МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.956.6

АРКАБАЕВ НУРКАСЫМ КЫЛЫЧБЕКОВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических
наук, профессор **Сопуев А.**

Ош – 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Сокращенные обозначения

- R – *множество действительных чисел;*
- $\forall$ – *"для всех ... ";*
- $\cap$ – *операция пересечения множеств;*
- $\subset$ – *знак принадлежности включения;*
- $\in$ – *знак принадлежности;*
- $\setminus$ – *теоретико-множественное вычитание;*
- $=$ – *знак равенства;*
- $\neq$ – *знак неравенства;*
- $\equiv$ – *знак тождественного равенства;*
- D – *открытая ограниченная односвязная область на плоскости;*
- D_1, D_2 – *подобласти области* D*;*
- $\overline{D}$ – *замкнутая ограниченная односвязная область на плоскости;*
- $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ – *замкнутые подобласти области* $\overline{D}$*;*
- L – *дифференциальный оператор;*
- $k=\overline{1,n}$ – *переменная* k *принимает значения от 1 до* n;
- $C^{(n)}(D)$ – *класс функций, определенных и непрерывно дифференцируемых до порядка* n *включительно в области* D;
- *Пусть* C^{n+m} *означает класс функций, имеющих непрерывные производные* $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r=0,1,...,n; s=0,1,...,m)$;
- $Q=\{(x,\xi): 0<x<\ell, 0<\xi<\ell\}$;
- $\|K(x,\xi)\|_{C(\overline{Q})}=\max\limits_{(x,\xi)\in\overline{Q}}|K(x,\xi)|$.

2. Основные определения

2.1. Определение локальных и нелокальных задач

В работе мы будем использовать определения и терминологию, приведенные в работе А. М. Нахушева [41].

Пусть D – двухмерная область Евклидова пространства R^2 точек $z=(x,y)$ с границей ∂D; ω – принадлежащее замыканию $\overline{D}$ не пустое множество, а $\{j\}$ – индексное множество точек числовой прямой R^1.

В области D рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = f(z). \tag{1}$$

Определение 1. Задачу отыскания решения $u=u(z)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющего множество ω условиям вида

$$B_j u(z)=\psi_j, \quad j\in\{j\}, \tag{2}$$

называется **локальной** задачей для уравнения (1), если образ ψ_j отображения B_j и $z\to\psi_j(z)$в любой точке $z\in\omega$однозначно определяется значением функции и или ее производных до определенных порядков в этой же точке z.

Участвующие в определении 1 условия (2) и операторы называются локальными, а множество ω – носителем локальных условий.

Определение 2. Задачи для уравнения (1), соответствующие условия и операторы, которые не являются локальными, называется **нелокальными**.

2.2. О классификации уравнений в частных производных третьего порядка

При исследовании уравнений в частных производных третьего порядка мы будем использовать результаты работы Т.Д. Джураева и Я. Попёлека [22] относительно классификации уравнений третьего порядка общего вида

$$Au_{xxx}+Bu_{xxy}+Cu_{xyy}+Du_{yyy}=F(x,y,u,u_x,u_{xx},u_{xy},u_{yy}), \tag{3}$$

где A,B,C и D являются функциями x и y.

Уравнение

$$-A\,(dy)^3 + B\,(dy)^2\,dx - Cdx\,(dx)^2 + D\,(dx)^3 = 0 \qquad (4)$$

называется характеристическим уравнением для уравнения (3).

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$-A\lambda^3 - B\lambda^2 + C\lambda - D = 0 \qquad (\lambda = dy/dx),$$

соответствующее уравнению (2). Пусть

$$\Delta = \frac{1}{3}\left[4\left(B^2 - 3AC\right)\left(C^2 - 3BD\right) - \left(BC - 9AD\right)^2\right].$$

Если уравнение (3) имеет один трехкратный действительный корень, то уравнение (3) назовем параболическим. В этом случае уравнение (3) может быть приведено к следующему каноническому виду:

$$u_{xxx} = \Phi\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right).$$

Типичным представителем линейного уравнения параболического типа третьего порядка с постоянными коэффициентами, приведенного к каноническому виду, может быть, например, уравнение

$$u_{xxx} - u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f(x, y).$$

Если уравнение (3) имеет один двукратный и один однократный действительные корни, то уравнение (3) назовем гиперболическим.

В этом случае уравнение (3) может быть приведено к следующему каноническому виду:

$$u_{xxy} = \Phi\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right).$$

В качестве примера приведенного к каноническому виду гиперболического уравнения третьего порядка можем привести уравнение

$$u_{xxy} + u_{xx} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f(x, y).$$

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория локальных и нелокальных задач для уравнений в частных производных второго, третьего и четвертого порядков все более активно используется при математическом моделировании в задачах влагопереноса [41], процессов теплообмена в смешанной среде [38], распространение электрических колебаний в составных линиях [61], совместно-раздельных течений вязко-упругой и вязкой жидкостей в трубе [3] и других процессов [13, 16, 18, 59, 57], происходящих в неоднородных средах.

В приложениях встречаются случаи, когда вместо локальных условий берутся нелокальные условия, содержащие интегральные члены [50]. Например, интегральные условия используются в тех случаях, когда область физических характеристик рассматриваемой среды недоступна для непосредственного измерения, но возможно получение дополнительной информации о характере процесса в виде какого-либо усреднения.

Краевые задачи с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены, а также задачи склеивания с двумя линиями изменения типа для уравнений третьего порядка мало исследованы.

В настоящей работе сформулированы и изучены локальные, нелокальные краевые задачи и задачи склеивания для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с интегральными условиями как с одной, так и с двумя линиями изменения типа, что и обусловливает актуальность работы.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнена в рамках проекта Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета МОиН КР по теме: «Изучение математических моделей гидроаэродинамики, химической кинетики, тепломассообмена и других явлений природы», № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012.

<u>Цель и задачи исследования</u>.

1. Доказательство существования и единственности решений локальных краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка;

2. Доказательство существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;

3. Доказательство однозначной разрешимости локальных и нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с одной линией изменения типа;

4. Доказательство однозначной разрешимости краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

<u>Методика исследования</u>. При построении представления решений уравнений использованы методы понижения порядка уравнения, сопряженные задачи и интегральные уравнения. Для доказательства существования и единственности решений применен метод редукции краевых задач к решению интегральных уравнений типа Фредгольма или Вольтерра, а также принцип сжатых отображений и метод последовательных приближений.

<u>Научная новизна полученных результатов</u>. Основные научные результаты:

1. Найдены достаточные условия существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;
2. Получены представления решений краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками;
3. Доказаны теоремы существования и единственности решений локальных и нелокальных задач склеивания для параболического и гиперболического

уравнений типа третьего порядка с одной характеристической линией изменения типа;

4. Установлены теоремы существования и единственности решений краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя характеристическими линиями изменения типа.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации, связанные с исследованием локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка, могут быть использованы для развития теории краевых задач уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высокого порядков, а также при моделировании явлений и процессов теплообмена в смешанной среде, совместно-раздельных течений вязко-упругой и вязкой жидкостей в трубе, и других процессов, происходящих в двуслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Установление достаточных условий существования и единственности решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с нелокальными условиями, содержащие интегральные члены;
- Получение представления решений краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками;
- Доказательство теоремы существования и единственности решений локальных и нелокальных задач склеивания для параболического и гиперболического уравнений типа третьего порядка с одной характеристической линией изменения типа;
- Доказательство теоремы существования и единственности решений краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя характеристическими линиями изменения типа.

Апробация работы. Итоги исследования регулярно докладывались и обсуждались на конференциях, заседаниях кафедры, результаты докладывались: в работе школы-семинара «Фундаментальная и прикладная математика» (г. Бишкек, 2010 г.); на III Международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Иссык-Куль, 2010 г.); на Международном Конгрессе «The Turkic World Mathematical Society (TWMS) will hold its 4th Congress» (г. Баку, Азербайджан, 2011); на IV Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (г. Бишкек, 2011 г.); на Международном Конгрессе «V Congress of the Turkic World Mathematicians» (Иссык-Куль, 2014 г.); на Международном форуме, проведенном в Иссык-Куле (с. Бостери, 2015 г.).

Некоторые положения обсуждались также на семинаре «Уравнения в частных производных» (г. Ош, ОшГУ, 2010-2016 гг.), руководитель – д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.; на межвузовском научном семинаре «Актуальные вопросы теории дифференциальных уравнений» ОшГУ, руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алымкулов К. (г. Ош, 2010-2016 гг.); на семинаре по дифференциальным уравнениям, руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алыбаев К.С. (г. Жалал-Абад, ЖАГУ, 2010-2016 гг.).

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 8 научных статей: [4] - [8], [54] - [56] и тезисы трех научных докладов [70] – [72].

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах [54] - [56], [71, 72] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем существования и единственности решений, получение основных результатов – автору.

Структура, объем и краткое содержание диссертации: Диссертация состоит из введения, четырех глав, состоящих из 10 разделов, списка использованных источников из 72 наименований и заключения. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Объем текста – 102 страницы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ

1.1. Обзор литературы

Краевые задачи с интегральными условиями для уравнения теплопроводности впервые изучена в работе Дж.Р. Канона (J.R. Cannon) [66]. Различные обобщения с интегральными условиями для общего параболического уравнения рассмотрены в работах Л.И. Камынина [31, 32]. Среди последующих работ отметим работы Н.И. Ионкина [29], В.А. Нахушевой [42], А.И. Кожанова [33], Л.С. Пулькиной [44, 45], О.Ю. Данилкиной [19], С.В. Жесткова [27], которых изучались задачи с интегральными условиями для уравнений параболического и гиперболического типов второго порядка.

Краевые задачи для псевдопараболических уравнения третьего порядка с применением функции Римана изучены в работах Д. Колтона (D. Colton) [67], М.Х. Шханукова [65], В.И. Жегалова, Е.А. Уткиной, А.Н. Миронова [25, 26, 39, 60], В.А. Водаховой [17], Н.С. Попова [43], Н.Н. Евдокимовой [24], Н.В. Бейлиной [11, 12], К.Г. Кожобекова [34] и других [9, 69].

Одним из новых разделов в теории уравнений смешанного типа является направление, в котором краевые задачи для уравнений смешанного типа изучаются с двумя линиями изменения типа. По данной тематике занимались М.М. Зайнулабидов [28], М.М. Смирнов [52], К.Б. Сабитов [46], М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов [48, 49], Б. Исломов [30], А. Сопуев [53], Г.Г. Шарафутдинова [64] и другие авторы.

Впервые Ф. Трикоми [58] сформулирована и исследована краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка с одной линией изменения типа, которая в настоящее время называется задачей Трикоми. Затем С. Геллерстедт [68] обобщает результаты Трикоми для случая, когда данные задаются на характеристиках. После этих работ теория уравнений смешанного типа интенсивно развивалась в работах А.В. Бицадзе [14, 15], К.И. Бабенко [10], Ф.И. Франкля [62], Т.Д. Джураева [20, 21, 23], В.И. Жегалова [25, 26], А.М. Нахушева [41], М.С. Салахитдинова [47], М.М. Смирнова [51] и других [35, 37].

Классификация и канонический вид уравнений в частных производных третьего порядка, линейных относительно старших производных, предложенные в работе Т.Д. Джураева и Я. Попёлека [22], позволили более детально исследовать краевые задачи, задачи сопряжения и свойства решений уравнений частных производных третьего порядка.

В работах М.Х. Шханукова [65] для изучения краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -q(x,t)$$

построена и использована функция Римана.

В.И. Жегаловым и Е.А. Уткиной [25] функция Римана для уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными вида

$$U_{xxy} + aU_{xx} + bU_{xy} + cU_x + dU_y + eU = f$$

построена другим подходом, отличающимся от подхода М.Х. Шханукова и позволяющим при этом построить явный вид функции Римана в ряде частных случаев уравнения.

В работах К.Г. Кожобекова [34] рассмотрены краевые задачи для смешанных псевдопараболо-гиперболических уравнений третьего порядка с одной линией изменения типа следующего вида:

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + b_1(x,y)u_x + d_1(x,y)\,u, & y > 0, \\ u_{xxy} + b_2(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d_2(x,y)u, & y < 0. \end{cases}$$

Однако краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа мало исследованы.

Объектом исследования настоящей диссертационной работы является постановка и исследование новых локальных, нелокальных краевых задач и задачи склеивания для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка с одной и двумя линиями изменения типа.

1.2. Обзор результатов, примыкающих к теме диссертации

Во второй главе рассмотрены нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения в частных производных третьего порядка, когда уравнение характеристик имеет как кратные, так и некратные действительные характеристики.

В **разделе 2.1** в области $D=\{(x,y):0<x<\chi(y),\ 0<y<h\}$ (рис. 1) для уравнения

$$u_{xxy}-y^{p}u_{y}+a(x,y)u_{x}+b(x,y)u_{y}+c(x,y)u=0, \qquad (1)$$

где $a(x,y), b(x,y), c(x,y), \chi(y)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\chi(h)=x_0>0, \chi(0)=\ell>0, p>0,\ \forall y\in[0,h]: x_0\le\chi(y)\le\ell, \chi'(y)\le 0. \qquad (2)$$

изучается з**адача 2.1.1:** найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющую уравнение (1) в области D и следующим условиям:

$$u(0,y)+\int_0^{\chi(y)}P(x,y)u(x,y)\,dx=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \qquad (3)$$

$$u(\chi(y),y)+\int_0^{\chi(y)}Q(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (4)$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (5)$$

где $P(x,y), Q(x,y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$ – заданные функции, причем

$$\tau(0)+\int_0^{\ell}P(x,0)\tau(x)\,dx=\varphi_1(0),\ 0\le x\le\ell. \qquad (6)$$

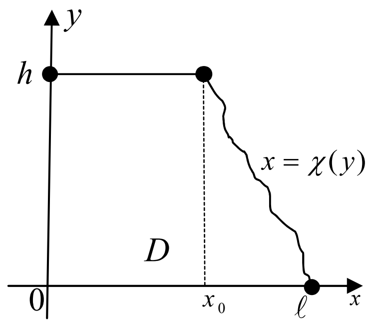

Рис. 1.

При $P(x,y)\equiv Q(x,y)\equiv 0$ задача 2.1.1 сводится к первой краевой задаче для уравнения (1). Отметим, что из условия (2) следует, что кривая $x=\chi(y)$ является монотонно не возрастающей функцией по y. Интегральные члены в краевых условиях означают наличие усредненных измеряемых величин.

Для решения задачи 2.1.1 сначала рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения

$$L[u] \equiv u_{xxy} - y^p u_y = f(x,y),(x,y) \in D \tag{7}$$

с условиями

$$\begin{aligned} &u(0,y) = g_1(y),\ u_x(0,y) = g_2(y),\ 0 \le y \le h, \\ &u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell, \end{aligned} \tag{8}$$

где $g_1(y), g_2(y)$ – функции из класса $C^1[0,h]$, причем $\tau(0) = g_1(0), \tau'(0) = g_2(0)$.

Интегрируя тождество

$$\vartheta L(u) - uL^*(\vartheta) = (\vartheta u_{\xi\eta} + \vartheta_{\xi\eta} u)_\xi - (\vartheta_\xi u_\xi + \eta^p \vartheta u)_\eta$$

и учитывая формулу Грина, будем иметь представление решение задачи (7)-(8):

$$\begin{aligned} &u(x,y) = \tau(x) + \vartheta_\xi(x,y;0,y)g_1(y) - \vartheta(x,y;0,y)g_2(y) - \tau(0) + x\tau'(0) - \\ &- \int_\delta^y \left[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)g_1(\eta) - \vartheta_\eta(x,y;0,\eta)g_2(\eta)\right]d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \end{aligned} \tag{9}$$

где функция $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ определяется как решение следующей сопряженной задачи:

$$L^*[\vartheta] \equiv \upsilon_{\xi\xi\eta} + (\eta^p \vartheta)_\eta = 0,\ (x,y) \in D,\ (\xi,\eta) \in D, (\xi,\eta) \in D^*,\quad D^* = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = \vartheta(x,y;x,\eta) = 0,\ (x,y) \in D, \eta \in [0,y],$$

$$\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = \vartheta_\xi(x,y;x,\eta) = 1,\ (x,y) \in D, \eta \in [0,y],$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = \omega(x,y;\xi),\ (x,y) \in D, \xi \in [0,x],$$

Здесь функция $\omega(x,y;\xi)$ определяется как решение задачи с начальными данными вдоль линии $\eta = y$:

$$\begin{cases} \vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y) - y^p \vartheta(x,y;\xi,y) = 0,\ 0 < \xi < x, \\ \vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = \vartheta(x,y;x,y) = 0, \\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = \vartheta_\xi(x,y;x,y) = 1. \end{cases}$$

Решения указанных задач удается построить в явном виде:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = \eta^{-p/2} sh[\eta^{p/2}(\xi - x)],\quad \omega(x,y;\xi) = y^{-p/2} sh[y^{p/2}(\xi - x)].$$

Полагая $f(x,y) \equiv -a(x,y)u_x - b(x,y)u_y - c(x,y)u$ из (9), будем иметь:

$$
\begin{gathered}
u(x,y) = u_0(x,y) + A_1(x,y)g_1(y) + B_1(x,y)g_2(y) + \\
+\int_{\delta}^{x} C_1(x,y;\xi)u(\xi,\eta)d\xi + \int_0^y \left[A_2(x,y;\eta)g_1(\eta) + B_2(x,y;\eta)g_2(\eta)\right]d\eta + \\
+\int_0^x d\xi \int_0^y C_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,
\end{gathered} \tag{10}
$$

где $u_0(x,y) = \tau(x) - \int_0^x b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi - \tau(0) - x\tau'(0)$,

$A_1(x,y) = \vartheta_\xi(x,y;0,y)$, $B_1(x,y) = -\vartheta(x,y;0,y)$,

$A_2(x,y;\eta) = -\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) - a(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)$,

$B_2(x,y;\eta) = \vartheta_\eta(x,y;0,\eta)$, $C_1(x,y;\xi) = b(\xi,\eta)\vartheta(x,y;\xi,y)$,

$C_2(x,y;\xi,\eta) = -a(\xi,\eta)\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta) - b(\xi,\eta)\vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta) +$
$+\left[c(\xi,\eta) - a_\xi(\xi,\eta) - b_\eta(\xi,\eta)\right]\vartheta(x,y;\xi,\tau).$

Воспользовавшись условиями (3) и (4) из (10), получим:

$$
\begin{gathered}
H_{i1}(y)g_1(y) + H_{i2}(y)g_2(y) = \Phi_i(y) + \int_0^y \left[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta) + H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)\right]d\eta + \\
+\int_0^{\chi(y)} H_{i5}(y,\xi)u(\xi,y)d\xi + \int_0^{\chi(y)} d\xi \int_0^y H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, i = 1,2,
\end{gathered} \tag{11}
$$

где $H_{ij}\,(i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,6})$, $\Phi_i\,(i = 1,2)$ – заданные функции, выражающиеся через функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и данные задачи 2.1.1.

Таким образом, разрешимость задачи 2.1.1 эквивалентным образом сводится к решению системы уравнений (10), (11), которая представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $u(x,y), g_1(y), g_2(y)$. Если выполняется условие

$$
\Delta = \begin{vmatrix} H_{11}(y) & H_{12}(y) \\ H_{21}(y) & H_{22}(y) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{12}
$$

то система (11) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающее единственное решение.

В частности, при $P(x,y)=Q(x,y)=0$ имеем $\Delta = B_1(\chi(y),y) = -\vartheta(\chi(y),y;0,y)$. Так как $\forall\, y\in[0,h]: 0<x_0\le\chi(y)\le\ell$, то $\vartheta(\chi(y),y;0,y)>0$. Следовательно, $\Delta\ne 0$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. Если выполнены условия (2), (6) и (12), то решение задачи 2.1.1 существует и единственно.

В **разделе 2.2** в области D, ограниченная линиями $x=0, -h_1\le y\le h\, a$ $(h_1, h>0), y=\sigma(x),\ 0\le x\le\ell,\ h_2=-\sigma(\ell)$, $x=\ell, -h_2\le y\le 0 (h_1\ge h_2),\ \ x=\chi(y),\ 0\le y\le h,$ $y=h,\ 0\le x\le x_0=\chi(h),$ рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

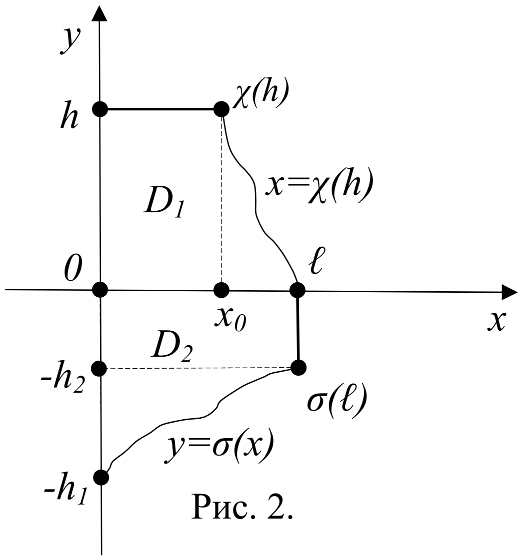

Рис. 2.

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-y^P u_y+a_1u_x+b_1u_y+c_1u=0, (x,y)\in D_1=D\cap(y>0), \tag{13}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy}+a_2u_x+b_2u_y+c_2u=0, (x,y)\in D_2=D\cap(y<0), \tag{14}$$

где $p>0,\ a_i,b_i,c_i\,(i=1,2)$, $\chi(y),\ \sigma(x)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}&\forall y\in[0,h]: x_0\le\chi(y)<\ell,\ \chi'(y)\le 0, \chi(0)=\ell,\\ &\forall x\in[0,\ell\,]: -h_1\le\sigma(x)\le -h_2,\ \sigma'(x)\ge 0, \sigma(0)=-h_1.\end{aligned} \tag{15}$$

Задача 2.2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap \cap\left[C^{2+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющую уравнению (13) и (14) в областях D_1 и D_2 соответственно, нелокальным условиям

$$\begin{aligned}&u(0,y)+\int_0^{\chi(y)}P(x,y)u(x,y)dx=\varphi_1(y), 0\le y\le h,\\ &u(\chi(y),y)+\int_0^{\chi(y)}Q(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y), 0\le y\le h\end{aligned}, \tag{16}$$

и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0,\ u(x,\sigma(x))=\psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{17}$$

где $P(x,y), Q(x,y), \varphi_i(y)\ (i=\overline{1,3})$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Пусть

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x), 0 \le x \le \ell, \tag{18}$$

где $\tau(x), \nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Для решения задачи 2.2.1 поступим следующим образом. Устремляя y к нулю из уравнения (13) имеем

$$\nu''(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+b_1(x,0)\nu(x)+c_1(x,0)\delta(x)=0,\ 0 \le x \le \ell, \tag{19}$$

$\tau(x)=u(x,0), \nu(x)=u_y(x,0)$ - пока неизвестные функции.

Интегрируя дважды по x в пределах от 0 до x уравнение (19), будем иметь соотношение

$$\nu(x)=\nu_1(x)+r(x)\nu'(0)+\int_0^x K_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{20}$$

где $\nu'(0)$ неизвестная константа, $\nu_1(x), r(x), K_2(x,\xi)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 2.2.1.

С другой стороны, интегрируя тождество

$$uL_2(u)-uL_2^*(\vartheta)=(-\vartheta_\eta u_\eta + a_2\vartheta u)_\xi - (-\vartheta u_{\xi\eta} - \vartheta_{\xi\eta}u - b_2\vartheta u)_\eta,$$

по области $D_2^*=\{(\xi,\eta): 0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$, вычисляя полученные криволинейные интегралы по границам области D_2^* с учетом условий (17) и (18), получим представления решения задачи 2.2.1:

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x)-\vartheta(x,y;x,0)\nu(x)+\Phi_1(x,y)+ \\ &+\int_0^x V_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi,\ (x,y)\in D_2, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\Phi_1(x,y), V_1(x,y)$ – заданные функции, $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ - является решением следующей сопряженной задачи:

$$L_2^*(\vartheta) \equiv -\vartheta_{\xi\eta\eta} - (a_2\vartheta) - (b_2\vartheta) + c_2\vartheta = 0,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0\,,\ \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=1,\ 0\le\xi\le x,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\omega_2(x,y;\eta),\,,\ y\le\eta\le 0,$$

а $\omega_2(x,y;\eta)$ – определяется как решение задачи

$$\begin{cases}\vartheta_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)+a_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\\ \vartheta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_\eta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1.\end{cases}$$

Исключая $\nu(x)$ из (20) и (21), получим

$$u(x,y)=\vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x)+\int_0^x V_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi_2(x,y)+r_1(x)\nu'(0)\,, \quad (22)$$

где $V_2(x,y,\xi),\,\Phi_2(x,y),\,r_1(x)$ – заданные функции.

Используя второе граничное условие (17) из (22), имеем

$$\vartheta_\eta(x,\sigma(x);\,x,0)\tau(x)=-\int_0^x V_2(x,\sigma(x);\,\xi)\tau(\xi)d\xi+\psi_1(x)-r_1(x)\nu'(0), \quad (23)$$

где $\psi_1(x)=\psi(x)-\Phi_2(x,\sigma(x))$.

Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)\ne 0, \quad (24)$$

то уравнение (23) запишем в виде

$$\tau(x)=\psi_2(x)+r_2(x)\nu'(0)+\int_0^x V_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (25)$$

где $\psi_2(x),\,r_3(x),\,V_3(x,\xi)$ – заданные функции.

Обращая уравнение (25), получим

$$\tau(x)=\psi_3(x)+r_3(x)\nu'(0), \quad (26)$$

где $\psi_3(x)=\psi_2(x)+\int_0^x R_2(x,\xi)\psi_2(\xi)d\xi,\quad r_3(x)=r_2(x)+\int_0^x R_2(x,\xi)r_2(\xi)d\xi,\quad R_2(x,\xi)$ – резольвента ядра $V_3(x,\xi)$. Нетрудно заметить, что из второго условия (16) вытекает условие согласования

$$\tau(\ell)+\int_0^\ell Q(x,0)\tau(x)dx=\varphi_2(0). \quad (27)$$

Если

$$r = r_3(\ell) + \int_0^{\ell} Q(x,0) r_3(x) dx \neq 0, \tag{28}$$

тогда из (26), с учетом (27), (28), найдем

$$\nu'(0) = \frac{1}{r}\left[\varphi_2(0) - \psi_2(\ell) - \int_0^{\ell} Q(x,0)\psi_2(x)dx\right]. \tag{29}$$

Подставляя значение $\nu'(0)$ из (29) в (26), окончательно найдем неизвестную функцию $\tau(x)$. Тогда из формулы (20) найдем и $\nu(x)$.

Подставляя найденные значения $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в представление (21) получим решение задачи 2.2.1 в области D_2.

После определения $\tau(x)$ решение задачи 2.2.1, как и в разделе 2.1.1, сводится к разрешимости системы уравнений вида

$$H_{i1}(y)g_1(y) + H_{i2}(y)g_2(y) = \Phi_i(y) + \int_0^{y} \left[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta) + H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)d\eta\right] +$$
$$+ \int_0^{\chi(y)} H_{i5}(y,\eta)u(\xi,y)d\xi + \int_0^{\chi(y)} d\xi \int_0^{y} H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \quad i = 1,2,$$

где $u(0,y) = g_1(y), u_x(0,y) = g_2(y)$ а $H_{ij}\ (i = 1,2;\ j = \overline{1,6})$ – заданные функции, разрешимость которого устанавливается при выполнения условия

$$\forall y \in [0,h]: H_{11}(y)H_{22}(y) - H_{12}(y)H_{21}(y) \neq 0. \tag{30}$$

Таким образом, доказывается

Теорема 2.2.1. Если выполняются условия (15), (24), (28), (30), тогда решение задачи 2.2.1 существует и единственно.

В **разделе 2.3** области $D = \{(x,y): 0 < x < +\infty,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxx} - u_{xy} + c(x,y)u = f(x,y), \tag{31}$$

где $c(x,y),\ f(x,y)$ – заданные функции.

Уравнение (31) по классификации работы [22] соответствует первому каноническому виду относительно старших производных, так как уравнение характеристик имеет одну трехкратную действительную характеристику $y=0$, поэтому это уравнение часто называется уравнением с кратными характеристиками [1]. Однако, из-за наличия члена u_{xy}, постановка задачи и свойства решения уравнения (1) аналогичны параболическим уравнениям.

Задача 2.2.1. Найти в области D непрерывное и ограниченное вместе с производной u_x решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),\ 0\le y\le h, \tag{32}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty, \tag{33}$$

$$\int_0^\alpha u(x,y)\,dx=E(y),\ 0\le y\le h,\ \alpha=const>0, \tag{34}$$

где $\varphi(y),\ \tau(x),\ E(y)$ – заданные функции, причем

$$c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{D}),\ E(y),\ \varphi(y)\in C^1[0,h],\quad \tau(x)\in C^3[0,+\infty), \tag{35}$$

$$\int_0^\alpha \tau(x)\,dx=E(0),\quad \tau(0)=\varphi(0). \tag{36}$$

Введем обозначение

$$u_x(x,y)=\vartheta(x,y). \tag{37}$$

Пусть

$$u_x(0,y)=\theta(y), \tag{38}$$

где $\theta(y)$ - пока неизвестная функция. Тогда задача 2.1.2 сводится к следующей задаче:

$$\begin{cases}\vartheta_{xx}-\vartheta_y=F(x,y),\\ \vartheta(0,y)=\theta(y),\ 0\le y\le h,\ \vartheta(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty,\end{cases} \tag{39}$$

где $F(x,y)=f(x,y)-c(x,y)u$.

Решение задачи (39) представим в виде

$$\vartheta(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta+\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,0)\tau'(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi, \qquad (40)$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ – функция Грина уравнения теплопроводности.

Учитывая обозначение (37), из (40) имеем

$$u_x(x,y)=\Phi(x,y)+\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (41)$$

где $\Phi(x,y)=\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,0)\tau'(\xi)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi.$

Интегрируя уравнение (41) по x, будем иметь

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)+\int_0^x ds\int_0^y G_\xi(s,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-\int_0^x ds\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(s,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (43)$$

где $\Phi_0(x,y)=\varphi(y)+\int_0^x \Phi(s,y)ds$. Учитывая свойства функции $G(x,y;\xi,\eta)$, уравнение (43) запишем в виде

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}\left[c(\xi,\eta)\int_0^\alpha G(s,y;\xi,\eta)ds\right]u(\xi,\eta)d\xi. \qquad (44)$$

Отсюда, используя условие (34), получим

$$\int_0^y \frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta=E_1(y)+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y \theta(\eta)d\eta\int_0^\alpha G(s,y;0,\eta)ds-$$
$$-\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y d\eta\int_0^\alpha(\alpha-s)ds\int_0^{+\infty} G(s,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\equiv Q(y),$$

где $E_1(y)=\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\left[E(y)-\int_0^\alpha \Phi_0(s,y)ds\right]$. Из условия согласования (36) имеем, что $E_1(0)=0$. Поэтому $Q(0)=0$.

Обращая полученное уравнение как интегральное уравнение Абеля, получим

$$
\begin{aligned}
\theta(y) = \theta_0(y) + \int_0^y H_1(y,\eta)\theta(\eta)d\eta + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha H_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi + \\
+ \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} H_3(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

где $\theta_0(y) = \frac{1}{\pi}\int_\eta^y \frac{E_1'(t)}{\sqrt{y-t}}dt$, а $H_1(y,\eta)$, $H_2(y,\xi,\eta)$, $H_3(y,\xi,\eta)$ – заданные функции, выражающиеся через коэффициенты уравнения и функции $G(x,y;\xi,\eta)$, удовлетворяющие следующим оценкам: $|H_1(y,\eta)| \le \frac{C_1}{\sqrt{y-\eta}}$, $|H_2(y,\xi,\eta)| \le \frac{C_2}{\sqrt{y-\eta}}$, $|H_3(y,\xi,\eta)| \le \frac{C_3}{\sqrt{y-\eta}}$, $0 \le x \le \beta$, $\beta >> 0$, $|H_3(y,\xi,\eta)| \le \frac{C_4}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}}$, $x > \beta$.

Обращая уравнение (45) относительно $\theta(y)$ как интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью, имеем

$$
\theta(y) = \theta_1(y) + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha T_1(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} T_2(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{46}
$$

где $T_1(y;\xi,\eta) = H_2(y;\xi,\eta) + \int_\eta^y R(y,t)H_2(t;\xi,\eta)\,dt$,

$T_2(y;\xi,\eta) = H_3(y;\xi,\eta) + \int_\eta^y R(y,t)H_3(t;\xi,\eta)\,dt$, $\theta_1(y) = \theta_0(y) + \int_0^y R(y,t)\,\theta_0(t)dt$,

$R(y,t)$ – резольвента ядра $H_1(y,\eta)$.

Подставляя значение $\theta(y)$ из (46) в (44), получим

$$
u(x,y) = \Phi_1(x,y) + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} K_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{47}
$$

где $K_1(x,y;\xi,\eta)$, $K_2(x,y;\xi,\eta)$, $\Phi_1(x,y)$ – заданные функции.

Уравнение (47) представляет собой интегральное уравнение типа Вольтера второго рода, существование единственного решения которого доказывается методом последовательных приближений.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.2.1. Если выполнены условия (35) и (36), то существует единственное непрерывное и ограниченное решение задачи 2.2.1.

В **разделе 3.1** в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,\,-h_1<y<h\}$ $(\ell,h,\,h_1>0$ для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\quad (x,y)\in D_1=D\cap(y>0), \tag{48}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(y<0), \tag{49}$$

где $a_2,\,b_2,d_2,\,c_2,e_2$ – заданные функции, удовлетворяющие условия гладкости

$$\begin{aligned}&a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2),b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\\&c_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2),d_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2)\,e_2\in C(\overline{D}_2),\end{aligned} \tag{50}$$

изучается **задача 3.1.1:** *найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^{1+1}(D)\cap$ $\cap[C^{3+0}(D_1)\cap C^{2+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую уравнения (48) и (49) в областях* D_1 *и* D_2 *соответственно, краевые условия*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u(\ell,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{51}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_1\le y\le 0 \tag{52}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le\ell, \tag{53}$$

где $\varphi_i(y)\ (i=1,3),\ \chi_j(y)\ (j=1,2)$ *– заданные гладкие функции, удовлетворяющие условия гладкости*

$$\varphi_1(y),\varphi_3(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0]\ (i=1,2) \tag{54}$$

и условиям согласования

$$\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\ \varphi_2(0)=\chi_2(0). \tag{55}$$

Как было отмечено в разделе 2.1, уравнение (48) называется уравнением с кратными характеристиками, имеющим действительную характеристику $y=0$. Уравнение (49) часто называется псевдопараболическим уравнением. Это уравнение имеет двукратную действительную характеристику $y=0$ и однократную характеристику $x=0$. Поэтому в задаче 3.1.1 линия $y=0$ является двукратной характеристикой для обоих уравнений.

Введем обозначения

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell,$$

где $\tau(x), \nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Записав уравнение (48) в виде

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)-\varphi_1'(y), \tag{56}$$

где $\omega(y)$ – неизвестная функция, и при $y\to 0$ имеем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau''(x)-\nu(x)=\omega(0)-\varphi_1'(0). \tag{57}$$

Для получения второго функционального соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу: *найти функцию* $u\ (x,y)\in C^1(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2)\cap C^{2+1}(D_2)$, *удовлетворяющую уравнение (49), краевые условия (52) и начальное условие* $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell$.

Методом сопряженных задач, примененным в разделе 2.1, получим представление вспомогательной задачи в виде

$$\begin{gathered}u(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;x,0)\tau(x)+\int\limits_0^x A_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\+\int\limits_0^y\left[b_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\vartheta(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)\right]d\eta,\end{gathered} \tag{58}$$

где $A_1(x,y;\xi)=-\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+\left[b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\right]_\xi-d_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$

$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)-b_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta),\ C_1(x,y;\eta)=-a_2(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta),$

$$E_1(x,y;\eta)=[a_{2\xi}(0,\eta)-C_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\vartheta_\xi(x,y;0,\eta).$$

Здесь функция $\vartheta(x,y,\xi,\eta)$ – является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&L^*_{2(\xi,\eta)}(\vartheta(x,y;\xi,\eta))\equiv-\vartheta_{\xi\xi\eta}+(a_2\vartheta)_{\xi\xi}+(b_2\vartheta)_{\xi\eta}-(c_2\vartheta)_\xi-(d_2\vartheta)_\eta+e_2\vartheta=0,\\
&\qquad\qquad(\xi,\eta)\in D^*_2=\{(x,y):0<\xi<x,\ y<\eta<0\},\\
&\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),\ y\le\eta\le0;\\
&\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),\ 0\le\xi\le x,
\end{aligned}\tag{59}$$

где $\theta_1(x,y;\xi)$ – однозначно определяется как решение следующей начальной задачи:

$$\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ 0<\xi<x,$$
$$\vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1.$$

При выполнении условия (50) однозначная разрешимость задачи (59) устанавливается методом интегральных уравнений.

Вычислив производную по y от $u(x,y)$ с использованием формулы (58), затем устремляя y к нулю, имеем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)\tau(x)+\int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau(\xi)d\xi+g_1(x),\tag{60}$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\vartheta(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_1(0).$

Исключая $\nu(x)$ из (57) и (60), получим

$$\tau''(x)=\omega(0)+a_1(x)\tau(x)+\int_0^x\widetilde{A}_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\widetilde{g}_1(x),\tag{61}$$

где $\widetilde{g}_1(x)=g_1(x)-\varphi_1'(0),\ a_1(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0),\ \ \widetilde{A}_1(x,\xi)=A_{1y}(x,0;\xi),$ а $\omega(0)$ – неизвестная константа.

Решение уравнения (61) при начальных условиях

$$\tau(0)=\chi_1(0),\ \tau'(0)=\chi_2(0)$$

представим в виде

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\omega(0)x^2+\int_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_2(x),\tag{62}$$

где $A_2(x,\xi)=a_1(\xi)(x-\xi)+\int\limits_{\xi}^{x}(x-t)\widetilde{A}_1(t,\xi)dt,\ g_2(x)=\chi_1(0)+\chi_2(0)x+\int\limits_0^x(x-t)\widetilde{g}_1(t)dt.$

Если учесть условие согласования $\tau(\ell)=\varphi_2(0)$, то из (62) можно определить $\omega(0)$:

$$\omega(0)=\frac{2}{\ell^2}\left[\varphi_2(0)-g_2(\ell)\right]-\frac{2}{\ell^2}\int\limits_0^{\ell}A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi\,.$$

Тогда из (62) получим следующее интегральное уравнение для $\tau(x)$:

$$\tau(x)=g_3(x)+\int\limits_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi-\frac{x^2}{\ell^2}\int\limits_0^{\ell}A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (63)$$

где $g_3(x)=g_2(x)+\frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(o)-g_2(e)]x^2$. После обращения вольтерровской части уравнения (44) приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(x)=g(x)+\int\limits_0^{\ell}H(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (64)$$

где $H(x,\xi)=-\frac{1}{\ell^2}\left[x^2+\int_0^x R(x_1t)t^2\right]A_2(\ell,\xi)$, $g(x)=g_3(x)+\int\limits_0^x R(x,\xi)g_3(\xi)d\xi$, $R(x,t)$ – резольвента ядра $A_2(x,t)$.

Согласно общей теории интегральных уравнений, если

$$\ell\,H<1, \qquad (65)$$

где $H=\max\limits_{0\le x,\,\xi\le\ell}\left|H(x,\xi)\right|$, то уравнение (64) имеет единственное решение.

Для решения задачи 3.1.1 в области D_1 поступим следующим образом. Представим решение уравнения (56), удовлетворяющее краевые условия

$$u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u(\ell,y)=\varphi_3(y),\ u(x,0)=\tau(x)$$

в виде

$$\begin{aligned}u(x,y)=&-\int\limits_0^y G_2(x,y;0,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_{2\xi}(x,y;\ell,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta+\int\limits_0^{\ell}G_2(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\\&-\int\limits_0^y\omega(\eta)d\eta\int\limits_0^{\ell}G_2(x,y;\xi,\eta)d\xi+\int\limits_0^y\varphi_1'(\eta)d\eta\int\limits_0^{\ell}G_2(x,y;\xi,\eta)d\xi,\end{aligned} \qquad (66)$$

где $G_2(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Из (66), с помощью условия $u(0,y)=\varphi_1(y),$ получаем интегральное уравнение

$$\int_0^y K(y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r(y), \tag{67}$$

где $K(y,\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}}\ell^{-s^2}ds+\int_0^{\ell}q(y,\xi,\eta)d\xi,$ $r(y)$ – известная функция, выражающаяся через данные задачи и функции Грина.

Если учесть, что $\lim\limits_{\eta\to y}K(y,\eta)=1,$ то из (67) путем дифференцирования получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\omega(y)+\int_0^y K_y(y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r'(y),$$

допускающее однозначное решение. Подставляя найденную функцию $\omega(y)$ в (66), получим решение задачи 3.1.1 в области D_1.

Таким образом, доказана

Теорема 3.1.1. Если выполняются условия (50), (54), (55) и (65), то решение задачи 3.1.1 существует и единственно.

В **разделе 3.2** для уравнений вида

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0, (x,y)\in D_1, \tag{68}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxx}-u_{yy}=0, (x,y)\in D_2, \tag{69}$$

где $D_1=\{(x,y):0<x<\ell, 0<y<h_1\}$, $D_2=\{(x,y):0<x<\ell, -h_2<y<0\}$, $\ell,\ h_1,\ h_2>0,$ а $D=D_1\cup D_2$, рассматривается краевая задача 3.2.1: *найти в области D функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap[C^{2+1}(D_1)\cup C^{3+2}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнение (68) в области D_1, а в области D_2 - уравнение (69), а также же краевые условия:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1, \tag{70}$$

$$
\begin{aligned}
&u(0,y)=\chi_1(y),\, u(\ell,y)=\chi_2(y), u_x(\ell,y)=\chi_3(y),\, -h_2\le y\le 0,\\
&u(x,-h_2)=\psi(x),\, 0\le x\le \ell,
\end{aligned} \qquad (71)
$$

где $\varphi_i(y)\,(i=1,2),\ \chi_j(y)\,(j=\overline{1,3})$ – *заданные функции, причем*

$$\varphi_i(y)\in C^1[0,h_1]\ (i=1,2),\ \chi_j(y)\in C^1[-h_2,0]\ (j=\overline{1,3}), \qquad (72)$$

$$
\begin{aligned}
&\psi(0)=\chi_1(-h_2),\ \psi(\ell)=\chi_2(-h_2),\\
&\varphi_i^{(k)}(0)=\chi_i^{(k)}(0)\ \ (i=1,2;\ k=0,1)
\end{aligned}. \qquad (73)
$$

Отметим, что из постановки задачи 3.2.1 вытекают следующие условия сопряжения на линии $y=0$: $u(x,+0)=u(x,-0),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0),\ 0\le x\le\ell$.

Относительно коэффициентов уравнения (68) предполагается выполнение следующих условий:

$$a(x,y)\in C(D_1)\cap C^{1+0}(D_1),\ \mathrm{b}(x,y)\in C(D_1)\cap C^{0+1}(D_1),\ c(x,y)\in C(\overline{D_1}). \qquad (74)$$

Введем обозначения

$$u(x,0)=\tau(x),\, u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (75)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Тогда в силу (73) имеем следующие условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \tau'(\ell)=\chi_3(0),\ \tau(\ell)=\varphi_2(0)=\chi_2(0), \qquad (76)$$

$$\nu(0)=\varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\, \nu(\ell)=\varphi_2'(0)=\chi_2'(0). \qquad (77)$$

Переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (68), имеем

$$\nu''(x)+a(x,0)\tau'(x)+b(x,0)\nu(x)+c(x,0)\tau(x)=0,\ 0<x<\ell. \qquad (78)$$

Основным результатом раздела 3.2 является доказательство теоремы единственности решения задачи 3.2.1.

Теорема 3.2.1. Если выполняются условия (72), (73), (74), (76), (77) и

$$\forall x\in[0,\ell]: c(x,0)\ne 0, \qquad (79)$$

$$\forall x\in[0,\ell]: a(x,0)\ne 0,\ \frac{1-b(x,0)}{c(x,0)}\le 0, \qquad (80)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\forall x\in[0,\ell]: b(x,h_1)\le 0,\\
&\forall (x,y)\in D_1: a(x,y)+b_y(x,y)-2c(x,y)\ge 0,
\end{aligned}
\right\} \qquad (81)
$$

то задача 3.2.1 имеет единственное решение.

В **разделе 4.1** в области D, ограниченной отрезками прямых $x=0, y=-h_1$, $x=\ell, y=h, x=-\ell_1, y=0, (\ell,\ell_1,h,h_1>0)$, рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1, \tag{82}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,(x,y)\in D_2, \tag{83}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,(x,y)\in D_3, \tag{84}$$

где $a_i,d_i,b_j,c_j,e_j,(i=\overline{1,3}, j=2,3)$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0)$, $D_2=D\cap(x>0,y<0), D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned}&a_1,d_1\in C(\overline{D}_1),a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2),b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\\&a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3),b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3),\\&c_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{1+0}(D_j),d_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{0+1}(D_j),e_j\in C(\overline{D}_j)(j=2,3)\end{aligned} \tag{85}$$

Задача 4.1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_j)\cap[C^{1+1}(D_1)\cup\cup C^{1+2}(D_3)]\cap C^{3+0}$, $(i=1,2,3)$, удовлетворяющую уравнения (82), (83) и (84) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, краевые условия

$$\begin{aligned}&u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h,\\&u(0,y)=\chi_1(y),u_x(0,y)=\chi_2(y),-h_1\le y\le 0,\\&u(x,0)=\psi_1(x),u_y(x,0)=\psi_2(x),-\ell_1\le x\le 0\end{aligned} \tag{86}$$

и условия сопряжения

$$\begin{aligned}&u(x,-0)=u(x,+0),u_y(x,-0)=u_y(x,+0),0\le x\le\ell,\\&u(-0,y)=u(+0,y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y),0\le y\le h,\end{aligned} \tag{87}$$

где $\varphi_i(y),\chi_i(y),\psi_i(x)(i=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned}&\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\\&\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0](i=1,2);\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\psi_1(0)=\chi_1(0),\psi_2(0)=\chi_1'(0),\\&\psi_1'(0)=\chi_2(0),\psi_2'(0)=\chi_2'(0).\end{aligned} \tag{89}$$

Введем следующие обозначения:

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),0\le y\le h,$$
$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),0\le y\le h, \quad (90)$$

где $\tau_1(x),\tau_2(y),\nu_1(x),\nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

Доказательство существования и единственности решений задач 4.1.1 устанавливается по следующему алгоритму:

1) Построим представление решения задачи 4.1.1 в области D_2 в виде

$$u(x,y)=\upsilon_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^y [B_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\upsilon(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \quad (91)$$

где $A_1(x,y;\xi),B_1(x,y;\eta),C_1(x,y;\eta),E_1(x,y;\eta),$ а $\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ – является решением следующей задачи:

$$L_2^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{\xi\xi\eta}+(a_2\upsilon)_{\xi\xi}+(b_2\upsilon)_{\xi\eta}-(c_2\upsilon)_\xi-(d_2\upsilon)_\eta+e_2\upsilon=0,(\xi,\eta)\in D_2^*,$$
$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),y\le\eta\le 0, \quad (92)$$
$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),0\le\xi\le x,$$

где $\theta_1(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)=0,0<\xi<x,$$
$$\upsilon(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0,\upsilon_\xi(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=1. \quad (93)$$

Отметим, что задача (92) – (93) решается эквивалентным сведением к интегральному уравнению Вольтерра вида

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\int_x^\xi B(\xi,\eta,s)\upsilon(x,y;s,\eta)ds+\int_y^\eta a_2(\xi,t)\upsilon(x,y;\xi,t)dt+$$
$$+\int_x^\xi ds\int_y^\eta C(\xi,s,t)\upsilon(x,y;s,t)dt,$$

где $B(\xi,\eta,s)=b_2(s,\eta)-(\xi-s)d_2(s,\eta),C(\xi,s,t)=-c_2(s,t)+(\xi-s)e_2(s,t)$, которое допускает единственное решение из класса $C^{2+1}(D_2^*)$.

2) Из (91) найдем соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, полученное из области D_2:

$$\nu_1(x) = \upsilon_{\xi y}(x,0;x,0)\tau_1(x) + \int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau_1(\xi)d\xi + g_1(x), \tag{94}$$

где $g_1(x) = B_1(x,0,0)\chi_1'(0) - \upsilon(x,0;0,0)\chi_2'(0) + C_1(x,0,0)\chi_2(0) + E_1(x,0,0)\chi_2(0)$.

3) Найдем соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1. Для этого, интегрируя уравнение (82) в пределах от 0 до x, имеем

$$u_{xx} - u_y = \omega(y) - a_1(x,y)u + \int_0^x \widetilde{d}_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi + T_0(x,y), \tag{95}$$

$$\widetilde{d}_1(\xi,y) = a_{1\xi}(\xi,y) - d_1(\xi,y), T_0(x,y) = a_1(0,y)\tau_2(y) - \tau_2'(y).$$

Отсюда, переходя к пределу при $y \to +0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = \omega(0) - a_1(x,0)\tau_1(x) + \int_0^x \widetilde{d}_1(\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi + T_0(x,0). \tag{95}$$

4) Исключая $\nu_1(x)$ из (94) и (95), получим интегральное уравнение

$$\tau_1(x) = g(x) + \int_0^\ell H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{96}$$

где $H_1(x,\xi)$, $g(x)$ – заданные функции.

Если

$$\ell H < 1, \tag{97}$$

то уравнение (96) имеет единственное решение, где $H = \max\limits_{0\le x,\,\xi\le\ell} |H_1(x,\xi)|$.

5) Построим решение задачи 4.1.1 в области D_3, представимое в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y) + \int_0^y A_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta + \int_0^x [B_2(x,y;\xi)\psi_1'(\xi) - \\ & - w(x,y;\xi,0)\psi_2'(\xi) + C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi) + E_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi, \end{aligned} \tag{98}$$

где $A_2(x,y;\xi),\ B_2(x,y;\xi),\ C_3(x,y;\xi),\ E_2(x,y;\xi)$ – известные функции, выражающиеся через коэффициенты уравнения (84) и функции $w(x,y;\xi,\eta)$, которые определяются как решение задачи:

$$
\begin{gathered}
L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_{\xi} - (d_3 w)_{\eta} + e_3 w = 0, \\
(\xi,\eta) \in D_3^* = \{(\xi,\eta) : x < \xi < 0,\ 0 < \eta < y\}, \\
w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = 0, w_{\eta}(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = exp\left(\int_x^{\xi} b_3(s,y)ds\right), x \le \xi \le 0, \\
w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = \theta_2(x,y;\eta),
\end{gathered} \tag{99}
$$

где $\theta_2(x,y;\eta)$ – решение следующей начальной задачи:

$$
\begin{gathered}
w_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - [a_3(x,\eta)w]_{\eta} + c_3(x,\eta)w = 0, 0 < \eta < y, \\
w(x,y;x,\eta)|_{\eta=0} = 0, w_{\eta}(x,y;x,\eta)|_{\eta=0} = 1.
\end{gathered} \tag{100}
$$

При выполнении условий (85) решение задачи (99), (100) существует и единственно.

6) Используя первое условие (85) и учитывая, что $w_{\eta}(-\ell_1,y;0,y) > 0$, из (4.1.32) получим

$$
\tau_2(y) = \gamma(y) + \int_0^y H_2(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta, \tag{101}
$$

где $H_2(y,\eta),\ \gamma(x)$ – известные функции.

7) Определив $\tau_2(y)$ из (101), однозначно находим решение задачи 4.1.1 в области D_3 по формуле (98). Тогда и можно определить $\nu_2(y) = u_x(0,y)$.

8) Найдем решение задачи 4.1.1 в области D_1. Для этого решение уравнения (95), удовлетворяющее условия

$$
u_x(0,y) = \nu_2(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h,\ u(x,0) = \tau_1(x), 0 \le x \le \ell,
$$

представим в виде

$$
u(x,y) = -\int_0^y M(x,y,\eta)\omega(\eta)d\eta + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta + T_1(x,y), \tag{102}
$$

где $M(x,y,\eta),\ K_1(x,y;\xi,\eta),\ T_1(x,y)$ – известные функции.

9) Используя условие $u(0,y)=\tau_2(y)$ из (102), получим интегральное уравнение для $\omega(y)$:

$$\omega(y)+\int_0^y M_y(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta=r_0'(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_{1y}(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

обращение которого имеет вид

$$\omega(y)=r(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta. \tag{103}$$

10) Исключая $\omega(y)$ из (103) и (102) относительно $u(x,y)$, получим интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$u(x,y)=T(x,y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \tag{104}$$

где $K(x,y;\xi,\eta)$, $T(x,y)$ – известные функции, которые допускают единственное решение.

Таким образом, доказана

Теорема 4.1.1. Если выполняются условия (85), (88), (89) и (97), то задача 4.1.1 имеет единственное решение.

В **разделе 4.2** в области D, ограниченной отрезками прямых $x=0,\ y=-h_1,\ x=\ell,\ y=h,\ x=-\ell_1,\ y=0\ (h,h_1,\ell,\ell_1>0)$, рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1, \tag{105}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy}+a_2u_{xy}+b_2u_{yy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,(x,y)\in D_2, \tag{106}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,(x,y)\in D_3, \tag{107}$$

где $a_i,d_i,b_j,c_j,e_j(i=\overline{1,3},j=2,3)$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0)$, $D_2=D\cap(x>0,y<0), D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

В области D уравнения (105) – (107) можно рассматривать как уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами. Поэтому на линиях $y=0$ и $x=0$ потребуем выполнения условия сопряжений:

$$u(x,-0)=u(x,+0), u_y(x,-0)=u_y(x,+0), 0\le x\le \ell, \tag{108}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y), 0\le y\le h. \tag{109}$$

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned}
&a_1\in C^{1+0}(\overline{D}_1), d_1\in C(\overline{D}_1), a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\\
&b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+2}(D_2), c_2\in C(D_2)\cap C^{1+0}(D_2),\\
&d_2\in C(D_2)\cap C^{0+1}\cap(D_2), e_2\in C(\overline{D}_2), a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3),\\
&b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3), c_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+0}(D_3),\\
&d_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+1}(D_3), e_3\in C(\overline{D}_3).
\end{aligned} \tag{110}$$

Задача 4.2.1. В области D найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap$ $\cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_i)]\cap C^{3+0}(D_1)(i=2,3)$, удовлетворяющую уравнения (105), (106) и (107) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, условия сопряжений (108), (109) и краевым условиям

$$\begin{aligned}
&u(\ell,y)=\varphi_1(y), u(-\ell_1,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h,\\
&u(x,0)=\psi_1(x), u_y(x,0)=\psi_2(x), -\ell_1\le x\le 0,\\
&u(0,y)=\chi(y), -h_1\le y\le 0, u(x,-h_1)=\psi_3(x), 0\le x\le \ell,
\end{aligned} \tag{111}$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2)$, $\psi_j(x)(j=\overline{1,3})$, $\chi(y)$ – заданные функции, причем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(y)\in C^1[0,h], \varphi_2(y)\in C^2[0,h], \psi_i(x)\in C^1[-\ell,0](i=1,2),\\
&\psi_3(x)\in C^1[0,\ell], \chi(y)\in C^2[-h_1,0],
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\psi_1(0)=\chi(0), \varphi_2(0)=\psi_1(-\ell_1), \psi_2(0)=\chi'(0), \chi(-h_1)=\psi_3(0). \tag{113}$$

Для решения задачи 4.2.1 введем следующие обозначения

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x), u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x), 0\le x\le \ell, \tag{114}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y), 0\le y\le h, \tag{115}$$

где $\tau_i,\nu_i(i=\overline{1,2})$ – пока неизвестные функции.

Алгоритм решения задачи 4.2.1 такой же, как и в задаче 4.1.1.

1) Методом получения соотношений из областей D_1 и D_2 между функциями $\tau_2(x)$ и $\nu_1(x)$, при выполнении условия

$$\forall x \in [0,\ell] \;\; \forall y \in [-h_1, 0] : a_2(x,y) + yc_2(x,y) \ge 0, \qquad (116)$$

придем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на линии $y = 0$

$$\tau_1(x) = \Psi(x) + \int_0^\ell K(x,t)\tau_1(t)dt, \qquad (117)$$

которая имеет единственное решение, если

$$\ell K < 1, \qquad (118)$$

где $K = \max\limits_{0 \le x, t \le \ell} |K(x,t)|$, а функции $K(x,t)$ и $\Psi(x)$ выражаются через данные задачи 4.2.1.

2) Аналогичным образом, при выполнении условия

$$\forall (x,y) \in \overline{D_3} : b_3(x,y) \ge 0, \qquad (119)$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода $x = 0$

$$\tau_2(y) = \Phi(y) + \int_0^y K(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta,$$

допускающее единственное решение, где $K(y,\eta), \Phi(y)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 4.2.1.

3) Определив из (117), (119) функции $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$ соответственно, для $u(x,y)$ будем иметь интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$u(x,y) = T(x,y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

допускающее единственное решение. Здесь $T(x,y), K(x,y;\xi,\eta)$ – известные функции, выражающиеся через данные задачи 4.2.1. Тем самым даказывается

Теорема 4.2.1. Если выполняются условия (110), (112), (113), (116), (118) и (119), то решение задачи 4.2.1 существует и единственно.

В **разделе 4.3** в области D, ограниченной отрезками прямых

$AA_1 = \{(x,y) : x = 0, -h_1 \le y \le 0\}$, $A_1B_1 = \{(x,y) : y = -h_1, 0 \le x \le \ell\}$,

$B_1B = \{(x,y) : x = \ell, -h_1 \le y \le 0\}$, $BB_0 = \{(x,y) : x = \ell, 0 \le y \le h\}$,

$B_0A_0=\{(x,y): y=h, 0\le x\le \ell\}$, $A_0C_0=\{(x,y): y=h, -\ell_1\le x\le 0\}$,

$C_0C=\{(x,y): x=-\ell_1, 0\le y\le h\}$, $CA=\{(x,y): y=0, -\ell_1\le x\le 0\}$, $(\ell,\ell_1,\mathrm{h},\mathrm{h}_1>0)$

рассматривается краевая задача для смешанно-псевдопараболических уравнений с двумя линиями изменения типа

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{120}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+b_1(x,y)u_{xy}+d(x,y)u_y=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{121}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+b_2(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_x=0,\ (x,y)\in D_3, \tag{122}$$

где $b_i(i=1,2),\ d,c$ – заданные функции, а $\mathrm{D}_1=\mathrm{D}\cap(\mathrm{x}>0,\mathrm{y}>0)$,

$\mathrm{D}_2=\mathrm{D}\cap(\mathrm{x}>0,\mathrm{y}<0)$, $\mathrm{D}_3=\mathrm{D}\cap(\mathrm{x}<0,\mathrm{y}>0)$.

Задача 4.3.1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap[C^{1+1}(D_1)\cup\cup C^{2+1}(D_2)\cup C^{1+2}(D_3)]$, $u_{xxx}\in C(D_1)$, *удовлетворяющую уравнения (120), (121) и (122) в областях* D_1,D_2 *и* D_3 *соответственно, краевые условия*

$$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1,$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0,$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0$$

и условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell,$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h$$

где $\varphi_i(y),\ \chi_i(y),\ \psi_i(x)\,(i=1,2)$ *– заданные гладкие функции, причем*

$$\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],$$
$$\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\ \psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0]\,(i=1,2),$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\ \psi_1(0)=\chi_1(0),$$
$$\psi_2(0)=\chi_1'(0),\ \psi_1'(0)=\chi_2(0),\ \psi_2'(0)=\chi_2'(0).$$

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи 4.3.1 устанавливается методом, изложенным в разделе 4.1.1.

ГЛАВА 2. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В данной главе рассматриваются нелокальные краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с интегральным условием.

Нелокальными условиями назовем такие условия, которые задают некоторую связь между значениями искомого решения в различных точках границы, либо в точках границы и внутренних точках, либо только во внутренних точках области. Задачи с нелокальными условиями называются нелокальными задачами. В данной главе под нелокальным условием подразумеваются условия, когда значения искомой функции связываются через интегралы.

2.1. Краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с интегральными условиями

2.1.1. Постановка задачи. Математическая постановка ряда прикладных задач, где измеряются некоторые усредненные (интегральные) характеристики величин, сводятся к задачам для уравнений в частных производных.

В области $D=\{(x,y):0<x<\chi(y),\ 0<y<h\}$ (рис. 2.1.1) рассмотрим уравнение

$$u_{xxy}-y^p u_y+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0, \qquad (2.1.1)$$

где $a(x,y),b(x,y),c(x,y),\chi(y)$ – заданные функции, причем потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{gathered}\chi(h)=x_0>0, \chi(0)=\ell>0, p>0,\\ \forall y\in[0,h]: x_0\le\chi(y)\le\ell, \chi'(y)\le 0.\end{gathered} \qquad (2.1.2)$$

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих непрерывные производные вида $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s\,(r=0,1,...,n;s=0,1,...,m)$.

Задача 2.1.1. Требуется найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющую уравнение (2.1.1) в области D и следующие условия:

$$u(0,y)+\int_0^{\chi(y)}P(x,y)u(x,y)\,dx=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \tag{2.1.3}$$

$$u(\chi(y),y)+\int_0^{\chi(y)}Q(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{2.1.4}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{2.1.5}$$

где $P(x,y),Q(x,y),\varphi_1(y),\varphi_2(y),\tau(x)$ – заданные функции, причем

$$\tau(0)+\int_0^{\ell}P(x,0)\,\tau(x)\,dx=\varphi_1(0),\ 0\le x\le \ell. \tag{2.1.6}$$

При $P(x,y)\equiv Q(x,y)\equiv 0$ задача 2.1.1 сводится к первой краевой задаче для уравнения (2.1.1). Отметим, что из условия (2.1.2) следует, что кривая $x=\chi(y)$ является монотонно не возрастающей функцией по y.

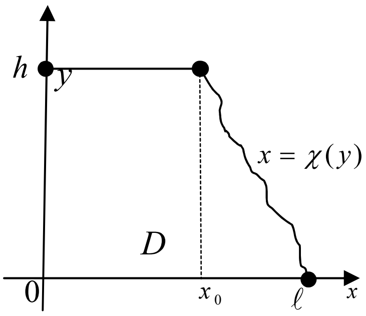

Рис. 2.1.1.

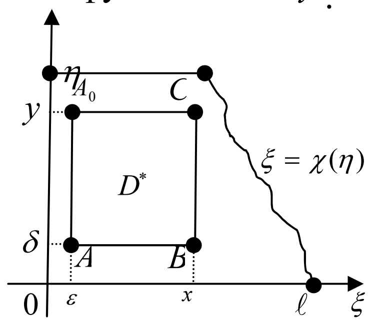

Рис. 2.1.2.

2.1.2. Сначала рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$L[u]\equiv u_{xxy}-y^p u_y=f(x,y),(x,y)\in D \tag{2.1.7}$$

с условиями

$$u(0,y)=g_1(y),\ u_x(0,y)=g_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{2.1.8}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{2.1.9}$$

где $g_1(y),g_2(y)$ – функции из класса $C^1[0,h]$, причем $\tau(0)=g_1(0),\tau'(0)=g_2(0)$.

Пусть $D^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,0<\eta<y\}$. В области D^* рассмотрим задачу:

$$L^*[\vartheta]\equiv \upsilon_{\xi\xi\eta}+(\eta^p\vartheta)_\eta=0,\ (x,y)\in D,\ (\xi,\eta)\in D,(\xi,\eta)\in D^*, \tag{2.1.10}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\ (x,y)\in D,\eta\in[0,y], \tag{2.1.11}$$

$$\vartheta_{\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\vartheta_{\xi}(x,y;x,\eta)=1,\ (x,y)\in D,\eta\in[0,y], \tag{2.1.12}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega(x,y;\xi),\ (x,y)\in D,\xi\in[0,x]. \tag{2.1.13}$$

Функцию $\omega(x,y;\xi)$ определим как решение задачи с данными вдоль линии $\eta=y$:

$$\begin{cases}\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-y^{p}\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ 0<\xi<x,\\ \vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=\vartheta(x,y;x,y)=0,\\ \vartheta_{\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=\vartheta_{\xi}(x,y;x,y)=1.\end{cases} \tag{2.1.14}$$

Решение задачи (2.1.14) представимо в виде:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=y^{-p/2}sh[y^{p/2}(\xi-x)]\equiv\omega(x,y;\xi). \tag{2.1.15}$$

Тогда решение задачи (2.1.10) – (2.1.13) записывается следующим образом:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\eta^{-p/2}sh[\eta^{p/2}(\xi-x)]. \tag{2.1.16}$$

Отметим некоторые свойства функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$:

$\vartheta(x,y;\xi,0)=\xi-x$, $\vartheta(x,0;0,0)=-x$, $\vartheta_{\eta}(x,y;x,\eta)=0$, $\vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)=0,\ 0<\eta\le h$.

Пусть $D^{*}_{\varepsilon\delta}$ означает квадрат с вершинами $A(\varepsilon,\delta)$, $B(x,\delta)$, $C(x,y)$, $A_0(\varepsilon,y)$, где $C(x,y)$ – произвольная точка области D (Рис. 2.1.2). Выберем произвольную функцию $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ из класса $C^{2+1}(D)$.

Интегрируя тождество

$$\vartheta L(u)-uL^{*}(\vartheta)=(\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u)_{\xi}-(\vartheta_{\xi}u_{\xi}+\eta^{p}\vartheta u)_{\eta}$$

по области $D^{*}_{\varepsilon\delta}$ и учитывая формулу Грина, будем иметь

$$\iint\limits_{D^{*}_{\varepsilon\delta}}[\vartheta L(u)-uL(\vartheta)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D^{*}_{\varepsilon\delta}}(\vartheta_{\xi}u_{\xi}+\eta^{p}\vartheta u)d\xi+(\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u)d\eta. \tag{2.1.17}$$

Осуществляя интегрирование по границам области $D^{*}_{\varepsilon\delta}$, получим

$$u(x,y)=\vartheta_{\xi}(x,y;\varepsilon,y)u(\varepsilon,y)-\vartheta(x,y;\varepsilon,y)u(\varepsilon,y)+\vartheta(x,y;\varepsilon,\delta)u_{\xi}(\xi,\delta)+\vartheta_{\xi}(x,y;x,\delta)u(x,\delta)-$$
$$-\vartheta_{\xi}(x,y;\varepsilon,\delta)u(\varepsilon,\delta)-\int_{\delta}^{y}\left[\vartheta_{\eta}(x,y;x,\eta)u_{\xi}(x,y)-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)u(x,\eta)\right]d\eta+$$
$$+\int_{\delta}^{y}\left[\vartheta_{\eta}(x,y;\varepsilon,\eta)u_{\xi}(\varepsilon,\eta)-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;\varepsilon,\eta)u(\varepsilon,\eta)\right]d\eta-\int_{\varepsilon}^{x}d\xi\int_{\delta}^{y}\vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.$$

Далее, устремляя δ и ε к нулю и учитывая условия (2.1.8), (2.1.9) придем к представлению задачи через функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$:

$$u(x,y)=\tau(x)+\vartheta_{\xi}(x,y;0,y)g_1(y)-\vartheta(x,y;0,y)g_2(y)-\tau(0)+x\tau'(0)-$$
$$-\int_{\delta}^{y}\left[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)g_1(\eta)-\vartheta_{\eta}(x,y;0,\eta)g_2(\eta)\right]d\eta-\int_{0}^{x}d\xi\int_{0}^{y}\vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta. \qquad (2.1.18)$$

2.1.3. Сведение задачи 2.1.1 к системе интегральных уравнений. Полагая $f(x,y)\equiv -a(x,y)u_x-b(x,y)u_y-c(x,y)u$ из (2.1.18), будем иметь:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+A_1(x,y)g_1(y)+B_1(x,y)g_2(y)+$$
$$+\int_{\delta}^{x}C_1(x,y;\xi)u(\xi,\eta)d\xi+\int_{0}^{y}\left[A_2(x,y;\eta)g_1(\eta)+B_2(x,y;\eta)g_2(\eta)\right]d\eta+ \qquad (2.1.19)$$
$$+\int_{0}^{x}d\xi\int_{0}^{y}C_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

где

$$u_0(x,y)=\tau(x)-\int_{0}^{x}b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\tau(0)-x\tau'(0),$$

$$A_1(x,y)=\vartheta_{\xi}(x,y;0,y),\ B_1(x,y)=-\vartheta(x,y;0,y),\ A_2(x,y;\eta)=-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)-a(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta),$$

$$B_2(x,y;\eta)=\vartheta_{\eta}(x,y;0,\eta),\ C_1(x,y;\xi)=b(\xi,\eta)\vartheta(x,y;\xi,y),$$

$$C_2(x,y;\xi,\eta)=-a(\xi,\eta)\vartheta_{\xi}(x,y;\xi,\eta)-b(\xi,\eta)\vartheta_{\eta}(x,y;\xi,\eta)+$$
$$+\left[c(\xi,\eta)-a_{\xi}(\xi,\eta)-b_{\eta}(\xi,\eta)\right]\vartheta(x,y;\xi,\tau).$$

Воспользовавшись условиями (2.1.3) и (2.1.4) из (2.1.19), получим:

$$H_{i1}(y)g_1(y)+H_{i2}(y)g_2(y)=\Phi_i(y)+\int_{0}^{y}\left[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta)+H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)\right]d\eta+$$
$$+\int_{0}^{\chi(y)}H_{i5}(y,\xi)u(\xi,y)d\xi+\int_{0}^{\chi(y)}d\xi\int_{0}^{y}H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,i=1,2, \qquad (2.1.20)$$

где

$$H_{11}(y)=1+\int_{0}^{\chi(y)}P(x,y)A_1(x,y)dx,\ H_{12}(y)=\int_{0}^{\chi(y)}P(x,y)B_1(x,y)dx,$$

$$H_{13}(y,\eta)=-\int_0^{\chi(y)} P(x,y)A_2(x,y;\eta)dx,\, H_{14}(y,\eta)=-\int_0^{\chi(y)} P(x,y)B_2(x,y;\eta)dx\,,$$

$$H_{15}(y,\xi;\eta)=-\int_\xi^{\chi(y)} P(x,y)C_1(x,y;\xi)dx,\, H_{16}(y,\xi;\eta)=-\int_\xi^{\chi(y)} P(x,y)C_2(x,y;\xi,\eta)dx\,,$$

$$H_{21}(y)=A_1\big(\chi(y),y\big)+\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)A_1(x,y)dx\,,\; H_{22}(y)=B_1\big(\chi(y),y\big)+\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)B_1(x,y)dx\,,$$

$$H_{23}(y)=-A_2\big(\chi(y),y\big)-\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)A_2(x,y;\eta)dx\,,\; H_{24}(y)=-B_2\big(\chi(y),y\big)-\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)B_2(x,y;\eta)dx\,,$$

$$H_{25}(y,\xi)=-C_1\big(\chi(y),y\big)-\int_\xi^{\chi(y)} Q(x,y)C_1(x,y;\xi)dx\,, H_{26}(y,\xi,\eta)=-C_2\big(\chi(y),y;\xi,\eta\big)-\int_\xi^{\chi(y)} Q(x,y)C_2(x,y;\xi,\eta)dx\,,$$

$$\Phi_1(y)=\varphi_1(y)-\int_0^{\chi(y)} P(x,y)u_0(x,y)dx\,,\; \Phi_2(y)=\varphi_2(y)-u_0\big(\chi(y),y\big)-\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)u_0(x,y)dx\,.$$

2.1.4. Разрешимость задачи 2.1.1. Отметим, что система уравнений (2.1.19), (2.1.20) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $u(x,y), g_1(y), g_2(y)$. Если выполняется условие

$$\Delta=\begin{vmatrix} H_{11}(y) & H_{12}(y) \\ H_{21}(y) & H_{22}(y) \end{vmatrix}\neq 0, \tag{2.1.21}$$

то система (2.1.19), (2.1.20) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающее единственное решение.

В частности, при $P(x,y)=Q(x,y)=0$ имеем $\Delta=B_1\big(\chi(y),y\big)=$ $=-\vartheta\big(\chi(y),y;0,y\big)$. Так как $\forall\, y\in[0,h]: 0<x_0\le\chi(y)\le\ell$, то $\vartheta\big(\chi(y),y;0,y\big)>0$. Следовательно, $\Delta\neq 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Решение задачи 2.1.1 существует и единственно, если выполняются условия (2.1.2), (2.1.6) и (2.1.21).

2.2. Задача склеивания для гиперболических уравнений третьего порядка с интегральными условиями

2.2.1. Пусть D озназает область, ограниченную линиями $x=0, -h_1 \le y \le h\ (h_1, h>0), y=\sigma(x), 0\le x\le \ell, \quad \sigma(\ell)=-h_2,\ x=\ell, -h_2\le y\le 0 (h_1 \ge h_2>0),$ $x=\chi(y),\ 0\le y\le h,\ y=h, 0\le x\le x_0=\chi(h),$ рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-y^P u_y + a_1u_x + b_1u_y + c_1u=0,\ (x,y)\in D_1 = D\cap(y>0), \tag{2.2.1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy} + a_2u_x + b_2u_y + c_2u=0,\ (x,y)\in D_2 = D\cap(y<0). \tag{2.2.2}$$

Здесь $p>0,\ a_i, b_i, c_i\ (i=1,2)$, $\chi(y),\ \sigma(x)$ – удовлетворяют условия:

$$\begin{aligned}&\forall y\in[0,h]: x_0\le \chi(y)<\ell,\ \chi'(y)\le 0, \chi(0)=\ell,\\ &\forall x\in[0,\ell]: -h_1\le\sigma(x)\le -h_{2,}\ \sigma'(x)\ge 0, \sigma(0)=-h_1.\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Задача 1. Требуется определить $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap$ $\left[C^{2+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющую уравнение (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно, нелокальные условия

$$u(0,y)+\int_0^{\chi(y)} P(x,y)u(x,y)dx = \varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \tag{2.2.4}$$

$$u(\chi(y),y)+\int_0^{\chi(y)} Q(x,y)u(x,y)dx = \varphi_2(y),\ 0\le y\le h \tag{2.2.5}$$

и краевые условия

$$u(0,y)=\varphi_3(y),\ -h_1\le y\le 0, \tag{2.2.6}$$

$$u(x,\sigma(x))=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{2.2.7}$$

где $P(x,y),\ Q(x,y), \varphi_i(y)\ \ (i=\overline{1,3}),\ \psi(x)$ – заданные функции.

Пусть:

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x), 0\le x\le \ell, \tag{2.2.8}$$

где $\tau(x), \nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Будем изучать указанные ниже задачи:

Задача 2.2.2. Определить функцию $u(x,y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^{2+1}(D_1)$, удовлетворяющую уравнение (2.2.1), если выполняются условия: (2.2.4), (2.2.5) и $u(x,0) = \tau(x)$.

Задача 2.2.3. Определить функцию $u(x,y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^{1+2}(D_2)$, если выполняются условия: (2.2.8) и (2.2.6).

Отсюда нетрудно заметить, что, решая последовательно задачи 2.2.3 и 2.2.2, можно установить существование и единственность решения задачи 2.2.1.

2. Функциональное соотношение, полученное из области D_1. Устремляя y к нулю из уравнения (1), в силу обозначения (8), имеем

$$\nu''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + b_1(x,0)\nu(x) + c_1(x,0)\delta(x) = 0 \qquad (2.2.9)$$

Интегрируя дважды по x в пределах от 0 до x уравнение (2.2.9), будем иметь

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \nu'(0)x + \int_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x K(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \qquad (2.2.10)$$

где $\nu_0(x) = \varphi_3'(0) + a_1(0,0)\varphi_3(0)$, $K_1(x,\xi) = -a_1(\xi,0) + (x-\xi)\lfloor a_{1\xi}(\xi,0) - c_1(\xi,0)\rfloor$, $K(x,\xi) = -(x-\xi)b_2(\xi,0)$ – известные функции, а $\nu'(0)$ – неизвестная константа.

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (10) относительно $\nu(x)$, получим

$$\nu(x) = \nu_1(x) + r(x)\nu'(0) + \int_0^x K_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\,, \qquad (2.2.11)$$

где

$$\nu_1(x) = \nu_0(x) + \int_0^x R(x,\xi)\nu_0(\xi)d\xi,\ r(x) = x + \int_0^x R(x,\xi)\xi d\xi,$$

$$K_2(x,\xi) = K_1(x,\xi) + \int_\xi^x R(x,t)K_1(t,\xi)dt\,.$$

Равенство (2.2.11) представляет собой соотношение, полученное из области D_1.

3. Представление решения задачи 2. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка области $D_2=\{(\xi,\eta):0<\xi<\ell,\ \sigma(\xi)<\eta<0\}$. Интегрируя тождество

$$uL_2(u)-uL_2^*(\vartheta)=(-\vartheta_\eta u_\eta+a_2\vartheta u)_\xi-(-\vartheta u_{\xi\eta}-\vartheta_{\xi\eta}u-b_2\vartheta u)_\eta$$

по области $D_2^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$ и учитывая формулу Грина, будем иметь

$$\iint\limits_{D_2^*}\left[\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)\right]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}\left(-\vartheta u_{\xi\eta}-\vartheta_{\xi\eta}u-b_2\vartheta u\right)d\xi+(-\vartheta_\eta u_\eta+a_2\vartheta u)d\eta. \quad (2.2.12)$$

Вычисляя криволинейные интегралы по границам области D_2^* и с учетом условий (2.2.6) и (2.2.8) из (2.2.12), получим представление решения задачи 2.2.2:

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\vartheta_\eta(x,y;x,0)\,\tau(x)-\vartheta(x,y;x,0)\nu(x)+\Phi_1(x,y)+\\&+\int\limits_0^x V_1(x,y;\xi)\,\tau(\xi)d\xi+\int\limits_0^x\vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi,\end{aligned} \quad (2.2.13)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y)&=\vartheta(x,y;0,0)\,\varphi_3'(0)+\vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_3(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,0)\varphi_3(0)-\\&-\int\limits_0^y\left[\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+a_2(0,y)\,\vartheta(x,y;0,\eta)\right]\varphi_3(\eta)d\eta,\end{aligned}$$

$$V_1(x,y)=-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;\xi,0)-b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$$

$\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – определяется как решение сопряженной задачи:

$$L_2^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\eta\eta}-(a_2\vartheta)-(b_2\vartheta)+c_2\vartheta=0,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0\,,\ \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=1,\ 0\le\xi\le x,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\omega_2(x,y;\eta),\,,\ y\le\eta\le 0,$$

а $\omega_2(x,y;\eta)$ – является решением задачи

$$\begin{cases}\vartheta_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)+a_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\\ \vartheta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_\eta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1.\end{cases}$$

Исключая $\nu(x)$ из (2.2.11) и (2.2.13), получим

$$u(x,y)=\vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x)+\int\limits_0^x V_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi_2(x,y)+r_1(x)\nu'(0), \qquad (2.2.14)$$

где

$$V_2(x,y;\xi)=V_1(x,y;\xi)-\vartheta(x,y;x,0)\,K_2(x,\xi)+\int\limits_\xi^x \vartheta_\xi(x,y;t,0)\,K_2(t,\xi)dt,$$

$$\Phi_2(x,y)=\Phi_1(x,y)-\vartheta(x,y;x,0)\nu_1(x)+\int\limits_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)d\xi,$$

$$r_1(x)=-\vartheta(x,y;x,0)r(x)+\int\limits_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\,r(\xi)d\xi\,.$$

2.2.4. Используя граничное условие (2.2.7) из (2.2.14), имеем

$$\vartheta_\eta(x,\sigma(x);\,x,0)\tau(x)=-\int\limits_0^x V_2(x,\sigma(x);\,\xi)\tau(\xi)d\xi+\psi_1(x)-r_1(x)\nu'(0), \qquad (2.2.15)$$

где $\psi_1(x)=\psi(x)-\Phi_2(x,\sigma(x))$.

Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)\neq 0, \qquad (2.2.16)$$

то уравнение (2.2.15) запишем в виде

$$\tau(x)=\psi_2(x)+r_2(x)\nu'(0)+\int\limits_0^x V_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (2.2.17)$$

где

$$\psi_2(x)=\frac{\psi_1(x)}{\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)},\ r_2(x)=-\frac{r_1(x)}{\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)},\ V_3(x,\xi)=-\frac{V_2(x,\sigma(x);\xi)}{\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)}.$$

Обращая уравнение (2.2.17), получим

$$\tau(x)=\psi_3(x)+r_3(x)\nu'(0), \qquad (2.2.18)$$

где

$$\psi_3(x)=\psi_2(x)+\int\limits_0^x R_2(x,\xi)\psi_2(\xi)d\xi,\quad r_3(x)=r_2(x)+\int\limits_0^x R_2(x,\xi)r_2(\xi)d\xi,$$

$R_2(x,\xi)$ – резольвента ядра $V_3(x,\xi)$.

Нетрудно заметить, что из условия (2.2.5) вытекает условие согласования

$$\tau(\ell)+\int_0^\ell Q(x,0)\tau(x)dx=\varphi_2(0). \tag{2.2.19}$$

Если

$$r=r_3(\ell)+\int_0^\ell Q(x,0)r_3(x)dx\neq 0, \tag{2.2.20}$$

тогда из (2.2.18), с учетом (2.2.19), найдем

$$\nu'(0)=\frac{1}{r}\left[\varphi_2(0)-\psi_2(\ell)-\int_0^\ell Q(x,0)\psi_2(x)dx\right] \tag{2.2.21}$$

Подставляя значение $\nu'(0)$ из (2.2.20) в (2.2.18) окончательно найдем неизвестную функцию $\tau(x)$. Тогда из формулы (2.2.11) найдем и $\tau(x)$.

Поставляя найденные значения $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в представление (2.2.13) получим решение задачи 2.2.3.

После определения $\tau(x)$, как и в задаче 2.1.1, решение задачи 2.2.1 эквивалентным образом сводится к разрешимости системы уравнений вида

$$H_{i1}(y)g_1(y)+H_{i2}(y)g_2(y)=\Phi_i(y)+\int_0^y\left[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta)+H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)d\eta\right]+$$

$$+\int_0^{\chi(y)}H_{i5}(y,\eta)u(\xi,y)d\xi+\int_0^{\chi(y)}d\xi\int_0^y H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,\quad i=1,2,$$

где

$u(0,y)=g_1(y), u_x(0,y)=g_2(y)$ а H_{ij} $(i=1,2;\ j=\overline{1,6})$ – заданные функции, разрешимость которых устанавливается при выполнения условия

$$\forall y\in[0,h]: H_{11}(y)H_{22}(y)-H_{12}(y)H_{21}(y)\neq 0. \tag{2.2.22}$$

Итак, нами доказана теорема существования и единственности решения задачи.

Теорема 2.2.1. Решение задачи 2.2.1 существует и единственно, если выполняются условия (2.2.3), (2.2.16), (2.2.20), (2.2.22).

2.3. Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения

В области $D=\{(x,y):0<x<+\infty,\ 0<y<h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxx}-u_{xy}+c(x,y)u=f(x,y), \tag{2.3.1}$$

где $c(x,y), f(x,y),$ – заданные функции.

В силу того, что уравнение характеристик имеет одну трехкратную действительную характеристику, уравнение (2.3.1) принадлежит первому каноническому виду относительно старших производных [22].

Задача 2.3.1. Требуется определить в области D непрерывное и ограниченное вместе с производной u_x решение уравнения (1), если выполняются условия:

$$u(0,y)=\varphi(y),\ 0\le y\le h, \tag{2.3.2}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty, \tag{2.3.3}$$

$$\int_0^\alpha u(x,y)\,dx=E(y),\ 0\le y\le h,\ \alpha=const>0, \tag{2.3.4}$$

где $\varphi(y),\ \tau(x),\ E(y)$ – заданные функции, причем

$$c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{D}),\ E(y),\ \varphi(y)\in C^1[0,h],\ \ \tau(x)\in C^3[0,+\infty), \tag{2.3.5}$$

$$\int_0^\alpha \tau(x)\,dx=E(0),\ \ \tau(0)=\varphi(0). \tag{2.3.6}$$

Введя обозначение

$$u_x(x,y)=\vartheta(x,y), \tag{2.3.7}$$

уравнение (2.3.1) запишем в виде

$$\vartheta_{xx}-\vartheta_y=F(x,y), \tag{2.3.8}$$

где $F(x,y)=f(x,y)-c(x,y)u.$

Пусть

$$u_x(0,y)=\theta(y), \tag{2.3.9}$$

где $\theta(y)$ – считается неизвестной функцией. Для $\vartheta(x,y)$ нетрудно получить следующие условия:

$$\vartheta(0,y)=\theta(y),\ 0\le y\le h,\ \vartheta(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty . \qquad (2.3.10)$$

Решение задачи (2.3.8), (2.3.10) известно и представимо в виде [6]

$$\begin{aligned}\vartheta(x,y)=&\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\,\theta(\eta)d\eta+\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,0)\,\tau'(\xi)d\xi+\\&+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi,\end{aligned} \qquad (2.3.11)$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ – функция Грина уравнения теплопроводности.

Учитывая обозначение $F(x,y)$, из (2.3.11) имеем

$$u_x(x,y)=\Phi(x,y)+\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (2.3.12)$$

где $\Phi(x,y)=\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,0)\tau'(\xi)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)d\xi.$

Интегрируя уравнение (2.3.12) по x будем иметь

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\Phi_0(x,y)+\int_0^x ds\int_0^y G_\xi(s,y;0,\eta)\,\theta(\eta)d\eta-\\&-\int_0^x ds\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} G(s,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi,\end{aligned} \qquad (2.3.13)$$

где $\Phi_0(x,y)=\varphi(y)+\int_0^x \Phi(s,y)ds$. Заметим, что

$$\int_0^x ds\int_0^y G_\xi(s,y;0,\eta)\,\theta(\eta)d\eta=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\theta(\eta)d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta .$$

Тогда уравнение (2.3.13) примет вид

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}\left[c(\xi,\eta)\int_0^\alpha G(s,y;\xi,\eta)ds\right]u(\xi,\eta)d\xi. \tag{2.3.14}$$

Отсюда, используя условие (2.3.4), получим

$$\int_0^y\frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta=E_1(y)+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y\theta(\eta)d\eta\int_0^\alpha G(s,y;0,\eta)ds-$$
$$-\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y d\eta\int_0^\alpha(\alpha-s)ds\int_0^{+\infty}G(s,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\equiv Q(y), \tag{2.3.15}$$

где $E_1(y)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\left[E(y)-\int_0^\alpha\Phi_0(s,y)ds\right]$. Из (2.3.6) получим, что $E_1(0)=0.$ Тогда $Q(0)=0$. Определим производную:

$$Q'(y)=E_1'(y)+\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\theta(y)+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y G_s(\alpha,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^\alpha(\alpha-s)c(s,y)u(s,y)ds-$$
$$-\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}[G(\alpha,y;\xi,\eta)-G(0,y;\xi,\eta)]c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi.$$

После обращения уравнения (2.3.15) получим

$$\theta(y)=\theta_0(y)+\int_0^y H_1(y,\eta)\theta(\eta)d\eta+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha H_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+$$
$$+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}H_3(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{2.3.16}$$

где $H_1(y,\eta)=\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi(y-\eta)}}+\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_\eta^y\frac{G_s(\alpha,t;0,\eta)}{\sqrt{y-t}}dt,\ H_2(y,\xi,\eta)=-\frac{2(\alpha-\xi)c(\xi,\eta)}{\alpha\sqrt{\pi(y-\eta)}},$

$H_3(y,\xi,\eta)=-\frac{2c(\xi,\eta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_\eta^y\frac{G(\alpha,t;\xi,\eta)-G(0,t;\xi,\eta)}{\sqrt{y-t}}dt,\ \theta_0(y)=\frac{1}{\pi}\int_\eta^y\frac{E_1'(t)}{\sqrt{y-t}}dt.$

Заметим, что

$$|H_1(y,\eta)|\le\frac{C_1}{\sqrt{y-\eta}},\ |H_2(y,\xi,\eta)|\le\frac{C_2}{\sqrt{y-\eta}},$$

$$|H_3(y,\xi,\eta)| \le \frac{C_3}{\sqrt{y-\eta}},\ 0 \le x \le \beta, \quad \beta >> 0,\ |H_3(y,\xi,\eta)| \le \frac{C_4}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}},\ x > \beta.$$

Из (2.3.16) относительно $\theta(y)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью:

$$\theta(y) = \theta_1(y) + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha T_1(y,\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} T_2(y;\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\xi, \quad (2.3.17)$$

где $T_1(y;\xi,\eta) = H_2(y;\xi,\eta) + \int_\eta^y R(y,t) H_2(t;\xi,\eta)\, dt,$

$$T_2(y;\xi,\eta) = H_3(y;\xi,\eta) + \int_\eta^y R(y,t) H_3(t;\xi,\eta)\, dt,\ \theta_1(y) = \theta_0(y) + \int_0^y R(y,t)\theta_0(t) dt,$$

$R(y,t)$ – резольвента ядра $H_1(y,\eta)$.

Подставляя значение $\theta(y)$ из (2.3.17) в (2.3.14), получим

$$u(x,y) = \Phi_1(x,y) + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha K_1(x,y;\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} K_2(x,y;\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\xi, \quad (2.3.18)$$

где

$$K_1(x,y;\xi,\eta) = \int_\eta^y H(x,y;s) T_1(s;\xi,\eta) ds,\ H(x,y;s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-s)}} - G(x,y;0,s),$$

$$K_2(x,y;\xi,\eta) = c(\xi,\eta) \int_0^x G(s,y;\xi,\eta) ds + \int_\eta^y H(x,y;s) T_2(s;\xi,\eta) ds,$$

$$\Phi_1(x,y) = \Phi_0(x,y) + \int_0^y H(x,y;s)\theta_1(s) ds\ .$$

Существование единственного решения (2.3.18) устанавливается методом последовательных приближений.

Доказана теорема.

Теорема 2.3.1. Единственное непрерывное и ограниченное решение задачи 2.3.1 существует, если выполняются условия (2.3.5) и (2.3.6).

Заключение по главе 2

В данной главе рассмотрены нелокальные задачи для гиперболических и параболических уравнений третьего порядка с условиями, содержащие интегральные члены, а также задачи склеивания для гиперболических уравнений с различными некратными действительными характеристиками.

По результатам исследования установлены достаточные условия существования единственного решения сформулированных задач, определены поведения криволинейных границ, обеспечивающие корректности задач, получены представления решения задач, выражающиеся через данные задачи.

ГЛАВА 3. ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

3.1. Краевая задача для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с одной характеристикой линии склеивания

3.1.1. В области $D = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_1 < y < h\}$ $(\ell, h, h_1 > 0)$ рассмотрим уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} = 0, \quad (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \tag{3.1.1}$$

$$\begin{gathered} L_2(u) \equiv u_{xxy} + a_2 u_{xx} + b_2 u_{xy} + c_2 u_x + d_2 u_y + e_2 u = 0, \\ (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \end{gathered} \tag{3.1.2}$$

где a_2, b_2, d_2, c_2, e_2 – известные функции.

Линия $y = 0$ является трехкратной действительной характеристикой уравнения (3.1.1), поэтому это уравнение часто называется уравнением с кратными характеристиками [1]. Однако, из-за наличия члена u_{xy}, постановка задачи и свойства решения уравнения (3.1.1) аналогичны параболическим уравнениям.

Уравнение (3.1.2) по терминологии работы [67] называется псевдопараболическим уравнением. Это уравнение имеет двукратную действительную характеристику $y = 0$ и однократную характеристику $x = 0$.

Здесь рассматривается краевая задача для уравнений (3.1.1) и (3.1.2), где условия склеивания задаются двукратной характеристике $y = 0$.

Рассматриваемые уравнения используются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [41].

Относительно коэффициентов уравнения предполагаем следующее:

$$\begin{gathered} a_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), b_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ c_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2),\ d_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2)\ e_2 \in C(\overline{D}_2). \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Задача 3.1.1. Требуется определить решения уравнений (3.1.1) и (3.1.2) в областях D_1 и D_2 из класса

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^{1+1}(D)\cap[C^{3+0}(D_1)\cap C^{2+1}(D_2)],$$

если выполяются краевые условия

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u(\ell,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{3.1.4}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_1\le y\le 0 \tag{3.1.5}$$

и условия склеивания

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \tag{3.1.6}$$

где $\varphi_i(y)$ $(i=1,3)$, $\chi_j(y)$ $(j=1,2)$ – известные функции, причем

$$\begin{aligned}&\varphi_1(y),\varphi_3(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\\&\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0]\ (i=1,2)\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$\varphi_1(0)=\chi_1(0),\varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\varphi_2(0)=\chi_2(0). \tag{3.1.8}$$

Пусть:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{3.1.9}$$

где $\tau(x),\nu(x)$ – подлежит определению.

3.1.2. Будем изучать задачу: найти решение уравнения (3.1.2), если искомая функция $u(x,y)\in C^1(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2)\cap C^{2+1}(D_2)$ удовлетворяет краевым условиям (3.1.5) и начальному условию

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{3.1.10}$$

Задача решается методом функции Римана.

Пусть

$$\begin{aligned}&\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)=[\vartheta u_{\xi\eta}\vartheta_{\xi\eta}u+a_2\vartheta u_\xi-(a_2\vartheta)_\xi u+\\&b_2\vartheta u_\eta+C_2\vartheta u]_\xi-[\vartheta_\xi u_\xi+(b_2\vartheta)_\xi u-d_2\vartheta u]_\eta,\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

где $L_2^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\xi\eta}+(a_2\vartheta)_{\xi\xi}+(b_2\vartheta)_{\xi\eta}-(c_2\vartheta)_\xi-(d_2\vartheta)_\eta+e_2\vartheta.$

Пусть $\vartheta(x,y,\xi,\eta)$ – решение задачи:

$$L^*_{2(\xi,\eta)}(\vartheta(x,y;\xi,\eta))=0,(\xi,\eta)\in D_2^*=\{(x,y):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}, \tag{3.1.12}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\,|_{\xi=x}=0,\quad \vartheta_{\xi}(x,y;\xi,\eta)\,|_{\xi=x}=\exp\left(\int\limits_{y}^{\eta}a_2(x,t)dt\right),\; y\le\eta\le 0; \qquad (3.1.13)$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\,|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),\; 0\le\xi\le x, \qquad (3.1.14)$$

причем $\theta_1(x,y;\xi)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)]_{\xi}+d_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\;\; 0<\xi<x,\\ &\vartheta(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=0,\;\; \vartheta_{\xi}(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=1.\end{aligned} \qquad (3.1.15)$$

При выполнении условия (3.1.3) задача (3.1.15) однозначно разрешима.

Решение задачи (3.1.12) - (3.1.14) можно построить методом интегральных уравнений. Решение этой задачи назовем функцией Римана.

Интегрируя тождество (3.1.11) по области D_2^*, получим

$$\begin{aligned}&\iint\Big[\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)\Big]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}\Big[\vartheta_{\xi}u_{\xi}+(b_2\vartheta)_{\xi}u-d_2\vartheta u\Big]d_{\xi}+\\ &+\Big[\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u+a_2\vartheta u_{\xi}-(a_2\vartheta)_{\xi}u+b_2\vartheta u_{\eta}+c_2\vartheta u]d_{\eta}\Big].\end{aligned} \qquad (3.1.16)$$

Из (3.1.16) имеем представление решения задачи 3.1.1 в D_2:

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\vartheta_{\xi}(x,y;x,0)\tau(x)+\int\limits_0^x A_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\ &+\int\limits_0^y\Big[b_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\vartheta(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)\Big]d\eta\end{aligned} \qquad (3.1.17)$$

где $A_1(x,y;\xi)=-\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+\big[b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\big]_{\xi}-d_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$

$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_{\xi}(x,y;0,\eta)-b_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta),\; C_1(x,y;\eta)=-a_2(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta),$

$E_1(x,y;\eta)=[a_{2\xi}(0,\eta)-C_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\vartheta_{\xi}(x,y;0,\eta).$

Вычислив производную по y от $u(x,y)$ с использованием формулы (3.1.17), затем устремляя y к нулю, имеем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)\tau(x)+\int\limits_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau(\xi)d\xi+g_1(x), \qquad (3.1.18)$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\vartheta(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_1(0).$

3.1.3. Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Уравнение (3.1.1) запишем в виде

$$u_{xx} - u_y = \omega(y) - \varphi_1'(y), \tag{3.1.19}$$

где $\omega(y)$ – неизвестная функция.

Из (3.1.19) при $y \to 0$ имеем

$$\tau''(x) - \nu(x) = \omega(0) - \varphi_1'(0). \tag{3.1.20}$$

Исключая $\nu(x)$ из (3.1.18) и (3.1.20), получим

$$\tau''(x) = \omega(0) + a_1(x)\tau(x) + \int_0^x \widetilde{A}_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \widetilde{g}_1(x), \tag{3.1.21}$$

где $\widetilde{g}_1(x) = g_1(x) - \varphi_1'(0)$, $a_1(x) = \vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)$, $\widetilde{A}_1(x,\xi) = A_{1y}(x,0;\xi)$, а $\omega(0)$ – неизвестная константа.

Решение задачи Коши для уравнения (3.1.21) при условии

$$\tau(0) = \chi_1(0),\ \tau'(0) = \chi_2(0)$$

представим в виде

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\omega(0)x^2 + \int_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + g_2(x), \tag{3.1.22}$$

где $A_2(x,\xi) = a_1(\xi)(x-\xi) + \int_\xi^x (x-t)\widetilde{A}_1(t,\xi)dt$,

$g_2(x) = \chi_1(0) + \chi_2(0)x + \int_0^x (x-t)\widetilde{g}_1(t)dt.$

Если учесть условие согласования $\tau(\ell) = \varphi_2(0)$, то из (3.1.22) можно определить $\omega(0)$:

$$\omega(0) = \frac{2}{\ell^2}\left[\varphi_2(0) - g_2(\ell)\right] - \frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi\,.$$

Тогда из (3.1.22) получим следующее интегральное уравнение для $\tau(x)$:

$$\tau(x) = g_3(x) + \int_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi - \frac{x^2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (3.1.23)$$

где $g_3(x) = g_2(x) + \frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(o) - g_2(e)]x^2.$

После обращения вольтерровской части уравнения (3.1.23) приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = g(x) + \int_0^\ell H(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (3.1.24)$$

где $H(x,\xi) = -\frac{1}{\ell^2}\left[x^2 + \int_0^x R(x_1 t)t^2\right]A_2(\ell,\xi)$, $g(x) = g_3(x) + \int_0^x R(x,\xi)g_3(\xi)d\xi$,

$R(x,t)$ – резольвента ядра $A_2(x,t)$

Согласно общей теории [36], если

$$\ell H < 1, \qquad (3.1.25)$$

где $H = \max\limits_{0\le x,\xi\le\ell}\left|H(x,\xi)\right|$, то уравнение (3.1.24) допускает единственное решение.

3.1.4. С помощью функции Грина $G_2(x,y;\xi,\eta)$

$$G_2(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \right.$$
$$\left. -\exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

представим решение уравнения (3.1.19), удовлетворяющее краевым условием

$$u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ u(\ell,y) = \varphi_3(y),\ u(x,0) = \tau(x)$$

в виде

$$u(x,y) = -\int_0^y G(x,y;0,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta + \int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^y \omega(\eta)d\eta\int_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi + \int_0^y \varphi_1'(\eta)d\eta\int_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi. \qquad (3.1.26)$$

Из (3.1.26), с помощью условия $u(0,y)=\varphi_1(y)$, получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^y K(y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r(y), \qquad (3.1.27)$$

где

$$K(y,\eta)=\int\limits_0^\ell G(0,y;\xi,\eta)d\xi,$$

$$r(y)=\int\limits_0^y G_\xi(0,y;0,\eta)\varphi_2(y)d\eta+\int\limits_0^y G_\xi(0,y;\ell,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta-$$

$$-\int\limits_0^y G(0,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int\limits_0^y \varphi_1'(\eta)d\eta\int\limits_0^\ell G(0,y;\xi,\eta)d\xi\varphi_1(y).$$

Так как

$$K(y,\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}}\ell^{-s^2}ds+\int\limits_0^\ell q(y,\xi,\eta)d\xi,$$

где

$$q(y;\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left\{\exp\left[-\frac{(3-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\xi\right\}-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-2n\ell-4)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\xi\right\},$$

здесь $'$ – означает отсутствие члена суммы при $n=1$.

Если учесть, что $\lim\limits_{\eta\to y}K(y,\eta)=1$, то из (3.1.27) путем дифференцирования получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\omega(y)+\int\limits_0^y K_y(y,\eta)\omega(\eta)d\eta=r'(y),$$

допускающее однозначное решение.

Подставляя найденную функцию $\omega(y)$ в (26), получим решение задачи 3.1.1 в области D_1.

Таким образом, получаем следующий результат:

Теорема 3.1.1. Решение задачи 3.1.1 существует и единственно, если выполняются условия (3.1.3), (3.1.7), (3.1.8) и (3.1.25).

3.2. Единственность решения задачи склеивания для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка

Рассмотрим задачу сопряжения для уравнений вида

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} + \mathrm{a(x,y)}u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0,\ (x,y) \in D_1, \tag{3.2.1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxx} - u_{yy} = 0,\ (x,y) \in D_2, \tag{3.2.2}$$

где $D_1 = \{(x,y): 0 < x < \ell, 0 < y < h_1\}$, $D_2 = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_2 < y < 0\}$,

$\ell, h_1, h_2 > 0$, а $D = D_1 \cup D_2$.

Уравнения (3.2.1) и (3.2.2) по классификации работы [22] принадлежат разным типам. Прямая $y = 0$ является характеристикой одновременно для уравнений (3.2.1) и (3.2.2). Краевые задачи для уравнения вида (3.2.2) рассмотрены в работе [63].

Задача 3.2.1. Найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap$ $\cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^{3+2}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнение (3.2.1) в области D_1, а в области D_1 – уравнение (3.2.2), а также же краевые условия:

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h_1, \tag{3.2.3}$$

$$\begin{gathered} u(0,y) = \chi_1(y),\ u(\ell,y) = \chi_2(y), u_x(\ell,y) = \chi_3(y),\ -h_2 \le y \le 0 \\ u(x,-h_2) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \end{gathered} \tag{3.2.4}$$

где $\varphi_i(y)\ (i = 1,2),\ \chi_j(y)\ (j = \overline{1,3})$ – заданные функции, причем

$$\begin{gathered} \varphi_i(y) \in C^1[0,h_1]\ (i = 1,2),\ \chi_j(y) \in C^1[-h_2,0]\ (j = \overline{1,3}), \\ \psi(0) = \chi_1(-h_2), \psi(\ell) = \chi_2(-h_2), \end{gathered} \tag{3.2.5}$$

$$\varphi_i^{(k)}(0) = \chi_i^{(k)}(0)\ \ (i = 1,2;\ k = 0,1). \tag{3.2.6}$$

На линии $y = 0$ имеем:

$$u(x,+0) = u(x,-0),\ u_y(x,+0) = u_y(x,-0), 0 \le x \le \ell. \tag{3.2.7}$$

Относительно коэффициентов уравнения (3.2.1) предполагаем следующее условие:

$$a(x,y)\in C(D_1)\cap C^{1+0}(D_1),\ \mathrm{b}(x,y)\in C(D_1)\cap C^{0+1}(D_1),\ c(x,y)\in C(\overline{D_1})\,. \tag{3.2.8}$$

Используя условия сопряжения (3.2.7) введем функции:

$$u(x,\pm 0)=\tau(x),\ u_y(x,+0)=\nu(x), 0\le x\le \ell\,, \tag{3.2.9}$$

где $\tau(x), \nu(x)$ – искомые функции.

Таким образом, в силу (3.2.6) получаем следующие условия:

$$\begin{gathered}\tau(0)=\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \tau'(\ell)=\chi_3(0),\ \tau(\ell)=\varphi_2(0)=\chi_2(0),\\ \chi_1(-h_2)=\psi(0),\ \chi_2(-h_2)=\psi(\ell),\end{gathered} \tag{3.2.10}$$

$$\nu(0)=\varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\ \nu(\ell)=\varphi_2'(0)=\chi_2'(0)\,. \tag{3.2.11}$$

При $y\to +0$ из уравнения (3.2.1) имеем

$$\nu''(x)+a(x,0)\tau'(x)+b(x,0)\nu(x)+c(x,0)\tau(x)=0,\ 0<x<\ell\,. \tag{3.2.12}$$

С применением метода интегралов энергии докажем единственность решения задачи 3.2.1.

Теорема 3.2.1. Задача 3.2.1 имеет единственное решение, если выполняются условия (3.2.5), (3.2.6), (3.2.8), (3.2.10), (3.2.11) и

$$\forall x\in[0,\ell]: c(x,0)\ne 0\,, \tag{3.2.13}$$

$$\forall x\in[0,\ell]: a(x,0)\ne 0,\ \frac{1-b(x,0)}{c(x,0)}\le 0\,, \tag{3.2.14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\forall x\in[0,\ell]: b(x,h_1)\le 0,\\ &\forall (x,y)\in D_1: a(x,y)+b_y(x,y)-2c(x,y)\ge 0,\end{aligned}\right\}, \tag{3.2.15}$$

Доказательство 3.2.1. Рассмотрим задачу с однородными условиями

$$u(0,y)=0,\ u(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h_1, \tag{3.2.16}$$

$$u(0,y)=0,\ u(\ell,y)=0,\ u_x(\ell,y)=0,\ -h_2\le y\le 0, \tag{3.2.17}$$

$$u(x,-h_2)=0\,,\ 0\le x\le \ell\,,$$

при этом условия согласования (3.2.10), (3.2.11) примут вид:

$$\tau(0)=0,\ \tau(\ell)=0,\ \tau'(\ell)=0, \tag{3.2.18}$$

$$\nu(0)=0,\ \nu(\ell)=0. \tag{3.2.19}$$

Интегрируя тождество

$$uL_2(u)=\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)_x-\left(uu_y\right)_y+u_y^2=0$$

по области D_2 и используя формулу Грина, имеем

$$\int\limits_{\partial D_2} uu_y dx+\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)dy+\iint\limits_{D_2} u_y^2 dxdy=0. \qquad (3.2.20)$$

Вычисляя значения криволинейного интеграла по границе области D_2 из (3.2.17), с учетом (3.2.14), получим

$$\int\limits_0^\ell \tau(x)\nu(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-h_2}^0 u_x^2(0,y)dy+\iint\limits_{D_2} u_y^2(x,y)dxdy\ge 0. \qquad (3.2.21)$$

С другой стороны, в силу условия (3.2.13) из (3.2.14) и (3.2.15), (3.2.16) будем иметь:

$$\int\limits_0^\ell \tau(x)\nu(x)dx=\int\limits_0^\ell \frac{1-b(x,0)}{c(x,0)}\nu^2(x)dx\le 0. \qquad (3.2.22)$$

Из (3.2.21) и (3.2.22) получаем равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-h_2}^0 u_x^2(0,y)dy+\iint\limits_{D_2} u_y^2(x,y)dxdy=0,$$

из которого имеем

$$\forall y\in[-h_2,0]:\ u_x(0,y)=0,\ \ \forall(x,y)\in\overline{D_2}:\ u(x,y)\equiv 0.$$

Тогда в области D_1 приходим к следующей однородной задаче:

$$L_1(u)=0, \qquad (3.2.23)$$

$$\begin{matrix} u(0,y)=0,\ u(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h_1, \\ u(x,0)=0,\ 0\le x\le \ell. \end{matrix}, \qquad (3.2.24)$$

Интегрируя тождество

$$u\,L_1(u)\equiv\left(u\,u_{xy}+\frac{1}{2}au^2\right)_x-\frac{1}{2}\left(u_x^2-bu^2\right)_y+\frac{1}{2}\left(2c-a_x-b_y\right)u^2=0$$

по области D_1 и учитывая (3.2.24), имеем

$$\int_0^{\ell}\left[u_x^2(x,h_1)-b(x,h_1)u^2(x,h_1)\right]dx+\iint_{D_2}\left(a_x+b_y-2c\right)u^2dxdy=0. \qquad (3.2.25)$$

При выполнении условия (3.2.15) из (3.2.25) получим

$$\forall x\in[0,\ell]: u(x,h_1)=0,\ u_x(x,h_1)=0,$$

$$\forall (x,y)\in D_2 : u(x,y)=0.$$

Отсюда, в силу непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{D_2}$, следует, что

$$\forall u(x,y)\in \overline{D_2} : u(x,y)\equiv 0.$$

Это означает, что однородная задача (3.2.23), (3.2.24) имеет только тривиальное решение. Следовательно, решение задачи 3.2.1 единственно.

Теорема 3.2.1 доказана.

Заключение по главе 3

Установлены достаточные условия существования и единственности решений локальных задач для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с единственной характеристической линией изменения типа.

В гиперболической части области методом сопряженных задач получены представления решения задач. Используя соотношения, полученные из параболической части области, разрешимость задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, допускающего единственное решение.

В параболической части области методом понижения порядка уравнения и методом интегральных уравнений получено представление решения задачи.

С применением метода интегралов энергии доказана единственность решения задачи.

ГЛАВА 4. ЗАДАЧИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

4.1. Задачи склеивания для уравнений смешанного типа третьего порядка

4.1.1. Пусть D – область, ограниченная отрезками прямых $x=0, y=-h_1$, $x=\ell, y=h, x=-\ell_1, y=0, (\ell,\ell_1,h,h_1>0)$.

Рассмотрим задачи сопряжения для уравнений:

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1, \tag{4.1.1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,(x,y)\in D_2, \tag{4.1.2}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,(x,y)\in D_3, \tag{4.1.3}$$

где $a_i,d_i,b_j,c_j,e_j,(i=\overline{1,3}, j=2{,}3)$ – заданные функции, а

$D_1=D\cap(x>0,y>0), D_2=D\cap(x>0,y<0), D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

Пусть:

$$\begin{aligned}&a_1,d_1\in C(\overline{D}_1), a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2), b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\\&a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3), b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3),\\&c_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{1+0}(D_j), d_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{0+1}(D_j), e_j\in C(\overline{D}_j)(j=2{,}3)\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Задача 4.1.1. Требуется определить функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_j)\cap$ $\cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{2+1}(D_2)\cup C^{1+2}(D_3)]\cap C^{3+0}$, $(i=1{,}2{,}3)$, удовлетворяющую уравнениям (4.1.1), (4.1.2) и (4.1.3) в областях D_1, D_2, и D_3 соответственно, краевым условиям:

$$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, \tag{4.1.5}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y), u_x(0,y)=\chi_2(y), -h_1\le y\le 0, \tag{4.1.6}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x), u_y(x,0)=\psi_2(x), -\ell_1\le x\le 0 \tag{4.1.7}$$

и условиям склеивания

$$u(x,-0)=u(x,+0), u_y(x,-0)=u_y(x,+0), 0\le x\le \ell, \qquad (4.1.8)$$

$$u(-0,y)=u(+0,y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y), 0\le y\le h, \qquad (4.1.9)$$

где $\varphi_i(y),\chi_i(y),\psi_i(x)(i=1,2)$ – известные функции, причем

$$\begin{aligned}&\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\\ &\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0](i=1,2);\end{aligned} \qquad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\psi_1(0)=\chi_1(0),\psi_2(0)=\chi_1'(0),\\ &\psi_1'(0)=\chi_2(0),\psi_2'(0)=\chi_2'(0).\end{aligned} \qquad (4.1.11)$$

Пусть:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x), u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x), 0\le x\le \ell, \quad (4.1.12)$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y), 0\le y\le h, \qquad (4.1.13)$$

где $\tau_1(x),\tau_2(y),\nu_1(x),\nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

4.1.2. В области D_2 найдем решение уравнения (4.1.2), когда искомая функция удовлетворяет условиям (4.1.6) и

$$u(x,0)=\tau_1(x), 0\le x\le \ell. \qquad (4.1.14)$$

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned}&\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)=[\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+a_2\upsilon u_\xi-(a_2\upsilon)_\xi u+\\ &+b_2\upsilon u_\eta+c_2\upsilon u]_\xi-[\upsilon_\xi u_\xi+(b_2\upsilon)_\xi u-d_2\upsilon u]_\eta,\end{aligned} \qquad (4.1.15)$$

где $L^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{\xi\xi\eta}+(a_2\upsilon)_{\xi\xi}+(b_2\upsilon)_{\xi\eta}-(c_2\upsilon)_\xi-(d_2\upsilon)_\eta+e_2\upsilon.$

Выберем произвольную точку $B_1^*(x,y)$ внутри области D_2. После интегрирования равенства (4.1.15) по области $D_2^*=\{(x,y):0<\xi<x, y<\eta<0\}$ получим

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D_2^*}[(\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}[\upsilon_\xi u_\xi+(b_2\upsilon)_\xi u-d_2\upsilon u]d\xi+\\ &+[\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+a_2\upsilon u_\xi-(a_2\upsilon)_\xi u+b_2\upsilon u_\eta+c_2\upsilon u]d\eta.\end{aligned} \qquad (4.1.16)$$

Пусть $\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ – является решением задачи Гурса:

$$L_2^*(\upsilon)=0,(\xi,\eta)\in D_2^*, \qquad (4.1.17)$$

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)\,|_{\xi=x}=0, \upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)\,|_{\xi=x}=\exp\left(\int\limits_y^\eta a_2(x,t)dt\right), y\le\eta\le 0, \qquad (4.1.18)$$

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)\,|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi), 0\le\xi\le x, \qquad (4.1.19)$$

где $\theta_1(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned}&\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)=0, 0<\xi<x,\\&\upsilon(x,y;\xi,y)\,|_{\xi=x}=0, \upsilon_\xi(x,y;\xi,y)\,|_{\xi=x}=1.\end{aligned} \qquad (4.1.20)$$

Задачи (4.1.17) – (4.1.19) сведем к уравнению вида

$$\begin{aligned}&\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\int\limits_x^\xi B(\xi,\eta,s)\upsilon(x,y;s,\eta)ds+\int\limits_y^\eta a_2(\xi,t)\upsilon(x,y;\xi,t)dt+\\&+\int\limits_x^\xi ds\int\limits_y^\eta C(\xi,s,t)\upsilon(x,y;s,t)dt,\end{aligned} \qquad (4.1.21)$$

где $B(\xi,\eta,s)=b_2(s,\eta)-(\xi-s)d_2(s,\eta), C(\xi,s,t)=-c_2(s,t)+(\xi-s)e_2(s,t)$, которое допускает единственное решение из класса $C^{2+1}(D_2^*)$.

В итоге из (4.1.16) получим формулу решения задачи 4.1.1 в D_2:

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\upsilon_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x)+\int\limits_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\\&+\int\limits_0^y[B_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\upsilon(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta,\end{aligned} \qquad (4.1.22)$$

где

$$A_1(x,y;\xi)=-\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[b_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0)]_\xi-d_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$$

$$B_1(x,y;\eta)=\upsilon_\xi(x,y;0,\eta)-b_2(0,\eta)\upsilon(x,y;0,\eta),$$

$$C_1(x,y;\eta)=-a_2(0,y)\upsilon(x,y;0,\eta),$$

$$E_1(x,y;\eta)=[a_{2\xi}(0,\eta)-c_2(0,\eta\upsilon(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\upsilon_\xi(x,y;0,\eta).$$

Из (4.1.22) нетрудно получить соотношение между $\tau_1(x)$, и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_2:

$$\nu_1(x)=\upsilon_{\xi y}(x,0;x,0)\tau_1(x)+\int\limits_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g_1(x), \qquad (4.1.23)$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\upsilon(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_2(0).$

4.1.3. Соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, полученное из D_1. После интегрирования уравнения (4.1.1) получим

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)-a_1(x,y)u+\int\limits_0^x \widetilde{d}_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+T_0(x,y), \qquad (4.1.24)$$

$\widetilde{d}_1(\xi,y)=a_{1\xi}(\xi,y)-d_1(\xi,y),T_0(x,y)=a_1(0,y)\tau_2(y)-\tau_2'(y).$

При $y\to+0$ имеем

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega(0)-a_1(x,0)\tau_1(x)+\int\limits_0^x \widetilde{d}_1(\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi+T_0(x,0). \qquad (4.1.25)$$

4.1.4. Определение $\tau_1(x)$. Исключая $\nu_1(x)$ из соотношений (4.1.23) и (4.1.25), приходим к уравнению

$$\tau_1''(x)=\omega(0)-\widetilde{a}_1(x)\tau_1(x)+\int\limits_0^x \widetilde{A}_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\widetilde{g}_1(x), \qquad (4.1.26)$$

где $\widetilde{g}_1(x)=g_1(x)+T_0(x,0),\widetilde{a}_1(x)=-a_1(x,0)+\upsilon_{\xi y}(x,0;x,0),\widetilde{A}_1(x,\xi)=\widetilde{d}_1(\xi,0)-A_{1y}(x,0;\xi).$

Найдем граничные условия

$$\tau_1(0)=\chi_1(0),\tau_1'(0)=\chi_2(0),\tau_1(\ell)=\varphi_2(0). \qquad (4.1.27)$$

Решая задачи (4.1.26), (4.1.27), получим

$$\tau_1(x)=\frac{1}{2}\omega(0)x^2+\int\limits_0^x A_2(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g_2(x), \qquad (4.1.28)$$

$$A_2(x,\xi)=\widetilde{a}_1(\xi)(x-\xi)+\int\limits_\xi^x (x-t)\widetilde{A}_1(t,\xi)dt, g_2(x)=\chi_1(0)+\chi_2(0)x+\int\limits_0^x (x-t)\widetilde{g}_1(t)dt.$$

Отсюда, воспользуясь третьим условием (4.1.27), находим

$$\omega(0)=\frac{2}{\ell^2}[\varphi_2(0)-g_2(\ell)]-\frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Подставляя это в значение (4.1.28), имеем

$$\tau_1(x)=g_3(x)+\int_0^x A_2(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi-\frac{x^2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (4.1.29)$$

где $g_3(x)=g_2(x)+\frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(0)-g_2(\ell)]x^2.$

Из (4.1.29) получим уравнение:

$$\tau_1(x)=g(x)+\int_0^\ell H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (4.1.30)$$

где

$$H_1(x,\xi)=-\frac{1}{\ell^2}\left(x^2+\int_0^x R_1(x,t)t^2dt\right)A_2(\ell,\xi),\, g(x)=g_3(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Таким образом, установлено, что уравнение (4.1.30) имеет единственное решение, если

$$\ell H<1, \qquad (4.1.31)$$

здесь $H=\max\limits_{0\le x,\,\xi\le\ell}|H_1(x,\xi)|.$

4.1.5. В области D_3 найдем решение уравнения (4.1.3), когда для искомой функции выполняются условия (4.1.7) и $u(0,y)=\tau_2(y), 0\le y\le h$. Методом Римана имеем

$$\begin{aligned}u(x,y)&=w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y)+\int_0^y A_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta+\\&+\int_0^x[B_2(x,y;\xi)\psi_1'(\xi)-w(x,y;\xi,0)\psi_2'(\xi)+\\&+C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi)+E_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi,\end{aligned} \qquad (4.1.32)$$

где

$$A_2(x,y;\xi)=-w_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+[a_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta)]_\eta-c_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta),$$

$$B_2(x,y;\xi) = w_\eta(x,y;\xi,0) - a_3(\xi,0)w(x,y;\xi),$$

$$C_3(x,y;\xi) = -b_3(\xi,0)w(x,y;\xi),$$

$$E_2(x,y;\xi) = [b_{3\eta}(\xi,0) - d_3(\xi,0)]w(x,y;\xi,0) + b_3(\xi,0)w_\eta(x,y;\xi,0).$$

Здесь $w(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, является решением задачи:

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3w)_{\xi\eta} + (b_3w)_{\eta\eta} - (c_3w)_\xi - (d_3w)_\eta + e_3w = 0,$$

$$(\xi,\eta) \in D_3^* = \{(\xi,\eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\},$$

$$w(x,y;\xi,\eta)\,|_{\eta=y} = 0,\ w_\eta(x,y;\xi,\eta)\,|_{\eta=y} = \exp\left(\int_x^\xi b_3(s,y)ds\right), x \le \xi \le 0, \qquad (4.1.33)$$

$$w(x,y;\xi,\eta)\,|_{\xi=x} = \theta_2(x,y;\eta),$$

где $\theta_2(x,y;\eta)$ – решение задачи Коши:

$$w_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - [a_3(x,\eta)w(x,y;x,\eta)]_\eta + c_3(x,\eta)w(x,y;x,\eta) = 0, 0 < \eta < y,$$

$$w(x,y;x,\eta)\,|_{\eta=0} = 0,\ w_\eta(x,y;x,\eta)\,|_{\eta=0} = 1.$$

Нетрудно доказать, что решение задачи (4.1.33) существует и единственно, если выполняется условие (4.1.4).

Из (4.1.5) и $w_\eta(-\ell_1,y;0,y) > 0$, с учетом (4.1.32), получим

$$\tau_2(y) = \gamma(y) + \int_0^y H_2(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta, \qquad (4.1.34)$$

где

$$H_2(y,\eta) = -\frac{A_2(-\ell_1,y;\eta)}{w_\eta(-\ell_1,y;0,y)}, \gamma(x) = \frac{1}{w_\eta(-\ell_1,y;0,y)}\{\varphi_1(y) +$$

$$+\int_{-\ell_1}^0 [B_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_1'(\xi) - w(-\ell_1,y;\xi,0)\psi_2'(\xi) + C_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_2(\xi) + E_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi\}.$$

После определения $\tau_2(y)$ из (4.1.34) найдем решение задачи 4.1.1 в D_3 по формуле (4.1.32). В результате чего удастся определить $\nu_2(y) = u_x(0,y)$.

4.1.6. Известно, что решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условия

$$u_x(0,y)=\nu_2(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, u(x,0)=\tau_1(x), 0\le x\le \ell,$$

имеет вид:

$$u(x,y)=-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^\ell d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)[\omega(\eta)-a_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)+$$
$$+\int_0^\xi \widetilde{d}_1(t,\eta)u(t,\eta)dt+T_0(\xi,\eta)]d\eta,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Представим полученное решение в виде

$$u(x,y)=-\int_0^y M(x,y,\eta)\omega(\eta)d\eta+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+T_1(x,y), \tag{4.1.35}$$

где

$$M(x,y,\eta)=\int_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi, K_1(x,y;\xi,\eta)=a_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)-\widetilde{d}_1(\xi,\eta)\int_0^\ell G(x,y;t,\eta)dt,$$

$$T_1(x,y)=\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int_0^\ell d\xi\int_0^y T_0(\xi,\eta)d\eta.$$

Используя условие $u(0,y)=\tau_2(y)$ из (4.1.35), имеем

$$\int_0^\ell M(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta=r_0(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^\ell K_1(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \tag{4.1.36}$$

где $r_0(y) = -\tau_2(y) + T_1(0,y)$.

Представим $M(0,y,\eta)$ в виде

$$M(0,y,\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}} e^{-s^2} ds + \int\limits_0^{\ell} q(y,\xi,\eta) d\xi,$$

где

$$q(y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi - 4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp\left[-\frac{(\xi + 4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi + 2\ell - 4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp\left[-\frac{(\xi - 2\ell + 4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\},$$

здесь ' – означает отсутствие члена суммы при $n = 0$.

Заметим, что $\lim\limits_{\eta \to y} M(0,y,\eta) = 1$. После дифференцирования (4.1.36), имеем

$$\omega(y) + \int\limits_0^y M_y(0,y,\eta)\omega(\eta) d\eta = r_0'(y) + \int\limits_0^{\ell} d\xi \int\limits_0^y K_{1y}(0,y;\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\eta.$$

Обращая это уравнение, найдем $\omega(y)$:

$$\omega(y) = r(y) + \int\limits_0^{\ell} d\xi \int\limits_0^y K_2(y,\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\eta, \tag{4.1.37}$$

где

$$K_2(y,\xi,\eta) = K_{1y}(0,y;\xi,\eta) + \int\limits_{\eta}^{y} R(y,t) K_{1t}(0,t;\xi,\eta) dt, r(y) = r_0'(y) + \int\limits_0^y R(y,\eta) r_0'(\eta) d\eta,$$

$R(y,\eta)$ – резольвента ядра – $M_y(0,y,\eta)$. Из (4.1.35) и (4.1.37) придем к уравнению:

$$u(x,y) = T(x,y) + \int\limits_0^{\ell} d\xi \int\limits_0^y K(x,y;\xi,\eta) u(\xi,\eta) d\eta, \tag{4.1.38}$$

где

$$K(x,y;\xi,\eta)=K_1(x,y;\xi,\eta)-\int_0^y M(x,y,t)K_2(t,\xi,\eta)dt, T(x,y)=T_1(x,y)-\int_0^y M(x,y,\eta)r(\eta)d\eta.$$

В силу свойств функций $K(x,y;\xi,\eta)$ и $T(x,y)$, уравнение (4.1.38) допускает единственное решение.

Таким образом, установлен следующий результат:

Теорема 4.1.1. Задача 4.1.1 имеет единственное решение, если выполняются условия (4.1.4), (4.1.10), (4.1.11) и (4.1.31).

4.2. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя линиями изменения типа

4.2.1. Пусть D – область, ограниченная отрезками прямых $x=0, y=-h_1, x=\ell, y=h, x=-\ell_1, y=0$ $(h, h_1, \ell, \ell_1 > 0)$.

Рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} + a_1 u_x + d_1 u = 0, (x, y) \in D_1, \qquad (4.2.1)$$

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} + a_2 u_{xy} + b_2 u_{yy} + c_2 u_x + d_2 u_y + e_2 u = 0, (x, y) \in D_2, \qquad (4.2.2)$$

$$L_3(u) \equiv u_{xyy} + a_3 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_3 u_x + d_3 u_y + e_3 u = 0, (x, y) \in D_3, \qquad (4.2.3)$$

где $a_i, d_i, b_j, c_j, e_j (i=\overline{1,3}, j=2,3)$ – заданные функции, а $D_1 = D \cap (x>0, y>0)$, $D_2 = D \cap (x>0, y<0), D_3 = D \cap (x<0, y>0)$.

В области D уравнения (4.2.1) – (4.2.3) можно рассматривать как уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами. Поэтому на линиях $y=0$ и $x=0$ потребуем выполнения условия сопряжений:

$$u(x,-0) = u(x,+0), u_y(x,-0) = u_y(x,+0), 0 \le x \le \ell, \qquad (4.2.4)$$

$$u(-0,y) = u(+0,y), u_x(-0,y) = u_x(+0,y), 0 \le y \le h. \qquad (4.2.5)$$

Уравнения (4.2.1) – (4.2.3) часто называются псевдопараболическими [67]. Отметим также, что в решении уравнения (4.2.1) преобладают свойства, характерные для параболических уравнений, а в решении уравнений (4.2.2) и (4.2.3) – для гиперболических уравнений.

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned}
&a_1 \in C^{1+0}(\overline{D}_1), d_1 \in C(\overline{D}_1), a_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2),\\
&b_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2), c_2 \in C(D_2) \cap C^{1+0}(D_2),\\
&d_2 \in C(D_2) \cap C^{0+1} \cap (D_2), e_2 \in C(\overline{D}_2), a_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{1+1}(D_3),\\
&b_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{0+2}(D_3), c_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{1+0}(D_3),\\
&d_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{0+1}(D_3), e_3 \in C(\overline{D}_3).
\end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

Задача 4.2.1. В области D найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap$ $\cap [C^{1+1}(D_1) \cup C^{1+2}(D_i)] \cap C^{3+0}(D_1)(i=2,3)$, удовлетворяющую уравнения (4.2.1), (4.2.2) и (4.2.3) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, условия сопряжений (4.2.4), (4.2.5) и краевые условия

$$u(\ell,y)=\varphi_1(y), u(-\ell_1,y)=\varphi_2(y), 0 \le y \le h, \tag{4.2.7}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x), u_y(x,0)=\psi_2(x), -\ell_1 \le x \le 0, \tag{4.2.8}$$

$$u(0,y)=\chi(y), -h_1 \le y \le 0, u(x,-h_1)=\psi_3(x), 0 \le x \le \ell, \tag{4.2.9}$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2), \psi_j(x)(j=\overline{1,3}), \chi(y)$ – известные функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_1(y)\in C^1[0,h], \varphi_2(y)\in C^2[0,h], \psi_i(x)\in C^1[-\ell,0](i=1,2),\\ \psi_3(x)\in C^1[0,\ell], \chi(y)\in C^2[-h_1,0],\end{gathered} \tag{4.2.10}$$

$$\psi_1(0)=\chi(0),\ \varphi_2(0)=\psi_1(-\ell_1),\ \psi_2(0)=\chi'(0),\ \chi(-h_1)=\psi_3(0). \tag{4.2.11}$$

Уравнения (4.2.1) – (4.2.3) являются уравнениями смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа в D.

Задача 4.2.2. Пусть:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x), u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x), 0 \le x \le \ell, \tag{4.2.12}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y), 0 \le y \le h, \tag{4.2.13}$$

где $\tau_i, \nu_i (i=\overline{1,2})$ – искомые функции.

В области D_2 найдем решение уравнения (4.2.2), удовлетворяющее условия (4.2.12) и первое условие (4.2.9) (**задача 4.2.2**).

Рассмотрим тождество

$$\begin{gathered}uL_2^*(\vartheta)-\vartheta L_2(u)=[\vartheta_\eta u_\eta+(a_2\vartheta)_\eta u - C_2\vartheta u]_\xi -\\ -[\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u+a_2\vartheta u_\xi+b_2\vartheta u_\eta-(b_2\vartheta)_\eta u+d_2\vartheta u]_\eta,\end{gathered} \tag{4.2.14}$$

где $L_2^*(\vartheta)\equiv -\vartheta_{\xi\eta\eta}+(a_2\vartheta)_{\xi\eta}+(b_2\vartheta)_{\eta\eta}-(c_2\vartheta)_\xi-(d_2\vartheta)_\eta+e_2\vartheta.$

После интегрирования (4.2.14) по области $D_2^*=\{(x,y): 0<\xi<x, y<\eta<0\}$ получаем вид решения задачи 4.2.2:

$$u(x,y)=A_1(x,y)\tau_1(x)-\vartheta(x,y;x,0)\nu_1(x)+\int_0^x[B_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)+C_1(x,y;\xi)\nu_1(\xi)]d\xi+$$
$$+\vartheta_\eta(x,y;0,y)\chi(y)+\int_0^y E_1(x,y;\eta)\chi(\eta)d\eta+f_1(x,y), \qquad (4.2.15)$$

где $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – решение задачи:

$$L_2^*(\vartheta)=0,(\xi,\eta)\in D_2^*,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)=exp\left(\int_x^\xi b_2(s,y)ds\right),0\le\xi\le x,$$

$$\vartheta(x,y;x,\eta)=\theta_1(x,y;\eta),0\le\eta\le 0,$$

а $\theta_1(x,y;\eta)$ – решение задачи:

$$\begin{cases}\vartheta_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)-[a_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta)]_\eta+c_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\\ \vartheta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=0,\vartheta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=1,\end{cases}$$

здесь

$$A_1(x,y)=\vartheta_\eta(x,y;x,0)-a_2(x,0)\vartheta(x,y;x,0),$$
$$B_1(x,y;\xi)=-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;\xi,0)-b_2(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)+$$
$$+\left[a_{2\xi}(\xi,0)+b_{2\eta}(\xi,0)-d_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\right],$$
$$C_1(x,y;\xi)=\vartheta_\xi(x,y;\xi,0)-b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\eta)=-\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)+\left[a_{2\eta}(0,\eta)+c_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)\right],$$
$$f_1(x,y)=\left[\vartheta_\eta(x,y;0,0)+a_2(0,0)\vartheta(x,y;0,0)\right]\chi(0)+\vartheta(x,y;0,0)\chi'(0).$$

Лемма 4.2.1. Если $\forall x\in[0,\ell],\ \ \forall y\in[-h_1,0]$:

$$a_2(x,y)+yc_2(x,y)\ge 0, \qquad (4.2.16)$$

то

$$\forall x\in[0,\ell]:V(x)=\vartheta(x,-h_1;x,0)\ge h_1. \qquad (4.2.17)$$

Доказательство. Интегрируя уранение

$$L_2^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\eta\eta}+(a_2\vartheta)_{\xi\eta}+(b_2\vartheta)_{\eta\eta}+(c_2\vartheta)_\xi=0, \qquad (4.2.18)$$

по области

$$D_2=\{(\xi,\eta):0<\xi<\ell,-h_1<\eta<0\}$$

получим интегральное уравнение

$$
\begin{aligned}
\vartheta(x,y;\xi,\eta) &= \eta - y + \int_x^{\xi} b_2(t,\eta)\vartheta(x,y;t,\eta)dt + \\
&+ \int_y^{\eta} \left[a_2(\xi,s) - (\eta - s)c_2(\xi,s)\right]\vartheta(x,y;\xi,s)ds + \\
&+ \int_x^{\xi} dt + \int_y^{\eta} \left[(\eta - s)\ell_2(t,s) - d_2(t,s)\right]\vartheta(x,y;t,s)ds.
\end{aligned}
\tag{4.2.19}
$$

Полагая $\xi = x$ из (4.2.19), имеем

$$
\vartheta(x,y;x,\eta) = \eta - y + \int_y^{\eta}\left[a_2(x,s) - (\eta - s)c_2(x,s)\right]\vartheta(x,y;x,s)ds \tag{4.2.20}
$$

Из (4.2.20) при $y = -h_1$ и $\eta = 0$ получим

$$
\vartheta(x,-h_1;x,0) = h_1 + \int_{-h_1}^{0}\left[a_2(x,s) + sc_2(x,s)\right]\vartheta(x,-h_1;x,s)ds\,. \tag{4.2.21}
$$

Если

$$
\forall s \in \left[-h_1, 0\right] \text{ и } \forall x \in \left[0, \ell\right]:\ a_2(x,s) + sc_2(x,s) \geq 0,
$$

то ядро уравнения (4.2.21) неотрицательно. Тогда из общей теории интегральных уравнений заключаем, что уравнение (4.2.21) имеет неотрицательное решение, причем

$$
\vartheta(x,-h_1;x,0) \geq h_1 > 0.
$$

Лемма 1 доказана.

Исходя из уравнения (4.2.19), методом дифференцирования заключаем, что функция $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ по переменным x и y удовлетворяет уравнение

$$
\vartheta_{xyy} + a_2\vartheta_{xy} + b_2\vartheta_{yy} + s_2\vartheta_x + d_2\vartheta_y + e_2\vartheta = 0
$$

и следующие условия

$$
\begin{cases}
\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{y=\eta} = \vartheta(x,\eta;\xi,\eta) = 0, \\
\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{y=\eta} = -exp\left[\int_x^{\xi} b_2(t,\eta)dt\right],
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \left[\vartheta_{yy}(x,y;\xi,\eta)+a_2(x,y)\vartheta_y(x,y;\xi,\eta)+c_2(x,y)\vartheta(x,y;\xi,\eta)\right]_{x=\xi}=0, \\ \vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{y=\eta}=0,\ \vartheta_y(x,y;x,\eta)\big|_{y-\eta}=-1. \end{cases}$$

Из (4.2.19) и (4.2.20) также легко заметить следующие свойства функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\substack{\xi=x\\ \eta=y}}=\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}=0,$$

$$\vartheta_\eta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1,\ \vartheta_y(x,y;x,\eta)\big|_{y=\eta}=-1.$$

Используя второе условие: (4.2.9) из (4.2.15), найдем связь между функциями $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\begin{aligned} &A_1(x,-h_1)\tau_1(x)-\vartheta(x,-h_1;x,0)\nu_1(x)+ \\ &+\int_0^x\left[B_1(x,-h_1;\xi)\tau_1(\xi)+C_1(x,-h_1;\xi)\nu_1(\xi)\right]d\xi, \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

где

$$\Psi_1(x)=\psi_3(x)-\vartheta_\eta(x,-h_1;0,-h_1)\chi(-h_1)+\int_{-h_1}^0 E_1(x,-h_1;\eta)\chi(\eta)d\eta-f_1(x,-h_1).$$

Используя неравенство (4.2.17), соотношение (4.2.22) перепишем в виде

$$\nu_1(x)=A(x)\tau_1(x)+\int_0^x B(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\Psi_2(x)+\int_0^x C(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi, \tag{4.2.23}$$

где

$$A(x)=\frac{A_1(x,-h_1)}{\vartheta(x,-h_1;x,0)},\ B(x,\xi)=\frac{B_1(x,-h_1;\xi)}{\vartheta(x,-h_1;x,0)},$$

$$C(x,\xi)=\frac{C_1(x,-h_1;\xi)}{\vartheta(x,-h_1;x,0)},\ \Psi_2(x)=-\frac{\Psi_1(x)}{\vartheta(x,-h_1;x,0)}.$$

Обратив относительно $\nu_1(x)$ уравнение (4.2.23), придем к уравнению

$$\nu_1(x)=A(x)\tau_1(x)+\int_0^x \widetilde{B}(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\Psi_3(x), \tag{4.2.24}$$

где

$$\widetilde{B}(x,\xi)=B(x,\xi)+A(\xi)R_1(x,\xi)+\int\limits_{\xi}^{x}B(t,\xi)R_1(x,t)dt,$$

$$\Psi_3(x)=-\Psi_2(x)-\int\limits_0^x\Psi_2(t)R_1(x,t)dt.$$

Задача 4.2.3. После интегрирования (4.2.1) получим

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)+a_1(0,y)\tau_2(y)-\tau_2'(y)-a_1(x,y)u+\int\limits_0^x\widetilde{d}_1(s,y)u(s,y)ds,$$

где $\widetilde{d}_1(s,y)=a_{1s}(s,y-d_1(s,y))$, а $\omega(y)$ – произвольная неизвестная функция.

Отсюда, устремляя y к нулю, получим

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega(0)+a_1(0,0)\chi(0)-\chi'(0)-a_1(x,0)\tau_1(x)+\int\limits_0^x\widetilde{d}_1(s,0)\tau_1(s)ds. \qquad (4.2.25)$$

Исключая $\nu_1(x)$ из (4.2.24) и (4.2.25), придем к интегро-дифференциальному уравнению

$$\tau_1''(x)+q(x)\tau_1(x)=\omega(0)+\Psi_4(x)+\int\limits_0^x H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (4.2.26)$$

где

$$q(x)=a_1(x,0)-A(x),$$
$$H_1(x,\xi)=\widetilde{B}(x,\xi)+\widetilde{d}_1(\xi,0),$$
$$\Psi_4(x)=\Psi_3+a_1(0,0)\chi(0)-\chi'(0).$$

После двукратного интегрирования соотношения (4.2.26) имеем

$$\tau_1(x)=\frac{1}{2}\omega(0)x^2+\Psi_5(x)+\int\limits_0^x q_2(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (4.2.27)$$

где

$$q_2(x,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x}q_1(t,\xi)dt,\quad q_1(x,\xi)=-q(\xi)+\int\limits_{\xi}^{x}H_1(t,\xi)dt,$$

$$\Psi_5(x) = \psi_1(0) + \psi_1'(0)x + \int_0^x (x-\xi)\Psi_4(\xi)d\xi,\ \ \tau_1(0) = \psi_1(0),\ \tau_1'(0) = \psi_1'(0).$$

Используя согласования $\nu_1(\ell) = \varphi_1(0)$ из (4.2.27) определим неизвестную константу $\omega(0)$:

$$\omega(0) = \frac{2}{\ell^2}\left[\varphi_1(0) - \Psi_5(\ell)\right] - \frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell q_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Подставляя это значение в (4.2.27), придем к уравнению

$$\tau_1(x) = \Psi_6(x) - \frac{x^2}{\ell^2}\int_0^\ell q_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi + \int_0^x q_2(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (4.2.28)$$

где

$$\Psi_6(x) = \Psi_5(x) - \frac{x^2}{\ell^2}\left[\varphi_1(0) - \Psi_5(\ell)\right].$$

После обращения интегрального уравнения получим

$$\tau_1(x) = \Psi(x) + \int_0^\ell K(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (4.2.29)$$

где

$$K(x,\xi) = \frac{x^2}{\ell^2} q_2(\ell,\xi)d\xi - \frac{1}{\ell^2}\int_0^x t^2 R_2(x,t) q_2(\ell,\xi)dt,$$

$$\Psi(x) = \Psi_6(x) + \int_0^x R_2(x,t)\Psi_6(t)dt,$$

$R_2(x,t)$ – резольвента ядра $q_2(x,\xi)$.

Лемма 4.2.2. Если

$$\ell K < 1, \qquad (4.2.30)$$

где $K = \max\limits_{0 \le x,t \le \ell} |K(x,t)|$, то уравнение (4.2.29) имеет единственное решение.

Доказательство леммы 4.2.2 следует из общей теории интегральных уравнений [40].

Задача 4.2.4. Рассмотрим уравнение (4.2.3) в области (к пункту 4.2.4).

Рассмотрим уравнение (4.2.3) в области $D_3 = \{(x,y): -\ell_1 < x < 0,\ 0 < y < h\}$. Составим тождество

$$wL_3(u) - uL_3^*(w) = \left[-w_\eta u_\eta - (a_3 w)_\eta u + c_3 wu\right]_\xi +$$
$$\left[wu_{\xi\eta} + w_{\xi\eta}u + a_3 wu_\xi + b_3 wu_\eta - (b_3 w)_\eta u + d_3 wu\right]_\eta$$

и интегрируем его по области $D_3^* = \{(\xi,\eta): x < \xi < 0,\ 0 < \eta < y\}$. Тогда имеем

$$\iint\limits_{D_3^*}\left[wL_3 u - uL_3^*(w)\right]d\xi d\eta = \int\limits_{D_3^*}\left[-wu_{\xi\eta} - w_{\xi\eta}u - a_3 wu_\xi - b_3 wu_\eta\right]d\xi + \\ +\left[-\omega_\eta u_\eta - (a_3 w)_\eta u - c_3 wu\right]d\eta. \tag{4.2.31}$$

Теперь подберем функцию $w(x,y;\xi,\eta)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнение

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_\xi - \\ -(d_3 w)_\eta + e_3 w = 0,\ (\xi,\eta) \in D_3^* \tag{4.2.32}$$

и условия

$$\begin{cases} w(x,y;\xi,\eta) = 0,\ w_\eta(x,y;\xi,y) = \exp\left[\int\limits_x^\xi b_3(s,y)ds\right], & x < \xi < 0 \\ w(x,y;x,\eta) = \theta(x,y;\eta), \end{cases} \tag{4.2.33}$$

где функция $\theta(x,y;\eta)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} w_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - \left[a_3(x,\eta)w_\eta(x,y;x,\eta)\right]_\eta + c_3(x,\eta)w_\eta(x,y;x,\eta) = 0,\ 0 < \eta < y, \\ w(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y} = 0,\ w_\eta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y} = 1, \end{cases}$$

допускающей единственное решение.

Методом интегрирования решение задач (4.2.32) – (4.2.33) сведем к интегральному уравнению вида:

$$w(x,y;\xi,\eta)=\eta-y+\int_x^{\xi} b_3(s,\eta)w(x,y;s,\eta)ds+$$

$$\int_y^{\eta}\left[a_3(\xi,t)-(\eta-t)c_3(\xi,t)\right]w(x,y;\xi,t)dt- \tag{4.2.34}$$

$$\int_x^{\xi} ds\int_y^{\eta}\left[d_3(s,t)-(\eta-t)e_3(s,t)\right]w(x,y;s,\eta)dt,$$

имеющему единственное решение.

Рассмотрим вспомогательную задачу (задача 4.2.3), заключающую в определении решения уравнения (4.2.3) в области D_3, при выполнении условий (4.2.8) и $u(0,y)=\tau_2(y)$.

После вычисления интегралов, с учетом условий (4.2.33) из (4.2.31), получаем

$$u(x,y)=A_2(x,y)\psi(x)-w(x,y;x,0)\psi_2(x)+$$

$$+\int_0^x\left[B_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi)+C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi)\right]d\xi+ \tag{4.2.35}$$

$$+w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y)+\int_0^y E_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta+f_2(x,y),$$

где

$$A_2(x,y)=w_\eta(x,y;x,0)-a_2(x,0)w(x,y;x,0),$$
$$B_2(x,y;\xi)=-w_{\xi\eta}(x,y;\xi,0)+a_3(\xi,0)w_\xi(x,y;\xi,0)+$$
$$+b_3(\xi,0)\omega_\eta(x,y;\xi,0)+\left[a_{\xi\xi}(\xi,0)+b_{\xi\eta}(\xi,0)-d_3(\xi,0)\right]w(x,y;\xi,0),$$
$$C_2(x,y;\xi)=w_\xi(x,y;\xi,0)-b_3(\xi,0)w(x,y;\xi,0),$$
$$E_2(x,y;\eta)=w_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+\left[a_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta)\right]_\eta-c_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta),$$
$$f_2(x,y)=\left[-w_\eta(x,y;0,0)+a_3(0,0)w(x,y;0,0)\right]\psi_1(0)+w(x,y;0,0)\psi_2(0).$$

Лемма 4.2.3. Если

$$\forall(x,y)\in\left[-\ell_1,0\right]\wedge\forall y\in\left[0,h\right]: b_3(x,y)\ge 0, \tag{4.2.36}$$

то

$$\forall y \in [0,h] : w_\eta(-\ell_1, y; 0, y) \geq 1. \qquad (4.2.37)$$

Доказательство. Вычислим производную $w_\eta(x,y;\xi,\eta)$ используя формулу (4.2.34):

$$w_\eta(x,y;\xi,\eta) = 1 + \int_x^\xi b_{\xi\eta}(s,\eta) w(x,y;s,\eta)ds + \int_x^\xi b_3(s,\eta) w_\eta(x,y;s,\eta)ds +$$

$$+ a_3(\xi,\eta)w(x,y;\xi,\eta) - \int_y^\eta c_3(\xi,t)w(x,y;\xi,t)dt - \int_x^\xi d_3(s,\eta)w(x,y;s,\eta)d\eta +$$

$$+ \int_x^\xi ds \int_y^\eta e_3(s,t)w(x,y;s,t)dt.$$

Отсюда при $\eta = y$ и $\xi = 0$ имеем

$$w_\eta(x,y;0,y) = 1 + \int_x^0 b_3(s,y) w_\eta(x,y;s,y)ds, \ -\ell_1 \leq x \leq 0. \qquad (4.2.38)$$

Если предполагать, что $\forall s \in [-\ell_1, 0] : b_3(s,y) \geq 0,$ то интегральное уравнение имеет неотрицательное решение. Следовательно, при $\forall y \in [0,h]$ имеет место неравенство $w_\eta(-\ell_1, y; 0, y) \geq 1.$

Лемма 4.2.3 доказана.

При выполнении условия (4.2.36), используя второе условие (4.2.7) из (4.2.35), с учетом (4.2.37) получим

$$\tau_2(y) = \Phi(y) + \int_0^y K(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta,$$

где $K(y,\eta), \Phi(y)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 4.2.3.

Определив отсюда $\tau_2(y)$ из (4.2.22), найдем $\nu_2(y) = u_x(0,y)$.

Задача 4.2.5. Интегрируя уравнение (4.2.1) по x и выписывая решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условия

$$u_x(0,\eta) = \nu_2(y), \ u(\ell,y) = \varphi_2(y), \ 0 \leq y \leq h,$$
$$u(x,0) = \tau_1(x), \ 0 \leq x \leq \ell,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = &-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \\
&+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0,)\tau_1(\xi)d\xi - \int_0^\ell d\xi \int_0^y G(x,y;\xi,\eta)[\omega(\eta) - \\
&-a_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + \int_0^\ell \widetilde{d}_1(t,\eta)u(t,\eta) + T_0(\xi,\eta)]d\eta,
\end{aligned}
\tag{4.2.39}
$$

где $\widetilde{d}_1(t,\eta) = a_{1t}(t,\eta) - d_1(t,\eta), T_0(x,y) = a_1(0,y)\tau_2(y) - \tau_2'(y), G(x,\eta;\xi,\eta)$ - функция Грина.

Используя условие $u(0,y) = \tau_2(y)$ из (4.2.25), (4.2.37), выражаем $\omega(y)$ через $u(x,y)$ и тем самым придем к уравнению

$$
u(x,y) = T(x,y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,
$$

допускающему однозначное решение.

Теорема 4.2.1. Решение задачи 4.2.1 существует и единственно, если выполняются условия (4.2.6), (4.2.10), (4.2.11), (4.2.16), (4.2.30), (4.2.36).

4.3. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболических уравнений с двумя линиями изменения типа

4.3.1. Пусть D – область, ограниченная отрезками прямых
$AA_1 = \{(x,y): x=0, -h_1 \le y \le 0\}$, $A_1B_1 = \{(x,y): y=-h_1, 0 \le x \le \ell\}$,
$B_1B = \{(x,y): x=\ell, -h_1 \le y \le 0\}$, $BB_0 = \{(x,y): x=\ell, 0 \le y \le h\}$,
$B_0A_0 = \{(x,y): y=h, 0 \le x \le \ell\}$, $A_0C_0 = \{(x,y): y=h, -\ell_1 \le x \le 0\}$,
$C_0C = \{(x,y): x=-\ell_1, 0 \le y \le h\}$, $CA = \{(x,y): y=0, -\ell_1 \le x \le 0\}$ $(\ell, \ell_1, \mathrm{h}, \mathrm{h}_1 > 0)$.

Будем изучать краевые задачи для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} = 0, \ (x,y) \in D_1, \tag{4.3.1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxy} + b_1(x,y)u_{xy} + d(x,y)u_y = 0, \ (x,y) \in D_2, \tag{4.3.2}$$

$$L_3(u) \equiv u_{xyy} + b_2(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_x = 0, \ (x,y) \in D_3, \tag{4.3.3}$$

где $b_i (i=1,2)$, d, c – известные функции, а $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D} \cap (\mathrm{x}>0, \mathrm{y}>0)$,
$\mathrm{D}_2 = \mathrm{D} \cap (\mathrm{x}>0, \mathrm{y}<0)$, $\mathrm{D}_3 = \mathrm{D} \cap (\mathrm{x}<0, \mathrm{y}>0)$.

Пусть:

$$\begin{aligned} &b_1(x,y) \in C^{1+1}(\overline{D}_2),\ b_2(x,y) \in C^{1+1}(\overline{D}_3), \\ &d(x,y) \in C^{0+1}(\overline{D}_2),\ \ c(x,y) \in C^{1+0}(\overline{D}_3). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Задача 4.3.1. Требуется определить функцию $u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap [C^{1+1}(D_1) \cup C^{2+1}(D_2) \cup C^{1+2}(D_3)]$, $u_{xxx} \in C(D_1)$, удовлетворяющую уравнения (4.3.1), (4.3.2) и (4.3.3) в областях D_1, D_2, и D_3 соответственно, краевые условия

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_1(y),\ u(\ell, y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h_1, \tag{4.3.5}$$

$$u(0,y) = \chi_1(y),\ u_x(0,y) = \chi_2(y),\ -h_2 \le y \le 0, \tag{4.3.6}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x),\ u_y(x,0) = \psi_2(x),\ -\ell_1 \le x \le 0 \tag{4.3.7}$$

и условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \tag{4.3.8}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h, \tag{4.3.9}$$

где $\varphi_i(y),\ \chi_i(y),\ \psi_i(x)(i=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned}&\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],\\ &\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\ \psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0]\ \ (i=1,2),\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\ \psi_1(0)=\chi_1(0),\\ &\psi_2(0)=\chi_1'(0),\ \psi_1'(0)=\chi_2(0),\ \psi_2'(0)=\chi_2'(0).\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Заметим, что линии $x=0,\ y=0$ являются характеристиками (4.3.1) – (4.3.3). Уравнения (4.3.1) – (4.3.3) являются уравнениями смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа в области D [51].

Пусть:

$$\mathrm{u(x,-0)=u(x,+0)}=\tau_1\mathrm{(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)}=\nu_1\mathrm{(x)},\ 0\le \mathrm{x}\le \ell, \tag{4.3.12}$$

$$\mathrm{u(-0,y)=u(+0,y)}=\tau_2\mathrm{(y),u_x(-0,y)=u_x(+0,y)}=\nu_2\mathrm{(y)},0\le \mathrm{y}\le h, \tag{4.3.13}$$

где $\tau_1(x),\ \tau_2(y),\ \nu_1(x),\ \nu_2(y)$ – искомые функции.

Задача 4.3.2. В области D_2 найдем решение уравнения (4.3.2) с условиями

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0, \tag{4.3.14}$$

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{4.3.15}$$

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned}\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)=(\upsilon u_{xy}+\upsilon_{xy}u+b_1\upsilon u_y)_x-\\ -(\upsilon_x u_x+(b_1\upsilon)_{xy}u-d\upsilon u)_y,\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

где $L_2^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{xxy}+(b_1\upsilon)_{xy}-(du)_y$ – сопряженный оператор оператора $L_2(u)$. Выберем прямоугольник D_2^* с вершинами $A(0,0),A_1^*(0,y),B_1^*(x,y),B^*(x,0)$, т.е. $D_2^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$, а $\Gamma=\partial D_2^*$. Из тождества (16) получим

$$\iint\limits_{D_2^*} (\upsilon L_2(u) - uL_2^*(\upsilon) d\xi d\eta =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} (\upsilon_\xi u_\xi + (b_1\upsilon)_{\xi\eta} u - d\upsilon u) d\xi + (\upsilon u_{\xi\eta} + \upsilon_{\xi\eta} u + b_1 \upsilon u_\eta) d\eta. \tag{4.3.17}$$

Функцией Римана назовем решение следующей задачи Гурса:

$$L_2^*(\upsilon) \equiv \upsilon_{\xi\xi\eta} - (b_1\upsilon)_{\xi\eta} + (d\upsilon)_\eta = 0, \tag{4.3.18}$$

$$\upsilon(\xi,\eta)\,|_{\xi=x} = 0, y \le \eta \le 0, \tag{4.3.19}$$

$$\upsilon_\xi(\xi,\eta)\,|_{\xi=x} = 1, y \le \eta \le 0, \tag{4.3.20}$$

$$\upsilon(\xi,\eta)\,|_{\eta=y} = \omega(\xi, y), 0 \le \xi \le x, \tag{4.3.21}$$

где $\omega(\xi, y)$ – решение задачи Коши:

$$\begin{gathered} \upsilon_{\xi\xi}(\xi, y) - [b_1(\xi, y)\upsilon(\xi, y)]_\xi + d(\xi, y)\upsilon(\xi, y) = 0,\ 0 < \xi < x, \\ \upsilon(\xi, y)\,|_{\xi=x} = 0,\ \upsilon(\xi, y)\,|_{\xi=x} = 1. \end{gathered} \tag{4.3.22}$$

После интегрирования (4.3.18) получим

$$\upsilon_{\xi\xi} - [b_1(\xi,\eta)\upsilon]_\xi + d(\xi,\eta)\upsilon = 0\,. \tag{4.3.23}$$

Далее приходим к уравнению

$$\upsilon(\xi,\eta) = \xi - x + \int\limits_x^\xi K_0(\xi,\eta,t)\upsilon(t,\eta)dt\,,$$

где $K_0(\xi,\eta,t) = b_1(t,\eta) + (t-\xi)d(t,\eta)$. Решение данного уравнения представим в виде

$$\upsilon(\xi,\eta) \equiv \upsilon(x,\xi,\eta) = \xi - x + \int\limits_x^\xi R(\xi,\eta,t)(t-x)dt, \tag{4.3.24}$$

где $R(\xi,\eta,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} K_n(\xi,\eta,t)$ – резольвента $K_0(\xi,\eta,t)$, а

$$K_n(\xi,\eta,t) = \int\limits_t^\xi K_0(s,\eta,t)K_{n-1}(\xi,\eta,s)ds,\ n = 1,2,\ldots.$$

Заметим, что функция Римана не зависит от переменной y. Имеем

$$R(\xi,\eta,t) = K_0(\xi,\eta,t) + \int\limits_t^\xi K_0(s,\eta,t)R(\xi,\eta,s)ds\,.$$

Отметим, что

$$R_\xi(\xi,\eta,t) = -d(t,\eta) + b_1(\xi,\eta)R(\xi,\eta,t) - \int_t^\xi d(s,\eta)R(s,\eta,t)ds.$$

Тогда $\upsilon_\xi(x,\xi,\eta) = 1 + b_1(\xi,\eta)\upsilon(x,\xi,\eta) - \int_t^\xi d(s,\eta)\upsilon(x,t,\eta)dt$. Следовательно, функция $\upsilon(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнения (4.3.23) и (4.3.18). Из (4.3.24) также получаем соотношения:

$$\upsilon(x,x,\eta) = 0, \upsilon_\xi(x,x,\eta) = 1. \tag{4.3.25}$$

Так как $\upsilon_x(x,\xi,\eta) = -1 - \int_x^\xi R(\xi,\eta,t)dt$, $\upsilon_{xx}(x,\xi,\eta) = R(\xi,\eta,x) = b_1(x,\eta) + (x-\xi)d(x,\eta) + \int_x^\xi [b_1(x,\eta) + (x-s)d(x,\eta)]R(\xi,\eta,s)ds$, то функция $\upsilon(x,\xi,y)$ удовлетворяет уравнение

$$\upsilon_{\xi\xi}(x,\xi,y) - b_1(x,y)\upsilon(x,\xi,y) + d(x,y)\upsilon(x,\xi,y) = 0. \tag{4.3.26}$$

Отсюда получаем представление решения задачи Гурса (4.3.14), (4.3.15) для уравнения (4.3.2) в виде:

$$u(x,y) = \upsilon_\xi(x,x,0)\tau_1(x) - \int_0^x \{\upsilon_{\xi\xi}(x,\xi,0) - [b_1(\xi,0)\upsilon(x,\xi,0)]_\xi + d(\xi,0)\times$$
$$\times\upsilon(x,\xi,0)\}\tau_1(\xi)d\xi - \int_0^y \{\upsilon(x,0,\eta)\chi_2'(\eta) - \upsilon_\xi(x,0,\eta)\chi_1'(\eta) + b_1(0,\eta)\times$$
$$\times b_1(0,\eta)\upsilon(x,0,\eta)\}\chi_1'(\eta)\}d\eta.$$

Если воспользоваться соотношениями

$$\upsilon_x(x,x,0) = -1,\ \upsilon_\xi(x,0,\eta) = 1 + b_1(0,\eta)\upsilon(x,0,\eta) + \int_0^x d(t,\eta)\upsilon(x,t,\eta)dt,$$

то

$$u(x,y)=\tau_1(x)+\chi_1(y)-\chi_1(0)-\int\limits_0^y \upsilon(x,0,\eta)\chi_2'(\eta)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^y \chi_1'(\eta)d\eta\int\limits_0^x d(\xi,\eta)\upsilon(x,\xi,\eta)d\xi, \tag{4.3.27}$$

где $\tau_1(x)$ – искомая функция. Покажем, что функция $u(x,y)$, определяемая формулой (4.3.27), удовлетворяет условия (4.3.14), (4.3.15) и удовлетворяет уравнение (4.3.2).

Из (4.3.27) определим производную $u_y(x,y)$:

$$u_y(x,y)=\chi_1'(y)+\upsilon(x,0,y)\chi_2'(y)+\chi_1'(y)\int\limits_0^x d(\xi,y)\upsilon(x,\xi,y)d\xi,$$

и тем самым след нормальной производной при $y\to -0$:

$$\nu_1(x)=\chi_1'(0)+\upsilon(x,0,0)\chi_2'(0)+\chi_1'(0)\int\limits_0^x d(\xi,0)\upsilon(x,\xi,0)d\xi \tag{4.3.28}$$

Отметим, что $\nu_1(x)$, определенное формулой (4.3.28), является решением следующей задачи:

$$\begin{cases}\nu_1''(x)+b_1(x,0)\nu_1'(x)+d(x,0)\nu_1(x)=0,\\ \nu_1(0)=\chi_1'(0),\ \nu_1'(0)=\chi_2'(0).\end{cases}$$

Указанное уравнение легко получается из уравнения (4.3.2) при $y\to -0$.

4.3.3. В области D_3 рассмотрим задачу для уравнения (4.3.3) с условиями

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0, \tag{4.3.29}$$

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le h. \tag{4.3.30}$$

Интегрируя тождество

$$uL_3^*(\vartheta)-\vartheta L_3(u)=(\vartheta_y u_y+(b_2\vartheta)_y u-c\vartheta u)_x-$$
$$-(\vartheta u_{xy}+\vartheta_{xy}u+b_2\vartheta u_x)_y,$$

где $L_3^*(\vartheta)\equiv -\vartheta_{xyy}+(b_2\vartheta)_{xy}-(c\vartheta)_x$ – сопряженный оператор оператора $L_3(u)$, имеем

$$\iint_{D_3^*}(uL_3^*(\vartheta)-\vartheta L_3(u)d\xi d\eta =$$
$$= \int_{\Gamma_1}(\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u+b_2\vartheta u_{\xi})d\xi+(\vartheta_{\eta}u_{\eta}+(b_2\vartheta)_{\eta}u-c\vartheta u)d\eta, \tag{4.3.31}$$

где $D_3^*=\{(\xi,\eta): x<\xi<0,\ 0<\eta<y\}$, $\Gamma_1=\partial D_3^*$.

Функцией Римана является решение задачи:

$$L_3^*(\vartheta)\equiv -\vartheta_{\xi\eta\eta}+(b_2\vartheta)_{\xi\eta}-(c\vartheta)_{\xi}=0, \tag{4.3.32}$$

$$\begin{gathered}\vartheta(\xi,\eta)\,|_{\eta=y}=0, x\le\xi\le 0,\\ \vartheta_{\eta}(\xi,\eta)\,|_{\eta=y}=1, x\le\xi\le 0,\end{gathered} \tag{4.3.33}$$

$$\vartheta(\xi,\eta)\,|_{\xi=x}=\widetilde{\omega}(x,\eta),\ 0\le\eta\le y, \tag{4.3.34}$$

где $\widetilde{\omega}(x,\eta)$ – решение задачи Коши:

$$\begin{gathered}\vartheta_{\eta\eta}(x,\eta)-[b_2(x,\eta)\vartheta(x,\eta)]_{\xi}+c(x,\eta)\vartheta(x,\eta)=0,\ 0<\eta<y,\\ \vartheta(x,\eta)\,|_{\eta=y}=0,\ \vartheta(x,\eta)\,|_{\eta=y}=1.\end{gathered} \tag{4.3.35}$$

Интегрируя уравнение (4.3.32), приходим к интегральному уравнению

$$\vartheta(\xi,\eta)=\eta-y+\int_y^{\eta}H_0(\xi,\eta,t)\vartheta(\xi,t)dt, \tag{4.3.36}$$

где $H_0(\xi,\eta,t)=b_2(\xi,t)+(t-\eta)c(\xi,t)$ – решение, которое имеет вид

$$\vartheta(\xi,\eta)\equiv\vartheta(y,\xi,\eta)=\eta-y+\int_y^{\eta}R_1(\xi,\eta,t)(t-y)dt, \tag{4.3.37}$$

где $R_1(\xi,\eta,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}H_n(\xi,\eta,t)$ – резольвента ядра $H_0(\xi,\eta,t)$, а

$$H_n(\xi,\eta,t)=\int_t^{\eta}H_0(\xi,s,t)H_{n-1}(\xi,\eta,s)ds,\ n=1,2,\ldots.$$

Из (4.3.37) следует, что функция Римана не зависит от переменной x.

После вычисления интегралов по границам области D_3^*, из (4.3.31) получим представление решения задачи Гурса (4.3.29), (4.3.30) для уравнения (4.3.3) в виде:

$$u(x,y)=\tau_2(y)+\psi_1(x)-\psi_1(0)-\int_0^x \vartheta(y,\xi,0)\psi_2'(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^x \psi_1'(\xi)d\xi\int_0^y c(\xi,\eta)\vartheta(y,0,\eta)d\eta, \tag{4.3.38}$$

где $\tau_2(y)$ – искомая функция. Нетрудно показать, что функция $u(x,y)$, определяемая по формуле (4.3.38), удовлетворяет условия (4.3.29), (4.3.30) и удовлетворяет уравнение (4.3.3). Воспользуясь первым условием (4.3.6), определим $\tau_2(y)=\varphi_1(y)$.

Из (4.3.38) определим производную $u_x(x,y)$:

$$u_x(x,y)=\psi_1'(x)-\vartheta(y,x,0)\psi_2'(x)+\psi_1'(x)\int_0^y c(x,\eta)\vartheta(y,0,\eta)d\eta$$

и след нормальной производной при $x\to -0$:

$$\nu_2(y)=\psi_1'(0)-\vartheta(y,0,0)\psi_2'(0)+\psi_1'(0)\int_0^y c(0,\eta)\vartheta(y,0,\eta)d\eta. \tag{4.3.39}$$

Нетрудно показать, что $\nu_2(y)$, определенное формулой (4.3.39), является решением уравнения

$$\nu_2''(y)+b_2(0,y)\nu_2'(y)+c(0,y)\nu_2(y)=0,$$

полученного из уравнения (4.3.3) при $x\to -0$, и удовлетворяет условия: $\nu_2(0)=\psi_1'(0),\ \nu_2'(0)=\psi_2'(0)$.

Задача 4.3.4. В области D_1 рассмотрим задачу

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{4.3.40}$$

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ u_x(0,y)=\nu_2(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, \tag{4.3.41}$$

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{4.3.42}$$

Интегрируя уравнение (40), имеем

$$u_{xx}-u_y=-w'(y), \tag{4.3.43}$$

где $w(y)$ – произвольная функция. Тогда функция $\tilde{u}(x,y)=w(y)$ является одним из частных решений неоднородного уравнения (4.3.43). В силу линейности уравнения (4.3.43) заключаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x,y)=z(x,y)+w(y), \tag{4.3.44}$$

где $z(x,y)$ – общее решение уравнения

$$z_{xx}-z_y=0. \tag{4.3.45}$$

В силу того, что любая константа C является решением уравнения (4.3.43), можно доказать, что $w(0)=0$. В самом деле, равенство (4.3.44) можно представить в виде:

$$u(x,y)=[z(x,y)+C]+[w(y)-C]=\widetilde{z}(x,y)+\widetilde{w}(y),$$

где $\widetilde{z}(x,y)=z(x,y)+C,\ \widetilde{w}(y)=w(y)-C$. Отсюда заключаем, что $\widetilde{w}(0)=0,$ если $C=w(0)$. Следовательно, можно считать, что в представлении (4.3.44) функция $w(y)$ удовлетворяет условие $w(0)=0$.

Переходя к пределу при $y\to+0,$ из уравнения (4.3.43) имеем

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=-w'(0),\ 0<x<\ell, \tag{4.3.46}$$

где $w'(0)$ – неизвестная константа. Так как функция $\nu_1(x)$ известна и определена по формуле (4.3.28), то из (4.3.46) можно определить $\tau_1(x)$ со следующими условиями: $\tau_1(0)=\psi_1(0),\ \tau_1'(0)=\psi_2(0),\ \tau_1(\ell)=\varphi_2(0)$.

Тогда из (4.3.40) и (4.3.41) для $z(x,t)$ получим следующие условия:

$$\begin{gathered}z_x(0,y)=\nu_2(y), 0\le y\le h,\ z(\ell,y)=\varphi_2(y)-w(y),\ 0\le y\le h,\\ z(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le\ell.\end{gathered} \tag{4.3.47}$$

Теперь выпишем решение уравнения (4.3.45), удовлетворяющее условие (4.3.47):

$$\begin{gathered}z(x,y)=-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)[\varphi_2(\eta)-\\ -w(\eta)]d\eta+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{4.3.48}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\dfrac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\right.$

$$-\exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\exp\left(-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)\Bigg]$$

– функция Грина.

Если учесть, что для $z(x,t)$ выполняется еще и соотношение

$$z(0,y)=\tau_2(y)-w(y),\ 0\le y\le h,$$

то из (4.3.48) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода для $w(y)$:

$$w(y)+\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)w(\eta)d\eta=g(y), \tag{4.3.49}$$

где

$$g(y)=\tau_2(y)+\int_0^y G(0,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(0,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int_0^\ell G(0,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi,$$

которое допускает единственное однозначное решение.

Таким образом, доказана

Теорема 4.3.1. Задача 4.3.1 имеет единственное решение, если выполняются условия (4.3.4), (4.3.10) и (4.3.11).

Аналогично исследуются следующие задачи.

Задача 4.3.2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую все условия задачи 4.3.1, если вместо условий (4.3.6) берутся условия

$$u(\ell,y)=\chi_3(y),\ u_x(\ell,y)=\chi_4(y),\ -h_2\le y\le 0,$$

где $\chi_i(y)\ (i=3,4)$ – заданные гладкие функции.

Задача 4.3.3. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую все условия задачи 4.3.1, если вместо условий (4.3.7) берутся условия

$$u(x,h)=\psi_3(x),\ u_y(x,h)=\psi_4(x),\ -\ell_1\le x\le 0,$$

где $\psi_i(x)\ (i=3,4)$ – заданные гладкие функции.

Заключение по главе 4

В четвертой главе диссертации сформулированы и исследованы краевые задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений с двумя линиями склеивания, когда в прямоугольнике первой четверти рассматривается параболическое уравнение третьего порядка, а в прямоугольниках второй и четвертой четверти, имеющих общие границы с первым прямоугольником, гиперболические уравнения третьего порядка с различными некратными действительными характеристиками.

Методом понижения порядка уравнений, методом сопряженных задач и интегральных уравнений получены представления решений во всех трех областях, существование решений установлено методом редукции к интегральным уравнением Фредгольма и Вольтерра второго рода.

Получены достаточные условия разрешимости задачи относительно коэффициентов уравнений а так же данные этих задач. Доказаны свойства функции Римана и её производных, отражающие характер роста по определенным направлениям.

ВЫВОДЫ

В диссертации сформулированы и исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с одной и двумя линиями изменения типа.

Отличительной чертой нелокальных задач является в том что, нелокальные условия задачи содержат интегральные члены, характеризирующие определенные усредненные величины.

При решении задач использованы методы понижения порядка уравнений, метод сопряженных задач, метод редукции к интегральным уравнениям, принцип сжимающих отображений и метод последовательных приближений.

Определены достаточные условия существования и единственности решений локальных и нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка. Получены представления решения задач во всех рассматриваемых областях. При получении результатов по нелокальным задачам из-за наличия интегральных условий традиционные подходы видоизменены.

Результаты диссертации, связанные с исследованием задачи склеиваний для параболических и гиперболических уравнений третьего порядка, могут быть использованы для развития теории локальных и нелокальных задач для уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высокого порядков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абдиназаров, С. Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками [Текст]: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / С. Абдиназаров. – Ташкент, 1992. – 27 с.

2. Абдрахманов, М.А. Об одной задаче сопряжения различных типов [Текст] / М.А. Абдрахманов // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. – 1971. – № 5. – С. 1-7.

3. Акилов, Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей [Текст] / Ж.А. Акилов – Ташкент: Фан, 1982. – 104 с.

4. Аркабаев, Н.К. Задача сопражения для уравнений третьего порядка с интегральными условиями [Текст] / Н. К. Аркабаев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск. 47. – Бишкек: Илим, 2014 – С. 142-146.

5. Аркабаев, Н.К. Краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями [Текст] / Н. К. Аркабаев // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец. вып. – 2014. – №3. – 5 изд. – С. 22-27.

6. Аркабаев, Н.К. Краевая задача для смешанно-псевдопараболических уравнений с двумя линиями изменения типа [Текст] / Н. К. Аркабаев // Приволжский научный вестник (РФ). – 2016. – №5 (57). – С. 15-21.

7. Аркабаев, Н.К. Единственность решения задачи сопражения для уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / Н. К. Аркабаев // Естественные и математические науки в современном мире СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международной научно-практической конференции» (РФ). – 2016. – №5 (40). – С. 74-79.

8. Аркабаев, Н.К. О краевой задаче для псевдопараболических уравнений с характеристикой линии склеивания / Н. К. Аркабаев // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. Спец. вып.– 2016. – №1 (32). – С. 73-77.

9. Атаманов, Э.Р., Мамаюсупов, М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Э.Р. Атаманов, М.Ш. Мамаюсупов // – Фрунзе: Илим, 1990. – 100 с.

10. Бабенко, К.И. К теории уравнений смешанного типа [Текст]: дис. … д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.И. Бабенко – Москва, 1951. – 195 с.

11. Бейлина, Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения [Текст] / Н. В. Бейлина // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. - № 2 (61). – С. 22-28.

12. Бейлина, Н.В. О разрешимости обратной задачи для гиперболического уранения с интегральным условием переопределения [Текст] / Н. В. Бейлина // Вестник СамГУ. Серия физ.-мат. наук. – 2011. – № 2 (23). – С. 34-39.

13. Берс, Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. [Текст] / Л. Берс. – М.: ИЛ., 1961. – 208 с.

14. Бицадзе, А.В. Уравнения смешанного типа. [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

15. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

16. Виноградова, М.Б. Теория волн. [Текст] / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. – М.: Наука, 1990. – 432 с.

17. Водахова, В.А. Краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанного псевдо-параболо-гиперболического типа [Текст]: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В.А. Водахова. – Нальчик, 1983. – 97 с.

18. Гельфанд, И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений [Текст] / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1959. Т. XIV. – Вып. 3(87). – С. 3-19.

19. Данилкина, О.Ю. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений параболического типа [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / О.Ю. Данилкина. – Казань, 2007. – 16 с.

20. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

21. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

22. Джураев, Т.Д. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, Я. Попёлек // Дифф. уравнения. – 1991. Т. 27. – № 10. – С. 1734-1745.

23. Джураев, Т. Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

24. Евдокимова, Н.Н. Нелокальные задачи для уравнений влагопереноса [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Н.Н. Евдокимова. – Самара, 2000. – 15 с.

25. Жегалов, В.И. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73-76.

26. Жегалов, В.И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными [Текст] / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Казань: Изд. Казанского математического общества, 2001. – 226 с.

27. Жестков, С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями [Текст] // Украинск. матем. журнал. – 1990. Т. 42. – № 1. – С. 132–135.

28. Зайнулабидов, М.М. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения [Текст] / М. М. Зайнулабидов // Дифференц. уравнения. – 1969. – Том 5, № 1. С. 91–99.

29. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием [Текст] / Н.И. Ионкин //Дифференц. уравнения. – 1977. Том 13. -№ 2. – С. 294–304.

30. Исломов, Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения [Текст]: автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Б. Исломов. – Ташкент, 1995. – 32 с.

31. Камынин, Л.И. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами [Текст] / Л.И. Камынин // Сибирский матем. журнал. – 1963. – Т. IV. – № 5. – С. 1071-1105.

32. Камынин, Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями [Текст] / Л.И. Камынин // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1964. Т. 4. - № 6. – С. 1006 – 1024.

33. Кожанов, А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений / А.И. Кожанов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2004. – Выпуск 30. - С. 63–69.

34. Кожобеков, К.Г. Краевые задачи для линейных и нелинейных уравнений смешанного типа третьего порядка [Текст]: автореф. дис. … . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.Г. Кожобеков. – Ош, 2009. – 22 с.

35. Корзюк, В.И. Задача о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов [Текст] / В.И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 1968. – № 4. – С. 1855-1886.

36. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию [Текст] – М.: Наука, 1975. – 302 с.

37. Кузьмин, А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике [Текст] / А.Г. Кузьмин. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1990. – 208 с.

38. Лыков, А.В. Теория тепло и массо-переноса. [Текст] / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов // – М.– Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.

39. Миронов, А.Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи [Текст] / Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 27-32.

40. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы. [Текст] / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1967. – 528 с.

41. Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии. [Текст] / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

42. Нахушева, В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом [Текст] / А.М. Нахушев // Вестник СамГТУ. Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.

43. Попов, Н.С. Нелокальные краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Н.С. Попов. – Самара, 2000. – 20 с.

44. Пулькина, Л.С. Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения [Текст]/ Л.С. Пулькина // Матем. заметки. – 2003. Т. 74. – Вып. 3. – С. 435-435.

45. Пулькина, Л.С. Нелокальная краевая задача для нелинейного уравнения колебаний струны [Текст] / Л.С. Пулькина, Е.Н. Климова // Мат. модел. и краевые задачи: Тр. третьей всерос. научн. конф. Ч. 3: Дифф. уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 192-195.

46. Сабитов, К.Б. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения [Текст] / К.Б. Сабитов, А.А. Карамова // Изв. РАН. Сер. матем., 2001. - Том 65. – Выпуск 4. – С. 133–150.

47. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа. [Текст] / М.С. Салахитдинов. – Ташкент: Фан, 1974. –156 с.

48. Салахитдинов, М.С. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. [Текст] / М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов. – Ташкент: Фан, 1997. – 168 с.

49. Салахитдинов, М.С. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения [Текст] / Салахитдинов М.С., Уринов А.К. // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1984. – № 3. – С. 29-34.

50. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. Том 16. - №11. С. 1925–1935.

51. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа. [Текст] / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

52. Смирнов, М.М. Об одной задаче со смещением для уравнения смешанного типа 2-го рода с двумя линиями вырождения / М.М. Смирнов // Изв. вузов. Матем. – 1982. - № 3. – С. 68 – 75.

53. Сопуев, А. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа с двумя линиями изменения типа [Текст] / А. Сопуев // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1989. – № 4. – С. 31–37.

54. Сопуев, А. Нелокальная задача с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н. К. Аркабаев // Вестник КРСУ. Том 10. – №9. – 2010. – С. 150-153.

55. Сопуев, А. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя линиями изменения типа [Текст] / А. Сопуев, Н. К. Аркабаев // Вестник КНУ. Спец. вып.– 2011. – С. 136-138.

56. Сопуев, А. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н. К. Аркабаев // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2013. – №1. – С. 16-23.

57. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики. [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

58. Трикоми, Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа [Текст] / Ф. Трикоми. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 190 с.

59. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны. [Текст] / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 624 с.

60. Уткина, Е.А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами [Текст] / Изв. вузов. Математика. – 2006.– №9. - С. 70.–67.

61. Уфлянд, Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях [Текст] / Я.С. Уфлянд // Инж.-физ. журнал. - 1964. – Т. 7, № 1. – С. 89-92.

62. Франкль, Ф.И. Избранные труды по газовой динамике [Текст] / Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 712 с.

63. Хошимов, А.Р. Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в криволинейных областях [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ташкент, 1995. - 94 с.

64. Шарафутдинова, Г.Г. К теории задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Г.Г. Шарафутдинова. – Самара, 2000. – 16 с.

65. Шхануков, М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка [Текст]: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.Х. Шхануков. – Нальчик, 1985. – 225 с.

66. Cannon, I.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy [Текст] / I.R. Cannon // Quart. Appi.Math. – 1963. – Vol. 21. – № 2. – P. 155-160.

67. Colton, D. Pseudoparabolic equations in One Space variable [Текст] / D. Colton // J. Differential Equations. – 1972. – № 12. – P. 559-565.

68. Gellerstedt, S. Quelqurs probemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ [Текст] / S. Gellerstedt // Arkiv for Mat., Astr. Osh Fis. - 1936. - bd. 26 A. - № 3. - P. 1-32.

69. Rundell, W. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation [Текст] / W. Rundell, M. Stecher // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – P. 77-81.

70. Arkabaev, N. Conjugation problem for the third-order equation with integral conditions [Текст] / N. Arkabaev. // Abstract book. Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bozteri, Kyrgyzctan, 5-7 June, 2015. – P. – 56.

71. Sopuev, A. Problems of interface for linear pseudo-parabolic equations of the third order [Текст] / A. Sopuev, N.K. Arkabaev // Book of Abstracts. The 4^{th} congress of the TWMS. Baku, Azerbaijan, 1-3 Jule, 2011.- P. 276.

72. Sopuev, A. Boundary value problems for third order equation with integral boundary conditions. [Текст] / A. Sopuev, N. Arkabaev // Abstract book. V Congress of the Turkic world mathematicians, 5-7 June, Issyk-Kul Aurora, 2014. – P.-136.