теңдемелер, интегралдык теңдемелер, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөө объекти: Тибин өзгөртүүчү бир жана эки сызыкка ээ болгон үчүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн локалдык жана локалдык эмес маселелер жана жалгаштыруу маселелери.

Изилдөө предмети: үчүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн локалдык жана локалдык эмес маселелердин жана жалгаштыруу маселесинин корректтүүлүгү.

Изилдөөнүн максаты: үчүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн локалдык жана локалдык эмес маселелердин, ошондой эле жалгаштыруу маселесинин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы теоремаларын далилдөө.

Изилдөө усулдары: изилдөө учурунда теңдеменин тартибин төмөндөтүү методу, түйүндөш маселелер методу, интегралдык теңдемелерге редукциялоо методу, кысып чагылдыруу принциби, удаалаш жакындаштыруу методу пайдаланылды.

Изилдөөнүн илимий жаңычылдыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

- Үчүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн интегралдык мүчөлөрдү кармап турган локалдык эмес шарты бар чектик маселелердин чечимдеринин жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды;
- Эселүү эмес мүнөздөмөлөргө ээ болгон үчүнчү тартиптеги чектик маселелердин чечимдеринин көрүнүшү алынды;
- Типти өзгөртүүчү бир мүнөздөмөлүк сызыкка ээ болгон үчүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн локалдык жана локалдык эмес жалгаштыруу маселелеринин чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы теоремалары далилденди;
- Типти өзгөртүүчү эки мүнөздөмөлүк сызыкка ээ болгон үчүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелеринин чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы теоремалары далилденди.

Алынган теориялык жыйынтыктар жекече туундулуу үчүнчү тартиптеги аралаш типтеги теңдемелердин теориясында жаңылык болуп эсептелет.

Изилдөөнүн практикалык мааниси. Чечимди тургузуунун иштелип чыгылган алгоритмин жалгаштыруу маселелери менен байланышкан практикалык маселелерди чечүү учурундагы колдонулуштарда пайдаланууга болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Аркабаева Нуркасыма Кылычбековича на тему: «Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: локальные задачи, нелокальные задачи, задачи склеивания, параболическое уравнение, гиперболическое уравнение, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: локальные и нелокальные задачи, и задачи склеивания для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с одной и двумя линиями изменения типа.

Предмет исследования: корректность локальных и нелокальных задач, задачи склеиваний для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка.

Цель исследования: доказательство теоремы существования и единственности локальных и нелокальных задач, а также задачи склеиваний для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка.

Методы исследования: при исследовании были использованы метод понижения порядка уравнения, метод сопряженных задач, метод редукции к интегральным уравнениям, принцип сжатых отображений, метод последовательных приближений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

- Найдены достаточные условия существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;
- Получены представления решений краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками;
- Доказаны теоремы существования и единственности решений локальных и нелокальных задач склеивания для параболического и гиперболического уравнений типа третьего порядка с одной характеристической линией изменения типа;
- Доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя характеристическими линиями изменения типа.

Полученные теоретические результаты являются новыми в теории уравнений смешанного типа для уравнений в частных производных третьего порядка.

Практическое значение исследования. Разработанный алгоритм построения решения может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с задачами сопряжения.

SUMMARY

Dissertation: «Local and nonlocal boundary value problem for equations of mixed parabola-hyperbolic equations third order» of Arkabaev Nurkasym Kylychbekovich is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – «Differential equations, dynamical systems and optimal control»

Keywords: local tasks tasks, tasks, nonlocal bonding, parabolic, hyperbolic equation equation, integral equation, the uniqueness of the solution, the existence of a solution.

The object of the research: local and nonlocal tasks and objectives for gluing of parabolic and hyperbolic equations of third order with one and two lines of type changes.

Subject of research: the correctness of local and non-local tasks and objectives of providing for parabolic and hyperbolic equations of third order.

The purpose of the study: to proof of the existence of local and non-local tasks, as well as providing for psevdoparabolicheskih and third order hyperbolic equations.

Research methods: in the study were used the method of lowering the order of the equation, the method of conjugate reduction method for tasks to integral equations, principle of compressed mapping method of successive approximations.

Scientific novelty and theoretical significance of research:

- Sufficient conditions of existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic and hyperbolic equations of third order with nonlocal terms containing integral members ware found;
- Received the submission of solutions to boundary value problems for third order hyperbolic equations with nekratnymi characteristics;
- Existence and Uniqueness theorems of solutions for local and non-local tasks bonding for parabolic and hyperbolic equations of the third order with one characteristic line type changes are proved;
- Theorems of existence and uniqueness of solutions of boundary problems for mixed parabolo-third order hyperbolic equations with two characteristic lines change type are proved.

Received theoretical the results of the are new in the theory of equations of mixed type for partial differential equations the third order.

Practical value of the study. The algorithm can be used to build the solution in applications when solving practical tasks associated with taskspairing.

Аркабаев Нуркасым Кылычбекович

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать:	15.09.2017
Формат: 60x84 1/16.	Бумага офсетная
Объем: 1,5 п.ф.	Тираж: 120 шт.

Редакционно-издательский отдел «Билим» ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.