



ЖАЛАЛ-АБАД
МАМЛЕКЕТТИК
УНИВЕРСИТЕТИНИН
ЖАРЧЫСЫ



2016

№1 (32)

ВЕСТНИК

ЖАЛАЛ-АБАДСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА



Копия верна
Уд секретарь *Али* *Байсубанов И.С.*

МАЗМУУН

1.	Иманалиев Мурзабек.....	3
Физика – математикалык багыт		
2.	<i>Абдуллаева Ч.Х., Папиева Т.М.</i> О двойных линиях частичного отображения евклидова пространства E_5	5
3.	<i>Азимов Б.А.</i> Об асимптотике решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения со слабой особенностью порядка одна третья.....	9
4.	<i>Азимов Б.А.</i> Об асимптотике решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения со слабой особенностью порядка одна четвертая.....	15
5.	<i>Асанова К.А.</i> Ограниченность решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами на полуоси.....	20
6.	<i>Аскар кызы Л.</i> Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода.....	24
7.	<i>Аширбаева А.Ж., Мамазиева Э.А.</i> Нелинейные операторно-дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с неограниченными решениями.....	30
8.	<i>Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И.</i> Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента.....	34
9.	<i>Жораев А.Х.</i> Критерии различимости в размеченных топологических пространствах.....	38
10.	<i>Жээнтаева Ж.К.</i> Кечигүү менен сызыктуу дифференциалдык тендемелер системаларынын чыгарылыштарынын асимптотикасын чыгарылыштардын мейкиндикти ажыратуу жардамында изилдөө.....	42
11.	<i>Кененбаева Г.М.</i> Обзор эффектов и явлений в различных разделах математики....	46
12.	<i>Матанов Ш.</i> Формы погранслоевых линий аналитических функций с малым параметром.....	52
13.	<i>Мураталиева В.Т.</i> Алгоритм для исследования спектральных свойств линейных задач с аналитическими функциями.....	55
14.	<i>Панков П.С., Баячорова Б.Ж.</i> Этиш сөздөрдү компьютерде көз карандысыз чагылдырууну математикалык моделдөөнүн өзгөчөлүктөрү.....	60
15.	<i>Панкова Г.Д., Мамбеталиева М.Б.</i> Моделирование экономико-математических задач в информационной среде.....	65
16.	<i>Сопуев А., Аркабаев Н.К.</i> О краевой задаче для псевдопараболических уравнений с характеристикой линией склеивания.....	73
17.	<i>Тагаева С.Б.</i> Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц.....	78
18.	<i>Тампагаров К.Б.</i> Структура области изменения аргумента для аналитических функций с малым параметром.....	83
19.	<i>Чотонов Б.Б.</i> Тазалоонун ректификациялоо учурунда аралашма хлорид сурманын ($SbCl_3$) поликристаллдык кремнийдин (Si) сапатына тийгизген таасирин изилдөө.....	86

Жошия Верна

Ук. секретарь ОшГУ



Айсубанов И.Т.

куралы = Компьютерные методы для экономических расчетов. Финансовые функции в среде MathCad: учебное пособие. – Б.: 2016.– 78 с. Текст кыргызча, орусча. ISBN 978-9967-32-179-3

* * *

УДК 517.956.6

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЛИНИЕЙ СКЛЕИВАНИЯ
ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕНДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЖАБЫШТЫРУУ ШАРТТАРЫ
ХАРАКТЕРИСТИКАДА БЕРИЛГЕН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ
BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS
WITH PSEUDO RESPONSE LINE GLUING

Сопуев А., Аркабаев Н.К.
Ошский государственный университет
Кыргызстан, г.Ош,
a_sopuev@mail.ru, nurkasym@gmail.com

Аннотация: Методом интегральных уравнений и функции Римана доказано существование и единственность решения краевой задачи для псевдопараболических уравнений, когда условия склеивания задаются на двукратной действительной характеристике.

Интегралдык теңдемелер жана Римандын функциясы методдору менен псевдопараболалык теңдемелер үчүн жабыштыруу шарттары эки эселүү чыныгы характеристикада берилген чек аралык маселенин чечиминин жалгыздыгы жана жашашы далилденген.

The method of integral equations and the Riemann function proved the existence and uniqueness of solutions of the boundary value problem for pseudo-parabolic equations when gluing the conditions set on the actual characteristics of the double.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, краевые условия, функции Римана, интегральные уравнения.

Түйүндүү сөздөр: псевдопараболикалык теңдеме, чак аралык шарттар, Риман функциясы, интегралдык теңдеме.

Keywords: pseudoparabolic equations, boundary conditions, the Riemann function, integral equations.

1. Постановка задачи. В области $D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, -h_1 < y < h\}$ ($\ell, h, h_1 > 0$) рассмотрим уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} = 0, \quad (x, y) \in D_1 = D \cap (y > 0) \quad (1)$$

$$L_2(u) \equiv u_{xy} + a_2 u_{xx} + b_2 u_{xy} + c_2 u_x + d_2 u_y + e_2 u = 0, \quad (x, y) \in D_2 = D \cap (y < 0) \quad (2)$$

где a_2, b_2, d_2, c_2, e_2 - заданные функции

Линия $y=0$ является трехкратной действительной характеристикой уравнения (1), поэтому это уравнение часто называется уравнением с кратными характеристиками [1].

Жония Верна
Ук. секретарь Ош



Баисубанов М.Т.

Однако, из-за наличия члена u_{xy} , постановка задачи и свойства решения уравнения (1) аналогично параболическим уравнениям.

Уравнение (2) по терминологии работы [2] называется псевдопараболическим уравнением. Это уравнение имеет двукратную действительную характеристику $y = 0$ и однократную характеристику $x = 0$.

В работе рассматривается краевая задача для уравнений (1) и (2), где условия склеивания задаются на двукратной характеристике $y = 0$.

Рассматриваемые уравнения используются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [3].

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$).

Относительно коэффициентов уравнения предполагаем следующее:

$$\begin{aligned} a_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), b_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ c_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), d_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2) e_2 \in C(\bar{D}_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^{1+1}(D) \cap [C^{3+0}(D_1) \cap C^{2+1}(D_2)],$$

удовлетворяющую уравнения (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно, краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u_x(0, y) = \varphi_2(y), u(\ell, y) = \varphi_3(y), 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

$$u(0, y) = \chi_1(y), u_x(0, y) = \chi_2(y), -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), u_y(x, -0) = u_y(x, +0), 0 \leq x \leq \ell, \quad (6)$$

где $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 3$), $\chi_j(y)$ ($j = 1, 2$) - заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям гладкости

$$\varphi_1(y), \varphi_3(y) \in C^2[0, h], \varphi_2(y) \in C^1[0, h], \quad (7)$$

$$\chi_i(y) \in C^1[-h_1, 0] \quad (i = 1, 2)$$

и условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \chi_1(0), \varphi_1'(0) = \chi_1'(0), \varphi_2(0) = \chi_2(0). \quad (8)$$

Введем обозначения

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \tau(x), u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = \nu(x), 0 \leq x \leq \ell, \quad (9)$$

где $\tau(x), \nu(x)$ - пока неизвестные функции.

2. Представления решения задачи 1 в области D_2 . Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти функцию $u(x, y) \in C^1(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2) \cap C^{2+1}(D_2)$ удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям (5) и начальному условию

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 \leq x \leq \ell. \quad (10)$$

Для решения этой задачи будем применить метод функции Римана.

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(u) - uL_2^*(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}_\xi u_\xi \mathcal{G}_\xi u_\xi + a_2 \mathcal{G}_\xi u_\xi - (a_2 \mathcal{G})_\xi u + \\ b_2 \mathcal{G}_\xi u_\eta + c_2 \mathcal{G}_\xi u]_\xi - [\mathcal{G}_\xi u_\xi + (b_2 \mathcal{G})_\xi u - d_2 \mathcal{G}_\xi u]_\eta, \end{aligned} \quad (11)$$

где $L^*(\mathcal{G}) \equiv -\mathcal{G}_{\xi\xi\eta} + (a_2 \mathcal{G})_{\xi\xi} + (b_2 \mathcal{G})_{\xi\eta} - (c_2 \mathcal{G})_\xi - (d_2 \mathcal{G})_\eta + e_2 \mathcal{G}$.

Пусть $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$ - является решением следующей задачи:

$$L_{2(\xi,\eta)}^*(\vartheta(x,y;\xi,\eta)) = 0, (\xi,\eta) \in D_2^* = \{(x,y): 0 < \xi < x, y < \eta < 0\}, \quad (12)$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = \exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right), \quad y \leq \eta \leq 0; \quad (13)$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = \theta_1(x,y;\xi), \quad 0 \leq \xi \leq x, \quad (14)$$

причем $\theta_1(x,y;\xi)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y) - [b_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)]_\xi + d_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y) &= 0, \quad 0 < \xi < x, \\ \vartheta(x,y;\xi,y)|_{\xi=x} &= 0, \quad \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)|_{\xi=x} = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

При выполнении условия (3) задача (15) однозначно разрешима.

Решение задачи (12) - (14) можно построить методом интегральных уравнений.

Решение этой задачи назовем функцией Римана.

Интегрируя тождество (11) по области D_2^* , получим

$$\begin{aligned} \iint_{D_2^*} [\vartheta L_2(u) - u L_2^*(\vartheta)] d\xi d\eta &= \iint_{D_2^*} [\vartheta_\xi u_\xi + (b_2 \vartheta)_\xi u - d_2 \vartheta u] d_\xi + \\ &+ [\vartheta u_{\xi\eta} + \vartheta_{\xi\eta} u + a_2 \vartheta u_\xi - (a_2 \vartheta)_\xi u + b_2 \vartheta u_\eta + c_2 \vartheta u] d_\eta \end{aligned} \quad (16)$$

Используя свойства функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, из (16) получим представление решения задачи 1 в области D_2 :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x) + \int_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^y [b_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta) - \vartheta(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta) + C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta) + E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta \end{aligned} \quad (17)$$

где $A_1(x,y;\xi) = -\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0) + [b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)]_\xi - d_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)$,

$B_1(x,y;\eta) = \vartheta_\xi(x,y;0,\eta) - b_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)$, $C_1(x,y;\eta) = -a_2(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta)$,

$E_1(x,y;\eta) = [a_{2\xi}(0,\eta) - C_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta) + a_2(0,\eta)\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)]$.

Вычислив производную по y от $u(x,y)$ с использованием формулы (17), затем устремляя y к нулю, имеем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)\tau(x) + \int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau(\xi)d\xi + g_1(x), \quad (18)$$

где $g_1(x) = B_1(x,0,0)\chi_1'(0) - \vartheta(x,0;0,0)\chi_2'(0) + C_1(x,0,0)\chi_2(0) + E_1(x,0,0)\chi_1(0)$.

3. Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Уравнение (1) запишем в виде

$$u_{xx} - u_y = \omega(y) - \varphi_1'(y). \quad (19)$$

где $\omega(y)$ - неизвестная функция.

Из (19) при $y \rightarrow 0$ имеем

$$\tau''(x) - \nu(x) = \omega(0) - \varphi_1'(0). \quad (20)$$

Исключая $\nu(x)$ из (18) и (20) получим

$$\tau''(x) = \omega(0) + a_1(x)\tau(x) + \int_0^x \tilde{A}_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \tilde{g}_1(x), \quad (21)$$

где $\tilde{g}_1(x) = g_1(x) - \varphi_1'(0)$, $a_1(x) = \vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)$, $\tilde{A}_1(x,\xi) = A_{1y}(x,0;\xi)$, а $\omega(0)$ - неизвестная константа.

Решение задачи Коши для уравнения (21) при условии

$$\tau(0) = \chi_1(0), \tau'(0) = \chi_2(0)$$

представим в виде

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\omega(0)x^2 + \int_0^x A_2(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + g_2(x), \quad (22)$$

где $A_2(x, \xi) = a_1(\xi)(x - \xi) + \int_{\xi}^x (x - t)\tilde{A}_1(t, \xi)dt$, $g_2(x) = \chi_1(0) + \chi_2(0)x + \int_0^x (x - t)\tilde{g}_1(t)dt$.

Если учесть условие согласования $\tau(\ell) = \varphi_2(0)$, то из (22) можно определить $\omega(0)$:

$$\omega(0) = \frac{2}{\ell^2}[\varphi_2(0) - g_2(\ell)] - \frac{2}{\ell^2} \int_0^{\ell} A_2(\ell, \xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Тогда из (22) получим следующее интегральное уравнение для $\tau(x)$:

$$\tau(x) = g_3(x) + \int_0^x A_2(x, \xi)\tau(\xi)d\xi - \frac{x^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} A_2(\ell, \xi)\tau_1(\xi)d\xi$$

где $g_3(x) = g_2(x) + \frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(0) - g_2(\ell)]x^2$.

После обращения вольтеровской части уравнения (23) приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = g(x) + \int_0^{\ell} H(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (24)$$

где $H(x, \xi) = -\frac{1}{\ell^2}[x^2 + \int_0^x R(x, t)t^2]A_2(\ell, \xi)$, $g(x) = g_3(x) + \int_0^x R(x, \xi)g_3(\xi)d\xi$, $R(x, t)$ - резольвента ядра $A_2(x, t)$

Согласно общей теории [4], если

$$\ell L < 1, \quad (25)$$

где $L = \max_{0 \leq x, \xi \leq \ell} |H(x, \xi)|$, то уравнение (24) имеет единственное решение.

4. Решение задачи 1 в области D_1 . С помощью функции Грина $G(x, y; \xi, \eta)$:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\}$$

Представим решение уравнения (19), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_2(y), u(\ell, y) = \varphi_3(y), u(x, 0) = \tau(x)$$

в виде

$$u(x, y) = -\int_0^y G(x, y; 0, \eta)\varphi_2(\eta)d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x, y; \ell, \eta)\varphi_3(\eta)d\eta + \int_0^{\ell} G(x, y; \xi, 0)\tau(\xi)d\xi - \int_0^y \omega(\eta)d\eta \int_0^{\ell} G(x, y; \xi, \eta)d\xi + \int_0^y \varphi_1'(\eta)d\eta \int_0^{\ell} G(x, y; \xi, \eta)d\xi. \quad (26)$$

Из (26) с помощью условия $u(0, y) = \varphi_1(y)$, получаем интегральное уравнение

$$\int_0^y K(y, \eta) \omega(\eta) d\eta = r(y), \quad (27)$$

где

$$K(y, \eta) = \int_0^{\ell} G(0, y; \xi, \eta) d\xi,$$

$$r(y) = \int_0^y G_{\xi}(0, y; 0, \eta) \varphi_2(y) d\eta + \int_0^y G_{\xi}(0, y; \ell, \eta) \varphi_3(\eta) d\eta -$$

$$- \int_0^y G(0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \int_0^y \varphi_1'(\eta) d\eta \int_0^{\ell} G(0, y; \xi, \eta) d\xi \varphi_1(y).$$

Так как

$$K(y, \eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}} e^{-s^2} ds + \int_0^{\ell} q(y, \xi, \eta) d\xi,$$

где

$$q(y; \xi, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(3-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} \xi -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi-2n\ell-4)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} \xi,$$

Здесь \square - означает отсутствие члена суммы при $n = 1$.

Если учесть, что $\lim_{\eta \rightarrow y} K(y, \eta) = 1$, то из (27) путем дифференцирования получим интегральное уравнение Вольterra второго рода

$$\omega(y) + \int_0^y K_y(y, \eta) \omega(\eta) d\eta = r'(y),$$

допускающее однозначное решение. Подставляя найденную функцию $\omega(y)$ в (26) получим решение задачи 1 в области D_1 .

Таким образом доказана

Теорема. Если выполняются условия (3), (7), (8) и (25), то решение задачи 1 существует и единственно.

Список использованной литературы:

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. - 1972. 12, - P.-565.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк. 1995. – 301 с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. - М.: Наука, 1975. – 302 с.

*

Жофия Верня
Уз. секретарь Ош



Байсубанов И.Т.