ЖУСУП БАЛАСАГЫН атындагы
КЫРГЫЗ УЛУТТУК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ
ВЕСТНИК

КЫРГЫЗСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО
УНИВЕРСИТЕТА имени ЖУСУПА БАЛАСАГЫНА

2011

Специальный выпуск

ISBN 9967-21533x

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов М.Т.

Омуралиев А.С., Кулмамбетова С.
АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНГО СИНГУЛЯРНО - ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 127

Саадабаев А. С.
МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА 132

Сопуев А., Аркабаев Н. К.
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА . . . 136

Сатыбаев А. Дж., Калдыбаева Г. А.
ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ 139

Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б.
НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР 140

Рафатов Р. Р.
УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ 142

Джураев А.М.
КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМ НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ В РАСШИРЕННОЙ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ 146

Панкова Г.Д., Жээнтаева Ж.К.
ОПЫТ ИНТЕГРАЦИОННОГО ПОДХОДА В СИСТЕМЕ ОБУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ 149

Панкова Г.Д.
СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ НА БАЗЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ И КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ 153

Лелевкина Л. Г.
ОПТИМИЗАЦИЯ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ОБСАДНОЙ КОЛОННЫ НЕФТЯНОЙ СКВАЖИНЫ 158

Иманалиев Т. М., Назарбаев Ф. Т.
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА 164

Иманалиев Т. М., Бурова Е. С.
РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ 169

Иманалиев Т. М., Ананьева Ю. Н.
ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИСА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА 174

Куттыкожаева Ш. Н., Исабекова Н. А., Наурызбаева А. А.
АППРОКСИМАЦИЯ НАЧАЛЬНО - КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА 177

Ишмахаметов К.И.
О МАЛОЙ ИНДУКТИВНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ 180

Ишмахаметов К.И.
СИЛЬНО ОБОБЩЕННО СОБСТВЕННЫЕ И СИЛЬНО ОБОБЩЕННО ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ 183

Асанкулова М., Жусупбаева Г.А., Суйналиева Н.К.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ КОМПАНИИ И СХЕМА ЕЕ СВЯЗИ С ПОТРЕБИТЕЛЯМИ 186

Асанова А. Т.
О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕЕ СВЯЗИ С ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ 190

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов М.Т.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Сопуев А., Аркабаев Н. К.
г. Ош, ОшГУ
sopuev@rambler.ru, nurkasym@gmail.com

Доказаны существование и единственность решения краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

1. В области D, ограниченной отрезками прямых $x = 0, y = -h_1, x = \ell, y = h, x = -\ell_1, y = 0$ $(h, h_1, \ell, \ell_1 > 0)$, рассмотрим задачи сопряжений для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} + a_1 u_x + d_1 u = 0, (x, y) \in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} + a_2 u_{xy} + b_2 u_{yy} + c_2 u_x + d_2 u_y + e_2 u = 0, (x, y) \in D_2, \tag{2}$$

$$L_3(u) \equiv u_{xyy} + a_3 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_3 u_x + d_3 u_y + e_3 u = 0, (x, y) \in D_3, \tag{3}$$

где $a_i, d_i, b_j, c_j, e_j (i = 1..3, j = 2, 3)$ - заданные функции, а $D_1 = D \cap (x > 0, y > 0)$, $D_2 = D \cap (x > 0, y < 0)$, $D_3 = D \cap (x < 0, y > 0)$.

В области D уравнения (1) - (3) можно рассматривать как уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами. Поэтому на линиях $y = 0$ и $x = 0$ потребуем выполнения условия сопряжений:

$$u(x, -0) = u(x, +0), u_y(x, -0) = u_y(x, +0), 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{4}$$

$$u(-0, y) = u(+0, y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \leqslant y \leqslant h. \tag{5}$$

Уравнения (1)–(3) часто называются псевдопараболическими [1]. Частные случаи рассматриваемых уравнений встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [2]. Отметим также, что в решении уравнения (1) преобладают свойства, характерные для параболических уравнений, а в решении уравнений (2) и (3) - для гиперболических уравнений.

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r = 0, 1, ..., n;$ $s = 1, 2, ..., m)$. Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned} &a_1 \in C^{1+0}(\overline{D}_1),\ d_1 \in C(\overline{D}_1),\ a_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ &b_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2),\ c_2 \in C(D_2) \cap C^{1+0}(D_2), \\ &d_2 \in C(D_2) \cap C^{0+1} \cap (D_2),\ e_2 \in C(\overline{D}_2), a_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{1+1}(D_3), \\ &b_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{0+2}(D_3),\ c_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{1+0}(D_3), \\ &d_3 \in C(\overline{D}_3) \cap C^{0+1}(D_3),\ e_3 \in C(\overline{D}_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Задача 1. В области D найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{1+1}(D_1) \cup C^{1+2}(D_i)] \cap C^{3+0}(D_1)$ $(i = 2, 3)$, удовлетворяющую уравнений (1), (2) и (3) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, условиям сопряжений (4), (5) и краевым условиям

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), u(-\ell_1, y) = \varphi_2(y), 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{7}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), u_y(x, 0) = \psi_2(x), -\ell_1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{8}$$

$$u(0, y) = \chi(y), -h_1 \leqslant y \leqslant 0, u(x, -h_1) = \psi_3(x), 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{9}$$

где $\varphi_i(y)$ $(i = 1, 2), \psi_j(x)$ $(j = 1..3), \chi(y)$ - заданные функции, причем

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y) \in C^1[0, h], \varphi_2(y) \in C^2[0, h], \psi_i(x) \in C^1[-\ell, 0]\ (i = 1, 2), \\ &\psi_3(x) \in C^1[0, \ell], \chi(y) \in C^2[-h_1, 0], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\psi_1(0) = \chi(0), \varphi_2(0) = \psi_1(-\ell_1), \psi_2(0) = \chi'(0), \chi(-h_1) = \psi_3(0). \tag{11}$$

Аналогичная задача рассмотрена в работе [3].

Уравнения (1) - (3) в совокупности с условиями сопряжения (4) и (5) является уравнениями смешанного типа с двумя линиями изменения типа в области.

2. Введем следующие обозначения

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \tau_1(x), u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = \nu_1(x), 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{12}$$

$$u(-0, y) = u(+0, y) = \tau_2(y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = \nu_2(y), 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{13}$$

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ

Байсубанов М.Т.

где $\tau_i, \nu_i (i = 1, 2)$ - пока неизвестные функции.

В области D_2 найдем решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (12) и первому условию (9) (задача 2). Решение этой задачи представим через функции Римана. С этой целю рассмотрим тождество

$$uL_2^*(\vartheta) - \vartheta L_2(u) = [\vartheta_\eta u_\eta + (a_2\vartheta)_\eta u - C_2\vartheta u]_\xi - [\vartheta u_{\xi\eta} + \vartheta_{\xi\eta}u + a_2\vartheta u_\xi + b_2\vartheta u_\eta - (b_2\vartheta)_\eta u + d_2\vartheta u]_\eta, \tag{14}$$

где $L_2^*(\vartheta) \equiv -\vartheta_{\xi\eta\eta} + (a_2\vartheta)_{\xi\eta} + (b_2\vartheta)_{\eta\eta} - (c_2\vartheta)_\xi - (d_2\vartheta)_\eta + e_2\vartheta$.

Интегрируя тождество (14) по области $D_2^* = \{(x, y) : 0 < \xi < x,\ y < \eta < 0\}$, получаем представление решения задачи 2 в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) = A_1(x,y)\tau_1(x) - \vartheta(x,y;x,0)\nu_1(x) + \int_0^x [B_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi) + C_1(x,y;\xi)\nu_1(\xi)]d\xi + \\ +\vartheta_\eta(x,y;0,y)\chi(y) + \int_0^y E_1(x,y;\eta)\chi(\eta)d\eta + f_1(x,y), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана, определенная как решение задачи Гурса:

$$L_2^*(\vartheta) = 0, (\xi, \eta) \in D_2^*,$$

$$\vartheta(x,y;\xi,y) = 0, \vartheta_\eta(x,y;\xi,y) = exp\left(\int_x^\xi b_2(s,y)ds\right), 0 \leqslant \xi \leqslant x,$$

$$\vartheta(x,y;x,\eta) = \theta_1(x,y;\eta), 0 \leqslant \eta \leqslant 0,$$

а $\theta_1(x, y; \eta)$ - решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \vartheta_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - [a_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta)]_\eta + c_2(x,\eta)\vartheta(x,y;x,\eta) = 0, \\ \vartheta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y} = 0, \vartheta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y} = 1, \end{cases}$$

$A_1(x, y), B_1(x, y; \xi), C_1(x, y; \xi), E_1(x, y; \eta), f_1(x, y)$ - заданные функции, выражающиеся через данные задачи 2 и функции Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$.

Лемма 1. *Если* $\forall x \in [0, \ell]\ \forall y \in [-h_1, 0]$:

$$a_2(x, y) + yc_2(x, y) \geqslant 0, \tag{16}$$

то

$$\forall x \in [0, \ell] : V(x) = \vartheta(x, -h_1; x, 0) \geqslant h_1. \tag{17}$$

Используя второе условие (9) и неравенство (17), из (15) найдем

$$\nu_1(x) = A_1(x, -h_1)V^{-1}(x)\tau_1(x) + \int_0^x \widetilde{B_1}(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \widetilde{\Psi}(x), \tag{18}$$

где $\widetilde{B_1}(x, \xi), \widetilde{\Psi}(x)$ выражаются через $A_1, B_1, C_1, E_1, \psi_1, \chi, f_1$.

3. Интегрируя уравнение (1) по x, в пределах от 0 до x, и переходя к пределу при $y \to +0$ в полученном уравнении имеем

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) + a_1(x,0)\tau_1(x) = \omega(0) + a_1(0,0)\chi(0) - \chi'(0) + \int_0^x \widetilde{d_1}(s,0)\tau_1(s)ds, \tag{19}$$

где $\omega(0)$ - неизвестная константа, $\widetilde{d_1}(s, 0) = a_{1s}(s, y) - d_1(s, y)$. Исключая $\nu_1(x)$ из (18) и (19), получим

$$\tau_1(x) = \Psi(x) + \int_0^\ell K(x,t)\tau_1(t)dt, \tag{20}$$

где $K(x, t) = \frac{t-\ell}{\ell^2}\left[x^2 + \int_0^x \xi^2 R(x, \xi)d\xi\right]$, $\Psi(x)$ - известные функции.

Лемма 2. *Если*

$$\ell L < 1, \tag{21}$$

где $L = \max|K(x,t)|$, то уравнение (20) имеет единственное решение.

4. С помощью функции Римана, как и в п.2 получаем представление решения задачи Гурса (задача 3) для уравнения (3) с условиями (8) и $u(0,y) = \tau_2(y)$:

$$u(x,y) = A_2(x,y)\psi_1(x) - w(x,y;x,0)\psi_2(x) + \int\limits_0^x [B_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi) + C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi)]d\xi + \\ +w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y) + \int\limits_0^y E_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta + f_2(x,y), \tag{22}$$

где $w(x;y;\xi,\eta)$ - функция Римана, а A_2, B_2, C_2, E_2, f_2 - выражаются через данные задачи 3.

Лемма 3. *Если*

$$\forall (x,y) \in \overline{D_3} : b_3(x,y) \geqslant 0, \tag{23}$$

то

$$\forall x \in [-\ell, 0] : w_\eta(-\ell_1, y; 0, y) \geqslant 1. \tag{24}$$

При выполнении условия (23), используя второе условие (7) из (22), с учетом (24) получим

$$\tau_2(y) = \Phi(y) + \int\limits_0^y K(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta,$$

где $K(y,\eta)$, $\Phi(y)$ - заданные функции, выражающиеся через данные задачи 3.

Определив отсюда $\tau_2(y)$, из (22) найдем $\nu_2(y) = u_x(0,y)$.

5. Интегрируя уравнение (1) по x и выписывая решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям

$$u_x(0,\eta) = \nu_2(y), u(\ell,y) = \varphi_2(y), 0 \leqslant y \leqslant h, u(x,0) = \tau_1(x), 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

имеем

$$u(x,y) = -\int\limits_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta - \int\limits_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int\limits_0^\ell G(x,y;\xi,0,)\tau_1(\xi)d\xi - \\ -\int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_0^y G(x,y;\xi,\eta)[\omega(\eta) - a_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + \int\limits_0^\ell \widetilde{d}_1(t,\eta)u(t,\eta) + T_0(\xi,\eta)]d\eta, \tag{25}$$

где $\widetilde{d_1}(t,\eta) = a_{1t}(t,\eta) - d_1(t,\eta), T_0(x,y) = a_1(0,y)\tau_2(y) - \tau_2'(y)$, $G(x,\eta;\xi,\eta)$ - функция Грина.

Используя условие $u(0,y) = \tau_2(y)$, из (25) выражаем $\omega(y)$ через $u(x,y)$ и тем самым придем к уравнению

$$u(x,y) = T(x,y) + \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

допускающее непрерывно-дифференцируемое решение.

Теорема 4. *Если выполняются условия (6), (10), (11), (16), (21), (23), то решение задачи 1 существует и единственно.*

Литература

[1] *Colton D.* Pseudoparabolic equation in One Space variable // Differential Equations. — 1972. — № 12. — P. 559–565.

[2] *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — Москва: Высш.школа, 1995. — 301 с.

[3] *Sopuev A., Arkabaev N.K.* Problems of interface for linear pseudo-parabolic equations of the third order // Book of Abstracts. The 4th congress of the TWMS. Baku, Azerbaijan, 1–3 July, 2011. — P. 276.

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ

Байсубанов А.Т.