Национальная академия наук Кыргызской Республики

ISSN 0130-6553

Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям

ВЫПУСК 47

Бишкек • Илим • 2014

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ
Байсубанов М.Т.

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ

Байсубанов И. Т.

Н.К. АРКАБАЕВ (г. Ош)

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Методом интегральных уравнений и функции Римана доказана теорема о существовании и единственности решения задачи сопряжения для уравнений третьего порядка в частных производных с нелокальными интегральными условиями в криволинейной трапециевидной области.

1. Постановка задачи. В области D, ограниченная линиями

$$x = 0, -h_1 \le y \le h(h_1, h > 0), y = \sigma(x), 0 \le x \le \ell,$$
$$h_2 = -\sigma(\ell), x = \ell, -h_{12} \le y \le 0 (h_1 \ge h_2),$$
$$x = \chi(y),\ 0 \le y \le h,\ y = h, 0 \le x \le x_0 = \chi(h)$$

рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} - y^p u_y + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u = 0, (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \tag{1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} - a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u = 0, (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \tag{2}$$

где $p > 0, a_i, b_i, c_i (i = 1,2)$, $\chi(y), \sigma(x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\forall y \in [0, h]: x_0 \le \chi(y) < \ell,\ \chi'(y) \le 0, \chi(0) = \ell, \\ &\forall x \in [0, \ell]: -h_1 \le \sigma(x) \le -h_2,\ \sigma'(x) \ge 0, \sigma(0) = -h_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих непрерывные производные вида $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s\ (r = 0,1,...,n,\ s = 0,1,...,m)$.

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнениям (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно, нелокальным условиям

$$u(0,y) + \int_0^{\chi(y)} P(x,y) u(x,y) dx = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le h, \tag{4}$$

$$u(\chi(y), y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x,y) u(x,y) dx = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h \tag{5}$$

и краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0, \tag{6}$$

$$u(x, \sigma(x)) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{7}$$

где $P(x,y), Q(x,y), \phi_i(y)\ (i = \overline{1,3}),\ \psi(x)$ - заданные функции.

Введем обозначения:

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_y(x,0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell, \tag{8}$$

где $\tau(x), \nu(x)$ - пока неизвестные функции.

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

ЗАДАЧА 2. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^{2+1}(D_1)$, удовлетворяющее уравнению (1), условиям (4), (5) и $u(x,0) = \tau(x)$.

ЗАДАЧА 3. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^{1+2}(D_2)$ удовлетворяющее условиям (8) и (6).

Отсюда, нетрудно заметить, что решая последовательно задачи 3 и 2, можно установить существование и единственность решения задачи 1.

Нелокальные условия вида (4) и (5) рассмотрены в работах [1, 2]; аналогичные задачи для уравнений вида (1) и (2) - в работах [2,4,5].

2. Функциональное соотношение, полученное из области D_1. Устремляя y к нулю из уравнения (1), в силу обозначения (8), имеем

$$\nu''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + b_1(x,0)\nu(x) + c_1(x,0)\delta(x) = 0. \tag{9}$$

Интегрируя дважды по x в пределах от 0 до x из уравнения (9) будем иметь

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \nu'(0)x + \int_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x K(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \tag{10}$$

где $\nu_0(x) = \varphi_3'(0) + a_1(0,0)\varphi_3(0)$, $K_1(x,\xi) = -a_1(\xi,0) + (x-\xi)[a_{1\xi}(\xi,0) - c_1(\xi,0)]$, $K(x,\xi) = -(x-\xi)b_2(\xi,0)$ - известные функции, а $\nu'(0)$ - неизвестная константа.

Обращая вольтерровскую часть уравнения (10) относительно $\nu(x)$ получим

$$\nu(x) = \nu_1(x) + r(x)\nu'(0) + \int_0^x K_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{11}$$

где

$$\nu_1(x) = \nu_0(x) + \int_0^x R(x,\xi)\nu_0(\xi)d\xi,\ \ r(x) = x + \int_0^x R(x,\xi)\xi d\xi,$$

$$K_2(x,\xi) = K_1(x,\xi) + \int_\xi^x R(x,t)K_1(t,\xi)dt.$$

Равенство (11) представляет собой соотношение, полученное из области D_1.

3. Представление решения задачи 2. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка области $D_2 = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \ell, \sigma(\xi) < \eta < 0\}$. Интегрируя тождество

$$\vartheta L_2(u) - uL_2^*(\vartheta) = (-\vartheta_\eta u_\eta + a_2\vartheta u)_\xi - (-\vartheta u_{\xi\eta} - \vartheta_{\xi\eta}u - b_2\vartheta u)_\eta$$

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ

Байсубанов М.Т.

по области $D_2^* = \{(\xi,\eta): 0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$ и учитывая формулу Грина, будем иметь

$$\iint_{D_2^*}\left[\vartheta L_2(u) - uL_2^*(\vartheta)\right]d\xi d\eta = \int_{\partial D_2^*}\left(-\vartheta u_{\xi\eta} - \vartheta_{\xi\eta}u - b_2\vartheta u\right)d\xi + (-\vartheta_\eta u_\eta + a_2\vartheta u)d\eta.$$

Отсюда, вычисляя криволинейные интегралы по границам области D_2^* и с учетом условий (6) и (8), получим представление решения задачи 2:

$$u(x,y) = \vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x) - \vartheta(x,y;x,0)\nu(x) + \Phi_1(x,y) +$$

$$+\int_0^x V_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi, \tag{12}$$

где

$$V_1(x,y;\xi) = -\vartheta_{\xi\eta}(x,y;\xi,0) - b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$$

$$\Phi_1(x,y) = +\vartheta(x,y;0,0)\phi_3'(0) + \int_0^y\left[\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\phi_3'(\eta) - a_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)\phi_3(\eta)\right]d\eta .$$

Исключая $\nu(x)$ из (11) и (12), получим

$$u(x,y) = \vartheta_\eta(x,y;x,0)\tau(x) + \int_0^x V_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi + \Phi_2(x,y) + r_1(x)\nu'(0), \tag{13}$$

где

$$V_2(x,y;\xi) = V_1(x,y;\xi) - \vartheta(x,y;x,0)\,K_2(x,\xi) + \int_\xi^x \vartheta_\xi(x,y;t,0)\,K_2(t,\xi)dt,$$

$$\Phi_2(x,y) = \Phi_1(x,y) - \vartheta(x,y;x,0)\nu_1(x) + \int_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)d\xi,$$

$$r_1(x) = -\vartheta(x,y;x,0)r(x) + \int_0^x \vartheta_\xi(x,y;\xi,0)r(\xi)d\xi .$$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Используя граничное условие (7) из (13) имеем

$$\vartheta_\eta(x,\sigma(x);\,x,0)\tau(x) = -\int_0^x V_2(x,\sigma(x);\,\xi)\tau(\xi)d\xi + \psi_1(x) - r_1(x)\nu'(0), \tag{14}$$

где $\psi_1(x) = \psi(x) - \Phi_2(x,\sigma(x))$.

Если

$$\forall x\in[0,\ell]: \vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)\neq 0, \tag{15}$$

то уравнение (14) запишем в виде

$$\tau(x) = \psi_2(x) + r_2(x)\nu'(0) + \int_0^x V_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{16}$$

где

$$\psi_2(x) = \frac{\psi_1(x)}{\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)},\ r_2(x) = -\frac{r_1(x)}{\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)},\ V_3(x,\xi) = -\frac{V_2(x,\sigma(x);\xi)}{\vartheta_\eta(x,\sigma(x);x,0)}.$$

Обращая уравнение (16), получим

$$\tau(x) = \psi_3(x) + r_3(x)\nu'(0), \tag{17}$$

где

$$\psi_3(x) = \psi_2(x) + \int_0^x R_2(x,\xi)\psi_2(\xi)d\xi,\ \ r_3(x) = r_2(x) + \int_0^x R_2(x,\xi)r_2(\xi)d\xi,$$

$R_2(x,\xi)$ - резолвента ядра $V_3(x,\xi)$.

Нетрудно заметить, что из условия (5) вытекает условие согласования

$$\tau(\ell) + \int_0^\ell Q(x,0)\tau(x)dx = \phi_2(0). \tag{18}$$

Если

$$r = r_3(\ell) + \int_0^\ell Q(x,0)r_3(x)dx \neq 0, \tag{19}$$

то из (17), с учетом (18), найдем

$$\nu'(0) = \frac{1}{r}\left[\phi_2(0) - \psi_2(\ell) - \int_0^\ell Q(x,0)\psi_2(x)dx\right]. \tag{20}$$

Подставляя значение $\nu'(0)$ из (19) в (17), окончательно найдем неизвестную функцию $\tau(x)$. Тогда из формулы (11) найдем и $\nu(x)$.

Подставляя найденные значения $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в представление (12), получим решение задачи 3.

После определения $\tau(x)$ решение задачи 1 сводится к решению вспомогательной задачи 2.

В работе [5] доказано, что разрешимость задачи 2, эквивалентным образом, сведена к разрешимости системы уравнений вида

$$H_{i1}(y)g_1(y) + H_{i2}(y)g_2(y) = \Phi_i(y) + \int_0^y[H_{i3}(y,\eta)g_1(\eta) + H_{i4}(y,\eta)g_2(\eta)d\eta] +$$

$$+\int_0^{\chi(y)} H_{i5}(y,\eta)u(\xi,y)d\xi + \int_0^{\chi(y)}d\xi\int_0^y H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,\quad i=1,2,$$

где

$u(0,y) = g_1(y), u_x(0,y) = g_2(y)$ а H_{ij} $(i = 1,2;\ j = \overline{1,6})$ - заданные функции, разрешимость которой устанавливается при выполнения условия

$$\forall y \in [0,h]: H_{11}(y)H_{22}(y) - H_{12}(y)H_{21}(y) \neq 0. \tag{21}$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия (3), (15), (19), (21), то решение задачи 1 существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Apple. Math. – 1963. – Vol. 21. – P. 155-160.
2. *Пулькина Л.С.* Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического условия // Матем. заметки. – 2003. – Т.74, Вып. 3. – С. 435-437.
3. *Sopuev A., Arkabaev N.* Boundary value problems for third order equation whirh integral boundary conditions // The V congress of the Turkic World Mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, June 5-7. – 2014. – P.136.
4. *Сопуев А., Аркабаев Н.К.* Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – Томск, 2013. – №1 (21). – С. 16-23.
5. *Аркабаев Н.К.* Краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями // Вестн. Ошск. гос. ун-т – 2014. – №3(5). – С. 22-27.

Копия верна
Уч. секретарь Байсубанов М.Т.