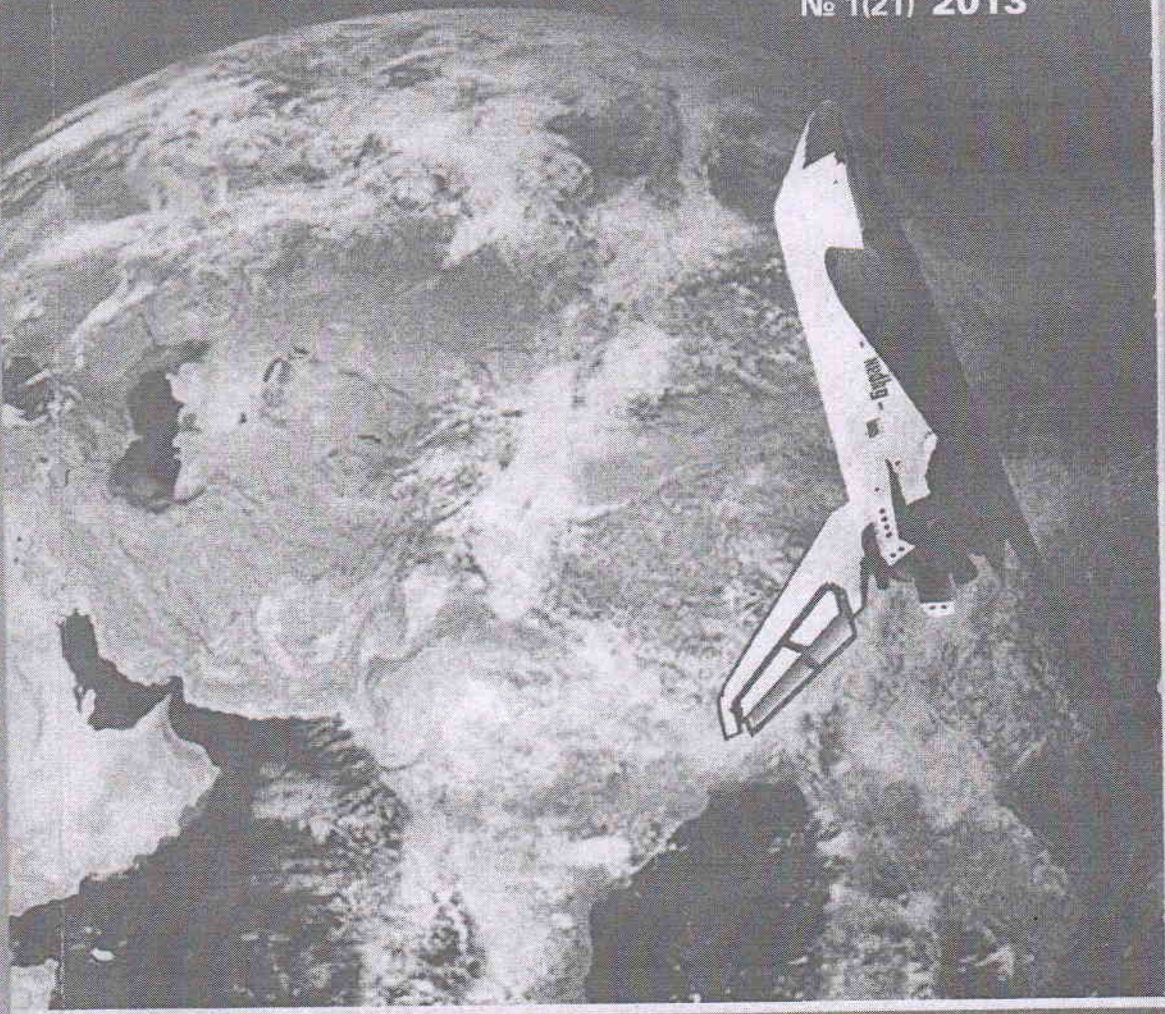
ISSN 1998-8621

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

№ 1(21) 2013



Tomsk State University

Journal of Mathematics and Mechanics

Копия верна
Уч. секретарь Байсубанов И.Т.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Копия верна
Уч. секретарь

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫ
ИНН 00207199610017
ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Байсубанов И.Т.

TOMSK STATE UNIVERSITY
2013 Journal of Mathematics and Mechanics No. 1(21)

CONTENTS

MATHEMATICS

MECHANICS

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 1(21)

УДК 517.956.6

А. Сопуев, Н.К. Аркабаев

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

Ключевые слова: *сопряжения, псевдопараболические уравнения, краевые условия, функции Римана, интегральные уравнения.*

1. Постановка задачи

В области D, ограниченной отрезками прямых

$$x=0,\ y=-h_1,\ x=\ell,\ y=h,\ x=-\ell_1,\ y=0\ \ (\ell,\ell_1,h,h_1>0),$$

рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1; \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,(x,y)\in D_2; \tag{2}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,(x,y)\in D_3, \tag{3}$$

где a_i,d_i,b_j,c_j,e_j, $i=\overline{1,3}$, $j=2,3$, – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0)$, $D_2=D\cap(x>0,y<0)$, $D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

Уравнения (1) – (3) представляют собой канонические виды линейных уравнений третьего порядка по классификации работы [1]. Такие уравнения часто называются псевдопараболическими по характеру свойств решений [2, 3]. Частные случаи рассматриваемых уравнений встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [4].

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,1,\dots,n;s=0,1,\dots,m)$.

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{aligned}&a_1,d_1\in C(\overline{D}_1),\ a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2),\ b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\\&a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3),\ b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3),\\&c_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{1+0}(D_j),\ d_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{0+1}(D_j),\ e_j\in C(\overline{D}_j),\ j=2,3.\end{aligned} \tag{4}$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\overline{D}_i)\cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{2+1}\ [illegible]\ ]\cap C^{3+0},\ i=1,2,3,$$

удовлетворяющую уравнениям (1), [illegible] и (3) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, краевым условиям

$$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\ [illegible]\ \le y\le\ [illegible] \tag{5}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2\ [illegible]\ -h_1\le y\ [illegible] \tag{6}$$

Копия верна

Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов И.Т.

$$u(x,0)=\psi_1(x), u_y(x,0)=\psi_2(x), -\ell_1\le x\le 0 \tag{7}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell; \tag{8}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h, \tag{9}$$

где $\varphi_i(y), \chi_i(y), \psi_i(x) (i=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_1(y)\in C^2[0,h], \varphi_2(y)\in C^1[0,h],\\ \chi_i(y)\in C^1[-h_1,0], \psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0] (i=1,2);\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1), \psi_1(0)=\chi_1(0), \psi_2(0)=\chi_1'(0),\\ \psi_1'(0)=\chi_2(0), \psi_2'(0)=\chi_2'(0).\end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения (1) – (3) в совокупности с условиями сопряжения (8) и (9) являются уравнениями смешанного типа с двумя линиями изменения типа в области D [5]. Задачи сопряжений для уравнений второго порядка с двумя линиями изменения типа рассмотрены в работах [6–8]. Методом функции Римана изучены краевые задачи для уравнения вида (2) в работах [9, 10]. Построение функции Римана и корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений со старшими частными производными рассмотрены в работах [11–15].

Введем следующие обозначения:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le \ell; \tag{12}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{13}$$

где $\tau_1(x), \tau_2(y), \nu_1(x), \nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

2. Представление решения задачи 1 в области D_2

Рассмотрим в области D_2 задачу Гурса для уравнения (2) с условиями (6) и

$$u(x,0)=\tau_1(x), 0\le x\le \ell. \tag{14}$$

Решение этой задачи представим через функции Римана [9, 10]. С этой целю рассмотрим тождество

$$\begin{gathered}\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)=[\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+a_2\upsilon u_\xi-(a_2\upsilon)_\xi u+\\ +b_2\upsilon u_\eta+c_2\upsilon u]_\xi-[\upsilon_\xi u_\xi+(b_2\upsilon)_\xi u-d_2\upsilon u]_\eta,\end{gathered} \tag{15}$$

где $L^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{\xi\xi\eta}+(a_2\upsilon)_{\xi\xi}+(b_2\upsilon)_{\xi\eta}-(c_2\upsilon)_\xi-(d_2\upsilon)_\eta+e_2\upsilon$.

Пусть $B_1^*(x,y)$ – произвольная точка области D_2. Интегрируя равенство (15) по области $D_2^*=\{(x,y): 0<\xi<x, y<\eta<0\}$, имеем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{D_2^*}[(\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}[\upsilon_\xi u_\xi+(b_2\upsilon)_\xi u-d_2\upsilon u]d\xi+\\ +[\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+a_2\upsilon u_\xi-(a_2\upsilon)_\xi u+b_2\upsilon u_\eta+c_2\upsilon u]d\eta.\end{gathered} \tag{16}$$

Пусть $\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ – является решением задачи Гурса

$$L_2^*(\upsilon)=0, (\xi,\eta)\in D_2^*, \tag{17}$$

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),\ y\le\eta\le 0; \tag{18}$$

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),\ 0\le\xi\le x, \tag{19}$$

где $\theta_1(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)=0, 0<\xi<x,\\ \upsilon(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0, \upsilon_\xi(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=1.\end{gathered} \tag{20}$$

Задача (17) – (19) решается эквивалентным сведением к интегральному уравнению Вольтерра вида

$$\begin{gathered}\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\\ +\int_x^\xi B(\xi,\eta,s)\upsilon(x,y;s,\eta)ds+\int_y^\eta a_2(\xi,t)\upsilon(x,y;\xi,t)dt+\int_x^\xi ds\int_\xi^\eta C(\xi,s,t)\upsilon(x,y;s,t)dt,\end{gathered} \tag{21}$$

где $B(\xi,\eta,s)=b_2(x,\eta)-(\xi-s)d_2(s,\eta), C(\xi,s,t)=-c_2(s,t)+(\xi-s)e_2(s,t)$, которое допускает единственное решение из класса $C^{2+1}(D_2^*)$.

Тогда из (16) получим представление решения задачи 1 в области D_2:

$$\begin{gathered}u(x,y)=\upsilon_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\\ +\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\upsilon(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta,\end{gathered} \tag{22}$$

где $\quad A_1(x,y;\xi)=-\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[b_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0)]_\xi-d_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$

$$B_1(x,y;\eta)=\upsilon_\xi(x,y;0,\eta)-b_2(0,\eta)\upsilon(x,y;0,\eta),$$

$$C_1(x,y;\eta)=-a_2(0,y)\upsilon(x,y;0,\eta),$$

$$E_1(x,y;\eta)=[a_{2\xi}(0,\eta)-c_2(0,\eta\upsilon(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\upsilon_\xi(x,y;0,\eta).$$

Из (22) нетрудно получить соотношение между $\tau_1(x)$, и $\nu_1(x)$, полученное с помощью области D_2:

$$\nu_1(x)=\upsilon_{\xi y}(x,0;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g_1(x), \tag{23}$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\upsilon(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_2(0).$

3. Соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, полученное с помощью области D_1

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до x имеем

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)-a_1(x,y)u+\int_0^x \tilde{d}_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+T_0(x,y), \tag{24}$$

$$\tilde{d}_1(\xi,y)=a_{1\xi}(\xi,y)-d_1(\xi,y), T_0(x,y)=a_1(0,y)\tau_2(y)-\tau_2'(y).$$

Отсюда переходя к пределу при $y \to +0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = \omega(0) - a_1(x,0)\tau_1(x) + \int_0^x \tilde{d}_1(\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi + T_0(x,0). \qquad (25)$$

4. Определение $\tau_1(x)$

Исключая $\nu_1(x)$ из соотношений (23) и (25), приходим к уравнению

$$\tau_1''(x) = \omega(0) - \tilde{a}_1(x)\tau_1(x) + \int_0^x \tilde{A}_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi + \tilde{g}_1(x), \qquad (26)$$

где
$$\tilde{g}_1(x) = g_1(x) + T_0(x,0), \quad \tilde{a}_1(x) = -a_1(x,0) + \upsilon_{\xi y}(x,0;x,0),$$
$$\tilde{A}_1(x,\xi) = \tilde{d}_1(\xi,0) - A_{1y}(x,0;\xi).$$

Отметим, что для $\tau_1(x)$ выполняются еще следующие краевые условия:

$$\tau_1(0) = \chi_1(0),\ \tau_1'(0) = \chi_2(0),\ \tau_1(\ell) = \varphi_2(0). \qquad (27)$$

Интегрируя дважды уравнение (26) и используя при этом первые два условия из (27), имеем

$$\tau_1(x) = \frac{1}{2}\omega(0)x^2 + \int_0^x A_2(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi + g_2(x), \qquad (28)$$

$$A_2(x,\xi) = \tilde{a}_1(\xi)(x-\xi) + \int_\xi^x (x-t)\,\tilde{A}_1(t,\xi)dt,\ g_2(x) = \chi_1(0) + \chi_2(0)x + \int_0^x (x-t)\,\tilde{g}_1(t)dt.$$

Отсюда, воспользовавшись третьим условием (27), находим

$$\omega(0) = \frac{2}{\ell^2}[\varphi_2(0) - g_2(\ell)] - \frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Подставляя это в значение (28), имеем

$$\tau_1(x) = g_3(x) + \int_0^x A_2(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi - \frac{x^2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (29)$$

где $g_3(x) = g_2(x) + \dfrac{1}{\ell^2}[\varphi_2(0) - g_2(\ell)]x^2$.

Обращая вольтеровскую часть уравнения (29), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x) = g(x) + \int_0^\ell H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \qquad (30)$$

где
$$H_1(x,\xi) = -\frac{1}{\ell^2}\left(x^2 + \int_0^x R_1(x,t)t^2dt\right)A_2(\ell,\xi),$$
$$g(x) = g_3(x) + \int_0^x R_1(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если
$$\ell L < 1, \tag{31}$$
то уравнение (30) имеет единственное решение, здесь $L = \max\limits_{0 \le x,\, \xi \le \ell} |H_1(x,\xi)|$.

5. Представление решение задачи 1 в области D_3

В области D_3 рассмотрим задачу Гурса для уравнения (3) с условиями (7) и $u(0,y) = \tau_2(y), 0 \le y \le h$, решение которого с помощью функции Римана представимо в виде

$$\begin{gathered} u(x,y) = w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y) + \int_0^y A_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta + \\ + \int_0^y [B_2(x,y;\xi)\psi_1'(\xi) - wx,y;\xi,0)\psi_2'(\xi) + \\ + C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi) + E_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi, \end{gathered} \tag{32}$$

где
$$A_2(x,y;\xi) = -w_{\eta\eta}(x,y;0,\eta) + [a_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta)]_\eta - c_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta).$$
$$B_2(x,y;\xi) = w_\eta(x,y;\xi,0) - a_3(\xi,0)w(x,y;\xi).$$
$$C_3(x,y;\xi) = -b_3(\xi,0)w(x,y;\xi).$$
$$E_2(x,y;\xi) = [b_{3\eta}(\xi,0) - d_3(\xi,0)]w(x,y;\xi,0) + b_3(\xi,0)w_\eta(x,y;\xi,0).$$
Здесь $w(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, определяемая как решение следующей задачи:
$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_\xi - (d_3 w)_\eta + e_3 w = 0,$$
$$(\xi,\eta) \in D_3^* = \{(\xi,\eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\},$$
$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = 0, w_\eta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = \exp\left(\int_x^\xi b_3(s,y)ds\right), x \le \xi \le 0, \tag{33}$$
$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = \theta_2(x,y;\eta),$$
где $\theta_2(x,y;\eta)$ – решение задачи Коши:
$$w_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - [a_3(x,\eta)w(x,y;x,\eta)]_\eta + c_3(x,\eta)w(x,y;x,\eta) = 0, 0 < \eta < y,$$
$$w(x,y;x,\eta)|_{\eta=0} = 0, w_\eta(x,y;x,\eta)|_{\eta=0} = 1.$$
При выполнении условий (4) решение задачи (33) существует и единственно.

Используя первое условие (5) и учитывая, что $w_\eta(-\ell_1,y;0,y) > 0$, из (32) получим
$$\tau_2(y) = \gamma(x) + \int_0^y H_2(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta, \tag{34}$$

где
$$H_2(y,\eta)=\frac{A_2(-\ell_1,y;\eta)}{w_\eta(-\ell_1,y;0,y)},\ \gamma(x)=\frac{1}{w_\eta(-\ell_1,y;0,y)}\{\varphi_1(y)+$$
$$+\int_{-\ell_1}^{0}[B_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_1'(\xi)-w(-\ell_1,y;\xi,0)\psi_2'(\xi)+C_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_2(\xi)+E_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi\}.$$

Определив $\tau_2(y)$ из (34), однозначно находим решение задачи 1 в области D_3 по формуле (32). Тогда из (32) можно определить $\nu_2(y)=u_x(0,y)$.

6. Решение задачи 1 в области D_1

Выписывая решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям
$$u_x(0,y)=\nu_2(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, u(x,0)=\tau_1(x), 0\le x\le \ell,$$
из (24) имеем
$$u(x,y)=-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^\ell d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)[\omega(\eta)-a_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)+$$
$$+\int_0^\xi \tilde{a}_1(t,\eta)u(t,\eta)dt+T_0(\xi,\eta)]d\eta,$$

где
$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Представим полученное решение в виде
$$u(x,y)=-\int_0^y M(x,y,\eta)\omega(\eta)d\eta+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+T_1(x,y), \qquad (35)$$

где
$$M(x,y,\eta)=\int_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi, K_1(x,y;\xi,\eta)=$$
$$=a_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)-\tilde{a}_1(\xi,\eta)\int_0^\ell G(x,y;t,\eta)dt,$$
$$T_1(x,y)=\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int_0^\ell d\xi\int_0^y T_0(\xi,\eta)d\eta.$$

Используя условие $u(0,y)=\tau_2(y)$, из (35) имеем

$$\int_0^y M(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r_0(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^\ell K_1(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \qquad (36)$$

где $r_0(y)=-\tau_2(y)+T_1(0,y)$.

Представим $M(0,y,\eta)$ в виде

$$M(0,y,\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}} e^{-s^2}ds+\int_0^\ell q(y,\xi,\eta)d\xi,$$

где $$q(y,\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\exp\left[-\frac{(\xi-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}-$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi+2\ell-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Здесь $'$ – означает отсутствие члена суммы при $n=0$.

Нетрудно заметить, что $\lim\limits_{\eta\to y}M(0,y,\eta)=1$. Поэтому, дифференцируя уравнения (36), получим

$$\omega(y)+\int_0^y M_y(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r_0'(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_{1y}(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta.$$

Обращая это уравнение, найдем $\omega(y)$:

$$\omega(y)=r(y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \qquad (37)$$

где

$$K_2(y,\xi,\eta)=K_{1y}(0,y;\xi,\eta)+\int_\eta^y R(y,t)K_{1t}(0,t;\xi,\eta)dt,\ r(y)=r_0'(y)+\int_0^y R(y,\eta)r_0'(\eta)d\eta,$$

$R(y,\eta)$ – резольвента ядра $-M_y(0,y,\eta)$. Исключая $\omega(y)$ из (35) и (37), получим интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(x,y)=T(x,y)+\int_0^\ell d\xi\int_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta. \qquad (38)$$

где $$K(x,y;\xi,\eta)=K_1(x,y;\xi,\eta)-\int_0^y M(x,y,t)K_2(t,\xi,\eta)dt,\ T(x,y)=$$
$$=T_1(x,y)-\int_0^y M(x,y,\eta)r(\eta)d\eta.$$

В силу свойств функций $K(x,y;\xi,\eta)$ и $T(x,y)$ уравнение (38) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия (4), (10), (11) и (31), то задача имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т.Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1734–1745.
2. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. 1972. № 12. P. 559–565.
3. *Rundell W., Stecher M.* Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 63. № 1. P. 77–81.
4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
5. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
6. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984. № 3. С. 29–34.
7. *Сопуев А.* Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений с двумя линиями изменения типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 4. С. 31–37.
8. *Исломов Б.* К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.: 01.01.02. Ташкент, 1995. 32 с.
9. *Шхануков М.Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Нальчик, 1985. 225 с.
10. *Жегалов В.И., Уткина Е.А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76.
11. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. матем. об-во, 2001. 226 с.
12. *Жегалов В.И.* О случах разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // Изв. вузов. Математика. 2004. № 7. С. 47–52.
13. *Уткина Е.А.* Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2006. № 9. С. 70–67.
14. *Миронов А.Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 2(15). С. 27–32.
15. *Тихонова О.А.* Понижение порядка и решение в квадратурах дифференциальных уравнений со старшими частными производными: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань, 2010. 17 с.

Статья поступила 21.12.2011 г.

Sopuev A., Arkabaev N.K. INTERFACE PROBLEMS FOR LINEAR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER. Existence of the unique solution of the interface problem for linear pseudo-parabolic equations of the third order with two lines of type change is proved.

Keywords: interface problems, linear pseudo-parabolic equations, boundary conditions, Riemann functions, integral equations.

SOPUEV Adahimjan (Osh State University)
E-mail: sopuev@rambler.ru

ARKABAEV Nurkasym Kylychbekovich (Osh State University)
E-mail: nurkasym@gmail.com

Копия верна
Уч. секретарь
Байсубанов М.Т.