ISSN 2224-0179

Научно-практический журнал

# ПРИВОЛЖСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов И.Т.

№ 5 (57) – 2016

# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

**_Алымбаев А.Т._** Нахождение периодического решения системы интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием, описывающее взаимодействие видов ....................5

**_Алымбаев А.Т._** Периодическое решение интегро-дифференциального уравнения с конечным последействием. ....................10

**_Аркабаев Н.К._** Краевая задача для смешанно-псевдопараболических уравнений с двумя линиями изменения типа ....................15

**_Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р._** Разрешимость и структура начальной задачи сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с точкой поворота....................22

**_Камбарова А.Д._** Выбор параметра регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода ....................27

**_Саадалов Т.Ы._** Об одной задаче сопряжения для псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями в криволинейном треугольнике ....................32

**_Сопуев А., Саадалов Т.Ы._** Краевая задача для общего линейного смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения ....................38

## БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

**_Карабекова Д.У._** Моногенеи (Monogenea) рыб прудовых хозяйств Кыргызстана ....................44

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

**_Баринов А.В., Платонов А.В., Лебедева С.М., Самсонов И.С._** Исследование особенностей настройки шлифовальных станков для обработки металлических деталей. Часть 1. Исследование методов балансировки шлифовальных кругов....................47

**_Баринов А.В., Платонов А.В., Лебедева С.М., Самсонов И.С._** Исследование особенностей настройки шлифовальных станков для обработки металлических деталей. Часть 2. Исследование особенностей правки шлифовальных кругов....................53

**_Борисов В.В., Сушенцов Н.И., Степанов С.А._** Влияние термообработки на строение углеродных наностенок и характеристики автоэмиссионных катодов на их основе....................59

**_Орлов Н.Е._** Необходимость введения дистанционного управления технологическим оборудованием в чистых производственных помещениях ....................65

**_Султанов Р.О., Еланцев М.О., Кощеев Н.М., Животов В.В._** Поиск и классификация структурных элементов методом взаимной корреляции на примере распознавания автомобильного номера....................71

**_Шиганова М.В., Поначугин А.В._** Методы обхода искажений в беспроводных каналах связи ....................75

## СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

**_Кузнецов В.М., Ирейкина Р.П._** Способы улучшения качества кормов в условиях Сахалинской области ....................79

## ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ И АРХЕОЛОГИЯ

**_Антошкин А.В._** Развитие экспортного потенциала Башкирии в условиях формирования командно-административной системы экономики (конец 1920-х – середина 1930-х гг.)....................84

Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов М.Т.

УДК 517.956.6

*Н.К. Аркабаев*
*старший преподаватель,*
*кафедра «Программирование»,*
*Ошский государственный университет,*
*г. Ош, Киргизия*
*E-mail: nurkasym@gmail.com*

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННО-ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

**Аннотация.** Методами функции Римана, Грина и интегральных уравнений доказано существование единственного решения краевой задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

**Ключевые слова:** функция Римана, функция Грина, интегральные уравнения, псевдопараболические уравнения, уравнения Вольтерра.

**N.K. Arkabaev, Osh state university, Osh, Kyrgyzstan**

**A CONJUGATION PROBLEM FOR A MIXED-PSEUDO PARABOLIC EQUATION WITH TWO LINES OF DEGENERACY**

**Abstract.** The methods of the Riemann function, Green's integral equations and proved the existence of a unique solution of the value boundary problem for pseudo-parabolic equations of the third order with two lines of type.

**Keywords:** Riemann function, Green's function, integral equations, pseudo-parabolic equations, Volterra equation.

**1. Введение.** При математическом моделировании физико-химических процессов, происходящих в составных телах, часто используется теория уравнений смешанного типа, основанная на сопряжении различных типов уравнений в разных частях рассматриваемой области [7; 9]. Задачи сопряжений встречаются и при изучении поглощения почвенной влаги растениями [6].

В работе устанавливается существование единственного решения краевой задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

**2. Постановка задачи.** В области $D$, ограниченной отрезками прямых
$AA_1=\{(x,y): x=0,-h_1\le y\le 0\}$, $A_1B_1=\{(x,y): y=-h_1, 0\le x\le \ell\}$, $B_1B=\{(x,y): x=\ell,\ -h_1\le y\le 0\}$,
$BB_0=\{(x,y): x=\ell, 0\le y\le h\}$, $B_0A_0=\{(x,y): y=h, 0\le x\le \ell\}$, $A_0C_0=\{(x,y): y=h,\ -\ell_1\le x\le 0\}$,
$C_0C=\{(x,y): x=-\ell_1, 0\le y\le h\}$, $CA=\{(x,y): CA=\{(x,y): y=0,\ -\ell_1\le x\le 0\}$ $(\ell,\ell_1,\mathrm{h},\mathrm{h}_1>0)$,
рассмотрим краевую задачу для уравнений:

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+b_1(x,y)u_{xy}+d(x,y)u_y=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+b_2(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_x=0,\ (x,y)\in D_3, \tag{3}$$

где $b_i(i=1,2), d, c$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0)$, $D_2=D\cap(x>0,y<0)$, $D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

Уравнения (1) – (3) представляют собой канонические виды уравнений третьего порядка относительно старших производных по классификации работы [3]. Такие уравнения часто называются псевдопараболическими по характеру свойств решений [1; 2].

Пусть $C^{n+m}$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s\ (r=0,1,\ldots,n; s=0,1,\ldots,m)$.

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:



Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ Байсубанов М.Т.

$$b_1(x,y)\in C^{1+1}(\bar D_2),\ b_2(x,y)\in C^{1+1}(\bar D_3),$$
$$d(x,y)\in C^{0+1}(\bar D_2),\ c(x,y)\in C^{1+0}(\bar D_3). \qquad (4)$$

**Задача 1.** Найти функцию $u(x,y)\in C^1(\bar D)\cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{2+1}(D_2)\cup C^{1+2}(D_3)]$ $u_{xxx}\in C(D_1)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и (3) в областях $D_1$, $D_2$ и $D_3$ соответственно, краевым условиям:

$$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h_1, \qquad (5)$$
$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0, \qquad (6)$$
$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0 \qquad (7)$$

и условиям склеивания:

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \qquad (8)$$
$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h \qquad (9)$$

где $\varphi_i(y),\ \chi_i(y),\ \psi_i(x)(i=1{,}2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(y)\in C^2[0,h],\varphi_2(y)\in C^1[0,h],$$
$$\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0],\ \psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0](i=1{,}2), \qquad (10)$$
$$\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1),\ \psi_1(0)=\chi_1(0),\ \psi_2(0)=\chi_1'(0),\ \psi_1'(0)=\chi_2(0),\ \psi_2'(0)=\chi_2'(0). \qquad (11)$$

Отметим, что линии $x=0,\ y=0$ одновременно являются характеристиками уравнений (1) – (3). Уравнения (1) – (3) в совокупности с условиями склеивания (8) и (9) являются уравнениями смешанного типа с двумя линиями изменения типа в области $D$ [10]. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с двумя линиями изменения типа изучены в работах [5; 8; 11]. Методом функции Римана изучены краевые задачи для уравнения типа (2) в работах [4; 12].

Введем следующие обозначения:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (12)$$
$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (13)$$

где $\tau_1(x),\ \tau_2(y),\ \nu_1(x),\ \nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

**3. Представление решения задачи 1 в области $D_2$.**

В области $D_2$ рассмотрим краевую задачу для уравнения (2) с условиями:

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_2\le y\le 0, \qquad (14)$$
$$u(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (15)$$

решение, которого представим с помощью функции Римана.

Имеет место тождество:

$$\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)=(\upsilon u_{xy}+\upsilon_{xy}u+b_1\upsilon u_y)_x-(\upsilon_x u_x+(b_1\upsilon)_{xy}u-d\upsilon u)_y, \qquad (16)$$

где $L_2^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{xxy}+(b_1\upsilon)_{xy}-(du)_y$.

Пусть область $D_2^*$ означает прямоугольник с вершинами $A(0,0),A_1^*(0,y),\ B_1^*(x,y),B^*(x,0)$, т.е. $D_2^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}$, а $\Gamma=\partial D_2^*$. Используя формулу Грина из тождества (16), получим

$$\iint_{D_2^*}(\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)d\xi d\eta=$$
$$=\int_\Gamma(\upsilon_\xi u_\xi+(b_1\upsilon)_{\xi\eta}u-d\upsilon u)d\xi+(\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+b_1\upsilon u_\eta)d\eta. \qquad (17)$$

Функцией Римана назовем решение следующей задачи [9]:

$$L_2^*(\upsilon) \equiv \upsilon_{\xi\xi\eta} - (b_1\upsilon)_{\xi\eta} + (d\upsilon)_\eta = 0, \quad (18)$$

$$\upsilon(\xi,\eta)\,|_{\xi=x} = 0, y \le \eta \le 0, \quad (19)$$

$$\upsilon_\xi(\xi,\eta)\,|_{\xi=x} = 1, y \le \eta \le 0, \quad (20)$$

$$\upsilon(\xi,\eta)\,|_{\eta=y} = \omega(\xi,y), 0 \le \xi \le x, \quad (21)$$

где $\omega(\xi,y)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\upsilon_{\xi\xi}(\xi,y) - [b_1(\xi,y)\upsilon(\xi,y)]_\xi + d(\xi,y)\upsilon(\xi,y) = 0,\ 0 < \xi < x, \\ &\upsilon(\xi,y)\,|_{\xi=x} = 0,\ \upsilon(\xi,y)\,|_{\xi=x} = 1. \end{aligned} \quad (22).$$

Интегрируя уравнение (18) по $\eta$ и с учетом (22), получим

$$\upsilon_{\xi\xi} - [b_1(\xi,\eta)\upsilon]_\xi + d(\xi,\eta)\upsilon = 0\,. \quad (23)$$

Далее, используя условия (19), (20) и дважды интегрируя это уравнение по $\xi$, приходим к интегральному уравнению

$$\upsilon(\xi,\eta) = \xi - x + \int_x^\xi K_0(\xi,\eta,t)\upsilon(t,\eta)dt\,,$$

где $K_0(\xi,\eta,t) = b_1(t,\eta) + (t-\xi)d(t,\eta)$, решение которого представимо в виде

$$\upsilon(\xi,\eta) \equiv \upsilon(x,\xi,\eta) = \xi - x + \int_x^\xi R(\xi,\eta,t)(t-x)dt, \quad (24)$$

где $R(\xi,\eta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\xi,\eta,t)$ – резольвента ядра $K_0(\xi,\eta,t)$, а

$$K_n(\xi,\eta,t) = \int_t^\xi K_0(s,\eta,t)K_{n-1}(\xi,\eta,s)ds,\ n = 1,2,\ldots\,.$$

Из (24) следует, что функция Римана не зависит от переменной $y$. Для резольвенты имеем уравнение:

$$R(\xi,\eta,t) = K_0(\xi,\eta,t) + \int_t^\xi K_0(s,\eta,t)R(\xi,\eta,s)ds\,.$$

Нетрудно заметить, что

$$R_\xi(\xi,\eta,t) = -d(t,\eta) + b_1(\xi,\eta)R(\xi,\eta,t) - \int_t^\xi d(s,\eta)R(s,\eta,t)ds\,.$$

Тогда $\upsilon_\xi(x,\xi,\eta) = 1 + b_1(\xi,\eta)\upsilon(x,\xi,\eta) - \int_t^\xi d(s,\eta)\upsilon(x,t,\eta)dt$. Отсюда заключаем, что функция $\upsilon(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению (23) и тем самым и уравнению (18). Из (24) также получаем легко проверяемые соотношения:

$$\upsilon(x,x,\eta) = 0, \upsilon_\xi(x,x,\eta) = 1, \quad (25)$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} &\upsilon_x(x,\xi,\eta) = -1 - \int_x^\xi R(\xi,\eta,t)dt, \\ &\upsilon_{xx}(x,\xi,\eta) = R(\xi,\eta,x) = \\ &= b_1(x,\eta) + (x-\xi)d(x,\eta) + \int_x^\xi [b_1(x,\eta) + (x-s)d(x,\eta)] \times R(\xi,\eta,s)ds, \end{aligned}$$

то функция $\upsilon(x,\xi,y)$ удовлетворяет уравнению:

$$\upsilon_{\xi\xi}(x,\xi,y)-b_1(x,y)\upsilon(x,\xi,y)+d(x,y)\upsilon(x,\xi,y)=0. \qquad (26)$$

Осуществляя вычисления криволинейных интегралов по границам области $D_2^*$ и учитывая свойства функции Римана $\upsilon(x,\xi,\eta)$ из (17) получим представление решение задачи (14), (15) для уравнения (2) в виде:

$$u(x,y)=\upsilon_\xi(x,x,0)\tau_1(x)-\int_0^x\{\upsilon_{\xi\xi}(x,\xi,0)-[b_1(\xi,0)\upsilon(x,\xi,0)]_\xi+d(\xi,0)\times$$

$$\times\upsilon(x,\xi,0)\}\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^y\{\upsilon(x,0,\eta)\chi_2'(\eta)-\upsilon_\xi(x,0,\eta)\chi_1'(\eta)+b_1(0,\eta)\times$$

$$\times b_1(0,\eta)\upsilon(x,0,\eta)\}\chi_1'(\eta)\}d\eta.$$

Если учесть, что уравнение (26) выполняется и при $y=0$, и если воспользоваться соотношениями

$$\upsilon_x(x,x,0)=-1,\ \upsilon_\xi(x,0,\eta)=1+b_1(0,\eta)\upsilon(x,0,\eta)+\int_0^x d(t,\eta)\upsilon(x,t,\eta)dt,$$

то

$$u(x,y)=\tau_1(x)+\chi_1(y)-\chi_1(0)-\int_0^y\upsilon(x,0,\eta)\chi_2'(\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^y\chi_1'(\eta)d\eta\int_0^x d(\xi,\eta)\upsilon(x,\xi,\eta)d\xi, \qquad (27)$$

где $\tau_1(x)$ – пока еще неизвестная функция. Нетрудно показать, что функция $u(x,y)$, определяемая формулой (27), удовлетворяет условиям (14), (15) и удовлетворяет уравнению (2).

Из (27) определим производную $u_y(x,y)$, хотя сама функция еще неизвестна:

$$u_y(x,y)=\chi_1'(y)+\upsilon(x,0,y)\chi_2'(y)+\chi_1'(y)\int_0^x d(\xi,y)\upsilon(x,\xi,y)d\xi,$$

и тем самым след нормальной производной при $y\to-0$:

$$\nu_1(x)=\chi_1'(0)+\upsilon(x,0,0)\chi_2'(0)+\chi_1'(0)\int_0^x d(\xi,0)\upsilon(x,\xi,0)d\xi. \qquad (28)$$

Нетрудно показать, что $\nu_1(x)$, определенная формулой (28), является решением следующей задачи:

$$\begin{cases}\nu_1''(x)+b_1(x,0)\nu_1'(x)+d(x,0)\nu_1(x)=0,\\ \nu_1(0)=\chi_1'(0),\ \nu_1'(0)=\chi_2'(0).\end{cases}$$

Указанное уравнение легко получается из уравнения (2) при $y\to-0$.

**4. Представление решения задачи 1 в области $D_3$.**

В области $D_3$ рассмотрим краевую задачу для уравнения (3) с условиями:

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0, \qquad (29)$$

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le h. \qquad (30)$$

Интегрируя тождество

$$uL_3^*(\vartheta)-\vartheta L_3(u)=(\vartheta_y u_y+(b_2\vartheta)_y u-c\vartheta u)_x-(\vartheta u_{xy}+\vartheta_{xy}u+b_2\vartheta u_x)_y$$

где $L_3^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{xyy}+(b_2\vartheta)_{xy}-(c\vartheta)_x$, имеем

$$\iint\limits_{D_3^*}(uL_3^*(\vartheta)-\vartheta L_3(u)d\xi d\eta=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_1}(\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u+b_2\vartheta u_\xi)d\xi+(\vartheta_\eta u_\eta+(b_2\vartheta)_\eta u-c\vartheta u)d\eta, \tag{31}$$

где $D_3^*=\{(\xi,\eta): x<\xi<0,\,0<\eta<y\}$, $\Gamma_1=\partial D_3^*$.

Функцией Римана назовем решение следующей задачи:

$$L_3^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\eta\eta}+(b_2\vartheta)_{\xi\eta}-(c\vartheta)_\xi=0, \tag{32}$$

$$\vartheta(\xi,\eta)\,|_{\eta=y}=0,\ x\le\xi\le0,\ \ \vartheta_\eta(\xi,\eta)\,|_{\eta=y}=1,\ x\le\xi\le0, \tag{33}$$

$$\vartheta(\xi,\eta)\,|_{\xi=x}=\tilde{\omega}(x,\eta),\ 0\le\eta\le y\ , \tag{34}$$

где $\tilde{\omega}(x,\eta)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}\vartheta_{\eta\eta}(x,\eta)-[b_2(x,\eta)\vartheta(x,\eta)]_\xi+c(x,\eta)\vartheta(x,\eta)=0,\ 0<\eta<y,\\ \vartheta(x,\eta)\,|_{\eta=y}=0,\ \vartheta(x,\eta)\,|_{\eta=y}=1.\end{gathered} \tag{35}$$

Как и выше интегрируя уравнение (32), с учетом (33), (34) и (35), приходим к интегральному уравнению:

$$\vartheta(\xi,\eta)=\eta-y+\int\limits_y^\eta H_0(\xi,\eta,t)\vartheta(\xi,t)dt\,, \tag{36}$$

где $H_0(\xi,\eta,t)=b_2(\xi,t)+(t-\eta)c(\xi,t)$, решение, которого представимо в виде

$$\vartheta(\xi,\eta)\equiv\vartheta(y,\xi,\eta)=\eta-y+\int\limits_y^\eta R_1(\xi,\eta,t)(t-y)dt, \tag{37}$$

где $R_1(\xi,\eta,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}H_n(\xi,\eta,t)$ – резольвента ядра $H_0(\xi,\eta,t)$, а

$$H_n(\xi,\eta,t)=\int\limits_t^\eta H_0(\xi,s,t)H_{n-1}(\xi,\eta,s)ds,\ n=1,2,\dots\,.$$

Из (37) следует, что функция Римана не зависит от переменной $x$.

Осуществляя вычисления криволинейных интегралов по границам области $D_3^*$ и учитывая свойств функции Римана $\vartheta(y,\xi,\eta)$ из (31) получим представление решение задачи (29), (30) для уравнения (3) в виде:

$$\begin{gathered}u(x,y)=\tau_2(y)+\psi_1(x)-\psi_1(0)-\int\limits_0^x\vartheta(y,\xi,0)\psi_2'(\xi)d\xi+\\ +\int\limits_0^x\psi_1'(\xi)d\xi\int\limits_0^y c(\xi,\eta)\vartheta(y,0,\eta)d\eta,\end{gathered} \tag{38}$$

где $\tau_2(y)$ – пока еще неизвестная функция. Нетрудно показать, что функция $u(x,y)$, определяемая по формуле (38), удовлетворяет условиям (29), (30) и удовлетворяет уравнению (3). Используя первое условие (6) из (38) определим $\tau_2(y)=\varphi_1(y)$.

Найдем $u_x(x,y)$ из (38):

$$u_x(x,y)=\psi_1'(x)-\vartheta(y,x,0)\psi_2'(x)+\psi_1'(x)\int\limits_0^y c(x,\eta)\vartheta(y,0,\eta)d\eta\,,$$

и след нормальной производной при $x\to-0$:

$$\nu_2(y)=\psi_1'(0)-\vartheta(y,0,0)\psi_2'(0)+\psi_1'(0)\int\limits_0^y c(0,\eta)\vartheta(y,0,\eta)d\eta. \tag{39}$$

Нетрудно показать, что $\nu_2(y)$, определенная формулой (39), является решением уравнения:

$$\nu_2''(y)+b_2(0,y)\nu_2'(y)+c(0,y)\nu_2(y)=0,$$

полученной из уравнения (3) при $x\to -0$, и удовлетворяет условиям: $\nu_2(0)=\psi_1'(0),\ \nu_2'(0)=\psi_2'(0)$.

**5. Представление решения задачи 1 в области $D_1$.**

В области $D_1$ рассмотрим задачу:

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{40}$$

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ u_x(0,y)=\nu_2(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, \tag{41}$$

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le \ell. \qquad 42)$$

Интегрируя уравнение (40), имеем:

$$u_{xx}-u_y=-w'(y), \tag{43}$$

где $w(y)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда функция $\tilde{u}(x,y)=w(y)$ является одним частных решений неоднородного уравнения (43). В силу линейности уравнения (43) заключаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x,y)=z(x,y)+w(y), \tag{44}$$

где $z(x,y)$ – общее решение уравнения

$$z_{xx}-z_t=0. \tag{45}$$

В силу того, что любая константа $C$ является решением уравнения (43), можно доказать, что $w(0)=0$. В самом деле, равенство (44) можно представить в виде:

$$u(x,y)=[z(x,y)+C]+[w(y)-C]=\tilde{z}(x,y)+\tilde{w}(y),$$

где $\tilde{z}(x,y)=z(x,y)+C,\ \tilde{w}(y)=w(y)-C$. Отсюда заключаем, что $\tilde{w}(0)=0$, если $C=w(0)$. Следовательно, можно считать, что в представлении (44) функция $w(y)$ удовлетворяет условию $w(0)=0$.

Переходя к пределу при $y\to +0$ из уравнения (43) имеем

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=-w'(0),\ 0<x<\ell, \tag{46}$$

где $w'(0)$ – пока неизвестная константа. Так как функция $\nu_1(x)$ известна и определена по формуле (28), то из (46) можно определить $\tau_1(x)$ со следующими условиями: $\tau_1(0)=\psi_1(0),\ \tau_1'(0)=\psi_2(0),\ \tau_1(\ell)=\varphi_2(0)$.

Тогда из (40) и (41) для $z(x,t)$ получим следующие условия:

$$z_x(0,y)=\nu_2(y), 0\le y\le h,\ z(\ell,y)=\varphi_2(y)-w(y),\ 0\le y\le h,\ z(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{47}$$

Теперь выпишем решение уравнения (45), удовлетворяющее условиям (47):

$$\begin{aligned} z(x,y)=&-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)[\varphi_2(\eta)-\\ &-w(\eta)]d\eta+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi,\end{aligned} \tag{48}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\dfrac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\exp\left(-\dfrac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\right.$

$\left.-\exp\left(-\dfrac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\exp\left(-\dfrac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)\right]$ – функция Грина.

Если учесть, что для $z(x,t)$ выполняется еще и соотношение

$$z(0,y) = \tau_2(y) - w(y), 0 \le y \le h,$$

то из (48) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода для $w(y)$:

$$w(y) + \int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)w(\eta)d\eta = g(y), \qquad (49)$$

где

$$g(y) = \tau_2(y) + \int_0^y G(0,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(0,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^\ell G(0,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi,$$

которое допускает единственное непрерывно-дифференцируемое решение.

Таким образом, доказана следующая **теорема:** если выполняются условия (4), (10) и (11), тогда задача 1 имеет единственное решение.

**Список литературы:**


1. Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. – 1972. – № 12. – P. 559–565.
2. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63, № 1. – P. 77–81.
3. Джураев Т.Д., Попелёк Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734–1745.
4. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.
5. Исломов Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ташкент, 1995. – 32 с.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
7. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11–34.
8. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1984, № 3. – С. 29–34.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус П.П. Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 954–962.
10. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
11. Сопуев А. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений типа с двумя линиями изменения типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1989. – № 4. – С. 31–37.
12. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.


Копия верна
Уч. секретарь ОшГУ
Байсубанов М.Т.