ВЕСТНИК
Ошского государственного университета

Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ

75 жыл

Копия верна

Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов И.Т.

2014 1 2 3

МАЗМУНУ

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ
Байсубанов М.Т.

Литература

1. M.G. Lighthill. A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid, Phil. Mag., 40 (1949), 1179-1201.
2. К. Алымкулов. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. Илим, – Бишкек, 1992.
3. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Мат. заметки, 79:5 2006, – С. 643-652.
4. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой – Доклады АН, Т. 398, №4, 2004. – С. 862-864.
5. К. Алымкулов, А. Халматов. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Мат. заметки, т. 92, вып. 6, 2012. – С. 819-824.

УДК: 517.956

Аркабаев Н.К., ОшГУ

Краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями

Үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн интегралдык шарттары бар чектик маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденди.

Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями.

We prove the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for third-order equation with integral conditions.

Ключевые слова: *сопряжения, псевдо параболические уравнения, краевые условия, функции Римана, формула Грина, интегральные уравнения.*

1. Постановка задачи.

Математическая постановка ряда прикладных задач, где измеряются некоторые усредненные (интегральные) характеристики величин, сводятся к задачам для уравнений в частных производных [1-4].

В работе в области $D = \{(x, y): 0 < x < \chi(y),\ 0 < y < h\}$ (Рис.1) рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} - y^p u_y + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \qquad (1)$$

где $a(x, y), b(x, y), c(x, y), \chi(y) -$ заданные функции, причем потребуем выполнения следующих условий:

$$\chi(h) = x_0 > 0, \chi(0) = \ell > 0, p > 0, \qquad (2)$$
$$\forall y \in [0, h]: x_0 \le \chi(y) \le \ell, \chi'(y) < 0.$$

Копия верна

Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов М.Т.

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих непрерывные производные вида $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s \, (r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и следующим условиям:

$$u(0,y) + \int_0^{\tau(y)} P(x,y)\,u(x,y)\,dx = \varphi_1(y),\; 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$u(\chi(y),y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x,y)\,u(x,y)\,dx = \varphi_2(y),\; 0 \le y \le h, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \tau(x),\; 0 \le x \le \ell, \tag{5}$$

где $P(x,y), Q(x,y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$ –заданные функции, причем

$$\tau(0) + \int_0^{\ell} P(x,0)\,\tau(x)\,dx = \varphi_1(0),\; 0 \le x \le \ell. \tag{6}$$

При $P(x,y) \equiv Q(x,y) \equiv 0$ задача 1 сводится к первой краевой задаче для уравнения (1). Отметим, что из условия (2) следует, что кривая $x = \chi(y)$ является монотонно не возрастающей функцией по y.

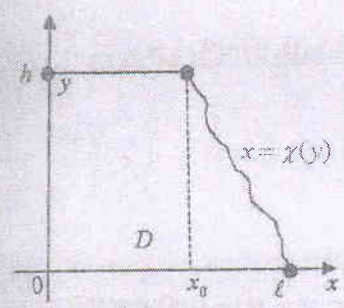

Рис. 1.

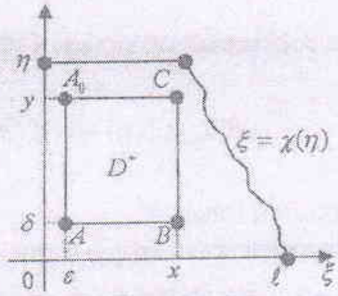

Рис. 2.

2. Построение функции Римана и представление решение задачи Гурса. Сначала рассмотрим задачу Гурса для уравнения

$$L[u] \equiv u_{xxy} - y^p u_y = f(x,y), (x,y) \in D \tag{7}$$

с условиями

$$u(0,y) = g_1(y),\; u_x(0,y) = g_2(y),\; 0 \le y \le h, \tag{8}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{9}$$

где $g_1(y), g_2(y)$ – функции из класса $C^1[0,h]$, причем $\tau(0)=g_1(0), \tau'(0)=g_2(0)$.

Пусть $D^*=\{(\xi,\eta): 0<\xi<x, 0<\eta<y\}$. В области D^* рассмотрим сопряженную задачу Гурса:

$$L^*[\vartheta]\equiv \upsilon_{\xi\xi\eta}+(\eta^p\vartheta)_\eta=0,\ (x,y)\in D,\ (\xi,\eta)\in D, (\xi,\eta)\in D^*, \tag{10}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\vartheta(x,y;x,\eta)=0,\ (x,y)\in D, \eta\in[0,y], \tag{11}$$

$$\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)=1,\ (x,y)\in D, \eta\in[0,y], \tag{12}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega(x,y;\xi),\ (x,y)\in D, \xi\in[0,x]. \tag{13}$$

Функцию $\omega(x,y;\xi)$ определим как решение задачи Коши с данными вдоль линии $\eta=y$:

$$\begin{cases} \vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-y^p\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ 0<\xi<x, \\ \vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=\vartheta(x,y;x,y)=0, \\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=\vartheta_\xi(x,y;x,y)=1. \end{cases} \tag{14}$$

Решение задачи (14) имеет вид

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=y^{-p/2}sh[y^{p/2}(\xi-x)]\equiv\omega(x,y;\xi). \tag{15}$$

Тогда решение сопряженной задачи Гурса (10)-(13) имеет вид

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\eta^{-p/2}sh[\eta^{p/2}(\xi-x)], \tag{16}$$

который назовем функцией Римана.

Отметим некоторые свойства функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$:

$\vartheta(x,y;\xi,0)=\xi-x$, $\vartheta(x,0;0,0)=-x$, $\vartheta_\eta(x,y;x,\eta)=0$, $\vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)=0,\ 0<\eta\le h$.

Пусть $D^*_{\varepsilon\delta}$ означает квадрат с вершинами $A(\varepsilon,\delta)$, $B(x,\delta), C(x,y)$ $A_0(\varepsilon,y)$ где $C(x,y)$– произвольная точка области D (Рис.2). Выберем произвольную функцию $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ из класса $C^{2+1}(D)$.

Интегрируя тождество

$$\vartheta L(u)-uL^*(\vartheta)=(\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u)_\xi-(\vartheta_\xi u_\xi+\eta^p\vartheta u)_\eta$$

по области $D^*_{\varepsilon\delta}$ и учитывая формулу Грина, будем иметь

$$\iint_{D^*_{\varepsilon\delta}}[\vartheta L(u)-uL(\vartheta)]d\xi d\eta=\int_{\partial D^*_{\varepsilon\delta}}(\vartheta_\xi u_\xi+\eta^p\vartheta u)d\xi+(\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u)d\eta. \tag{17}$$

Осуществляя интегрирование по границам области $D^*_{\varepsilon\delta}$, получим

$$u(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;\varepsilon,y)u(\varepsilon,y)-\vartheta(x,y;\varepsilon,y)u(\varepsilon,y)+\vartheta(x,y;\varepsilon,\delta)u_\xi(\xi,\delta)+\vartheta_\xi(x,y;x,\delta)u(x,\delta)-$$
$$-\vartheta_\xi(x,y;\varepsilon,\delta)u(\varepsilon,\delta)-\int_\delta^y\left[\vartheta_\eta(x,y;x,\eta)u_\xi(x,y)-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)u(x,\eta)\right]d\eta+$$
$$+\int_\delta^y\left[\vartheta_\eta(x,y;\varepsilon,\eta)u_\xi(\varepsilon,\eta)-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;\varepsilon,\eta)u(\varepsilon,\eta)\right]d\eta-\int_\varepsilon^x d\xi\int_\delta^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.$$

Далее, устремляя δ и ε к нулю и учитывая условия (8), (9), придем к представлению задачи Гурса:

$$u(x,y)=\tau(x)+\vartheta_\xi(x,y;0,y)g_1(y)-\vartheta(x,y;0,y)g_2(y)-\tau(0)+x\tau'(0)-$$
$$-\int_\delta^y\left[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)g_1(\eta)-\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)g_2(\eta)\right]d\eta-\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \tag{18}$$

где $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана.

3. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Полагая $f(x,y)\equiv-a(x,y)u_x-b(x,y)u_y-c(x,y)u$ из (18), будем иметь:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+A_1(x,y)g_1(y)+B_1(x,y)g_2(y)+$$
$$+\int_\delta^x C_1(x,y;\xi)u(\xi,\eta)d\xi+\int_0^y\left[A_2(x,y;\eta)g_1(\eta)+B_2(x,y;\eta)g_2(\eta)\right]d\eta+ \tag{19}$$
$$+\int_0^x d\xi\int_0^y C_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$

где

$$u_0(x,y)=\tau(x)-\int_0^x b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\tau(0)-x\tau'(0),$$

$$A_1(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;0,y),\ B_1(x,y)=-\vartheta(x,y;0,y),$$

$$A_2(x,y;\eta)=-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)-a(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta),$$

$$B_2(x,y;\eta)=\vartheta_\eta(x,y;0,\eta),\ C_1(x,y;\xi)=b(\xi,\eta)\vartheta(x,y;\xi,y),$$

$$C_2(x,y;\xi,\eta) = -a(\xi,\eta)\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta) - b(\xi,\eta)\vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta) +$$
$$+\left[c(\xi,\eta) - a_\xi(\xi,\eta) - b_\eta(\xi,\eta)\right]\vartheta(x,y;\xi,\tau).$$

Воспользовавшись условиями (3) и (4) из (19), получим:

$$H_{i1}(y)g_1(y) + H_{i2}(y)g_2(y) = \Phi_i(y) + \int_0^y \left[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta) + H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)\right]d\eta + \tag{20}$$
$$+\int_0^{\chi(y)} H_{i5}(y,\xi)u(\xi,y)d\xi + \int_0^{\chi(y)} d\xi \int_0^y H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, i=1,2,$$

где

$$H_{11}(y) = 1 + \int_0^{\chi(y)} P(x,y)A_1(x,y)dx,\ H_{12}(y) = \int_0^{\chi(\eta)} P(x,y)B_1(x,y)dx,$$

$$H_{13}(y,\eta) = -\int_0^{\chi(y)} P(x,y)A_2(x,y;\eta)dx, H_{14}(y,\eta) = -\int_0^{\chi(y)} P(x,y)B_2(x,y;\eta)dx,$$

$$H_{15}(y,\xi;\eta) = -\int_\xi^{\chi(y)} P(x,y)C_1(x,y;\xi)dx, H_{16}(y,\xi;\eta) = -\int_\xi^{\chi(y)} P(x,y)C_2(x,y;\xi,\eta)dx,$$

$$H_{21}(y) = A_1(\chi(y),y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x,y)A_1(x,y)dx\,, H_{22}(y) = B_1(\chi(y),y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x,y)B_1(x,y)dx\,,$$

$$H_{23}(y) = -A_2(\chi(y),y) - \int_0^{\chi(y)} Q(x,y)A_2(x,y;\eta)dx\,, H_{24}(y) = -B_2(\chi(y),y) - \int_0^{\chi(y)} Q(x,y)B_2(x,y;\eta)dx\,,$$

$$H_{25}(y,\xi) = -C_1(\chi(y),y) - \int_\xi^{\chi(y)} Q(x,y)C_1(x,y;\xi)dx\,,$$

$$H_{26}(y,\xi,\eta) = -C_2(\chi(y),y;\xi,\eta) - \int_\xi^{\chi(y)} Q(x,y)C_2(x,y;\xi,\eta)dx\,,$$

$$\Phi_1(y) = \varphi_1(y) - \int_0^{\chi(y)} P(x,y)u_0(x,y)dx\,, \Phi_2(y) = \varphi_2(y) - u_0(\chi(y),y) - \int_0^{\chi(y)} Q(x,y)u_0(x,y)dx\,.$$

4. Разрешимость задачи 1. Отметим, что система уравнений (19), (20) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $u(x,y), g_1(y), g_2(y)$. Если выполняется условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_{11}(y) & H_{12}(y) \\ H_{21}(y) & H_{22}(y) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{21}$$

то система (19), (20) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающей единственное решение.

В частности, при $P(x,y)=Q(x,y)=0$ имеем $\Delta = B_1(\chi(y),y) = -\vartheta(\chi(y),y;0,y)$. Так как $\forall y \in [0,h]: 0 < x_0 \le \chi(y) \le \ell$, то $\vartheta(\chi(y),y;0,y) > 0$. Следовательно. $\Delta \ne 0$. Таким образом, имеет место

Теорема. Если выполнены условия (2), (6) и (21), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Apple. Math. 1963. – V.21. – P. 155-160.
2. Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. – Т. 74. Вып. 3. – С. 435-435.
3. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. №2 (61). – С. 22-28.
4. Бейлина Н.В. О разрешимости обратной задачи для гиперболического уранения с интегральным условием переопределения // Вестник СамГУ. Серия физ.-мат. наук. 2011. № 2 (23). – С. 34-39.

УДК: 517.968

Аширбаева А.Ж., к.ф.-м.н. доцент,
Мамазиява Э.А., ст.преп., ОшГУ

Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа

Гипрболикалык типтеги оператордуу дифференциалдык теңдемени кошумча аргумент киийрүү усулу менен интегралдык теңдемелер системасына келтирүү каралган.

Рассмотрено приведение операторно-дифференциального уравнения к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента.

The operator-differential equation is considered to a system of integral equations by an additional argument.

Ключевые слова: *операторно-дифференциальные уравнение, метод дополнительного аргумента, нелинейное уравнение системы.*

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа вида:

$$u_{tt} - a^2(t,x)u_{xx} = b(t,x,u)u_t + c(t,x,u)u_x + F(t,x;u), \qquad (1)$$

$$(t,x) \in G_2(T) = \{0 \le t \le T, \quad x \in R\},$$

с начальными условиями

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ

Байсубанов М.Т.