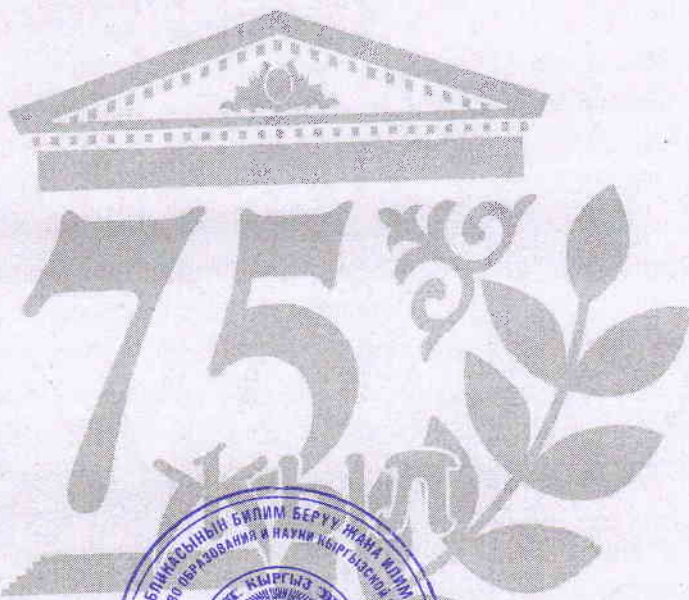




# ВЕСТНИК Ошского государственного университета

## Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ



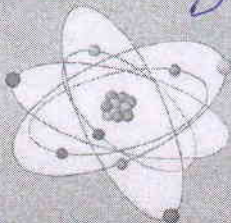
*Копия верна  
Уч. секретарь*

*Ош*



*Байсуданов И.Т.*

2014



1

2

3





МАЗМУНУ

1. <i>Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б.</i> , Развитие асимптотических методов для сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости.....	5
2. <i>Алымкулов К., Азимов Б.</i> , О построении асимптотику решения краевой задачи бисингулярного уравнения Коула со слабой особенностью методом погранфункций .....	11
3. <i>Алымкулов К., Азимов Б., Халматов А.</i> , Метод продолжения параметров для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой.....	17
4. <i>Аркабаев Н.К.</i> , Краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями.....	22
5. <i>Аширбаева А.Ж., Мамазияева Э.А.</i> , Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа .....	27
6. <i>Каримов С.К.</i> , Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в критическом случае.....	32
7. <i>Каримов С.К., Азимбаев М.А.</i> , Поведение решений сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае.....	36
8. <i>Каримов С.К., Панков П.С., Азимбаев М.А.</i> , Об одном обобщении принципа максимума для гармонических функций на неограниченных областях.....	41
9. <i>Кудуев А.Ж.</i> , Бешинчи даражадагы көп мүчөлүү, ортогоналдуу жаңы типтеги мультивейвлеттер.....	45
10. <i>Сопуев У.А.</i> , Задачи со смещением для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения третьего порядка .....	51
11. <i>Талиев А.А.</i> , Нелинейные сингулярно возмущенные уравнения второго порядка с разрывными правыми частями .....	59
12. <i>Тампагаров К.Б.</i> , Метод характеризующих функций определения пограничных линий регулярных и сингулярных областей для сингулярно возмущенных уравнений .....	67
13. <i>Турсунов Д.А., Эркебаев У.З.</i> , Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с точками поворота .....	71
14. <i>Турсунов Э.А.</i> , Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с четырьмя периодическими точками перевала.....	78
15. <i>Чоюбеков С.М., Бекешов Т.О.</i> , Об одном классе неклассического интегрального уравнения в воде.....	83
16. <i>Эркебаев У.З.</i> , Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с особой точкой.....	88
17. <i>Арапов Б., Сидыкбекова А.</i> , Жарым-устойчивый продукт процессстер жана дефектердин радиациялык-стимуляциялык процессстерди узундугу.....	93

Котия Верна  
Уч. секретарь ОшМУ



Байсубанов И.Т.



## Литература

1. M.G. Lighthill. A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid, Phil. Mag., 40 (1949), 1179-1201.
2. К. Алымкулов. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. Илим. – Бишкек, 1992.
3. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Мат. заметки, 79:5 2006, – С. 643-652.
4. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой – Доклады АН, Т. 398, №4, 2004. – С. 862-864.
5. К. Алымкулов, А. Халматов. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Мат. заметки, т. 92, вып. 6, 2012. – С. 819-824.

УДК: 517.956

Аркабаев Н.К., ОшГУ

## Крайевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями

Үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн интегралдык шарттар бар чектик маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденди.

Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями.

We prove the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for third-order equation with integral conditions.

**Ключевые слова:** сопряжения, псевдо параболические уравнения, крайевые условия, функции Римана, формула Грина, интегральные уравнения.

## 1. Постановка задачи.

Математическая постановка ряда прикладных задач, где измеряются некоторые усредненные (интегральные) характеристики величины, сводятся к задачам для уравнений в частных производных [1-4].

В работе в области  $D = \{(x, y) : 0 < x < \chi(y), 0 < y < h\}$  (Рис.1) рассмотрим уравнение

$$u_{x,y} - y^p u_y + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (1)$$

где  $a(x, y), b(x, y), c(x, y), \chi(y)$  – заданные функции, причем потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} \chi(h) = x_0 > 0, \chi(0) = l > 0 \\ \forall y \in [0, h]: x_0 \leq \chi(y) \leq l \end{aligned} \quad (2)$$

Копия верна  
Уг. секретарь ОшГУ



Исайкубанов И.Т.





Пусть  $C^{r,m}$  означает класс функций, имеющих непрерывные производные вида  $\partial^r u / \partial x^r \partial y^m$  ( $r = 0, 1, \dots, m; s = 0, 1, \dots, m$ ).

**Задача 1.** Найти функцию  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2+1}(D)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D$  и следующим условиям:

$$u(0, y) + \int_0^{\chi(y)} P(x, y) u(x, y) dx = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u(\chi(y), y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x, y) u(x, y) dx = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (5)$$

где  $P(x, y), Q(x, y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$  — заданные функции, причем

$$\tau(0) + \int_0^{\ell} P(x, 0) \tau(x) dx = \varphi_1(0), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (6)$$

При  $P(x, y) \equiv Q(x, y) \equiv 0$  задача 1 сводится к первой краевой задаче для уравнения (1). Отметим, что из условия (2) следует, что кривая  $x = \chi(y)$  является монотонно не возрастающей функцией по  $y$ .

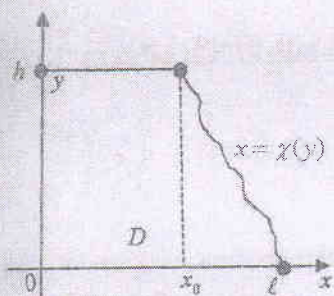


Рис. 1.

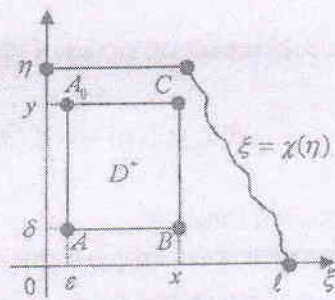


Рис. 2.

**2. Построение функции Римана и представление решение задачи Гурса.** Сначала рассмотрим задачу Гурса для уравнения

$$L[u] = u_{xx} - y^p u_y = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (7)$$

с условиями

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u_x(0, y) = g_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (8)$$



$$u(x,0) = \tau(x), 0 \leq x \leq \ell, \tag{9}$$

где  $g_1(y), g_2(y)$  – функции из класса  $C^1[0, h]$ , причем  $\tau(0) = g_1(0), \tau'(0) = g_2(0)$ .

Пусть  $D^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$ . В области  $D^*$  рассмотрим сопряженную задачу Гурса:

$$L[\mathcal{G}] \equiv \nu_{\xi\eta} + (\eta^p \mathcal{G})_{\eta} = 0, (x, y) \in D, (\xi, \eta) \in D, (\xi, \eta) \in D^*, \tag{10}$$

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \mathcal{G}(x, y; x, \eta) = 0, (x, y) \in D, \eta \in [0, y], \tag{11}$$

$$\mathcal{G}_{\xi}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \mathcal{G}_{\xi}(x, y; x, \eta) = 1, (x, y) \in D, \eta \in [0, y], \tag{12}$$

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \omega(x, y; \xi), (x, y) \in D, \xi \in [0, x]. \tag{13}$$

Функцию  $\omega(x, y; \xi)$  определим как решение задачи Коши с данными вдоль линии  $\eta = y$ :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) - y^p \mathcal{G}(x, y; \xi, y) = 0, 0 < \xi < x, \\ \mathcal{G}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = \mathcal{G}(x, y; x, y) = 0, \\ \mathcal{G}_{\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = \mathcal{G}_{\xi}(x, y; x, y) = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Решение задачи (14) имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = y^{-p/2} sh[y^{p/2}(\xi - x)] \equiv \omega(x, y; \xi). \tag{15}$$

Тогда решение сопряженной задачи Гурса (10)-(13) имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = \eta^{-p/2} sh[\eta^{p/2}(\xi - x)], \tag{16}$$

который назовем функцией Римана.

Отметим некоторые свойства функции Римана  $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$ :

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, 0) = \xi - x, \mathcal{G}(x, 0; 0, 0) = -x, \mathcal{G}_{\eta}(x, y; x, \eta) = 0, \mathcal{G}_{\xi\eta}(x, y; x, \eta) = 0, 0 < \eta \leq h.$$

Пусть  $D'_{\varepsilon\delta}$  означает квадрат с вершинами  $A(\varepsilon, \delta), B(x, \delta), C(x, y), A_0(\varepsilon, y)$  где  $C(x, y)$  – произвольная точка области  $D$  (Рис.2). Выберем произвольную функцию  $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$  из класса  $C^{2+1}(D)$ .

Интегрируя тождество

$$\mathcal{G}L(u) - uL^*(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}u_{\xi\eta} + \mathcal{G}_{\xi\eta}u)_{\xi} - (\mathcal{G}_{\xi}u_{\xi} + \eta^p \mathcal{G}u)_{\eta}$$

по области  $D'_{\varepsilon\delta}$  и учитывая формулу Грина, будем иметь

$$\iint_{D_{\varepsilon\delta}^*} [\mathcal{G}L(u) - uL(\mathcal{G})] d\xi d\eta = \int_{\partial D_{\varepsilon\delta}^*} (\mathcal{G}_\xi u_\xi + \eta^p \mathcal{G}u) d\xi + (\mathcal{G}u_{\xi\eta} + \mathcal{G}_{\xi\eta} u) d\eta. \quad (17)$$

Осуществляя интегрирование по границам области  $D_{\varepsilon\delta}^*$ , получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{G}_\xi(x, y; \varepsilon, y)u(\varepsilon, y) - \mathcal{G}(x, y; \varepsilon, y)u(\varepsilon, y) + \mathcal{G}(x, y; \varepsilon, \delta)u_\xi(\xi, \delta) + \mathcal{G}_\xi(x, y; x, \delta)u(x, \delta) - \\ &- \mathcal{G}_\xi(x, y; \varepsilon, \delta)u(\varepsilon, \delta) - \int_\delta^y [\mathcal{G}_\eta(x, y; x, \eta)u_\xi(x, y) - \mathcal{G}_{\xi\eta}(x, y; x, \eta)u(x, \eta)] d\eta + \\ &+ \int_\varepsilon^x [\mathcal{G}_\eta(x, y; \varepsilon, \eta)u_\xi(\varepsilon, \eta) - \mathcal{G}_{\xi\eta}(x, y; \varepsilon, \eta)u(\varepsilon, \eta)] d\eta - \int_\varepsilon^x d\xi \int_\delta^y \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Далее, устремляя  $\delta$  и  $\varepsilon$  к нулю и учитывая условия (8), (9), придем к представлению задачи Гурса:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \tau(x) + \mathcal{G}_\xi(x, y; 0, y)g_1(y) - \mathcal{G}(x, y; 0, y)g_2(y) - \tau(0) + x\tau'(0) - \\ &- \int_\delta^y [\mathcal{G}_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta)g_1(\eta) - \mathcal{G}_\eta(x, y; 0, \eta)g_2(\eta)] d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^y \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (18)$$

$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$  – функция Римана.

**3. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений.** Полагая

$f(x, y) \equiv -a(x, y)u_x - b(x, y)u_y - c(x, y)u$  из (18), будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0(x, y) + A_1(x, y)g_1(y) + B_1(x, y)g_2(y) + \\ &+ \int_\delta^x C_1(x, y; \xi)u(\xi, \eta) d\xi + \int_0^y [A_2(x, y; \eta)g_1(\eta) + B_2(x, y; \eta)g_2(\eta)] d\eta + \\ &+ \int_0^x d\xi \int_0^y C_2(x, y; \xi, \eta)u(\xi, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$u_0(x, y) = \tau(x) - \int_0^x b(\xi, 0)\mathcal{G}(x, y; \xi, 0)\tau(\xi) d\xi - \tau(0) - x\tau'(0),$$

$$A_1(x, y) = \mathcal{G}_\xi(x, y; 0, y), \quad B_1(x, y) = -\mathcal{G}(x, y; 0, y),$$

$$A_2(x, y; \eta) = -\mathcal{G}_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta) - a(0, \eta)\mathcal{G}(x, y; 0, \eta),$$

$$B_2(x, y; \eta) = \mathcal{G}_\eta(x, y; 0, \eta), \quad C_1(x, y; \xi) = b(\xi, \eta)\mathcal{G}(x, y; \xi, y),$$



$$C_2(x, y; \xi, \eta) = -a(\xi, \eta)g_\xi(x, y; \xi, \eta) - b(\xi, \eta)g_\eta(x, y; \xi, \eta) + \\ + [c(\xi, \eta) - a_\xi(\xi, \eta) - b_\eta(\xi, \eta)]g(x, y; \xi, \tau).$$

Воспользовавшись условиями (3) и (4) из (19), получим:

$$H_{11}(y)g_1(y) + H_{12}(y)g_2(y) = \Phi_1(y) + \int_0^y [H_{13}(y, \eta)g_1(\eta) + H_{14}(y, \eta)g_2(\eta)]d\eta + \\ + \int_0^{z(y)} H_{15}(y, \xi)u(\xi, y)d\xi + \int_0^{z(y)} d\xi \int_0^y H_{16}(y, \xi, \eta)u(\xi, \eta)d\eta, i=1,2, \quad (20)$$

где

$$H_{11}(y) = 1 + \int_0^{z(y)} P(x, y)A_1(x, y)dx, \quad H_{12}(y) = \int_0^{z(y)} P(x, y)B_1(x, y)dx,$$

$$H_{13}(y, \eta) = - \int_0^{z(y)} P(x, y)A_2(x, y; \eta)dx, \quad H_{14}(y, \eta) = - \int_0^{z(y)} P(x, y)B_2(x, y; \eta)dx,$$

$$H_{15}(y, \xi; \eta) = - \int_\xi^{z(y)} P(x, y)C_1(x, y; \xi)dx, \quad H_{16}(y, \xi; \eta) = - \int_\xi^{z(y)} P(x, y)C_2(x, y; \xi, \eta)dx,$$

$$H_{21}(y) = A_1(z(y), y) + \int_0^{z(y)} Q(x, y)A_1(x, y)dx, \quad H_{22}(y) = B_1(z(y), y) + \int_0^{z(y)} Q(x, y)B_1(x, y)dx,$$

$$H_{23}(y) = -A_2(z(y), y) - \int_0^{z(y)} Q(x, y)A_2(x, y; \eta)dx, \quad H_{24}(y) = -B_2(z(y), y) - \int_0^{z(y)} Q(x, y)B_2(x, y; \eta)dx,$$

$$H_{25}(y, \xi) = -C_1(z(y), y) - \int_\xi^{z(y)} Q(x, y)C_1(x, y; \xi)dx,$$

$$H_{26}(y, \xi, \eta) = -C_2(z(y), y; \xi, \eta) - \int_\xi^{z(y)} Q(x, y)C_2(x, y; \xi, \eta)dx,$$

$$\Phi_1(y) = \varphi_1(y) - \int_0^{z(y)} P(x, y)u_0(x, y)dx, \quad \Phi_2(y) = \varphi_2(y) - u_0(z(y), y) - \int_0^{z(y)} Q(x, y)u_0(x, y)dx.$$

**4. Разрешимость задачи** 1. Отметим, что система уравнений (19), (20) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций  $u(x, y), g_1(y), g_2(y)$ . Если выполняется условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_{11}(y) & H_{12}(y) \\ H_{21}(y) & H_{22}(y) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (21)$$





то система (19), (20) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающей единственное решение.

В частности, при  $P(x, y) = Q(x, y) = 0$  имеем  $\Delta = B_1(\chi(y), y) = -g(\chi(y), y; 0, y)$ . Так как  $\forall y \in [0, h] : 0 < x_0 \leq \chi(y) \leq l$ , то  $g(\chi(y), y; 0, y) > 0$ . Следовательно,  $\Delta \neq 0$ . Таким образом, имеет место

**Теорема.** Если выполнены условия (2), (6) и (21), то решение задачи 1 существует и единственно.

**Литература**

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. – V.21. – P. 155-160.
2. Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. – Т. 74. Вып. 3. – С. 435-435.
3. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдо-гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2008. №2 (61). – С. 22-28.
4. Бейлина Н.В. О разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения // Вестник СамГУ. Серия физ.-мат. наук. 2011. № 2 (23). – С. 34-39.

УДК: 517.968

Аширбаева А.Ж., к.ф.-м.н. доцент,  
Мамазияева Э.А., ст.прек., ОшГУ

**Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа**

*Гиперболикалык типтеги оператордуу дифференциалдык теңдемени кошумча аргумент кийирүү усулу менен интегралдык теңдемелер системасына келтирүү каралган.*

*Рассмотрено приведение операторно-дифференциального уравнения к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента.*

*The operator-differential equation is considered to a system of integral equations by an additional argument.*

**Ключевые слова:** операторно-дифференциальные уравнение, метод дополнительного аргумента, нелинейное уравнение системы.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа вида:

$$u_t - a^2(t, x)u_{xx} = b(t, x, u)u + c(t, x, u)u_x + F(t, x; u), \tag{1}$$

$$(t, x) \in G_2(T) = \{0 \leq t \leq T, x \in R\},$$

с начальными условиями

*Жоңия Верия  
Уш. секретарь Ош*



*Байсубанов М.Т.*