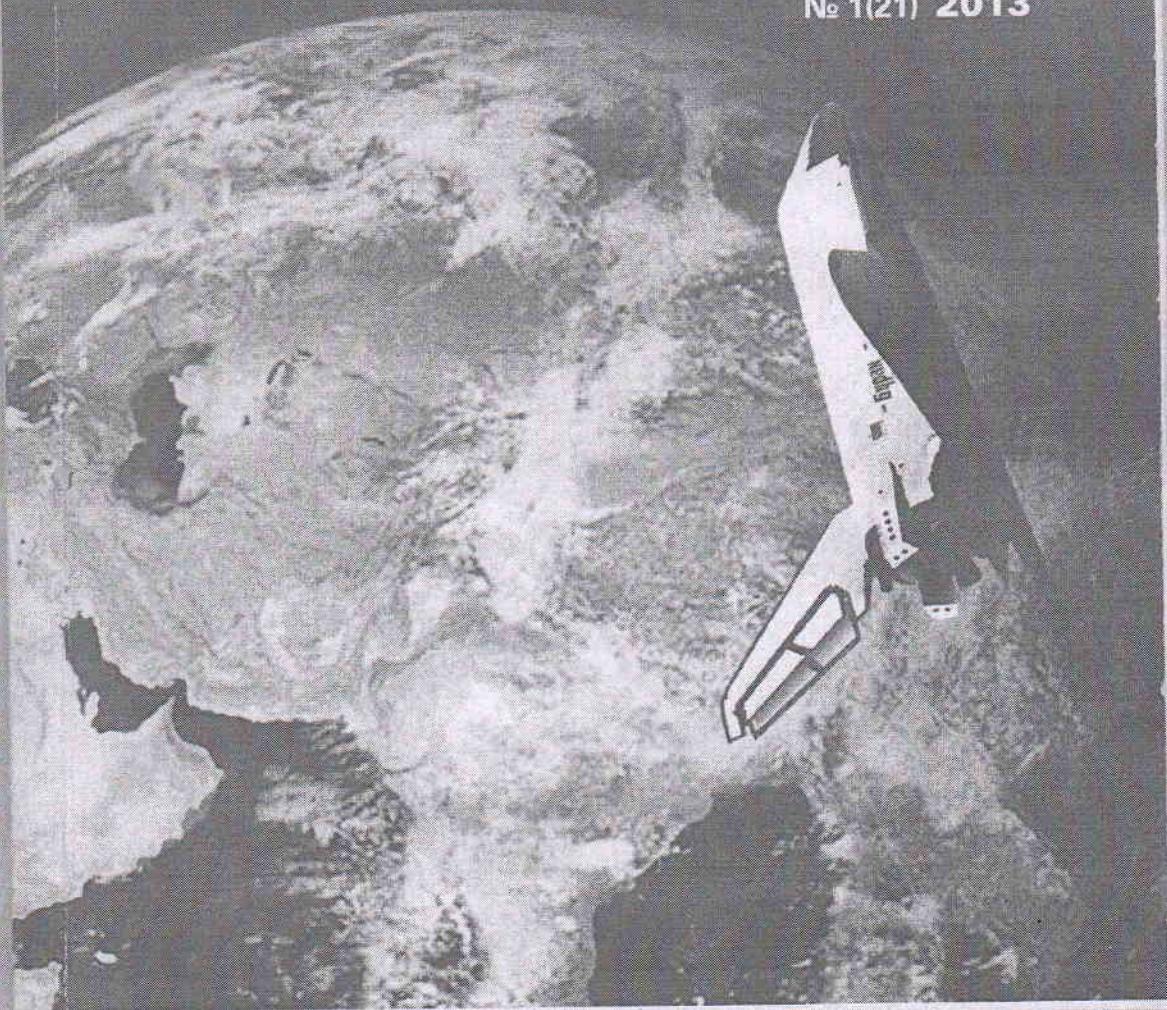




**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

№ 1(21) 2013



*Tomsk State University  
Journal of Mathematics and Mechanics*

*Кокия берна  
Чы сарымарт*



*байсубанов 117*

С.П., кр физ.-мат. наук,  
отв. секретарь по раз-  
Бердюн В.Н., канд. физ.-  
мат. наук А.М., д-р физ.-мат.  
наук, кр физ.-мат. наук,  
проф.; Панько С.В., д-р  
проф.; Сипаева О.В., д-р  
Старченко А.В., д-р физ.-  
мат. д-р физ.-мат. наук,  
отв. секретарь по раз-

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

Бадиева З.П., Бухтик М.С. Полуинвариантные полиномы второго порядка на мно- гообразии линий пространства $A_3$ .....	5
Пестов Г.Г., Фомина Е.А. Конструкция семейства бесконечно узких полей .....	13
Сопуев А., Аркабаев Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдоаболи- тических уравнений третьего порядка .....	16
Таймуров Р.А. О задаче управления подвижными источниками для систем с рас- пределенными параметрами .....	24
Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точка- ми поворота .....	34

## МЕХАНИКА

Белов И.И., Ютов И.Т., Афанасьева С.А., Федосов О.Ю., Югов А.А., Мамцев Р.С. Анализ прочности конструкций из пространственно-разнесенных сталебетон- ных плит при высокоскоростном ударе составным металлическим ударником .....	41
Ложкова Ю.Н. Вейвлет-технология обработки результатов исследования энергети- ческих установок .....	52
Макаров П.В., Гремин М.О. Моделирование разрушения керамических компози- ционных материалов при одноступенчатом скатии .....	61
Миньков Л.Л., Дик И.Г., Пикуцак Е.В. Моделирование турбулентного течения полидисперсной суспензии в гидроциклоне с инжектором .....	75
Платонов Д.В., Минаков А.В., Дектерев А.А., Харламов Е.Б. Сравнительный анализ CFD-пакетов SigmaFlow и Ansys Fluent на примере решения ламинарных тестовых задач .....	84
Попов И.П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колеба- ний .....	95
Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Продольные колебания упругого электропровод- ного стержня в неоднородном магнитном поле .....	104

## МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ БЕРДУЙ (к 70-летию со дня рождения) .....	112
КРЫЛОВ ПЕТР АНДРЕЕВИЧ (к 65-летию со дня рождения) .....	116

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ .....

Конч. верна  
Ул. секретарь



байсубаков Н.Т.

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- |                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Badyaeva Z. P., Bukhityak M. S. Semi-stable second-order polynomials on the varifold of rays of the $A_3$ space .....                                   | 5  |
| Pestov G.G., Komina E.A. A construction of a family of infinitely narrow fields .....                                                                   | 13 |
| Sopruy A., Arkabaev N. K. Interface problems for linear pseudo-parabolic equations of the third order .....                                             | 16 |
| Teimurov R.A. The problem of optimal control for moving sources for systems with distributed parameters .....                                           | 24 |
| Tarsunov D. A. Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed ordinary second-order differential equation with two turning points ..... | 34 |

## MECHANICS

- |                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Belev N.N., Yugov N. T., Afanas'eva S. A., Fedosov O.Yu. , Yugov A.A. , Mamtsev R.S. Durability analysis for designs of spatially-carried steel-concrete plates at high-speed blow by the compound metal drummer..... | 41  |
| Lozhkova Yu. N. Wavelet-technology of processing the studies of power plants.....                                                                                                                                     | 52  |
| Makarov P. V., Eremin M. O. Simulation of ceramic compositional materials fracture upon uniaxial compression .....                                                                                                    | 61  |
| Min'kov L.L., Dueck J.H., Pikushchak E.V. Simulation of turbulent polydisperse suspension flow in the hydrocyclone with an injector.....                                                                              | 75  |
| Platonov D.V., Minalov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A., Kharlamov E.B. Comparative analysis of CFD SIGMAFLOW and FLUENT packages by the example of solving laminar test problems.....                              | 84  |
| Popov I.P. Vibration systems consisting only of inert or only elastic elements and the appearance of free harmonic vibrations in them.....                                                                            | 95  |
| Tomilin A.K., Prokopenko E.V. Longitudinal oscillations of a resilient electroconductive core in an inhomogeneous magnetic field.....                                                                                 | 104 |

## MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

- |                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| V.N. Bertsun, To the 70 <sup>th</sup> anniversary ..... | 112 |
| P.A. Krylov, To the 65 <sup>th</sup> anniversary .....  | 116 |
| <br>BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....            | 123 |

УДК 517.956.6

А. Сонуев, И.К. Аркабаев

## ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для линейных псевдопарabolических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

**Ключевые слова:** сопряжение, псевдопарabolические уравнения, краевые условия, функции Римана, интегральные уравнения.

### 1. Постановка задачи

В области  $D$ , ограниченной отрезками прямых

$$x=0, \quad y=-h_1, \quad x=\ell, \quad y=h, \quad x=-\ell_1, \quad y=0 \quad (\ell, \ell_1, h, h_1 > 0),$$

рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u) = u_{xxx} - u_{xy} + a_1 u_x + d_1 u = 0, \quad (x, y) \in D_1; \quad (1)$$

$$L_2(u) = u_{xyy} + a_2 u_{xy} + b_2 u_{yy} + c_2 u_x + d_2 u_y + e_2 u = 0, \quad (x, y) \in D_2; \quad (2)$$

$$L_3(u) = u_{xyy} + a_3 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_3 u_{xy} + d_3 u_y + e_3 u = 0, \quad (x, y) \in D_3, \quad (3)$$

где  $a_i, d_i, b_j, c_j, e_j$ ,  $i = 1, 3$ ,  $j = 2, 3$ , – заданные функции, а  $D_1 = D \cap (x > 0, y > 0)$ ,

$D_2 = D \cap (x > 0, y < 0)$ ,  $D_3 = D \cap (x < 0, y > 0)$ .

Уравнения (1) – (3) представляют собой канонические виды линейных уравнений третьего порядка по классификации работы [1]. Такие уравнения часто называются псевдопарabolическими по характеру свойств решений [2, 3]. Частные случаи рассматриваемых уравнений встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [4].

Пусть  $C^{n+m}$  означает класс функций, имеющих производные  $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$  ( $r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$ ) .

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$a_1, d_1 \in C(\bar{D}_1), \quad a_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), \quad b_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{4+1}(D_2),$$

$$a_3 \in C(\bar{D}_3) \cap C^{4+1}(D_3), \quad b_3 \in C(\bar{D}_3) \cap C^{0+2}(D_3),$$

$$c_j \in C(\bar{D}_j) \cap C^{4+0}(D_j), \quad d_j \in C(\bar{D}_j) \cap C^{0+1}(D_j), \quad e_j \in C(\bar{D}_j), \quad j = 2, 3.$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x, y) \in C(\bar{D}_j) \cap [C^{4+1}(D_j) \cup C^{2+0}(D_j)] \cap C^{3+0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

удовлетворяющую уравнениям (1) – (3) и краевым условиям в областях  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  соответственно, краевым условиям

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell, y) = \psi_1(y), \quad u(0, y) = \chi_1(y), \quad (5)$$

$$u(0, y) = \chi_2(y), \quad u(\ell, y) = \psi_2(y), \quad u(-\ell_1, y) = \varphi_2(y). \quad (6)$$

Комия Верса  
Ул. Екрема Ысит  
байсұдашов Ш.Г.



№ 1(21)

$$u(x, 0) = \psi_1(x), u_y(x, 0) = \psi_2(x), -\ell_1 \leq x \leq 0 \quad (7)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), u_y(x, -0) = u_y(x, +0), 0 \leq x \leq \ell; \quad (8)$$

$$u(-0, y) = u(+0, y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \leq y \leq h, \quad (9)$$

где  $\phi_i(y), \chi_i(y), \psi_i(x) (i=1, 2)$  – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &\in C^2[0, h], \phi_2(y) \in C^1[0, h], \\ \chi_i(y) &\in C^1[-h_1, 0], \psi_i(x) \in C^1[-\ell_1, 0] (i=1, 2); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \psi_1(-\ell_1), \psi_1(0) = \chi_1(0), \psi_2(0) = \chi_1'(0), \\ \psi_1'(0) &= \chi_2(0), \psi_2'(0) = \chi_2'(0). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (1) – (3) в совокупности с условиями сопряжения (8) и (9) являются уравнениями смешанного типа с двумя линиями изменения типа в области  $D$  [5]. Задачи сопряжения для уравнений второго порядка с двумя линиями изменения типа рассмотрены в работах [6–8]. Методом функции Римана изучены краевые задачи для уравнения вида (2) в работах [9, 10]. Построение функции Римана и корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений со старшими частными производными рассмотрены в работах [11–15].

Введем следующие обозначения:

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \tau_1(x), u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = v_1(x), 0 \leq x \leq \ell; \quad (12)$$

$$u(-0, y) = u(+0, y) = \tau_2(y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = v_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (13)$$

где  $\tau_1(x), \tau_2(y), v_1(x), v_2(y)$  – пока неизвестные функции.

## 2. Представление решения задачи 1 в области $D_2$

Рассмотрим в области  $D_2$  задачу Гурса для уравнения (2) с условиями (6) и

$$u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \quad (14)$$

Решение этой задачи представим через функции Римана [9, 10]. С этой целью рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} uL_2(u) - uL_2^*(v) &= [vu_{\xi\eta} + v_{\xi\eta}u + a_2vu_{\xi} - (a_2v)_{\xi}u + \\ &+ b_2vu_{\eta} + c_2vu_{\xi}]_{\xi} - [v_{\xi}u_{\xi} + (b_2v)_{\xi}u - d_2vu_{\eta}]_{\eta}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $L_2^*(v) = -v_{\xi\eta} + (a_2v)_{\xi\xi} + (b_2v)_{\xi\eta} - (c_2v)_{\xi} - (d_2v)_{\eta} + c_2v$ .Пусть  $B_2^*(x, y)$  – произвольная точка области  $D_2$ . Интегрируя равенство (15) по области  $D_2^* = \{(x, y) : 0 < \xi < x, y < \eta < 0\}$ , имеем

$$\begin{aligned} \iint_{D_2^*} [(uL_2(u) - uL_2^*(v))] d\xi d\eta &= \int_{\partial D_2^*} [v_{\xi}u_{\xi} + (b_2v)_{\xi}u - d_2vu_{\eta}] d\xi + \\ &+ [vu_{\xi\eta} + v_{\xi\eta}u + a_2vu_{\xi} - (a_2v)_{\xi}u + b_2vu_{\eta} + c_2vu_{\xi}] d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть  $v(x, y; \xi, \eta)$  – является решением задачи Гурса

$$L_2^*(v) = 0, (\xi, \eta) \in D_2^*, \quad (17)$$

$$v(x, y; \xi, \eta) |_{\xi=x} = 0, \quad v_\xi(x, y; \xi, \eta) |_{\xi=x} = \exp \left( \int_y^\eta a_2(x, t) dt \right), \quad y \leq \eta \leq 0; \quad (18)$$

$$v(x, y; \xi, \eta) |_{\eta=y} = \theta_1(x, y; \xi), \quad 0 \leq \xi \leq x, \quad (19)$$

где  $\theta_1(x, y; \xi)$  – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) - [b_2(\xi, y)v(x, y; \xi, y)]_\xi + d_2(\xi, y)v(x, y; \xi, y) &= 0, \quad 0 < \xi < x, \\ v(x, y; \xi, y) |_{\xi=x} &= 0, \quad v_\xi(x, y; \xi, y) |_{\xi=x} = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Задача (17) – (19) решается эквивалентным сведением к интегральному уравнению Вольтерра вида

$$v(x, y; \xi, \eta) = \xi - x + \int_x^\xi B(\xi, \eta, s)v(x, y; s, \eta)ds + \int_y^\eta a_2(\xi, t)v(x, y; \xi, t)dt + \int_x^\xi ds \int C(\xi, s, t)v(x, y; s, t)dt, \quad (21)$$

где  $B(\xi, \eta, s) = b_2(s, \eta) - (\xi - s)d_2(s, \eta)$ ,  $C(\xi, s, t) = -c_2(s, t) + (\xi - s)e_2(s, t)$ , которое допускает единственное решение из класса  $C^{2+1}(D_2^*)$ .

Тогда из (16) получим представление решения задачи I в области  $D_2$ :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= v_\xi(x, y; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_1(x, y; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \\ &+ \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\chi'_1(\eta) - v(x, y; 0, \eta)\chi'_2(\eta) + C_1(x, y; \eta)\chi_2(\eta) + E_1(x, y; \eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $A_1(x, y; \xi) = -v_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + [b_2(\xi, 0)v(x, y; \xi, 0)]_\xi - d_2(\xi, 0)v(x, y; \xi, 0)$ ,

$$B_1(x, y; \eta) = v_\xi(x, y; 0, \eta) - b_2(0, \eta)v(x, y; 0, \eta),$$

$$C_1(x, y; \eta) = -d_2(0, \eta)v(x, y; 0, \eta),$$

$$E_1(x, y; \eta) = [a_{2\xi}(0, \eta) - c_2(0, \eta)v(x, y; 0, \eta) + a_2(0, \eta)v_\xi(x, y; 0, \eta)].$$

Из (22) нетрудно получить соотношение между  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$ , полученное с помощью области  $D_2$ :

$$v_1(x) = v_{\xi y}(x, 0; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_{1y}(x, 0; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + g_1(x), \quad (23)$$

где  $g_1(x) = B_1(x, 0, 0)\chi'_1(0) - v(x, 0; 0, 0)\chi'_2(0) + C_1(x, 0, 0)\chi_2(0) + E_1(x, 0, 0)\chi_1(0)$ .

3. Соотношение между  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$ , полученное с помощью области  $D_1$

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до  $x$  имеем

$$u_{xx} - u_{yy} = \phi(y) - a_1(x, y)u + \int_0^x \tilde{d}_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi + T_0(x, y), \quad (24)$$

$$\tilde{d}_1(\xi, y) = a_{1\xi}(\xi, y) - d_1(\xi, y), \quad T_0(x, y) = a_1(0, y)\tau_2(y) - \tau'_2(y).$$

Отсюда переходя к пределу при  $y \rightarrow +0$ , получим соотношение между  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$ :

$$\tau_1''(x) - v_1(x) = \phi(0) - a_1(x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x \tilde{d}_1(\xi, 0)\tau_1(\xi)d\xi + T_0(x, 0), \quad (25)$$

(19)

$$\begin{cases} \tau_1(x) = 0, & 0 < \xi < x, \\ \tau_1''(x) - v_1(x) = \phi(0) - a_1(x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x \tilde{d}_1(\xi, 0)\tau_1(\xi)d\xi + T_0(x, 0), & x < \xi. \end{cases} \quad (20)$$

Давлет к интегральному

$$\text{где } \tilde{g}_1(x) = g_1(x) + T_0(x, 0), \quad \tilde{A}_1(x, \xi) = -a_1(x, 0) + v_{1y}(x, 0; x, 0),$$

$$\tilde{d}_1(x, \xi) = \tilde{d}_1(\xi, 0) - A_{1y}(x, 0; \xi).$$

Отметим, что для  $\tau_1(x)$  выполняются еще следующие краевые условия:

$$\tau_1(0) = \chi_1(0), \quad \tau_1'(0) = \chi_2(0), \quad \tau_1(\ell) = \phi_2(0). \quad (27)$$

Интегрируя дважды уравнение (26) и используя при этом первые два условия из (27), имеем

$$\tau_1(x) = \frac{1}{2}\phi(0)x^2 + \int_0^x A_2(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + g_2(x), \quad (28)$$

$$A_2(x, \xi) = \tilde{a}_1(\xi)(x - \xi) + \int_{\xi}^x (x - t)\tilde{d}_1(t, \xi)dt, \quad g_2(x) = \chi_1(0)x + \int_0^x (x - t)\tilde{g}_1(t)dt.$$

Отсюда, воспользовавшись третьим условием (27), находим

$$\phi(0) = \frac{2}{\ell^2}[\phi_2(0) - g_2(\ell)] - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell A_2(\ell, \xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Подставляя это в значение (28), имеем

$$\tau_1(x) = g_3(x) + \int_0^x A_2(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi - \frac{x^2}{\ell^2} \int_0^\ell A_2(\ell, \xi)\tau_1(\xi)d\xi, \quad (29)$$

$$\text{где } g_3(x) = g_2(x) + \frac{1}{\ell^2}[\phi_2(0) - g_2(\ell)]x^2.$$

Обращая вольтерровскую часть уравнения (29), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x) = g(x) + \int_0^x H_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi, \quad (30)$$

$$H_1(x, \xi) = -\frac{1}{\ell^2} \left( x^2 + \int_0^\xi R_1(x, t)t^2 dt \right) A_2(\ell, \xi),$$

$$g(x) = g_3(x) + \int_0^x R_1(x, \xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если

$$\ell L < 1, \quad (31)$$

то уравнение (30) имеет единственное решение, здесь  $L = \max_{0 \leq x, \xi \leq \ell} |H_1(x, \xi)|$ .

### 5. Представление решения задачи I в области $D_3$

В области  $D_3$  рассмотрим задачу Гурса для уравнения (3) с условиями (7) и  $u(0, y) = \tau_2(y), 0 \leq y \leq h$ , решение которого с помощью функции Римана представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & w_\eta(x, y; 0, y) \tau_2(y) + \int_0^y A_2(x, y; \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^y [B_2(x, y; \xi) \psi'_1(\xi) - w(x, y; \xi, 0) \psi'_2(\xi) + \\ & + C_2(x, y; \xi) \psi_2(\xi) + E_2(x, y; \xi) \psi_1(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$A_2(x, y; \xi) = -w_{\eta\eta}(x, y; 0, \eta) + [\alpha_3(0, \eta) w(x, y; 0, \eta)]_\eta - c_3(0, \eta) w(x, y; 0, \eta),$$

$$B_2(x, y; \xi) = w_\eta(x, y; \xi, 0) - \alpha_3(\xi, 0) w(x, y; \xi, 0),$$

$$C_2(x, y; \xi) = -b_3(\xi, 0) w(x, y; \xi, 0),$$

$$E_2(x, y; \xi) = [b_{3\eta}(\xi, 0) - d_3(\xi, 0)] w(x, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w_\eta(x, y; \xi, 0).$$

Здесь  $w(x, y; \xi, \eta)$  – функция Римана, определяемая как решение следующей задачи:

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (\alpha_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_\xi - (d_3 w)_\eta + e_3 w = 0,$$

$$(\xi, \eta) \in D_3'' = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\},$$

$$w(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\eta=y, \xi=0} = 0, w_\eta(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\eta=y, \xi=0} = \exp \left( \int_x^\xi b_3(s, y) ds \right), x \leq \xi \leq 0, \quad (33)$$

$$w(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\xi=x} = \Theta_2(x, y; \eta),$$

где  $\Theta_2(x, y; \eta)$  – решение задачи Коши:

$$w_{\eta\eta}(x, y; x, \eta) - [\alpha_3(x, \eta) w(x, y; x, \eta)]_\eta + c_3(x, \eta) w(x, y; x, \eta) = 0, 0 < \eta < y,$$

$$w(x, y; x, \eta) \Big|_{\eta=0} = 0, w_\eta(x, y; x, \eta) \Big|_{\eta=0} = 1.$$

При выполнении условий (4) решение задачи (33) существует и единственno.

Используя первое условие (5) и учитывая, что  $w_\eta(-l_1, y; 0, y) > 0$ , из (32) получим

$$\tau_2(y) = \gamma(y) + \int_0^y H_2(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta, \quad (34)$$

(31)

где

$$H_2(y, \eta) = \frac{A_2(-\ell_1, y; \eta)}{w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, y)}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{w_{\eta}(-\ell_1, x; 0, y)} [\phi_1(y) + \\ + \int_{-\ell_1}^y [B_2(-\ell_1, y; \xi) \psi'_1(\xi) - w(-\ell_1, y; \xi, 0) \psi'_2(\xi) + C_2(-\ell_1, y; \xi) \psi_2(\xi) + E_2(-\ell_1, y; \xi) \psi_1(\xi)] d\xi].$$

Определив  $\tau_2(y)$  из (34), однозначно находим решение задачи 1 в области  $D_2$  по формуле (32). Тогда из (32) можно определить  $v_2(y) = u_2(0, y)$ .

### 6. Решение задачи 1 в области $D_1$

Выписывая решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям

(32)

$$u_x(0, y) = v_2(y), \quad u(\ell, y) = \phi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad u(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

из (24) имеем

$$u(x, y) = - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta - \int_0^x G_\xi(x, y; \ell, \eta) \phi_2(\eta) d\eta + \\ + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y \int_0^\ell G(x, y; \xi, \eta) [\omega(\eta) - a_1(\xi, \eta) u(\xi, \eta) + \\ + \int_0^\xi \tilde{d}_1(t, \eta) u(t, \eta) dt + T_0(\xi, \eta)] d\xi d\eta,$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[ -\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] - \exp \left[ -\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] - \exp \left[ -\frac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}.$$

Представим полученное решение в виде

$$u(x, y) = - \int_0^y M(x, y, \eta) \omega(\eta) d\eta + \int_0^\ell \int_0^y K_1(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + T_1(x, y), \quad (35)$$

где

$$M(x, y, \eta) = \int_0^\ell G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \quad K_1(x, y; \xi, \eta) = \\ = a_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) - \tilde{d}_1(\xi, \eta) \int_0^\ell G(x, y; t, \eta) dt,$$

(34)

$$T_1(x, y) = \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \int_0^\ell G_\xi(x, y; \xi, \eta) \phi_2(\eta) d\eta d\xi - \int_0^y \int_0^\ell T_0(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

Используя условие  $u(0, y) = \tau_2(y)$ , из (35) имеем

$$\int_0^y M(0, y, \eta) \omega(\eta) d\eta = r_0(y) + \int_0^y d\xi \int_0^y K_1(0, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \quad (36)$$

где  $r_0(y) = -\tau_2(y) + T_1(0, y)$ .

Представим  $M(0, y, \eta)$  в виде

$$M(0, y, \eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{y-\eta}} e^{-s^2} ds + \int_0^y q(y, \xi, \eta) d\xi,$$

$$\text{где } q(y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\xi-4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp \left[ -\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\} - \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\xi+2\ell-4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp \left[ -\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}.$$

Здесь  $\ell$  – означает отсутствие члена суммы при  $n=0$ .

Нетрудно заметить, что  $\lim_{\eta \rightarrow y} M(0, y, \eta) = 1$ . Поэтому, дифференцируя уравнения

(36), получим

$$\omega(y) + \int_0^y M_y(0, y, \eta) \omega(\eta) d\eta = r'_0(y) + \int_0^y d\xi \int_0^y K_{1y}(0, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta.$$

Обращая это уравнение, найдем  $\omega(y)$ :

$$\omega(y) = r(y) + \int_0^y d\xi \int_0^y K_2(y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \quad (37)$$

где

$$K_2(y, \xi, \eta) = K_{1y}(0, y; \xi, \eta) + \int_\eta^y R(y, t) K_{1t}(0, t; \xi, \eta) dt, r(y) = r'_0(y) + \int_0^y R(y, \eta) r'_0(\eta) d\eta,$$

$R(y, \eta)$  – резольвента ядра –  $M_y(0, y, \eta)$ . Исключая  $\omega(y)$  из (35) и (37), получим интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(x, y) = T(x, y) + \int_0^y d\xi \int_0^y K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \quad (38)$$

$$\text{где } K(x, y; \xi, \eta) = K_1(x, y; \xi, \eta) - \int_0^\eta M(x, y, t) K_2(t, \xi, \eta) dt, T(x, y) = \\ = T_1(x, y) - \int_0^y M(x, y, \eta) r(\eta) d\eta.$$

В силу свойств функций  $K(x, y; \xi, \eta)$  и  $T(x, y)$  уравнение (38) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Таким образом, доказана

**Теорема.** Если выполняются условия (4), (10), (11) и (31), то задача имеет единственное решение.

$$\int_{\xi} u(\xi, \eta) d\eta, \quad (36)$$

$$\int_{\xi} u(\xi, \eta) d\xi = \exp \left[ -\frac{(\xi + 4nt)^2}{4(y-\eta)} \right] - \frac{(\xi - 2t + 4nt)^2}{4(y-\eta)},$$

дифференцируя уравнения

$$\int_{\xi} u(\xi, \eta) d\eta, \quad (37)$$

$$= r_0'(y) + \int_0^y R(y, \eta) r_0'(\eta) d\eta,$$

из (35) и (37), получим

$$\int_{\xi} u(\xi, \eta) d\eta, \quad (38)$$

уравнение (38) допускает

#### ЛИТЕРАТУРА

- Джурдаев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991, Т. 27, № 10. С. 1734–1745.
- Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. 1972, № 12, p. 559–565.
- Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1977, V. 63, № 1, P. 77–81.
- Нахутиев А.М. Уравнения математической биологии, М.: Высш. шк., 1995, 301 с.
- Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа, М.: Наука, 1970, 296 с.
- Саляхитдинов М.С., Уртас А.К. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984, № 3, С. 29–34.
- Сопуев А. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений с двумя линиями изменения типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989, № 4, С. 31–37.
- Исламов Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ташкент, 1995, 32 с.
- Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Нальчик, 1985, 225 с.
- Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999, № 10, С. 73–76.
- Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. матем. об-во, 2001, 226 с.
- Жегалов В.И. О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // Изв. вузов. Математика. 2004, № 7, С. 47–52.
- Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2006, № 9, С. 70–67.
- Миронов А.Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007, № 2(15), С. 27–32.
- Тихонова О.А. Понижение порядка и решение в квадратурах дифференциальных уравнений со старшими частными производными: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань, 2010. 17 с.

Статья поступила 21.12.2011 г.

Sopuev A., Arkabaev N.K. INTERFACE PROBLEMS FOR LINEAR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER. Existence of the unique solution of the interface problem for linear pseudo-parabolic equations of the third order with two lines of type change is proved.

Keywords: interface problems, linear pseudo-parabolic equations, boundary conditions, Riemann functions, integral equations.

SOPUEV Adalimjan (Osh State University)  
E-mail: sopuev@rambler.ru

ARKABAEV Nurkasym Kylychbekovich (Osh State University)  
E-mail: nurkasym@gmail.com



Копия верна  
Ур. секретарь

Байсубанов МТ