ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.928

Азимов Бектур Абдырахманович

Асимптотика решения бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особой точкой

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, Заслуженный деятель науки КР,
член-корр. НАН КР Алымкулов К.

Ош - 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $0<\varepsilon$ – скалярный малый параметр, μ – тоже малый параметр, связанный с ε.
- **N**, **Z**, **R** – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\in$ – «принадлежность».
- $\sim$ – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^\infty[0,1]$ – множество дифференцируемых функций на отрезке [0,1].

  Например, если функции $f(x)$, $g(x)\in C^\infty[0,1]$, то их разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$, записываются в виде $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$, где $f_k=f^{(k)}(0)/k!$, $g_k=g^{(k)}(0)/k!$.

  Отметим, что эти ряды являются асимптотическими рядами, т.е.

  $$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k x^k + O(x^{n+1}),\ \ g(x)=\sum_{k=0}^{n} g_k x^k + O(x^{n+1}),\quad x\to 0\ .$$
- O, o – символы порядка (Ландау).
- Ссылка к формулам разделяется тремя точками, сначала номер главы, затем номер параграфа и последний номер формулы и они отделяются точками.
- Переменная x в исходном сингулярно возмущенном уравнении называется внешней переменной, а его решение, зависящее от x – внешним решением.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Сингулярно возмущенные уравнения с особыми точками занимают особое место в прикладной математике. Так как многие прикладные задачи приводятся именно к сингулярно возмущенным уравнениям с особыми точками, так, например, сингулярно возмущенное уравнение Ван-дер Поля:

$$\varepsilon y''(x) - (1 - y^2(x))y'(x) + y(x) = 0$$

здесь для невозмущенного уравнения

$$-(1 - y_0^2(x))y_0'(x) + y_0(x) = 0$$

точки $y_0=\pm 1$ являются особыми точками.

Задачи квантовой механики также приводятся к сингулярно возмущенным уравнениям с особыми точками, т.е. к задачам с точками поворота.

Впервые задачи сингулярно возмущенных уравнений появились в теории механики жидкостей и газа (Прандтль), в задачах радиотехники (Ван-дер-Поль), в задачах химической кинетики и в других областях науки и техники.

Математическое обоснование теории сингулярно возмущенных уравнений появились в трудах А.Н. Тихонова, Н. Левинсона, А.Б. Васильевой, В. Вазова, Я. Сибуя, О' Маллей, Дж. Коула, М. Иманалиева и др.

Проблема построения равномерных асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с особой точкой до сих пор остается актуальной. Так как для них до сих пор не разработан общий метод разложения.

Известный ученый в теории сингулярных возмущений Дж. Коул впервые в 1968 г. в своей монографии [48] рассматривал вопрос построения асимптотики решения краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особой точкой (см. ниже задачу (1)-(2) в §2.1) и получил асимптотику решения этой задачи, методом сращивания, только до первого порядка по малому параметру без обоснования асимптотического характера этого решения. Затем эта задача рассматривалась также в монографиях [49], [50], ранее полученная Дж. Коулом асимптотика решения улучшилась до второго порядка по малому параметру, здесь тоже асимптотика приведена без обоснования. Получение дальнейших членов асимптотики решения этой задачи является слишком трудоемкой.

Сложность решения этой задачи заключается в том, что решение невозмущенной задачи является негладкой функцией на рассматриваемом отрезке.

Такие задачи в теории сингулярных возмущений с негладким коэффициентом до сих пор не изучались.

В данной работе равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач строятся обобщенным методом пограничных функций, и эти разложения обоснованы с помощью принципа максимума [26].

Связь темы диссертации **с государственными программами**. Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследовании при ОшГУ по темам:

1) «Изучение математических моделей гидроаэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы» № гос. регистрации 0005721 от 20.04.2012 г.

2) «Математические задачи гидроаэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР, УН 28/13 от 28.03.2013 г.

3) «Метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций», договор с МОН КР, УН № ОН - 2/14 от 27.01.2014 г.

Цель и задачи исследования

1. Разработать аналог метода погранфункций для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с негладким коэффициентом и со слабой особой точкой;

2. Построить и обосновать равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач со слабой особой точкой.

Методы исследования. Обобщенный метод погранфункций, метод полной математической индукции, метод мажорант, метод преобразования. Используются различные оценки интегралов.

Научная новизна работы

1) Дано дальнейшее развитие обобщенного метода погранфункций для бисингулярных задач с негладким коэффициентом.

2) Впервые построены и обоснованы равномерные асимптотические разложения решений краевой задачи для сингулярно возмущенных задач со слабой особой точкой.

3) Впервые построены и обоснованы равномерные асимптотические разложения решений начальной задачи для системы сингулярно возмущенных задач с сингулярной точкой.

Теоретическая и практическая ценность.

Настоящая работа, хотя носит теоретический характер, но ее результаты могут найти приложение в механике жидкостей и газа, в квантовой механике и других областях техники и науки. Полученные научные результаты данной диссертации могут быть применены при качественном исследовании решений сингулярно возмущенных уравнений с негладким коэффициентом.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Построение и обоснование равномерного асимптотического разложения решения краевой задачи для модельного уравнения Дж. Коула.

2. Построения и обоснования равномерных асимптотических разложений решений краевой задачи для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с негладким коэффициентом.

3. Построение и обоснование равномерных асимптотических разложений решений начальной задачи для системы сингулярно возмущенных задач с негладким коэффициентом.

Личный вклад соискателя. Все полученные результаты являются новыми и установлены соискателем. В совместных работах с К. Алымкуловым и Д.А. Турсуновым постановка задачи принадлежит соавторам, а построение асимптотических разложений, доказательство теорем, формулировка результатов – автору.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях: V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Issyk-Kul – 2014), Issyk-Kul International Mathematical Forum (2015), Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и информатики» посвященная 80-летию со дня рождения Академика НАН РК К.А. Касымова (Алматы – 2015), «Роль науки и образования в современных условиях глобализации» (г. Ош – 2015), V International Scientific Conference "Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics" devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev (Bishkek – 2016). А также обсуждались на научных семинарах математиков Южного региона Кыргызстана под руководством член-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По теме диссертации опубликованы 10 статей [3]-[11], [41] и два тезиса [2], [42], в том числе в журнале индексируемой в Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, разбитых на 14 параграфов, выводов и литературы из 50 наименований. Работа изложена на 112 страницах машинописного текста.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки, член-корреспонденту Национальной Академии Наук Кыргызской Республики *Алымкулову Келдибаю* за постоянное внимание и полезные советы при обсуждении работы.

ГЛАВА 1. ВВОДНАЯ ГЛАВА

§ 1.1. Обзор работ других авторов по теме диссертации

Сингулярно возмущенные уравнения условно делятся на три типа:

I. Сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения типа Прандтля-Тихонова, т.е. возмущенные уравнения в которых малый параметр содержится при высшей производной, т.е. уравнения вида

$$y'(x)=f(x,y,\varepsilon),\ y(0)=a,$$
$$\varepsilon z'(x)=g(x,y,\varepsilon),\ \ z(0)=b,$$

где 0<ε<<1, *a, b* – заданные числа, *f, g* являются бесконечно дифференцируемыми по переменным *x*, *y*, ε в окрестности точки *O*(0,0,0). Очевидно, что невозмущенное уравнение

$$y_0'(x)=f(x,y,0),\ 0=g(x,y,0)$$

имеет первый порядок.

II. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения типа Лайтхилла, к ним относятся возмущенные уравнения в которых при нулевом значении порядок рассматриваемого уравнения не понижается но содержит особую точку.

Например, модельное уравнение Лайтхилла

$$(x+\varepsilon y(x))y'(x)+p(x)y(x)=r(x),\ y(1)=a,$$

где $x\in[0,1],\ p(x),r(x)\in C^{\infty}[0,1]$. Невозмущенное уравнение

$$xy'_0(x)+p(x)y_0(x)=r(x),$$

точка *x*=0 является регулярной особой точкой.

III. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с малым параметром которые рассматриваются на бесконечном отрезке. Например, уравнение Лагерстрома

$$y''(x)+\frac{n}{x}y'(x)+y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2,$$
$$y(\varepsilon)=0,\ y(\infty)=1.$$

Сингулярно возмущенные уравнения, исследованные, в диссертации относятся к I типу.

Наиболее близкой к диссертации является работа Дж. Коула [48]-[50]. Джулиан Д. Коул в 1968 г. своей монографии [48], методом сращивания исследовал задачу

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+\sqrt{x}\frac{dy}{dx}-y=0,\ 0\le x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=0,\ y(1)=e^2, \tag{2}$$

и построил равномерно пригодное разложение

$$y_{uv}(x;\varepsilon)=e^{2\sqrt{x}}+\varepsilon^{1/3}\left\{g_1(t)-2\sqrt{t}\right\}+\varepsilon^{2/3}\left\{g_2(t)-2t\right\}+$$

$$+\varepsilon\left\{g_3(t)-\frac{4}{6}t^{3/2}-e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\right\}+\dots$$

где $t=x/\varepsilon^{2/3}$, $g_0(t)=\frac{1}{k}\int\limits_0^t exp\left(-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)d\zeta,\ k=\int\limits_0^\infty exp\left(-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)d\zeta,$

$g_i(t)$ удовлетворяет уравнению

$$g_i''(t)+\sqrt{t}g_i'(t)=g_{i-1}(t)$$

или

$$\frac{d}{dt}(e^{2t^{3/2}}g_i(t))=e^{2t^{3/2}/3}g_{i-1}(t),\ \ i=1,2,3\quad g_i(0)=0.$$

Функции $g_i(t)$ при $t\to\infty$ имеют асимптотики

$$g_1(t)\cong 2\sqrt{t}-\frac{1}{2t}+O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right)+TST,\ \ g_2(t)\cong 2t+\frac{1}{\sqrt{t}}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)+TST,$$

$$g_3(t)\cong\frac{4}{3}t^{3/2}+\frac{3}{2}+O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)+TST,$$

TST – трансцендентально малые члены, которыми всегда пренебрегают при сращивании.

Заметим, что здесь построена асимптотика решения до первого порядка по малому параметру и без обоснования.

Далее Дж. Д. Коул продолжая исследование в 1981 г. и 1996 г. с Ж. Кеворкяном (J. Kevorkian) опубликовали монографию [49], [50] в этих монографиях для решения задачи (1)-(2), методом сращивания получена асимптотическая оценка решения до второго порядка по малому параметру здесь тоже без обоснования асимптотики.

Сложность решения этой задачи заключается в том, что решение невозмущенной задачи является негладкой функцией на рассматриваемом отрезке.

Подобные задачи в теории сингулярных возмущений с негладким коэффициентом до сих пор не изучались.

В данной диссертации обобщенным методом погранфункций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) до любого порядка по малому параметру с обоснованием. Кроме этого исследован более общий случай.

Автором обобщенного метода погранфункций является профессор, член-корр. НАН КР Келдибай Алымкулов, он впервые в работах [13]-[17], [44]-[46] с помощью этого метода построил равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач с особой точкой.

Далее Д.А. Турсунов, развивая идею метода обобщенных пограничных функций, исследовал бисингулярные обыкновенные дифференциальные уравнения в комплексной плоскости при нарушении условия асимптотической устойчивости, а также бисингулярные эллиптические дифференциальные уравнения [12], [35]-[37].

У.З. Эркебаевым [40] обобщенным методом погранфункций построены полные асимптотические разложения решений бисингулярной задачи Дирихле для кольца, когда особенность появляется на границе, одновременно на обеих границах, внутри, одновременно на обеих границах и внутри кольца.

В работах А.М. Ильина [27], [28], А.Р. Данилина [26] и О.Ю. Хачай [38] [39] методом сращивания исследованы различные классы бисингулярных задач, тоже с гладким коэффициентом.

В работах С.А. Ломова [29], В.Н. Бобочко [18]-[20] методом регуляризации С.А. Ломова построены асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных задач с гладкими коэффициентами.

В работах В.Г. Сушко [33], построены асимптотические разложения погранслойного типа решений бисингулярных краевых задач, связанных с линейными и квазилинейными дифференциальными уравнениями, при наличии особенностей у решений соответствующего вырожденного уравнения, разрывных, резко меняющихся или вырождающихся коэффициентов либо в случаях смены типа уравнения, получение оценок погрешности асимптотических разложений в нормах естественных для решений исходной задачи пространств функций.

В работе Н.Х. Розова, В.Г. Сушко [30] исследован внутренний слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко, Д.И. Чудовой [31] доказаны теоремы о существовании и единственности решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной.

В работе Абдувалиева А.О. [1] исследованы сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка с обращающимся в ноль коэффициентом при старшей производной, предложены методы построения асимптотики произвольного порядка в случаях, когда особенности задачи не позволяют применить классические методы.

А.Б. Зимин в работах [23], [24] исследовал задачи Коши и Дирихле для линейного уравнения второго порядка с малым параметром и гладкими коэффициентами, вырождающегося в пределе в уравнение с особыми точками. А в [25] исследовал задачу Коши для линейного уравнения n-го порядка с малым параметром при старшей производной в случае сингулярных начальных данных.

§ 1.2. Обзор научных результатов диссертации

Основные научные результаты второй главы

В §2.1 доказана

Теорема 2.3. Для решения задачи

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt{x}\,y'(x)-y(x)=0,\ \ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b,\ a,\ b-\text{const}, \tag{2}$$

справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k Y_k(x)+\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\pi_k(t)+O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,$$

где $Y_k(x)\in C[0,1],\ \pi_k(t)\in C^{\infty}\left[0,\mu^{-2}\right]$.

В §2.2 доказана

Теорема 2.6. Решения задачи

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt[3]{x^2}\,y'(x)-y(x)=0,\ \ 0<x<1, \tag{3}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b, \tag{4}$$

можно представить в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y_k(x)+\pi_k(t)\right),\ \varepsilon\to 0,$$

где $Y_k(x)\in C[0,1],\ \pi_k(t)\in C^{\infty}\left[0,\mu^{-3}\right]$.

В §2.3 рассматривается задача

$$\varepsilon y''(x)+x^{\alpha}y'(x)-y(x)=0,\ \ 0<x<1, \tag{5}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b, \tag{6}$$

где $\alpha=m/(m+1)$.

Доказана

Теорема 2.9. Для решения этой задачи справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y_k(x)+\pi_k(t)\right),\ \varepsilon\to 0,$$

где $Y_k(x) \in C[0,1],\ \pi_k(t) \in C^\infty\left[0,\mu^{-(m+1)}\right]$.

В §2.4 доказана

Теорема 2.12. Асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon y''(x) + \sqrt[3]{x}\,y'(x) - y(x) = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b,$$

представимо в виде

$$y(x) = be^{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2}-1)} + (a - be^{-3/2})A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds + \mu^2\pi_2(t) + +\mu^4\pi_4(t) + O(\mu^4),\quad \varepsilon\to 0,$$

где

$$\pi_2(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}\left((a - be^{-3/2})A\int_s^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}\tau^{4/3}}d\tau + \frac{b}{2\sqrt[3]{s^4}}e^{-3/2}\right)ds,$$

$$\pi_4(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}\left(\pi_2(s) - \frac{b}{2\sqrt[3]{t^2}}e^{-3/2}\right)ds,$$

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)X(s),\ 0 \le t \le s, \\ -Y(s)X(t),\ s \le t \le \tilde{\mu}, \end{cases}$$

$$Y(t) = 1 - X(t),\ X(t) = A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds = 1.$$

В §2.5 доказана

Теорема 2.14. Для решения задачи

$$\varepsilon y''(x) + \sqrt{x}\,y'(x) - q(x)y(x) = f(x),\ 0 < x < 1,$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b,$$

где $q(x) \in C^\infty[0,1], q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k,\ 0 < q_0,\ f(x) \in C^\infty[0,1], f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$,

справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = y_0(x) + \pi_0(t) + \mu\pi_1(t) + \mu^2\pi_2(t) + \mu^3\pi_3(t) + O(\varepsilon),$$

где $y_0(x) \in C[0,1],\ \pi_k(t) \in C^\infty\left[0,\mu^{-2}\right]$.

В главе 3 с помощью преобразования и обобщенным методом погран-функций получены следующие результаты:

В § 3.1 доказана

Теорема 3.1. Для решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = be^{2(\sqrt{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right),$$

где $\pi_k(t) \in C^{\infty}\left[0,\mu^{-2}\right]$.

В §3.2 доказана

Теорема 3.2. Для решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ имеет место асимптотика

$$y(x) = be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right),$$

где $\pi_k(t) \in C^{\infty}\left[0,\mu^{-3}\right]$.

В §3.3 доказана

Теорема 3.3. Для решения задачи (5), (6) при $\alpha = m/(m+1)$ и $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right),$$

где $\pi_k(t) \in C^{\infty}\left[0,\mu^{-(m+1)}\right]$.

В §3.4 доказана

Теорема 3.3. Для решения задачи (5), (6) при α – рациональное число, имеет место асимптотическое разложение

$$y(x) = b\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha}-1\right)\right)\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right),\ \varepsilon \to 0$$

где $t = \dfrac{x}{\mu^m}$, $\varepsilon = \mu^{m+n}, \alpha = \dfrac{n}{m}, \left(n < m < 3n, n, m \in N\right)$, $\pi_k(t) \in C^{\infty}\left[0,\mu^{-m}\right]$.

В главе 4 исследуется задача Коши для систем сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с особой точкой

$$\varepsilon y'(x) + \sqrt[m]{x}Ay(x) = f(x),\ 0 < x \le 1, \qquad (7)$$

$$y(0)=y^0, \tag{8}$$

где $f(x),\ y(x),\ y^0\in R^n$, A – положительная квадратная матрица n-го порядка с собственными значениями $0<\lambda_i$, λ_i–const, $\lambda_i\neq\lambda_j$ $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $F(x)\in C^\infty$, m – фиксированное натуральное число.

В §4.1 доказана

Теорема 4.1. Для решения задачи (7)-(8) при m=2 справедливо асимптотическое разложение

$$z(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)),\ \varepsilon\to 0,$$

где $\varepsilon=\mu^3, t=x/\mu^2$, $y(x)=Bz(x)$, $B^{-1}AB=D$, $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\pi_k(t)\in C^\infty\left[0,\mu^{-2}\right]$, $z_{3k+1}(x)\equiv 0,\ z_{3k+2}(x)\equiv 0,\ z_{6k}(x)\in C\left[0,1\right]$, $z_{6k+3}(x)\in C^\infty\left[0,1\right]$.

В §4.2 доказана

Теорема 4.2. Для решения задачи (7)-(8) при m=3 имеет место асимптотика

$$z(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)),\ \varepsilon\to 0,$$

где $\varepsilon=\mu^4, t=x/\mu^3$, $y(x)=Bz(x)$, $B^{-1}AB=D$, $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\pi_k(t)\in C^\infty\left[0,\mu^{-3}\right]$, $z_{4k+1}(x)\equiv 0,\ z_{4k+2}(x)\equiv 0,\ z_{4k+3}(x)\equiv 0$, $z_k(x)\in C[0,1]$, $z_{12k+8}(x)\in C^\infty\left[0,1\right]$.

В §4.3 исследован общий случай $m\in\mathbf{N}$ и доказана

Теорема 4.3. Для решения задачи (7)-(8) справедливо асимптотическое разложение

$$z(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)),\ \varepsilon\to 0,$$

где $\varepsilon=\mu^{m+1}, t=x/\mu^m$, $y(x)=Bz(x)$, $B^{-1}AB=D$, $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\pi_k(t)\in C^\infty\left[0,\mu^{-m}\right]$, $z_k(x)\in C[0,1]$.

Заключение по главе 1

Приведен обзор и анализ результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. А также основные научные результаты данной диссертационной работы.

На основе этого анализа можем утверждать, что диссертационное исследование актуально, оригинально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

Методом обобщенных погранфункций впервые построены равномерные асимптотики для решения краевых задач второго порядка со слабой особенностью.

ГЛАВА 2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

§ 2.1 Случай особой точки степени одна второй

2.1.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt{x}\,y'(x)-y(x)=0,\ \ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b. \tag{2}$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Здесь и далее везде a, b – const.

2.1.2. Метод классического малого параметра

Определение 1. Переменная x называется внешней переменной, а решение уравнения (1) с условием $y(1)=b$ называется внешним решением этой задачи.

Внешнее решение задачи (1)-(2) ищется в виде

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\dots\ . \tag{3}$$

После подстановки ряда (3) в уравнение (1) и выравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε, используя граничное условие $y(1)=b$, получаем следующие задачи:

$$\sqrt{x}\,y_0'(x)-y_0(x)=0,\qquad y_0(1)=b,$$

$$\sqrt{x}\,y_1'(x)-y_1(x)=-y_0''(x),\qquad y_1(1)=0,$$

$$\sqrt{x}\,y_2'(x)-y_2(x)=-y_1''(x),\qquad y_2(1)=0,$$

....

$$\sqrt{x}y_k'(x)-y_k(x)=-y_{k-1}''(x) \qquad y_k(1)=0,$$

....

Отсюда, определяем неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)},$$

$$y_k(x)=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}\,\frac{y''_{k-1}(s)}{\sqrt{s}}ds,\ k\in\mathrm{N}.$$

При $x\to 0$ имеем

$$y_0(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}=O(1),\ x\to 0,$$

$$y'_0(x)=\frac{b}{\sqrt{x}}e^{2(\sqrt{x}-1)}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ x\to 0,$$

$$y_0''(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right),\ x\to 0,$$

$$y_1(x)=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}\,\frac{y''_0(s)}{\sqrt{s}}ds=be^{2(\sqrt{x}-1)}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right),x\to 0,$$

$$y'_1(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),x\to 0,$$

$$y_1''(x)=O\left(\frac{1}{x^3}\right),x\to 0,$$

$$y_2(x)=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}\,\frac{y''_1(s)}{\sqrt{s}}ds=O\left(\frac{1}{\sqrt{x^5}}\right),x\to 0,$$

$$y'_2(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x^7}}\right), \qquad y_2''(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x^9}}\right),x\to 0.$$

Методом математической индукции докажем, что

$$y_n(x)=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}\,\frac{y''_{n-1}(s)}{\sqrt{s}}ds=O\left(\frac{1}{x^{1+\frac{3(n-1)}{2}}}\right),x\to 0,\forall n\in N.$$

Действительно, при n=1 верно:

$$y_1(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),x\to 0.$$

Пусть при n=m справедливо соотношение

$$y_m(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+3(m-1)/2}}\right), x\to 0,$$

тогда при $n=m+1$ имеем

$$y_{m+1}(x)=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}\frac{y''_m(s)}{\sqrt{s}}ds=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x\frac{\tilde{y}_m(s)}{\sqrt{s}s^{3+3(m-1)/2}}ds=$$

$$=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x\frac{\tilde{y}_m(s)}{s^{2+3m/2}}ds=O\left(\frac{1}{x^{1+3m/2}}\right),\ x\to 0.$$

Следовательно, ряд (3) представимо в виде

$$y(x)\sim y_0(x)+\frac{\varepsilon}{x}\left[y_1^{(0)}+\frac{\varepsilon}{x^{3/2}}y_2^{(0)}+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\right)^{n-1}y_n^{(0)}+\ldots\right],\quad x\to 0 \qquad (4)$$

где $y_k^{(0)}$ – некоторые постоянные.

Очевидно, что ряд (3) или (4) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega(\varepsilon)=\left[\varepsilon^{\beta},1\right]$, где $0<\beta<\frac{2}{3}$. Таким образом, получим формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. Внешнее решение (3) задачи (1)-(2) представляется в виде асимптотического ряда (4) на отрезке $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$\left|y(x)-A_{3nx}y(x)\right|\le M\frac{\varepsilon}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\right)^n\le M\sqrt[3]{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^{3\alpha n}},$$

где $A_{3nx}y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x),\quad \alpha+\beta=\frac{2}{3}.$

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$\sqrt{x}y'(x)-y(x)=-\varepsilon y''(x).$$

Решая это уравнение с начальным условием $y(1)=b$ получим

$$y(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}-\varepsilon\int_1^x e^{2\sqrt{x}}e^{-2\sqrt{s}}s^{-1/2}y''(s)ds.$$

Дважды интегрируя по частям интегральный член, имеем

$$\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}s^{-1/2}y''(s)ds=\begin{vmatrix}u=e^{-2\sqrt{s}}s^{-1/2}\\ dv=y''(s)ds\end{vmatrix}=$$

$$= s^{-1/2} e^{-2\sqrt{s}} y'(s)\Big|_1^x - \int_1^x \left(e^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2}\right)' y'(s)ds =$$

$$= \left[s^{-1/2} e^{-2\sqrt{s}} y'(s) - \left(e^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2}\right)' y(s) \right]\Bigg|_1^x + \int_1^x \left(e^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2}\right)'' y(s)ds =$$

$$= x^{-1/2} e^{-2\sqrt{x}} y'(x) - e^{-2} y'(1) + x^{-1} e^{-2\sqrt{x}} y(x) + \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{x}} x^{-3/2} y(x) - \frac{3}{2} e^{-2} b +$$

$$+ \int_1^x \left(e^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2}\right)'' y(s)ds$$

учитывая это выражение, для $y(x)$ получаем:

$$y(x) = be^{2(\sqrt{x}-1)} - \varepsilon \int_1^x e^{2\sqrt{x}} e^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2} y''(s)ds = be^{2(\sqrt{x}-1)} -$$
$$-\varepsilon x^{-1/2} y'(x) + \varepsilon e^{2(\sqrt{x}-1)} y'(1) - \varepsilon x^{-1} y(x) - \frac{\varepsilon}{2} x^{-3/2} y(x) + \frac{3\varepsilon}{2} e^{2(\sqrt{x}-1)} b - \quad (5)$$
$$-\varepsilon e^{2\sqrt{x}} \int_1^x \left(e^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2}\right)'' y(s)ds.$$

Первый способ доказательство теоремы.

Рассмотрим класс функций S_x на отрезке $[x,1]$ удовлетворяющих условию

$$|y(x)| \le l, |y'(x)| \le lx^{-1/2} |y(x)|, \ |y''(x)| \le lx^{-3/2} |y(x)|$$

тогда в этом классе S_x, оценивая уравнение (5) имеем

$$|y(x)| \le l_1 + l_2 \varepsilon x^{-3/2} + l_3 \varepsilon x^{-3/2} |y(x)|$$

теперь рассмотрим мажорантное уравнение

$$z(x) = l_1 + l_2 \varepsilon x^{-3/2} + l_4 \varepsilon x^{-3/2} z(x)$$

решение этого уравнения можно представить в виде

$$z(x) = l_1 + l_2 \varepsilon x^{-3/2} + \alpha_2 \left(\varepsilon x^{-3/2}\right)^2 + \ldots + \alpha_m \left(\varepsilon x^{-3/2}\right)^m + \ldots \quad (6)$$

этот ряд является асимптотическим на отрезке $(\varepsilon^{\beta}, 1]$, где $0 < \beta < 2/3$.

Ряд (6) мажорирует внешнее решение (3).

Второе способ доказательства теоремы. Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$y(x) = y_0 + \varepsilon y_1(x) + \ldots + \varepsilon^m y_m(x) + \varepsilon^{m+1} R(x, \varepsilon)$$

тогда относительно $R(x,\varepsilon)$ получаем сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение. Оценивая $R(x,\varepsilon)$ на отрезке $(\varepsilon^{\beta},1]$ получаем оценку $|R(x,\varepsilon)| \le l - const$.

Поэтому равномерно пригодное решение задачи (1)-(2) ищем в методом обобщенной пограничной функции.

2.1.3. Обобщенный метод пограничных функций

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$y(x) = Y_0(x) + \pi_0(t) + \mu(Y_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^k (Y_k(x) + \pi_k(t)) + \ldots, \tag{7}$$

где $t = x/\mu^2$, $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Подставляя (7) в (1) имеем

$$\mu^3 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(Y''_k(x) + \frac{1}{\mu^4} \pi''_k(t) \right) + \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k Y'_k(x) + \sqrt{t} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k-1} \pi'_k(t) - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(Y_k(x) + \pi_k(t) \right) = 0. \tag{8}$$

Для $Y_k(x)$ получаем рекуррентное соотношение:

$$Y''_{k-3}(x) + \sqrt{x} Y'_k(x) - Y_k(x) = 0, Y_s(x) \equiv 0, s < 0, k = 0,1,\ldots$$

с краевым условием

$$Y_0(1) = b, Y_k(1) = 0,\ k = 1,2,\ldots$$

Отсюда для $Y_0(x)$ имеем:

$$\sqrt{x} Y'_0(x) - Y_0(x) = 0,\ Y_0(1) = b,$$

поэтому

$$Y_0(x) = b e^{2(\sqrt{x}-1)}.$$

Функцию $Y_0(x)$ можно представить в виде:

$$Y_0(x) = b e^{-2} \left(1 + 2\sqrt{x} + \frac{(2\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(2\sqrt{x})^3}{3!} + \ldots + \frac{(2\sqrt{x})^n}{n!} + \ldots \right),$$

отсюда находим

$$Y'_0(x) = be^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 + 2\sqrt{x} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!\sqrt{x}}(2\sqrt{x})^{n-1} + \ldots\right),$$

$$Y''_0(x) = be^{-2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3} + \sqrt{x} + \ldots + \frac{2^{n-2}(n-2)}{(n-1)!}x^{\frac{n}{2}-2} + \ldots\right) =$$

$$= be^{-2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + y_{0,r}(x),$$

где $y_{0,r}(x) = be^{-2}\left(\frac{4}{3} + \sqrt{x} + \ldots + \frac{2^{n-2}(n-2)}{(n-1)!}x^{\frac{n}{2}-2} + \ldots\right).$

Неизвестные функций $Y_s(x)$, $s\neq 3m$, s, $m\in$N определим из задачи

$$\sqrt{x}Y'_s(x) - Y_s(x) = 0,\ 0 < x < 1, \quad Y_s(1) = 0,\ s \neq 3m,\ \ s, m \in N,$$

тогда имеем $Y_s(x) \equiv 0.$

Неизвестную функцию $Y_3(x)$ определим из уравнения

$$\sqrt{x}Y'_3(x) - Y_3(x) = -y_{0,r}(x),\ 0 < x < 1,$$

с краевым условием $Y_3(1) = 0.$

Решение этой задачи представимо в виде

$$Y_3(x) = -e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}s^{-1/2}y_{0,r}(s)ds = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{3,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,\ y_{3,k} - \text{const},$$

отсюда

$$Y''_3(x) = -\frac{y_{3,1}}{2\sqrt{x^3}} + \frac{y_{3,3}}{\sqrt{x}} + y_{3,r}(x),$$

где $\quad y_{3,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{3,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k, \tilde{c}_{3,k} - const.$

Неизвестные коэффициенты $y_{3,k}$ можно вычислить методом неопределенных коэффициентов:

пусть $Y_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{3,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,$

где $y_{3,k}$ – неизвестные коэффициенты.

Тогда

$$Y_3'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{3,k+1}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k .$$

Подставляя этот ряд в соотношение

$$\sqrt{x}Y'_3(x)-Y_3(x)=-be^{-2}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)+...+\frac{4}{(n-1)(n-3)(n-4)!}\left(2\sqrt{x}\right)^{n-4}+...\right)$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{3,k+1}-y_{3,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k=-be^{-2}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)+...+\frac{4}{(n-1)(n-3)(n-4)!}\left(2\sqrt{x}\right)^{n-4}+...\right).$$

Отсюда

$$y_{3,1}=y_{3,0}-\frac{4b}{3}e^{-2},$$

$$y_{3,2}=y_{3,1}-\frac{b}{2}e^{-2}=y_{3,0}-\frac{11b}{6}e^{-2},$$

$$y_{3,3}=y_{3,2}-\frac{4b}{15}e^{-2}=y_{3,0}-\frac{21b}{10}e^{-2},$$

...

Аналогично, $Y_6(x)$ определим из задачи

$$\sqrt{x}Y'_6(x)-Y_6(x)=-y_{3,r}(x),\ 0<x<1,\ Y_6(1)=0,$$

тогда

$$Y_6(x)=-e^{2\sqrt{x}}\int_1^x e^{-2\sqrt{s}}s^{-1/2}y_{3,r}(s)ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{6,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,$$

$$Y_6(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{6,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,\ y_{6,k}-const,$$

поэтому

$$Y''_6(x)=-\frac{y_{6,1}}{2\sqrt{x^3}}+\frac{y_{6,3}}{\sqrt{x}}+y_{6,r}(x),$$

где $y_{6,r}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{6,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,\ \tilde{c}_{6,k}-const$.

Продолжая аналогичный процесс, $Y_{3m}(x)$, m=3,4,… определим из уравнения

$$\sqrt{x}Y'_{3m}(x)-Y_{3m}(x)=-y_{3m-3,r}(x),\ 0<x<1,\ Y_{3m}(1)=0,$$

отсюда, получаем

$$Y_{3m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{3m,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,\ y_{3m,k}-const,$$

$$Y''_{3m}(x)=-\frac{y_{3m,1}}{2\sqrt{x^3}}+\frac{y_{3m,3}}{\sqrt{x}}+y_{3m,r}(x),$$

где $y_{3m,r}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{3m,k}}{k!}\left(2\sqrt{x}\right)^k,\ \tilde{c}_{3m,k}-const.$

При таком определении функций $Y_k(x)$, (k=0,1,…) равенство (8) примет вид:

$$\mu^3\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}\left(-\frac{y_{3k,1}}{2\mu^3\sqrt{t^3}}+\frac{y_{3k,3}}{\mu\sqrt{t}}\right)+\mu^3\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-4}\pi''_k(t)+\sqrt{t}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\pi'_k(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)=0,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}\left(-\frac{y_{3k,1}}{2\sqrt{t^3}}+\mu^2\frac{y_{3k,3}}{\sqrt{t}}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}(\pi''_k(t)+\sqrt{t}\pi'_k(t)-\mu\pi_k(t))=0. \qquad (9)$$

Отсюда, учитывая граничное условие (2), имеем

$$L\pi_0\equiv\pi''_0(t)+\sqrt{t}\pi'_0(t)=0,\ 0<t<\tilde{\mu},\quad \pi_0(0)=a-Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu})=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu^2, \qquad (10)$$

$$L\pi_{3k+1}(t)=\pi_{3k}(t)+\frac{y_{3k,1}}{2\sqrt{t^3}},\ 0<t<\tilde{\mu},\pi_{3k+1}(0)=0,\ \pi_{3k+1}(\tilde{\mu})=0,\quad k=0,1,2,\ldots \qquad (11)$$

$$L\pi_{3k+2}(t)=\pi_{3k+1}(t),0<t<\tilde{\mu},\pi_{3k+2}(0)=0,\ \pi_{3k+2}(\tilde{\mu})=0,\quad k=0,1,2,\ldots \qquad (12)$$

$$L\pi_{3k}(t)=\pi_{3k-1}(t)-\frac{y_{3k-3,3}}{\sqrt{t}},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_{3k}(0)=-Y_{3k}(0),\ \pi_{3k}(\tilde{\mu})=0,\ k=1,2,\ldots \qquad (13)$$

Решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi''_0(t)+\sqrt{t}\pi'_0(t)=0\Rightarrow\left(\pi'_0(t)e^{\frac{2}{3}\sqrt{t^3}}\right)'=0\Rightarrow\pi'_0(t)e^{\frac{2}{3}\sqrt{t^3}}=c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi'_0(t)=c_1e^{-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}}\Rightarrow\pi_0(t)=c_2-c_1\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{s^3}}ds.$$

Учитывая граничные условия $\pi_0(0)=a-Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu})=0,$

находим значения c_1 и c_2:

$$\pi_0(\tilde{\mu}) = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$$

$$\pi_0(0) = -c_1\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}\sqrt{s^3}}ds = a - Y_0(0) \Rightarrow c_1 = \left(Y_0(0) - a\right)A, A = \left(\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}\sqrt{s^3}}ds\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\pi_0(t) = (a - be^{-2})A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A = \left(\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\right)^{-1}.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds, t \to \tilde{\mu}$$

получим

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}\left(1 - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=1}^{n}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3k-2)t^{-\frac{3n}{2}} + \ldots\right), t \to \tilde{\mu},$$

или

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds = \mu e^{-\frac{2}{3\mu^3}}\left(1 - \frac{1}{2}\mu^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=1}^{n}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3k-2)\mu^{3n} + \ldots\right), t \to \tilde{\mu} = \mu^{-2}$$

.

Это означает, что функция $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t \to \tilde{\mu}$.

При решении уравнения $L\pi_0(t) = 0$ мы заметили, что оно имеет двух линейно независимых решений: 1 и $\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds$. Не нарушая общности линейно независимых решений уравнения

$$Lz(t)=0$$

можно представить в виде

$$Y(t) = 1 - X(t),\ X(t) = A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds = 1.$$

Линейную независимость можно показать с помощью Якобиана:

$$J(X(t),Y(t)) = X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t) = Ae^{-2\sqrt{t^3}/3} \neq 0,\ t \in [0,\tilde{\mu}].$$

Причина такого выбора линейно независимых решений является соотношения:

$$X(0)=1, Y(0)=0, X(\tilde{\mu})=0, Y(\tilde{\mu})=1\ ,$$

которые понадобятся при построении функции Грина.

Так как

$$X(t)=1-At+o(t),\ t\to 0 \Rightarrow Y(t)=O(t),\quad t\to 0.$$

Общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид

$$z(t)=c_1\mathrm{Y}(t)+c_2\mathrm{X}(t),\ c_1,\ c_2 - \text{const}.$$

Отсюда вытекают

Лемма 2.1. Краевая задача

$$Lz(t)=0,\ z(0)=z(\tilde{\mu})=0$$

имеет только нулевое решение.

Доказательство очевидно, так как общее решение имеет вид:

$$z(t)=c_1\mathrm{Y}(t)+c_2\mathrm{X}(t),$$

и справедливы соотношения:

$$X(0)=1, Y(0)=0,\quad X(\tilde{\mu})=0, Y(\tilde{\mu})=1\ .$$

Отсюда получаем:

$$z(0)=c_2=0 \Rightarrow c_2=0;\ z(\tilde{\mu})=c_1=0 \Rightarrow c_1=0\ \Rightarrow z(t)\equiv 0\,.$$

Теорема 2.2. Краевая задача

$$Lz(t)=f(t), z(0)=0,\ z(\tilde{\mu})=0\,,$$

имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$z(t)=\int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}} f(s)ds\,,$$

где $G(t,s)$ – функция Грина:

$$G(t,s)=\begin{cases} -Y(t)X(s),\ 0\le t\le s, \\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le \tilde{\mu}, \end{cases} \tag{14}$$

$$f(t)\in C(0,\tilde{\mu}],\quad f(t)=O(t^{-\alpha}),\ t\to 0,\ \alpha<2;\ f(t)=O(t^{-\beta}),\ t\to\tilde{\mu},\ 1/2\le\beta\,.$$

Доказательство. Решение $z(t)$ запишем в виде

$$z(t)=J_1(t)+J_2(t)\,,$$

где $J_1(t)=-X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}f(s)ds,\ J_2(t)=Y(t)\int_t^{\tilde{\mu}} X(s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}f(s)ds.$

Покажем, что функции $J_1(t)$ и $J_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям. Так как $X(\tilde{\mu})\equiv 0$, и $Y(0)\equiv 0$, поэтому достаточно доказать, что

$$J_1(t)\to 0,\ t\to 0 \text{ и } J_2(t)\to 0,\ t\to\tilde{\mu}.$$

1) Рассмотрим функцию $J_1(t)$:

При $t\to 0$ имеем $|Y(t)|\le ct,\ |f(t)|\le ct^{-\alpha}$ поэтому

$$|J_1(t)|\le c\int_0^t s^{1-\alpha}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\le ct^{2-\alpha}\to 0,\ t\to 0.$$

2) Теперь рассмотрим $J_2(t)$ при $t\to\tilde{\mu}$:

$$|J_2(t)|\le c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1/2-\beta}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds=c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1/2-\beta}ds=O(t^{1/2-\beta})=O(\mu^{2\beta-1}),\ t\to\tilde{\mu}.$$

если $\beta=1/2$, то

$$|J_2(t)|\le c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1/2-1/2}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds=c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1}ds=O\left(\ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{t}\right)\right),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Поэтому решение $z(t)$ удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнение $Lz(t)=f(t)$ при $0<t<\tilde{\mu}$ получаем тождество. Теорема доказана.

Из соотношения (11) при k=0 имеем

$$L\pi_1(t)=\pi_0(t)+\frac{y_{0,1}}{2\sqrt{t^3}},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_1(0)=0,\ \pi_1(\tilde{\mu})=0. \tag{15}$$

Решение задачи (15) представимо в виде

$$\pi_1(t)=\int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}\left(\pi_0(\mathrm{s})+\frac{y_{0,1}}{2\sqrt{s^3}}\right)ds, \tag{16}$$

где $G(t,s)$ функция Грина (14).

Интегрируя по частям интегральное выражение (16) имеем:

$$\pi_1(t)=-\frac{y_{0,1}}{2t}\left(1+\frac{4}{5\sqrt{t^3}}+\frac{7}{4t^3}+\frac{42}{11\sqrt{t^9}}+\frac{39}{2t^6}+\dots\right),\ t\to\tilde{\mu}, \tag{17}$$

отсюда

$$\pi_1(t)\Big|_{t=\tilde{\mu}}=-\frac{y_{0,1}}{2}\mu^2\left(1+\frac{4}{5}\mu^3+\frac{7}{4}\mu^6+\frac{42}{11}\mu^9+\frac{39}{2}\mu^{12}+\ldots\right).$$

Аналогично, из соотношения (12) при k=0 имеем

$$L\pi_2(t)=\pi_1(t), 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_2(0)=0,\ \pi_2(\tilde{\mu})=0. \tag{18}$$

Решение задачи (17) представимо в виде

$$\pi_2(t)=\int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}\pi_1(\mathrm{s})ds, \tag{19}$$

где $G(t,s)$ функция Грина (14).

Интегрируя по частям интегральное выражение (19) учитывая разложение (17), имеем:

$$\pi_2(t)=\frac{y_{0,1}}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{23}{40\sqrt{t^3}}+\frac{173}{2t^3}+\ldots\right), \tag{20}$$

$$\pi_2(t)=\mu y_{0,1}\left(1+\frac{23}{40}\mu^3+\frac{173}{2}\mu^6+\ldots\right), t\to\tilde{\mu}=\mu^{-2}.$$

Из соотношения (13) при k=1 имеем

$$L\pi_3(t)=\pi_2(t)-\frac{y_{0,3}}{\sqrt{t}},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_3(0)=-Y_3(0),\ \pi_3(\tilde{\mu})=0. \tag{21}$$

Решение задачи (21) представимо в виде

$$\pi_3(t)=-Y_0(0)X(t)+\int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}\left(\pi_2(\mathrm{s})-\frac{y_{0,3}}{\sqrt{s}}\right)ds \tag{22}$$

где $G(t,s)$ функция Грина (14).

Интегрируя по частям интегральное выражение (22) учитывая разложение (20) и $y_{0,1}=y_{0,3}=be^{-2}$, имеем:

$$\pi_3(t)=-\frac{23y_{0,1}}{60\sqrt{t^3}}-\frac{1361y_{0,1}}{48t^{-3}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{t^9}}\right),$$

отсюда

$$\pi_3(t)\Big|_{t=\tilde{\mu}}=-\frac{23y_{0,1}}{60}\mu^3+O\left(\mu^6\right).$$

Из соотношения (11), (12) при k=1 и из (13) при k=2 имеем

$$L\pi_4(t) = \pi_3(t) + \frac{y_{3,1}}{2\sqrt{t^3}}, \quad \pi_4(0) = 0,\ \pi_4(\tilde{\mu}) = 0,$$

$$L\pi_5(t) = \pi_4(t), 0 < t < \tilde{\mu},\ \pi_5(0) = 0,\ \pi_5(\tilde{\mu}) = 0,$$

$$L\pi_6(t) = \pi_5(t) - \frac{y_{3,3}}{\sqrt{t}},\ 0 < t < \tilde{\mu},\ \pi_6(0) = -Y_6(0),\ \pi_6(\tilde{\mu}) = 0.$$

В силу теоремы 2.2 эти задачи имеют единственные решения. Интегрируя эти решения при $t \to \tilde{\mu}$, получаем

$$\pi_4(t) = \left(\frac{23y_{0,1}}{60} - \frac{y_{3,1}}{2}\right)\frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t^5}}\right), t \to \tilde{\mu},$$

$$\pi_5(t) = -\left(\frac{23y_{0,1}}{30} - y_{3,1}\right)\frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), t \to \tilde{\mu}.$$

Функцию $\pi_6(t)$ исследуем «осторожно»:

$$L\pi_6(t) = -\left(\frac{23y_{0,1}}{30} - y_{3,1} + y_{3,3}\right)\frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Так как

$$y_{0,1} = be^{-2}, y_{3,1} = y_{3,0} - \frac{4b}{3}e^{-2},\ y_{3,3} = y_{3,0} - \frac{21b}{10}e^{-2},$$

поэтому

$$\frac{23y_{0,1}}{30} - y_{3,1} + y_{3,3} = \left(\frac{23}{30}be^{-2} - y_{3,0} + \frac{4}{3}be^{-2} + y_{3,0} - \frac{21}{10}be^{-2}\right) \equiv 0$$

значит

$$L\pi_6(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow \pi_6(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}\right).$$

Аналогично, из теоремы 2.2 следует существование и единственность решений задач (11)-(13) при любых значения k. А также асимптотические оценки для решений задач (11)-(13):

$$\pi_{3k+1}(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \pi_{3k+2}(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \pi_{3k}(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}\right),\ t \to \tilde{\mu},\ \tilde{\mu} \to +\infty$$

или

$$\pi_{3k+1}(t)\Big|_{t=\tilde{\mu}} = O\left(\mu^2\right),\ \ \pi_{3k+2}(t)\Big|_{t=\tilde{\mu}} = O\left(\mu\right),\ \pi_{3k}(t)\Big|_{t=\tilde{\mu}} = O\left(\mu^3\right).$$

Причем, $\pi_k(t) = O(\sqrt{t^k}),\ t \to 0, k = 0,1,...$

Отсюда следует ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\tilde{\mu}]$.

Теперь докажем, что ряд (7) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим усеченный ряд

$$y(x) = \sum_{k=0}^{3n} \mu^k Y_k(x) + \sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k \pi_k(t) + R_n(x,\varepsilon). \tag{23}$$

Подставляя (23) в задачу (1)-(2) и учитывая значения $Y_k(x), \pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon R_n''(x,\varepsilon) + \sqrt{x} R_n'(x,\varepsilon) - R_n(x,\varepsilon) = \mu^{3(n+1)}(\pi_{3(n+1)}(t) - y_{3n,r}(x)),$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0,\ R_n(1,\varepsilon)=0.$$

Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right| \le \varepsilon^{n+1} C \max_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le t\le\tilde{\mu}}} \left|\pi_{3(n+1)}(t) - y_{3n,r}(x)\right|.$$

Отсюда следует, что $R_n(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$.

Справедлива

Теорема 2.3. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k Y_k(x) + \sum_{k=0}^{3(n+1)} \mu^k \pi_k(t) + O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0.$$

§2.2. Случай особой точки степени две третьей

2.2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt[3]{x^2}\,y'(x)-y(x)=0,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b. \tag{2}$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

2.2.2. Метод классического малого параметра

Посмотрим структуру внешнего решения задачи (1)-(2), для этого внешнее решение ищем в виде

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots \tag{3}$$

После подстановки ряда (3) в уравнение (1) и выравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε, а также учитывая граничное условие $y(1)=b$, получаем следующие задачи:

$$\sqrt[3]{x^2}\,y_0'(x)-y_0(x)=0,\qquad y_0(1)=b,$$

$$\sqrt[3]{x^2}\,y_k'(x)-y_k(x)=-y_{k-1}''(x)\qquad y_k(1)=0,\ k=1,2,\ldots$$

Отсюда, определяем неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)},$$

$$y_k(x)=-e^{3\sqrt[3]{x}}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}}\frac{y_{k-1}''(s)}{\sqrt[3]{s^2}}ds,\ k\in\mathrm{N}.$$

При $x\to 0$ для $y_0(x)$ имеем:

$$y_0(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}=O(1),\ x\to 0,$$

$$y_0'(x)=\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}e^{3(\sqrt[3]{x}-1)}=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right),\ x\to 0,$$

$$y_0''(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right),\ x\to 0.$$

Аналогично, при $x \to 0$ для $y_1(x)$ и $y_2(x)$ получаем:

$$y_1(x) = -e^{3\sqrt[3]{x}} \int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}} \frac{y_0''(s)}{\sqrt[3]{s^2}} ds = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right), x \to 0,$$

$$y_1'(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}\right), x \to 0,$$

$$y_1''(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{10}}}\right),\ x \to 0,$$

$$y_2(x) = -e^{3\sqrt[3]{x}} \int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}} \frac{y_1''(s)}{\sqrt[3]{s^2}} ds = O\left(\frac{1}{x^3}\right),\ x \to 0,$$

$$y_2'(x) = O\left(\frac{1}{x^4}\right), x \to 0, \quad y_2''(x) = O\left(\frac{1}{x^5}\right),\ x \to 0.$$

Методом математической индукции докажем, что

$$y_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{5(n-1)+4}}}\right), x \to 0,\ \forall n \in N.$$

Действительно, при n=1 верно:

$$y_1(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right), x \to 0.$$

Пусть при n=k справедливо соотношение

$$y_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{5(k-1)+4}}}\right), x \to 0,$$

тогда при n=k+1 имеем

$$y_{k+1}(x) = -e^{3\sqrt[3]{x}} \int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}} \frac{y_k''(s)}{3\sqrt[3]{s^2}} ds = -e^{3\sqrt[3]{x}} \int_1^x \frac{\tilde{y}_k(s)}{\sqrt[3]{s^2}\sqrt[3]{s^{5(k-1)+10}}} ds =$$

$$= -e^{3\sqrt[3]{x}} \int_1^x \frac{\tilde{y}_k(s)}{\sqrt[3]{s^{5(k-1)+12}}} ds = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{s^{5k+4}}}\right), \quad x \to 0.$$

Следовательно, ряд (3) представимо в виде

$$y(x) \sim y_0(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^4}}\left[y_1^{(0)} + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^5}}\right) y_2^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^5}}\right)^{n-1} y_n^{(0)} + \ldots\right], \quad x \to 0, \ (4)$$

где $y_k^{(0)}$ – некоторые постоянные.

Очевидно, что ряд (3) или (4) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega(\varepsilon)=\left[\varepsilon^{\gamma},1\right]$, где $0<\gamma<\dfrac{3}{5}$. Таким образом, получим формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.4. Внешнее решение (3) задачи (1)-(2) представляется в виде асимптотического ряда (4) на отрезке $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$\left|y(x)-A_{3nx}y(x)\right|\le M\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^4}}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^5}}\right)^n\le M\sqrt[5]{\varepsilon}\sqrt[3]{\varepsilon^{5n\gamma_1}},$$

где $A_{3nx}y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+...+\varepsilon^n y_n(x),\quad \gamma+\gamma_1=\dfrac{3}{5}.$

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$\sqrt[3]{x^2}\,y'(x)-y(x)=-\varepsilon y''(x).$$

Решая это уравнение с начальным условием $y(1)=b$ получим

$$y(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}-\varepsilon\int_1^x e^{3\sqrt[3]{x}}e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}y''(s)ds.$$

Дважды интегрируя по частям интегральный член, имеем

$$\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}y''(s)ds=\begin{vmatrix}u=e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}\\ dv=y''(s)ds\end{vmatrix}=$$

$$=s^{-2/3}e^{-3\sqrt[3]{s}}y'(s)\Big|_1^x-\int_1^x\left(e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}\right)'y'(s)ds=$$

$$=\left[s^{-2/3}e^{-3\sqrt[3]{s}}y'(s)-\left(e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}\right)'y(s)\right]\Bigg|_1^x+\int_1^x\left(e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}\right)''y(s)ds=$$

$$=x^{-2/3}e^{-3\sqrt[3]{x}}y'(x)-e^{-3}y'(1)+x^{-4/3}e^{-3\sqrt[3]{x}}y(x)+\frac{2}{3}e^{-3\sqrt[3]{x}}x^{-5/3}y(x)-\frac{5}{3}e^{-3}b+$$

$$+\int_1^x\left(e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}\right)''y(s)ds$$

учитывая это выражение, для $y(x)$ получаем:

$$\begin{gathered}y(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}-\varepsilon\int_1^x e^{3\sqrt[3]{x}}e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}y''(s)ds=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}-\\ -\varepsilon x^{-2/3}y'(x)+\varepsilon e^{3\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}y'(1)-\varepsilon x^{-4/3}y(x)-\frac{2\varepsilon}{3}x^{-5/3}y(x)+\frac{5}{3}\varepsilon e^{3\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}b-\\ -\varepsilon e^{3\sqrt[3]{x}}\int_1^x\left(e^{-3\sqrt[3]{s}}s^{-2/3}\right)''y(s)ds.\end{gathered}\tag{5}$$

Рассмотрим класс функций S_x на отрезке $[x,1]$ удовлетворяющих условию

$$\left|y(x)\right| \le l, \left|y'(x)\right| \le lx^{-2/3}\left|y(x)\right|, \left|y''(x)\right| \le lx^{-5/3}\left|y(x)\right|$$

тогда в этом классе S_x, оценивая уравнение (5) имеем

$$\left|y(x)\right| \le l_1 + l_2\varepsilon x^{-5/3} + l_3\varepsilon x^{-5/3}\left|y(x)\right|$$

теперь рассмотрим мажорантное уравнение

$$z\left(x\right) = l_1 + l_2\varepsilon x^{-5/3} + l_4\varepsilon x^{-5/3}z(x)$$

решение этого уравнения можно представить в виде

$$z(x) = l_1 + l_2\varepsilon x^{-5/3} + \alpha_2\left(\varepsilon x^{-5/3}\right)^2 + \ldots + \alpha_m\left(\varepsilon x^{-5/3}\right)^m + \ldots \tag{6}$$

этот ряд является асимптотическим на отрезке $(\varepsilon^{\beta},1]$, где $0 < \beta < 3/5$.

Ряд (6) мажорирует внешнее решение (3).

Чтобы построить равномерно пригодное решение задачи (1)-(2) на отрезке [0,1] применяем метод обобщенных пограничных функций.

2.2.3. Обобщенный метод пограничных функций

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$y(x) = Y_0(x) + \pi_0(t) + \mu(Y_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^k(Y_k(x) + \pi_k(t)) + \ldots, \tag{7}$$

где $t = \dfrac{x}{\mu^3}$, $\varepsilon = \mu^5$.

Подставляя (7) в (1) имеем

$$\begin{gathered}\mu^5\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y''_k(x) + \frac{1}{\mu^6}\pi''_k(t)\right) + \sqrt[3]{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k Y'_k(x) + \mu^2\sqrt[3]{t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-3}\pi'_k(t) - \\ -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y_k(x) + \pi_k(t)\right) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Для $Y_k(x)$ получаем рекуррентное соотношение:

$$Y''_{k-5}(x) + \sqrt[3]{x^2}Y'_k(x) - Y_k(x) = 0, Y_s(x) \equiv 0, s < 0, k = 0,1,\ldots$$

с краевым условием

$$Y_0(1)=b, Y_k(1)=0,\ k=1,2,...$$

Отсюда для $Y_0(x)$ имеем:

$$\sqrt[3]{x^2}Y'_0(x)-Y_0(x)=0,\ Y_0(1)=b,$$

поэтому

$$Y_0(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

Функцию $Y_0(x)$ можно представить в виде:

$$Y_0(x)=be^{-3}\left(1+3\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^2+\frac{1}{3!}3^3x+\frac{1}{4!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^5+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6!}3^6x^2+...+\frac{1}{k!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^k+...\right),$$

отсюда находим

$$Y_0'(x)=be^{-3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x}+\frac{27}{8}\sqrt[3]{x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{81}{40}x+...+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(k-1)!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^{k-1}+...\right),$$

$$Y_0''(x)=\tilde{Y}_0(x)+Y_{0,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_0(x)=be^{-3}\left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{9}{4\sqrt[3]{x}}\right),$$

$$Y_{0,r}(x)=be^{-3}\left(\frac{81}{40}+\frac{9}{20}\left(3\sqrt[3]{x}\right)+...+\frac{81}{(k-1)(k-2)(k-4)(k-5)}\frac{1}{(k-6)!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^{k-6}+...\right).$$

Неизвестные функций $Y_s(x)$, $s\neq 5k$, s, $k\in$N определим из задачи

$$\sqrt[3]{x^2}Y'_s(x)-Y_s(x)=0,\ 0<x<1,\quad Y_s(1)=0,\ s\neq 5k,\ \ s,k\in N,$$

тогда имеем $Y_s(x)\equiv 0$.

Неизвестную функцию $Y_5(x)$ определим из уравнения

$$\sqrt[3]{x^2}Y'_5(x)-Y_5(x)=-Y_{0,r}(x),\ 0<x<1,$$

с краевым условием $Y_5(1)=0$.

Решение этой задачи представимо в виде

$$Y_5(x) = -e^{3\sqrt[3]{x}} \int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}} \frac{Y_{0,r}(s)}{\sqrt[3]{s^2}} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_{5,k}}{k!} \left(3\sqrt[3]{x}\right)^k, Y_{5,k} - const\,,$$

отсюда

$$Y''_5(x) = \tilde{Y}_5(x) + Y_{5,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_5(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} Y_{5,1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} Y_{5,2} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} Y_{5,4} + \frac{9}{4\sqrt[3]{x}} Y_{5,5},$$

$$Y_{5,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{5,k}}{k!} \left(3\sqrt[3]{x}\right)^k, \tilde{c}_{5,k} - const.$$

Неизвестные коэффициенты $Y_{5,k}$ можно вычислить методом неопределенных коэффициентов.

Действительно, пусть $Y_5(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_{5,k}}{k!} \left(3\sqrt{x}\right)^k$, где $Y_{5,k}$ – неизвестные коэффициенты. Тогда

$$Y_5'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_{5,k+1}}{k!} \left(3\sqrt{x}\right)^k,$$

подставляя этот ряд в соотношение

$$\sqrt[3]{x^2}\, Y'_5(x) - Y_5(x) = -be^{-3} \left(\frac{81}{40} + \ldots + \frac{81}{(k-1)(k-2)(k-4)(k-5)} \frac{1}{(k-6)!} \left(3\sqrt[3]{x}\right)^{k-6} + \ldots \right)$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_{5,k+1} - Y_{5,k}}{k!} \left(3\sqrt{x}\right)^k = -be^{-3} \left(\frac{81}{40} + \ldots + \frac{81}{(k-1)(k-2)(k-4)(k-5)} \frac{1}{(k-6)!} \left(3\sqrt[3]{x}\right)^{k-6} + \ldots \right).$$

Отсюда

$$Y_{5,1} = Y_{5,0} - \frac{81}{40} be^{-3},$$

$$Y_{5,2} = Y_{5,1} - \frac{9b}{20} e^{-3} = Y_{5,0} - \frac{99}{40} be^{-3},$$

$$Y_{5,3} = Y_{5,2} - \frac{9b}{56} e^{-3} = Y_{5,0} - \frac{361}{140} be^{-3},$$

$$Y_{5,4}=Y_{5,3}-\frac{81b}{1120}e^{-3}=Y_{5,0}-\frac{2969}{1120}be^{-3},$$

$$Y_{5,5}=Y_{5,4}-\frac{3b}{80}e^{-3}=Y_{5,0}-\frac{3011}{1120}be^{-3},$$

...

Аналогично, $Y_{10}(x)$ определим из задачи

$$\sqrt[3]{x^2}Y'_{10}(x)-Y_{10}(x)=-Y_{5,r}(x),\ 0<x<1,\ Y_{10}(1)=0,$$

тогда

$$Y_{10}(x)=-e^{3\sqrt[3]{x}}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}}\frac{Y_{5,r}(s)}{\sqrt[3]{s^2}}ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y_{10,k}}{k!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^k, Y_{10,k}-const.$$

Поэтому

$$Y''_{10}(x)=\tilde{Y}_{10}(x)+Y_{10,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_{10}(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}Y_{10,1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}Y_{10,2}+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}Y_{10,4}+\frac{9}{4\sqrt[3]{x}}Y_{10,5},$$

$$Y_{10,r}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{10,k}}{k!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^k, \tilde{c}_{10,k}-const.$$

Продолжая аналогичный процесс, $Y_{5k}(x)$, k=3,4,… определим из уравнения

$$\sqrt[3]{x^2}Y'_{5k}(x)-Y_{5k}(x)=-Y_{5(k-1),r}(x),\ 0<x<1,\ Y_{5k}(1)=0,$$

отсюда, получаем

$$Y_{5k}(x)=-e^{3\sqrt[3]{x}}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s}}\frac{Y_{5(k-1),r}(s)}{\sqrt[3]{s^2}}ds=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{Y_{5k,j}}{j!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^j, Y_{5k,j}-const.$$

Функцию $Y''_{5k}(x)$ можно представить в виде

$$Y''_{5k}(x)=\tilde{Y}_{5k}(x)+Y_{5k,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_{5k}(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}Y_{5k,1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}Y_{5k,2}+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}Y_{5k,4}+\frac{9}{4\sqrt[3]{x}}Y_{5k,5},$$

$$Y_{5k,r}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{5k,j}}{j!}\left(3\sqrt[3]{x}\right)^j, \tilde{c}_{5k,j}-const.$$

При таком определении функций $Y_k(x)$, (k=0,1,…,n) равенство (8) примет вид:

$$\mu^5\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{5k}\left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}Y_{5k,1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}Y_{5k,2}+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}Y_{5k,4}+\frac{9}{4\sqrt[3]{x}}Y_{5k,5}\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}(\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_k'(t)-\mu\pi_k(t))=0,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{5k}\left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}Y_{5k,1}-\mu\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}Y_{5k,2}+\mu^3\frac{3}{2\sqrt[3]{t^2}}Y_{5k,4}+\mu^4\frac{9}{4\sqrt[3]{t}}Y_{5k,5}\right)+$$
$$+\frac{\pi_0''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_0'(t)}{\mu}+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\pi_{k+1}''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_{k+1}'(t)-\pi_k(t))=0. \tag{9}$$

Пусть

$$\Pi_k(t,\mu)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}Y_{5k,1}-\mu\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}Y_{5k,2}+\mu^3\frac{3}{2\sqrt[3]{t^2}}Y_{5k,4}+\mu^4\frac{9}{4\sqrt[3]{t}}Y_{5k,5}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}\left(-\frac{2}{3}Y_{5k,1}-\left(\mu\sqrt[3]{t}\right)Y_{5k,2}+\left(\mu\sqrt[3]{t}\right)^3\frac{3}{2}Y_{5k,4}+\left(\mu\sqrt[3]{t}\right)^4\frac{9}{4}Y_{5k,5}\right).$$

Заметим, что при $t\to\mu^{-3},\mu\to 0$ (t→0)

$$\Pi_k(t,\mu)=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}\right).$$

Отсюда, учитывая граничное условие (2), из (9) имеем

$$L\pi_0:=\pi_0''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_0'(t)=0,\ 0<t<\tilde{\mu},\pi_0(0)=a-Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu})=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu^3, \tag{10}$$

$$L\pi_{5k+1}=\pi_{5k}(t)+\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}Y_{5k,1},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_k(0)=0,\ \pi_k(\tilde{\mu})=0,k=0,1,... \tag{11}$$

$$L\pi_{5k+2}=\pi_{5k+1}(t)+\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}Y_{5k,2},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_{5k+2}(0)=0,\ \pi_{5k+2}(\tilde{\mu})=0, \tag{12}$$

$$L\pi_{5k+3}=\pi_{5k+2}(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_{5k+3}(0)=0,\ \pi_{5k+3}(\tilde{\mu})=0, \tag{13}$$

$$L\pi_{5k+4}=\pi_{5k+3}(t)-\frac{3}{2\sqrt[3]{t^2}}Y_{5k,4},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_{5k+4}(0)=0,\ \pi_{5k+4}(\tilde{\mu})=0, \tag{14}$$

$$L\pi_{5k}=\pi_{5k-1}(t)-\frac{9}{4\sqrt[3]{t}}Y_{5k,5},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_{5k}(0)=-Y_{5k}(0),\ \pi_{5k}(\tilde{\mu})=0,k=1,2,... \tag{15}$$

Решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi_0''(t)+\sqrt[3]{t^2}\,\pi_0'(t)=0\Rightarrow\left(\pi_0'(t)e^{\frac{3}{5}t^{5/3}}\right)'=0\Rightarrow\pi_0'(t)e^{\frac{3}{5}t^{5/3}}=c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi_0'(t)=c_1e^{-\frac{3}{5}t^{5/3}}\Rightarrow\pi_0(t)=c_2-c_1\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds\,.$$

Учитывая граничные условия $\pi_0(0)=a-Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu})=0,$

находим значения c_1 и c_2:

$\pi_0(\tilde{\mu})=c_2=0\Rightarrow c_2=0;$

$$\pi_0(0)=-c_1\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds=a-Y_0(0)\Rightarrow c_1=\left(Y_0(0)-a\right)A,\ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\pi_0(t)=(a-be^{-3})A\int\limits_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds,\ A=\left(\int\limits_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds\right)^{-1}.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int\limits_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds,t\to\tilde{\mu}$$

получим

$$\int\limits_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}e^{-\frac{3}{5}t^{5/3}}\left(1-\frac{2}{3}t^{-\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3}t^{-\frac{10}{3}}+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{2\cdot7\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{3^n}t^{-\frac{5n}{3}}+\ldots\right),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Это означает, что функция $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$.

При решении уравнения $L\pi_0(t)=0$ мы заметили, что оно имеет двух линейно независимых решений: 1 и $\int\limits_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds$. Не нарушая общности линейно независимых решений уравнения $Lz(t)$=0 можно представить в виде

$$Y(t)=1-X(t),\ X(t)=A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds=1.$$

Линейную независимость можно показать с помощью Якобиана:

$$J(X(t),Y(t)) = X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t) = Ae^{-\frac{3}{5}t^{5/3}} \neq 0,\ t \in [0,\tilde{\mu}].$$

Причина такого выбора линейно независимых решений является соотношения:

$$X(0)=1, Y(0)=0, X(\tilde{\mu})=0, Y(\tilde{\mu})=1 \ .$$

Которые понадобятся при построении функции Грина.

Так как $X(t) = 1 - At + o(t), \quad t \to 0 \Rightarrow Y(t) = O(t), \quad t \to 0.$

Поэтому общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид $z(t)=c_1\mathrm{Y}(t)+c_2\mathrm{X}(t)$, c_1, c_2 – const. Отсюда вытекают леммы.

Лемма 2.2. Краевая задача $Lz(t)=0$, $z(0)=z(\tilde{\mu})=0$ имеет только нулевое решение.

Теорема 2.5. Задача

$$Lz(t) = f(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ z(0)=0,\ z(\tilde{\mu})=0,$$

имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$z(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s) e^{\frac{3}{5}s^{5/3}} f(s)ds\,,$$

где $G(t,s)$ – функция Грина,

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)X(s),\ 0 \le t \le s, \\ -Y(s)X(t),\ s \le t \le \tilde{\mu}, \end{cases} \tag{16}$$

$f(t) \in C(0,\tilde{\mu}],\ f(t) = O(t^{-\gamma}), t \to 0,\ \gamma < 2;\ f(t) = O(t^{-\beta}), t \to \tilde{\mu},\ \frac{1}{3} < \beta$.

Доказательство. Решение $z(t)$ запишем в виде

$$z(t) = J_1(t) + J_2(t)\,,$$

где $J_1(t) = -X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{3}{5}s^{5/3}} f(s)ds,\ J_2(t) = Y(t)\int_t^{\tilde{\mu}} X(s)e^{\frac{3}{5}s^{5/3}} f(s)ds.$

Покажем, что функции $J_1(t)$ и $J_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям. Так как $X(\tilde{\mu})\equiv0$, и $\mathrm{Y}(0)\equiv0$, поэтому достаточно доказать, что

$$J_1(t) \to 0,\ t \to 0 \text{ и } J_2(t) \to 0,\ t \to \tilde{\mu}.$$

1) Рассмотрим функцию $J_1(t)$:

При $t \to 0$ имеем $|Y(t)| \le ct,\ |f(t)| \le ct^{-\gamma}$ поэтому

$$|J_1(t)| \le c\int_0^t s^{1-\gamma} e^{\frac{3}{5}s^{5/3}}\,ds \le ct^{2-\gamma} \to 0,\ t \to 0.$$

2) Теперь рассмотрим $J_2(t)$ при $t \to \tilde{\mu}$:

$$|J_2(t)| \le c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-\frac{2}{3}-\beta} e^{\frac{3}{5}s^{5/3}-\frac{3}{5}s^{5/3}}\,ds = c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-\frac{2}{3}-\beta}\,ds = O(t^{1-\frac{2}{3}-\beta}) = O\left(\frac{1}{t^{\beta-\frac{1}{3}}}\right),\ t \to \tilde{\mu},\ \frac{1}{3} < \beta.$$

Поэтому решение $z(t)$ удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнение $Lz(t) = f(t)$ при $0<t<\tilde{\mu}$ получаем тождество. Теорема доказана.

Из соотношения (11) при k=0 имеем

$$L\pi_1 = \pi_0(t) + \frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}Y_{0,1},\ 0 < t < \tilde{\mu},\ \pi_1(0) = 0,\ \pi_1(\tilde{\mu}) = 0. \tag{17}$$

Решение задачи (17) представимо в виде

$$\pi_1(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s) e^{\frac{3}{5}s^{5/3}} \left(\pi_0(\mathrm{s}) + \frac{Y_{0,1}}{3\sqrt[3]{s^5}}\right) ds, \tag{18}$$

где $G(t,s)$ функция Грина (16).

Интегрируя по частям интегральное выражение (18) имеем:

$$\pi_1(t) = -\frac{Y_{0,1}}{\sqrt[3]{t^4}}\left(\frac{1}{2} + \frac{14}{9\sqrt[3]{t^5}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{10}}}\right)\right),\ t \to \tilde{\mu}. \tag{19}$$

Аналогично, из соотношения (12) при k=0 имеем

$$L\pi_2 = \pi_1(t) + \frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}Y_{0,2},\ 0 < t < \tilde{\mu},\ \pi_2(0) = 0,\ \pi_2(\tilde{\mu}) = 0. \tag{20}$$

Решение задачи (20) представимо в виде

$$\pi_2(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s) e^{\frac{3}{5}s^{5/3}} \left(\pi_1(\mathrm{s}) + \frac{1}{\sqrt[3]{s^4}}Y_{0,2}\right) ds \tag{21}$$

где $G(t,s)$ функция Грина (16).

Интегрируя по частям интегральное выражение (21) учитывая разложение (19), имеем:

$$\pi_2(t)=\left(\frac{1}{2}Y_{0,1}-Y_{0,2}\right)\frac{1}{t}+\left(\frac{23}{24}Y_{0,1}-\frac{3}{4}Y_{0,2}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{t^8}}+O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{13}}}\right).$$

Так как $Y_{0,1}=Y_{0,2}=Y_{0,4}=Y_{0,5}=be^{-3}$, то

$$\pi_2(t)=-\frac{1}{2t}Y_{0,1}+\frac{5}{24\sqrt[3]{t^8}}Y_{0,1}+O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{13}}}\right). \quad (22)$$

Из соотношения (13) при k=0 имеем

$$L\pi_3=\pi_2(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_3(0)=0,\ \pi_3(\tilde{\mu})=0. \quad (23)$$

Решение задачи (23) представимо в виде

$$\pi_3(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{3}{5}s^{5/3}}\pi_2(\mathrm{s})ds, \quad (24)$$

где $G(t,s)$ функция Грина (16).

Интегрируя по частям интегральное выражение (24) учитывая разложение (22), имеем:

$$\pi_3(t)=\frac{3}{4\sqrt[3]{t^2}}Y_{0,1}+\frac{15}{56\sqrt[3]{t^7}}Y_{0,1}+O\left(\frac{1}{t^4}\right). \quad (25)$$

Из соотношения (14) при k=0 имеем

$$L\pi_4=\pi_3(t)-\frac{3}{2\sqrt[3]{t^2}}Y_{0,4},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_4(0)=0,\ \pi_4(\tilde{\mu})=0. \quad (26)$$

Решение задачи (26) представимо в виде

$$\pi_4(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{3}{5}s^{5/3}}\left(\pi_3(s)-\frac{3}{2\sqrt[3]{s^2}}Y_{0,4}\right)ds, \quad (27)$$

где $G(t,s)$ функция Грина (16).

Интегрируя по частям интегральное выражение (27) учитывая разложение (25) и $Y_{0,1}$= $Y_{0,4}$, имеем:

$$\pi_4(t)=\frac{9}{4\sqrt[3]{t}}Y_{0,1}+\frac{41}{112t^2}Y_{0,1}+O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{11}}}\right). \quad (28)$$

Из соотношения (15) при k=1 имеем

$$L\pi_5=\pi_4(t)-\frac{9}{4\sqrt[3]{t}}Y_{0,5},\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_5(0)=-Y_0(0),\ \pi_5(\tilde{\mu})=0.$$

Здесь следует отметить, что правая часть:

$$\pi_4(t)-\frac{9}{4\sqrt[3]{t}}Y_{0,5}\neq O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Решение этой задачи представимо в виде

$$\pi_5(t)=-Y_0(0)X(t)+\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{3}{5}s^{5/3}}\left(\pi_4(s)-\frac{9}{4\sqrt[3]{s}}Y_{0,5}\right)ds, \tag{29}$$

где $G(t,s)$ функция Грина (16).

Интегрируя по частям интегральное выражение (29) учитывая разложение (28) и $Y_{0,1}=Y_{0,5}$, имеем:

$$\pi_5(t)=-\frac{123}{560\sqrt[3]{t^5}}Y_{0,1}+O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{10}}}\right),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Из теоремы 2.5 следует существование и единственность решений задач (11)-(15). А также асимптотические оценки для решений задач (11)-(15):

$$\pi_{5k+1}(t)=O\left(t^{-\frac{4}{3}}\right),\ \pi_{5k+2}(t)=O\left(t^{-1}\right),\pi_{5k+3}(t)=O\left(t^{-\frac{2}{3}}\right),$$

$$\pi_{5k+4}(t)=O\left(t^{-\frac{1}{3}}\right),\pi_{5k+5}(t)=O\left(t^{-\frac{5}{3}}\right),\ k=0,1,2,...$$

Кроме того,

$$\pi_{5k+1}(t)=O\left(\sqrt[3]{t}\right),\ \pi_{5k+2}(t)=O\left(\sqrt[3]{t^2}\right),\ \pi_{5k+3}(t)=O\left(t\right),t\to 0,$$

$$\pi_{5k+4}(t)=O\left(\sqrt[3]{t^4}\right),\pi_{5k+5}(t)=O\left(\sqrt[3]{t^5}\right),\ t\to 0,k=0,1,2,...$$

Таким образом, мы доказали ограниченность $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\ \tilde{\mu}]$.

Теперь докажем, что ряд (7) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим усеченный ряд

$$y(x)=\sum_{k=0}^{5n}\mu^k Y_k(x)+\sum_{k=0}^{5(n+1)}\mu^k\pi_k(t)+R_n(x,\varepsilon). \tag{30}$$

Подставляя (30) в задачу (1)-(2) и учитывая значения $Y_k(x),\ \pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon R_n''(x,\varepsilon)+\sqrt[3]{x^2}R_n'(x,\varepsilon)-R_n(x,\varepsilon)=\mu^{5(n+1)}(\pi_{5(n+1)}(t)-Y_{5n,r}(x)),$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0,\ R_n(1,\varepsilon)=0.$$

Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right| \le \varepsilon^{n+1} c \max_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le t\le \tilde{\mu}}} \left|\pi_{5(n+1)}(t) - Y_{5n,r}(x)\right|.$$

Отсюда следует, что $R_n(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$.

Оценку для остаточной функций $R_n(x,\varepsilon)$ можно получить и с помощью интегрального уравнения относительно $R_n(x,\varepsilon)$.

Справедлива

Теорема 2.6. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(Y_k(x) + \pi_k(t)\right),\ \varepsilon\to 0.$$

§ 2.3. Случай особой точки степени $\alpha = \dfrac{m}{m+1}$

2.3.1. Постановка задачи

$$\varepsilon y''(x) + x^{\alpha} y'(x) - y(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b, \tag{2}$$

где $\alpha = \dfrac{m}{m+1}, m$ – фиксированное натуральное число.

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon \to 0$.

2.3.2. Метод классического малого параметра

Внешнее решение задачи (1)-(2) ищем в виде

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots\ . \tag{3}$$

После подстановки ряда (3) в уравнение (1) и выравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε, учитывая граничное условие $y(1)=b$, получаем следующие задачи:

$$x^{\alpha} y_0'(x) - y_0(x) = 0, \qquad y_0(1) = b,$$

$$x^{\alpha} y_k'(x) - y_k(x) = -y_{k-1}''(x), \qquad y_k(1) = 0,\ k=1,2,\dots$$

Отсюда, определяем неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x) = be^{(x^{\beta}-1)/\beta},$$

$$y_k(x) = -e^{\frac{1}{\beta}x^{\beta}} \int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} \frac{y_{k-1}''(s)}{s^{\alpha}} ds,\ k\in\mathrm{N},$$

где $\beta = 1-\alpha = \dfrac{1}{m+1},\ \dfrac{1}{\beta} = m+1$.

При $x \to 0$ имеем

$$y_0(x) = be^{\frac{1}{\beta}(x^{\beta}-1)} = O(1),\ x \to 0,$$

$$y_0'(x)=bx^{\beta-1}e^{\frac{1}{\beta}(x^\beta-1)}=O(x^{\beta-1})=O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x\to 0,$$

$$y_0''(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+\alpha}}\right),\ x\to 0\,,$$

$$y_1(x)=-e^{\frac{1}{\beta}x^\beta}\int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^\beta}\frac{y_0''(s)}{s^\alpha}ds=O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right),x\to 0\,,$$

$$y_1'(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+2\alpha}}\right),x\to 0,$$

$$y_1''(x)=O\left(\frac{1}{x^{2+2\alpha}}\right),x\to 0\,,$$

$$y_2(x)=-e^{\frac{1}{\beta}x^\beta}\int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^\beta}\frac{y_1''(s)}{s^\alpha}ds=O\left(\frac{1}{x^{1+3\alpha}}\right),x\to 0\,,$$

$$y_2'(x)=O\left(\frac{1}{x^{2+3\alpha}}\right),x\to 0\,,\quad y_2''(x)=O\left(\frac{1}{x^{3+3\alpha}}\right),x\to 0.$$

Методом математической индукции докажем, что

$$y_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{(n-1)(\alpha+1)+2\alpha}}\right),\ \ x\to 0,\ \forall n\in N\,.$$

Действительно, при n=1 верно:

$$y_1(x)=O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right),\ \ x\to 0\,.$$

Пусть при n=k справедливо соотношение

$$y_k(x)=O\left(\frac{1}{x^{(\mathrm{k}-1)(\alpha+1)+2\alpha}}\right),\ \ x\to 0\,,$$

тогда при n=k+1 имеем

$$y_{k+1}(x)=-e^{\frac{1}{\beta}x^\beta}\int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^\beta}\frac{y_k''(s)}{s^\alpha}ds=-e^{\frac{1}{\beta}x^\beta}\int_1^x\frac{\tilde{y}_k(s)}{s^\alpha s^{2\alpha+(k-1)(\alpha+1)+2}}ds=$$

$$=-e^{\frac{1}{\beta}x^\beta}\int_1^x\frac{\tilde{y}_k(s)}{s^{2\alpha+(k-1)(\alpha+1)+(\alpha+1)+1}}ds=O\left(\frac{1}{x^{k(\alpha+1)+2\alpha}}\right),\ \ x\to 0.$$

Следовательно, ряд (3) представимо в виде

$$y(x) \sim y_0\left(x\right) + \frac{\varepsilon}{x^{2\alpha}}\left[y_1^{(0)} + \left(\frac{\varepsilon}{x^{1+\alpha}}\right)y_2^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{x^{1+\alpha}}\right)^{n-1} y_n^{(0)} + \ldots\right], \quad x \to 0, \qquad (4)$$

где $y_k^{(0)}$ – некоторые постоянные.

Очевидно, что ряд (3) или (4) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega\left(\varepsilon\right) = \left[\varepsilon^{\gamma}, 1\right]$, где $0 < \gamma < \frac{1}{1+\alpha} = \frac{m+1}{2m+1}$. Таким образом, получим формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.7. Внешнее решение (3) задачи (1)-(2) представляется в виде асимптотического ряда (4) на отрезке $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$\left|y\left(x\right) - A_{nx}y\left(x\right)\right| \le M\frac{\varepsilon}{x^{2\alpha}}\left(\frac{\varepsilon}{x^{1+\alpha}}\right)^n \le M\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\varepsilon^{(1+\alpha)\gamma_1 n} = M\varepsilon^{\frac{1}{2m+1}}\varepsilon^{(1+\alpha)\gamma_1 n},$$

где $A_{nx}y\left(x\right) = y_0\left(x\right) + \varepsilon y_1\left(x\right) + \ldots + \varepsilon^n y_n\left(x\right), \quad \gamma + \gamma_1 = \frac{1}{1+\alpha}.$

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$x^{\alpha}y'(x) - y(x) = -\varepsilon y''(x).$$

Решая это уравнение с начальным условием $y(1)=b$ получим

$$y(x) = be^{\frac{1}{\beta}\left(x^{\beta}-1\right)} - \varepsilon\int_1^x e^{\frac{1}{\beta}x^{\beta}} e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}y''(s)ds.$$

Дважды интегрируя по частям интегральный член, имеем

$$\int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}y''(s)ds = \begin{vmatrix} u = e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha} \\ dv = y''(s)ds \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}y'(s)\Big|_1^x - \int_1^x \left(e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}\right)' y'(s)ds =$$

$$= \left[e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}y'(s) - \left(e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}\right)' y(s)\right]\Bigg|_1^x + \int_1^x \left(e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha}\right)'' y(s)ds =$$

$$= e^{-\frac{1}{\beta}x^{\beta}} x^{-\alpha}y'(x) - e^{-\frac{1}{\beta}}y'(1) + x^{-2\alpha}e^{-\frac{1}{\beta}x^{\beta}}y(x) + \alpha e^{-\frac{1}{\beta}x^{\beta}}x^{-\alpha-1}y(x) - \left(1+\alpha\right)e^{-\frac{1}{\beta}}b +$$

$$+\int_1^x \left(e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha} \right)'' y(s)ds,$$

учитывая это выражение, для $y(x)$ получаем:

$$y(x) = be^{\frac{1}{\beta}\left(x^{\beta}-1\right)} - \varepsilon\int_1^x e^{\frac{1}{\beta}x^{\beta}} e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha} y''(s)ds = be^{\frac{1}{\beta}\left(x^{\beta}-1\right)} -$$

$$-\varepsilon x^{-\alpha} y'(x) + \varepsilon e^{\frac{1}{\beta}(x^{\beta}-1)} y'(1) - \varepsilon x^{-2\alpha} y(x) - \varepsilon\alpha x^{-\alpha-1} y(x) + \varepsilon\left(1+\alpha\right) e^{\frac{1}{\beta}(x^{\beta}-1)} b -$$

$$-\varepsilon e^{\frac{1}{\beta}x^{\beta}} \int_1^x \left(e^{-\frac{1}{\beta}s^{\beta}} s^{-\alpha} \right)'' y(s)ds.$$

(5)

Рассмотрим класс функций S_x на отрезке $[x,1]$ удовлетворяющих условию

$$\left|y(x)\right| \le l, \left|y'(x)\right| \le lx^{-\alpha}\left|y(x)\right|, \left|y''(x)\right| \le lx^{-(1+\alpha)}\left|y(x)\right|$$

тогда в этом классе S_x, оценивая уравнение (5) имеем

$$\left|y(x)\right| \le l_1 + l_2\varepsilon x^{-(1+\alpha)} + l_3\varepsilon x^{-(1+\alpha)}\left|y(x)\right|$$

теперь рассмотрим мажорантное уравнение

$$z\left(x\right) = l_1 + l_2\varepsilon x^{-(1+\alpha)} + l_4\varepsilon x^{-(1+\alpha)} z(x)$$

решение этого уравнения можно представить в виде

$$z(x) = l_1 + l_2\varepsilon x^{-(1+\alpha)} + \alpha_2\left(\varepsilon x^{-(1+\alpha)}\right)^2 + \ldots + \alpha_m\left(\varepsilon x^{-(1+\alpha)}\right)^m + \ldots \qquad (6)$$

этот ряд является асимптотическим на отрезке $(\varepsilon^{\gamma},1]$, где $0 < \gamma < 1/(1+\alpha)$.

Ряд (6) мажорирует внешнее решение (3).

Равномерно пригодное решение задачи (1)-(2) на отрезке [0,1] ищем методом обобщенных пограничных функций.

2.3.3. Обобщенный метод пограничных функций

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$y(x) = Y_0(x) + \pi_0(t) + \mu(Y_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^k(Y_k(x) + \pi_k(t)) + \ldots, \qquad (7)$$

где $t=\dfrac{x}{\mu^{m+1}}$, $\varepsilon=\mu^{2m+1}$.

Подставляя (7) в (1) имеем

$$\mu^{2m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y''_k(x)+\mu^{-2(m+1)}\pi''_k(t)\right)+x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k Y'_k(x)+t^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\pi'_k(t)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y_k(x)+\pi_k(t)\right)=0. \tag{8}$$

Для $Y_k(x)$ получаем рекуррентное соотношение:

$$Y''_{k-(2m+1)}(x)+x^{\alpha}Y'_k(x)-Y_k(x)=0, Y_s(x)\equiv 0, s<0, k=0,1,...$$

с краевым условием

$$Y_0(1)=b, Y_k(1)=0,\ k=1,2,...$$

Отсюда для $Y_0(x)$ имеем:

$$x^{\alpha}Y'_0(x)-Y_0(x)=0,\ Y_0(1)=b,$$

поэтому

$$Y_0(x)=be^{(x^{\beta}-1)/\beta},\qquad \text{где } \beta=1-\alpha=\frac{1}{m+1},\ \frac{1}{\beta}=m+1.$$

Функцию $Y_0(x)$ можно представить в виде:

$$Y_0(x)=be^{-(m+1)}\left(1+(m+1)x^{\frac{1}{m+1}}+\frac{1}{2!}\left((m+1)x^{\frac{1}{m+1}}\right)^2+...\right.$$
$$\left.+\frac{(m+1)^m}{m!}x+...+\frac{1}{(2(m+1))!}\left((m+1)x^{\frac{1}{m+1}}\right)^{2(m+1)}+...+\frac{1}{k!}\left((m+1)x^{\frac{1}{m+1}}\right)^k+...\right),$$

отсюда находим

$$Y'_0(x)=be^{-(m+1)}\left(x^{-\frac{m}{m+1}}+x^{-\frac{m}{m+1}}\left((m+1)x^{\frac{1}{m+1}}\right)+...+\frac{(m+1)^m}{m!}+\frac{(m+1)^m}{m!}x^{\frac{1}{m+1}}+...\right.$$
$$\left.+2\frac{(m+1)^{2m+2}}{(2m+2)!}x+...+\frac{1}{(n-1)!}x^{-\frac{m}{m+1}}\left((m+1)x^{\frac{1}{m+1}}\right)^{n-1}+...\right),$$

$$Y_0''(x)=be^{-(m+1)}\left(-\frac{m}{m+1}x^{-\frac{2m+1}{m+1}}-(m-1)x^{-\frac{2m}{m+1}}+\ldots+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}x^{-\frac{m}{m+1}}+\ldots\right.$$

$$\left.+2\frac{(m+1)^{2m+2}}{(2m+2)!}+\ldots+\frac{(m+1)^{n-2}(n-1-m)}{(n-1)!}x^{\frac{n-2(m+1)}{m+1}}+\ldots\right)=\tilde{Y}_0(x)+Y_{0,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_0(x)=be^{-(m+1)}\left(-\frac{m}{m+1}x^{-\frac{2m+1}{m+1}}-(m-1)x^{-\frac{2m}{m+1}}+\ldots+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}x^{-\frac{m}{m+1}}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}x^{-\frac{1}{m+1}}\right),$$

$$Y_{0,r}(x)=2\frac{(m+1)^{2m+2}}{(2m+2)!}+\ldots+\frac{(m+1)^{n-1}(n-m)}{n!}x^{\frac{n-2m-1}{m+1}}+\ldots$$

Неизвестные функций $Y_s(x)$, $s\neq(2m+1)k$, s, $k\in\mathrm{N}$ определим из задачи

$$x^{\alpha}Y'_s(x)-Y_s(x)=0,\ 0<x<1,\quad Y_s(1)=0,\ s\neq(2m+1)k,\ \ s,k\in N,$$

тогда имеем $Y_s(x)\equiv 0,\ s\neq(2m+1)k,\ \ s,k\in N.$

Неизвестную функцию $Y_{2m+1}(x)$ определим из уравнения

$$x^{\alpha}Y'_{2m+1}(x)-Y_{2m+1}(x)=Y_{0,r}(x),\ 0<x<1,$$

с краевым условием $Y_{2m+1}(1)=0.$

Решение этой задачи представимо в виде

$$Y_{2m+1}(x)=-e^{\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}}\int_1^x e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}\frac{Y_{0,r}(s)}{x^{\alpha}}ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y_{2m+1,k}}{k!}\left(\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right)^k,Y_{2m+1,k}-const.$$

Функцию $Y''_{2m+1}(x)$ представим в виде

$$Y''_{2m+1}(x)=\tilde{Y}_{2m+1}(x)+Y_{2m+1,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_{2m+1}(x)=-\frac{m}{m+1}x^{-\frac{2m+1}{m+1}}Y_{2m+1,1}-(m-1)x^{-\frac{2m}{m+1}}Y_{2m+1,2}+\ldots+$$

$$\left.+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}x^{-\frac{m}{m+1}}Y_{2m+1,m+2}+\ldots+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}x^{-\frac{1}{m+1}}Y_{2m+1,2m+1}\right),$$

$$Y_{2m+1,r}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{2m+1,k}}{k!}\left(\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right).$$

Аналогично, $Y_{2(2m+1)}(x)$ определим из задачи

$$x^{\alpha}Y'_{2(2m+1)}(x)-Y_{2(2m+1)}(x)=-Y_{2m+1,r}(x),\ 0<x<1,\ Y_{2(2m+1)}(1)=0,$$

тогда

$$Y_{2(2m+1)}(x)=-e^{\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}}\int_1^x e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}\frac{Y_{2m+1,r}(s)}{x^{\alpha}}ds=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y_{2(2m+1),k}}{k!}\left(\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right)^k,$$

$Y_{2(2m+1),k}-const.$

Функцию $Y''_{2(2m+1)}(x)$ представим в виде

$$Y''_{2(2m+1)}(x)=\tilde{Y}_{2(2m+1)}(x)+Y_{2(2m+1),r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_{2(2m+1)}(x)=-\frac{m}{m+1}x^{-\frac{2m+1}{m+1}}Y_{2(2m+1),1}-(m-1)x^{-\frac{2m}{m+1}}Y_{2(2m+1),2}+\ldots+$$
$$\left.+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}x^{-\frac{m}{m+1}}Y_{2(2m+1),m+2}+\ldots+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}x^{-\frac{1}{m+1}}Y_{2(2m+1),2m+1}\right),$$

$$Y_{2(2m+1),r}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{2(2m+1),k}}{k!}\left(\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right),\ \tilde{c}_{2(2m+1),k}-const.$$

Продолжая аналогичный процесс, $Y_{(2m+1)k}(x)$, k=3,4,… определим из уравнения

$$x^{\alpha}Y'_{(2m+1)k}(x)-Y_{(2m+1)k}(x)=-Y_{(2m+1)(k-1),r}(x),\ 0<x<1,\ Y_{(2m+1)k}(1)=0,$$

тогда

$$Y_{(2m+1)k}(x)=-e^{\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}}\int_1^x e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}\frac{Y_{(2m+1)(k-1),r}(s)}{x^{\alpha}}ds=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{Y_{k(2m+1),j}}{j!}\left(\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right)^j,$$

$Y_{k(2m+1),j}-const.$

Функцию $Y''_{k(2m+1)}(x)$ представим в виде

$$Y''_{(2m+1)k}(x)=\tilde{Y}_{(2m+1)k}(x)+Y_{(2m+1)k,r}(x),$$

где

$$\tilde{Y}_{k(2m+1)}(x)=-\frac{m}{m+1}x^{-\frac{2m+1}{m+1}}Y_{k(2m+1),1}-(m-1)x^{-\frac{2m}{m+1}}Y_{k(2m+1),2}+\ldots+$$
$$\left.+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}x^{-\frac{m}{m+1}}Y_{k(2m+1),m+2}+\ldots+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}x^{-\frac{1}{m+1}}Y_{k(2m+1),2m+1}\right),$$

$$Y_{k(2m+1),r}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{k(2m+1),j}}{j!}\left(\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right),\ \tilde{c}_{k(2m+1),j}-const.$$

При таком определении функций $Y_k(x)$, (k=0,1,…,n) равенство (8) примет вид:

$$\mu^{2m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{(2m+1)k}\left(-\frac{m}{m+1}x^{-\frac{2m+1}{m+1}}Y_{k(2m+1),1}-(m-1)x^{-\frac{2m}{m+1}}Y_{k(2m+1),2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}x^{-\frac{m}{m+1}}Y_{k(2m+1),m+2}+\ldots+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}x^{-\frac{1}{m+1}}Y_{k(2m+1),2m+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}(\pi_k''(t)+t^{\alpha}\pi_k'(t)-\mu\pi_k(t))=0.$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{(2m+1)k}\Pi_k(t,\mu)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}(\pi_k''(t)+t^{\alpha}\pi_k'(t)-\mu\pi_k(t))=0, \qquad (9)$$

где

$$\Pi_k(t,\mu)=-\frac{m}{m+1}t^{-\frac{2m+1}{m+1}}Y_{k(2m+1),1}-(m-1)\mu t^{-\frac{2m}{m+1}}Y_{k(2m+1),2}+\ldots$$

$$+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}\mu^{m+1}t^{-\frac{m}{m+1}}Y_{k(2m+1),m+2}+\ldots+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}\mu^{2m}t^{-\frac{1}{m+1}}Y_{k(2m+1),2m+1}=$$

$$=t^{-\frac{2m+1}{m+1}}\left(-\frac{m}{m+1}Y_{k(2m+1),1}-(m-1)\mu t^{\frac{1}{m+1}}Y_{k(2m+1),2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m+1)^{m-1}}{m!}\left(\mu t^{\frac{1}{m+1}}\right)^{m+1}Y_{k(2m+1),m+2}+\ldots+\frac{(m+1)^{2m-1}m}{(2m)!}\left(\mu t^{\frac{1}{m+1}}\right)^{2m}Y_{k(2m+1),2m+1}\right).$$

Заметим, что $\left(\mu t^{\frac{1}{m+1}}\right)\to 1$ когда $t\to\mu^{-(m+1)}$.

Поэтому

$$\Pi_k(t,\mu)=O\left(t^{-\frac{2m+1}{m+1}}\right),\quad t\to\tilde{\mu},\ \text{и}$$

$$\Pi_k(t,\mu)\Big|_{t=\tilde{\mu}}=O\left(\mu^{2m+1}\right),\quad \mu\to 0\ \text{или}$$

$$\Pi_k(t,\mu)=O\left(t^{-\frac{2m+1}{m+1}}\right),\ t\to 0,\ \mu\to 0.$$

Отсюда, учитывая граничное условие (2), из (7) имеем

$$L\pi_0 \equiv \pi_0''(t) + t^{\alpha}\pi_0'(t) = 0, \quad 0 < t < \tilde{\mu}, \quad \pi_0(0) = a - Y_0(0), \quad \pi_0(\tilde{\mu}) = 0, \quad \tilde{\mu} = 1/\mu^{m+1}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} L\pi_{(2m+1)k+1} = \pi_{(2m+1)k}(t) - \Pi_{(2m+1)k}(t,\mu),\ 0 < t < \tilde{\mu}, \\ \pi_{(2m+1)k+1}(0) = \pi_{(2m+1)k+1}(\tilde{\mu}) = 0, k = 0,1,... \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} L\pi_{(2m+1)k+j} = \pi_{(2m+1)k+j-1}(t),\ \ 0 < t < \tilde{\mu}, \\ \pi_{(2m+1)k+j}(0) = \pi_{(2m+1)k+j}(\tilde{\mu}) = 0, \quad j = 2,3,...,2m \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} L\pi_{(2m+1)k} = \pi_{(2m+1)k-1}(t),\ \ 0 < t < \tilde{\mu}, \\ \pi_{(2m+1)k}(0) = -Y_{(2m+1)k}(0),\ \ \pi_{(2m+1)k}(\tilde{\mu}) = 0, \quad k = 1,2,... \end{gathered} \tag{13}$$

Решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi_0''(t) + t^{\alpha}\pi_0'(t) = 0 \Rightarrow \left(\pi_0'(t)e^{\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}}\right)' = 0 \Rightarrow \pi'_0(t)e^{\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}} = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0'(t) = c_1 e^{-\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}} \Rightarrow \pi_0(t) = c_2 - c_1\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds\,.$$

Учитывая граничные условия $\pi_0(0) = a - Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu}) = 0,$

находим значения c_1 и c_2:

$\pi_0(\tilde{\mu}) = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$

$$\pi_0(0) = -c_1\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds = a - Y_0(0) \Rightarrow c_1 = \left(Y_0(0) - a\right)A,\ A = \left(\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\pi_0(t) = (a - be^{-(m+1)})A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds,\ \ A = \left(\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds\right)^{-1}.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds,\ \ t \to \tilde{\mu}$$

получим

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds = \frac{1}{t^{\alpha}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}} + \frac{\alpha(1+2\alpha)}{t^{2(1+\alpha)}} + ... + (-1)^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(k\alpha + k - 1)}{t^{n(1+\alpha)}} + ...\right),\ t \to \tilde{\mu}\,.$$

Это означает, что функция $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t \to \tilde{\mu}$.

При решении уравнения $L\pi_0(t) = 0$ мы заметили, что оно имеет двух линейно независимых решений: 1 и $\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds$. Не нарушая общности линейно независимых решений уравнения

$$Lz(t)=0$$

можно представить в виде

$$Y(t) = 1 - X(t),\ X(t) = A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} ds = 1.$$

Линейную независимость можно показать с помощью Якобиана:

$$J(X(t), Y(t)) = X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t) = Ae^{-\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}} \neq 0,\ t \in [0, \tilde{\mu}].$$

Причина такого выбора линейно независимых решений является соотношения:

$$X(0) = 1, Y(0) = 0, X(\tilde{\mu}) = 0, Y(\tilde{\mu}) = 1\ .$$

Которые понадобятся при построении функции Грина.

Так как

$$X(t) = 1 - At + o(t),\ t \to 0 \Rightarrow Y(t) = O(t),\ t \to 0.$$

Поэтому общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид

$$z(t)=c_1\mathrm{Y}(t)+c_2\mathrm{X}(t),\ c_1,\ c_2 - \text{const}.$$

Отсюда вытекают леммы.

Лемма 2.3. Краевая задача

$$Lz(t)=0,\ z(0)= z(\tilde{\mu}) = 0$$

имеет только нулевое решение.

Теорема 2.8. Задача

$$Lz(t) = f(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ z(0) = 0,\ z(\tilde{\mu}) = 0,$$

имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$z(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} f(s)ds\ ,$$

где $G(t,s)=\begin{cases}-Y(t)X(s),\ 0\le t\le s,\\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le\tilde{\mu},\end{cases}$ – функция Грина, $f(t)\in C(0,\tilde{\mu}]$,

$$f(t)=O(t^{-\gamma}),\ \ t\to 0,\ \gamma<2;\ f(t)=O(t^{-\tilde{\beta}}),\ \ t\to\tilde{\mu},\ \frac{1}{m+1}<\tilde{\beta}.$$

Доказательство. Решение $z(t)$ запишем в виде

$$z(t)=J_1(t)+J_2(t),$$

где $J_1(t)=-X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}f(s)ds,\ J_2(t)=Y(t)\int_t^{\tilde{\mu}}X(s)e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}f(s)ds.$

Покажем, что функции $J_1(t)$ и $J_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям. Так как $X(\tilde{\mu})\equiv 0$, и $Y(0)\equiv 0$, поэтому достаточно доказать, что

$$J_1(t)\to 0,\ t\to 0 \text{ и } J_2(t)\to 0,\ t\to\tilde{\mu}.$$

1) Рассмотрим функцию $J_1(t)$:

При $t\to 0$ имеем $|Y(t)|\le ct,\ |f(t)|\le ct^{-\gamma}$ поэтому

$$|J_1(t)|\le c\int_0^t s^{1-\gamma}e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds\le ct^{2-\gamma}\to 0,t\to 0.$$

2) Теперь рассмотрим $J_2(t)$ при $t\to\tilde{\mu}$:

$$|J_2(t)|\le c\int_t^{\tilde{\mu}}s^{-\alpha-\tilde{\beta}}e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds=c\int_t^{\tilde{\mu}}s^{-\alpha-\tilde{\beta}}ds=O(t^{1-\alpha-\tilde{\beta}})=O\left(\frac{1}{t^{\tilde{\beta}-\frac{1}{m+1}}}\right),t\to\tilde{\mu}.$$

Поэтому решение z(t) удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнение $Lz(t)=f(t)$ при $0<t<\tilde{\mu}$ получаем тождество. Теорема доказана.

Из теоремы 2.8 следует существование и единственность решений задач (11)-(13). А также асимптотические оценки для решений задач (11)-(13):

$$\pi_{(2m+1)k+1}(t)=O\left(t^{-\frac{2m}{m+1}}\right),\qquad \pi_{(2m+1)k+2}(t)=O\left(t^{-\frac{2m-1}{m+1}}\right),$$

$$\pi_{(2m+1)k+3}(t)=O\left(t^{-\frac{2m-2}{m+1}}\right),...,$$

$$\pi_{(2m+1)k+2m}(t) = O\left(t^{-\frac{1}{m+1}}\right), \qquad \pi_{(2m+1)(k+1)}(t) = O\left(t^{-\frac{2m+1}{m+1}}\right), \ k = 0,1,2,...$$

Кроме того, $\pi_k(t) = O\left(t^{\gamma}\right), t \to 0, 0 \le \gamma, k = 0,1,2,...$

Таким образом, мы доказали ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0, \tilde{\mu}]$.

Теперь докажем, что ряд (7) является асимптотическим рядом на отрезке $x \in [0,1]$. Для этого рассмотрим следующее выражение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{(2m+1)n} \mu^k Y_k(x) + \sum_{k=0}^{(2m+1)(n+1)} \mu^k \pi_k(t) + R_n(x,\varepsilon), \tag{14}$$

где $R_n(x,\varepsilon)$ – остаток ряда.

Подставляя (14) в задачу (1)-(2) и учитывая выражения для $Y_k(x), \pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon R_n''(x,\varepsilon) + x^{\alpha} R_n'(x,\varepsilon) - R_n(x,\varepsilon) = \mu^{(2m+1)(n+1)}(\pi_{(2m+1)(n+1)}(t) - Y_{(2m+1)n,r}(x)),$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0,\ R_n(1,\varepsilon)=0.$$

Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right| \le \varepsilon^{n+1} c \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le t \le \tilde{\mu}}} \left|\pi_{(2m+1)(n+1)}(t) - Y_{(2m+1)n,r}(x)\right|.$$

Отсюда следует, что $R_n(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,1]$.

Справедлива

Теорема 2.9. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(Y_k(x) + \pi_k(t)\right),\ \varepsilon \to 0.$$

§ 2.4. Случай особой точки степени одна третьей

2.4.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y''(x) + \sqrt[3]{x}\, y'(x) - y(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b. \tag{2}$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon \to 0$.

2.4.2. Метод классического малого параметра

Внешнее решение задачи (1)-(2) ищем в виде

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots\ . \tag{3}$$

После подстановки ряда (3) в уравнение (1) и выравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε, учитывая граничное условие $y(1)=b$, получаем следующие задачи:

$$\sqrt[3]{x}\, y_0'(x) - y_0(x) = 0, \qquad y_0(1) = b,$$

$$\sqrt[3]{x}\, y_1'(x) - y_1(x) = -y_0''(x), \qquad y_1(1) = 0,$$

$$\sqrt[3]{x}\, y_2'(x) - y_2(x) = -y_1''(x), \qquad y_2(1) = 0,$$

....

$$\sqrt[3]{x}\, y_n'(x) - y_n(x) = -y_{n-1}''(x) \qquad y_n(1) = 0,$$

. . . .

Отсюда, определяем неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x) = be^{3(\sqrt[3]{x^2}-1)/2},$$

$$y_k(x) = -e^{3\sqrt[3]{x^2}/2}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s^2}/2}\,\frac{y''_{k-1}(s)}{\sqrt[3]{s}}ds,\ k\in\mathrm{N}.$$

При $x \to 0$ имеем

$$y_0(x) = be^{3(\sqrt[3]{x^2}-1)/2} = O(1), \quad x \to 0,$$
$$y'_0(x) = \frac{b}{\sqrt[3]{x}} e^{3(\sqrt[3]{x^2}-1)/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right), \quad x \to 0,$$
$$y''_0(x) = be^{3(\sqrt{x^2}-1)/2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right), \quad x \to 0,$$
$$y_1(x) = -e^{3\sqrt[3]{x^2}/2}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s^2}/2}\frac{y''_0(s)}{\sqrt[3]{s}}ds = O\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right), \quad x \to 0,$$
$$y'_1(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right), \quad x \to 0,$$
$$y''_1(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}\right), \quad x \to 0,$$
$$y_2(x) = -e^{3\sqrt[3]{x^2}/2}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s^2}/2}\frac{y''_1(s)}{\sqrt[3]{s}}ds = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to 0,$$
$$y'_2(x) = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to 0,$$
$$y''_2(x) = O\left(\frac{1}{x^4}\right), \quad x \to 0.$$

Методом математической индукции докажем, что

$$y_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{(2+4(n-1))/3}}\right), \quad x \to 0, \forall n \in N.$$

Действительно, при n=1 верно:

$$y_1(x) = O\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right), \quad x \to 0.$$

Пусть при n=m справедливо соотношение

$$y_m(x) = O\left(\frac{1}{x^{(2+4(m-1))/3}}\right), \quad x \to 0,$$

тогда при n=m+1 имеем

$$y_{m+1}(x) = -e^{3\sqrt[3]{x^2}/2}\int_1^x e^{-3\sqrt[3]{s^2}/2}\frac{y''_m(s)}{\sqrt[3]{s}}ds = -e^{3\sqrt[3]{x^2}/2}\int_1^x \frac{\tilde{y}_m(s)}{s^{1/3+(2+4(m-1))/3+2}}ds =$$
$$= -e^{3\sqrt[3]{x^2}/2}\int_1^x \frac{\tilde{y}_m(s)}{s^{(2+4m)/3+1}}ds = O\left(\frac{1}{x^{(2+4m)/3}}\right), \quad x \to 0.$$

Следовательно, ряд (3) представимо в виде

$$y(x,\varepsilon)\sim y_0(x)+\frac{\varepsilon}{x^{2/3}}\left[y_1^{(0)}+\frac{\varepsilon}{x^{4/3}}y_2^{(0)}+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{x^{4/3}}\right)^{n-1}y_n^{(0)}+\ldots\right],\quad x\to 0,\qquad (4)$$

где $y_k^{(0)}$ – некоторые постоянные.

Очевидно, что ряд (3) или (4) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega(\varepsilon)=[\varepsilon^{\beta},1]$, где $0<\beta<3/4$. Таким образом, получим формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.10. Внешнее решение (3) задачи (1)-(2) представляется в виде асимптотического ряда (4) на отрезке $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$\left|y(x,\varepsilon)-A_{4nx}y(x,\varepsilon)\right|\le M\frac{\varepsilon}{x^{2/3}}\left(\frac{\varepsilon}{x^{4/3}}\right)^{n}\le M\varepsilon^{1/2}\varepsilon^{4\gamma n/3},$$

где $A_{4nx}y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x),\quad \gamma+\beta=3/4.$

Доказательство теоремы следует из доказательства теоремы 2.7, при $\alpha=1/3$.

Как и в предыдущих параграфах, равномерно пригодное решение задачи (1)-(2) на всем отрезке [0,1], включая точку x=0, ищем методом обобщенных пограничных функций.

2.4.3. Обобщенный метод пограничных функций

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$y(x)=Y_0(x)+\pi_0(t)+\mu\pi_1(t)+\mu^2\pi_2(t)+\mu^3\pi_3(t)+\mu^4\pi_4(t)+R(x),\qquad (5)$$

где $t=x/\mu^3,\ \mu=\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Подставляя (5) в (1) имеем

$$\begin{gathered}\mu^4Y''_0(x)+\sqrt[3]{x}Y'_0(x)-Y_0(x)+\sum_{k=0}^{4}\mu^{k-2}\pi''_k(t)+\sqrt[3]{t}\sum_{k=0}^{4}\mu^{k-2}\pi'_k(t)-\\-\sum_{k=0}^{4}\mu^k\pi_k(t)+\mu^4R''(x)+\sqrt[3]{x}R'(x)-R(x)=0.\end{gathered}\qquad (6)$$

Для $Y_0(x)$ получим уравнение:

$$\sqrt[3]{x}Y'_0(x) - Y_0(x) = 0,$$

с краевым условием

$$Y_0(1) = b.$$

Отсюда получаем

$$Y_0(x) = be^{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2}-1)}.$$

Функцию $Y_0(x)$ можно представить в виде:

$$Y_0(x) = be^{-3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)^n + \ldots\right),$$

отсюда находим

$$Y'_0(x) = be^{-3/2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!\sqrt[3]{x}}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)^{n-1} + \ldots\right),$$

$$Y''_0(x) = be^{-3/2}\left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{9}{8} + \frac{15}{16}\sqrt[3]{x^2} + \ldots + \frac{(2n-3)}{2(n-1)!\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)^{n-2} + \ldots\right) =$$

$$= be^{-3/2}\left(-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}\right) + y_{0,r}(x),$$

где $y_{0,r}(x) = be^{-3/2}\left(\frac{9}{8} + \frac{15}{16}\sqrt[3]{x^2} + \ldots + \frac{(2n-3)}{2(n-1)!\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)^{n-2} + \ldots\right).$

При таком определении функций $Y_0(x)$, равенство (6) примет вид:

$$\mu^4\left(-\frac{b}{3\mu^4\sqrt[3]{t^4}}e^{-3/2} + \frac{b}{2\mu^2\sqrt[3]{t^2}}e^{-3/2} + y_{0,r}(x)\right) + \sum_{k=0}^{4}\mu^{k-2}\left(\pi''_k(t) + \sqrt[3]{t}\pi'_k(t)\right) -$$
$$-\sum_{k=0}^{4}\mu^k\pi_k(t) + \mu^4 R''(x) + \sqrt[3]{x}R'(x) - R(x) = 0. \quad (7)$$

Отсюда, учитывая граничное условие (2), имеем

$$L\pi_0 \equiv \pi''_0(t) + \sqrt[3]{t}\pi'_0(t) = 0,\ 0 < t < \tilde{\mu},\quad \pi_0(0) = a - Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu}) = 0,\ \tilde{\mu} = 1/\mu^3, \quad (8)$$

$$L\pi_1(t) = 0, 0 < t < \tilde{\mu}, \pi_1(0) = 0,\ \pi_1(\tilde{\mu}) = 0, \quad (9)$$

$$L\pi_2(t) = \pi_0(t) + \frac{b}{3\sqrt[3]{t^4}}e^{-3/2},\ 0 < t < \tilde{\mu}, \pi_2(0) = 0,\ \pi_2(\tilde{\mu}) = 0, \quad (10)$$

$$L\pi_3(t)=\pi_1(t),\ 0<t<\tilde{\mu}, \pi_3(0)=0,\ \pi_3(\tilde{\mu})=0\,, \tag{11}$$

$$L\pi_4(t)=\pi_2(t)-\frac{b}{2\sqrt[3]{t^2}}e^{-3/2},\ 0<t<\tilde{\mu}, \pi_4(0)=0,\ \pi_4(\tilde{\mu})=0, \tag{12}$$

$$\mu^4 R''(x)+\sqrt[3]{x}R'(x)-R(x)=\mu^3\pi_3(t)+\mu^4\pi_4(t)-\mu^4 y_{0,r}(x). \tag{13}$$

Решение задачи (8) имеет вид:

$$\pi''_0(t)+\sqrt[3]{t}\pi'_0(t)=0 \Rightarrow \left(\pi'_0(t)e^{3\sqrt[3]{t^4}/4}\right)'=0 \Rightarrow \pi'_0(t)e^{3\sqrt[3]{t^4}/4}=c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi'_0(t)=c_1 e^{-3\sqrt[3]{t^4}/4} \Rightarrow \pi_0(t)=c_2-c_1\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-3\sqrt[3]{s^4}/4}ds\,.$$

Учитывая граничные условия $\pi_0(0)=a-Y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu})=0,$

находим значения c_1 и c_2:

$$\pi_0(\tilde{\mu})=c_2=0 \Rightarrow c_2=0;$$

$$\pi_0(0)=-c_1\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-3\sqrt[3]{s^4}/4}ds=a-Y_0(0) \Rightarrow c_1=\left(Y_0(0)-a\right)A, A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-3\sqrt[3]{s^4}/4}ds\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\pi_0(t)=(a-be^{-3/2})A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds,\ \ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds\right)^{-1}.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds, t\to\tilde{\mu}$$

получим

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds=t^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}\left(1+\alpha_1 t^{-\frac{4}{3}}+\ldots+\alpha_n t^{-\frac{4n}{3}}+\ldots\right), t\to\tilde{\mu} \quad \text{или}$$

$$\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds=\mu e^{-\frac{3}{4\mu^4}}\left(1+\alpha_1\mu^4+\ldots+\alpha_n\mu^{4n}+\ldots\right), t\to\tilde{\mu}=\mu^{-3}.$$

Это означает, что функция $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$.

При решении уравнения $L\pi_0(t)=0$ мы заметили, что оно имеет двух линейно независимых решений: 1 и $\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds$. Не нарушая общности линейно независимых решений уравнения

$$Lz(t)=0,$$

можно представить в виде

$$Y(t)=1-X(t),\ X(t)=A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds=1.$$

Линейную независимость можно показать с помощью Якобиана:

$$J(X(t),Y(t))=X(t)Y'(t)-X'(t)Y(t)=Ae^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}\neq 0,\ t\in[0,\tilde{\mu}].$$

Причина такого выбора линейно независимых решений является соотношения:

$$X(0)=1, Y(0)=0, X(\tilde{\mu})=0, Y(\tilde{\mu})=1\ ,$$

которые понадобятся при построении функции Грина.

При этом $Y(t)=O(t)$ $t\to 0$, $0<X(t)\le 1$,

$$X(t)=t^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}\left(1+\alpha_1 t^{-\frac{4}{3}}+\alpha_2 t^{-\frac{8}{3}}+\ldots+\alpha_n t^{-\frac{4n}{3}}+\ldots\right),\ t\to\tilde{\mu}, \alpha_j - const\ .$$

Общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид

$$z(t)=c_1 Y(t)+c_2 X(t),\ c_1,\ c_2 - \text{const}.$$

Отсюда вытекают

Лемма 2.4. Краевая задача $Lz(t)=0$, $z(0)=z(\tilde{\mu})=0$ имеет только нулевое решение.

Доказательство очевидно, так как общее решение нам известно $z(t)=c_1 Y(t)+c_2 X(t)$, и соотношения: $X(0)=1, Y(0)=0,\ \ X(\tilde{\mu})=0, Y(\tilde{\mu})=1$. Отсюда получаем:

$$z(0)=c_2=0\Rightarrow c_2=0;\ z(\tilde{\mu})=c_1=0\Rightarrow c_1=0\ \Rightarrow z(t)\equiv 0.$$

В силу леммы 2.4 задача (9) имеет тривиальное решение:

$$\pi_{2k+1}(t)\equiv 0, k=0,1,\ldots$$

Теорема 2.11. Задача

$$Lz(t)=f(t),\ 0<t<\tilde{\mu}\ ,\ z(0)=0,\ z(\tilde{\mu})=0,$$

имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$z(t)=\int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}} f(s)ds,$$

где $G(t,s)=\begin{cases}-Y(t)X(s),\ 0\le t\le s,\\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le \tilde{\mu},\end{cases}$ – функция Грина, $f(t)\in C(0,\tilde{\mu}],$

$$f(t)=O(t^{-\alpha}), t\to 0,\ \alpha<2;\ f(t)=O(t^{-\beta}), t\to\tilde{\mu},\ 2/3\le\beta.$$

Доказательство. Решение $z(t)$ запишем в виде

$$z(t)=J_1(t)+J_2(t),$$

где $J_1(t)=-X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}} f(s)ds,\ J_2(t)=Y(t)\int_t^{\tilde{\mu}} X(s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}} f(s)ds.$

Покажем, что функции $J_1(t)$ и $J_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям. Так как $X(\tilde{\mu})\equiv 0$, и $Y(0)\equiv 0$, поэтому достаточно доказать, что

$$J_1(t)\to 0,\ t\to 0 \text{ и } J_2(t)\to 0,\ t\to\tilde{\mu}.$$

1) Рассмотрим функцию $J_1(t)$:

При $t\to 0$ имеем $|Y(t)|\le ct,\ |f(t)|\le ct^{-\alpha}$ поэтому

$$|J_1(t)|\le c\int_0^t s^{1-\alpha}e^{\frac{3}{4}s^{4/3}} ds\le ct^{2-\alpha}\to 0,\ t\to 0.$$

2) Теперь рассмотрим $J_2(t)$ при $t\to\tilde{\mu}$:

$$|J_2(t)|\le c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1/3-\beta}e^{\frac{3}{4}s^{4/3}-\frac{3}{4}s^{4/3}} ds=c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1/3-\beta}ds=O(t^{2/3-\beta})=O(\mu^{3\beta-2)}),\ t\to\tilde{\mu}.$$

если $\beta=\dfrac{2}{3}$, то

$$|J_2(t)|\le c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-1/3-\beta}e^{\frac{3}{4}s^{4/3}-\frac{3}{4}s^{4/3}} ds=c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}ds=O\left(\ln\frac{\tilde{\mu}}{t}\right),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Поэтому решение z(t) удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнение $Lz(t)=f(t)$ при $0<t<\tilde{\mu}$ получаем тождество. Теорема доказана.

Из теоремы 2.11 следует существование и единственность решений задач (9)-(12). А также асимптотические оценки для решений задач (9)-(12):

$$\pi_1(t)\equiv 0,\ \pi_3(t)\equiv 0,\qquad \pi_2(t)=O\left(t^{-2/3}\right),\ t\to\mu^{-3},$$

$$\pi_4(t)=O\left(ln\left(t\mu^3\right)\right),\ t\to\mu^{-3},$$

$$\pi_2(t)=O\left(\sqrt[3]{t^2}\right),\ \pi_4(t)=O\left(\sqrt[3]{t^4}\right),\ t\to 0;$$

$$\left|\pi_j(t)\right|\le c,\ t\in[0,\mu^{-3}],\ j=2,4.$$

Таким образом мы доказали ограниченность функций $\pi_j(t)$, j=2,4 на отрезке [0, $\tilde{\mu}$].

Рассмотрим теперь задачу для $R(x)$:

$$\mu^4 R''(x)+\sqrt[3]{x}R'(x)-R(x)=\mu^4(\pi_4(t)-y_{0,r}(x)),$$

$$R(0)=0,\ R(1)=0.$$

Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|R(x)\right|\le C\max_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le t\le\tilde{\mu}}}\left(\left|\pi_4(t)\right|+\left|y_{0,r}(x)\right|\right).$$

Отсюда следует, что $R(x)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$.

Справедлива

Теорема 2.12. Асимптотическое решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$y(x)=be^{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2}-1)}+(a-be^{-3/2})A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds+\mu^2\pi_2(t)++\mu^4\pi_4(t)+O(\mu^4),\quad \varepsilon\to 0,$$

где $\pi_2(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}\left((a-be^{-3/2})A\int_s^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{4}\tau^{4/3}}d\tau+\dfrac{b}{2\sqrt[3]{s^4}}e^{-3/2}\right)ds$,

$\pi_4(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}\left(\pi_2(s)-\dfrac{b}{2\sqrt[3]{t^2}}e^{-3/2}\right)ds$.

§ 2.5. Асимптотика решения краевой задачи для неоднородного уравнения с негладким коэффициентом порядка одна второй

2.5.1. Постановка задачи

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt{x}\,y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0<x<1, \quad (1)$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b, \quad (2)$$

где $q(x)\in C^{\infty}[0,1],\ q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k x^k,\ 0<q_0,\ f(x)\in C^{\infty}[0,1],\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^k$.

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

2.5.2. Метод классического малого параметра

Внешнее решение задачи (1)-(2) ищется в виде

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots \quad (3)$$

После подстановки ряда (3) в уравнение (1) и выравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε, используя граничное условие $y(1)=b$, получаем следующие задачи:

$$\sqrt{x}\,y'_0(x)-q(x)y_0(x)=f(x),\qquad y_0(1)=b,$$

$$\sqrt{x}\,y'_k(x)-q(x)y_k(x)=-y''_{k-1}(x),\qquad y_k(1)=0,\ k=1,2,\ldots$$

Отсюда, определяем неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x)=be^{p(x)}+e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds,$$

$$y_k(x)=e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}y''_{k-1}(s)ds,\ k\in\mathrm{N},$$

где $p(x)=\int_1^x\frac{q(s)}{\sqrt{s}}ds$.

При $x\to 0$ имеем

$$y_0(x)=be^{p(x)}+e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds=be^{p(x)}-e^{p(x)}\int_1^x\frac{f(s)}{q(s)}de^{-p(s)}=$$

$$=be^{p(x)}+\frac{f(1)}{q(1)}e^{p(x)}-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{p(x)}\int_1^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{-p(s)}ds=O(1),\ \ x\to 0$$

$$y'_0(x)=\frac{q(x)y_0(x)}{\sqrt{x}}+\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=O\left(x^{-1/2}\right),\ \ x\to 0,$$

$$y''_0(x)=O(x^{-3/2}),\ \ x\to 0;$$

$$y_1(x)=-e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}y''_0(s)ds=O\left(x^{-1}\right),\ \ x\to 0,$$

$$y''_1(x)=O(x^{-3}),\ x\to 0,$$

$$y_2(x)=-e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}y''_1(s)ds=O\left(x^{-5/2}\right),\ x\to 0\ ,$$

$$y''_2(x)=O(x^{-9/2}),\ x\to 0.$$

Методом математической индукции, как и в § 2.1 можно доказать, что

$$y_n(x)=-e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}y''_{n-1}(s)ds=O\left(x^{-1-3(n-1)/2}\right),\ x\to 0,\ \forall n\in N.$$

Следовательно, ряд (3) представимо в виде

$$y(x)\sim y_0\left(x\right)+\varepsilon x^{-1}\left[y_1^{(0)}(x)+\varepsilon x^{-3/2}y_2^{(0)}(x)+...+\left(\varepsilon x^{-3/2}\right)^{n-1}y_n^{(0)}(x)+...\right],\quad x\to 0 \tag{4}$$

где $y_k^{(0)}(x)$ – некоторые постоянные.

Очевидно, что ряд (3) или (4) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega(\varepsilon)=\left[\varepsilon^{\beta},1\right]$, где $0<\beta<2/3$. Таким образом, получим формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.13. Внешнее решение (3) задачи (1)-(2) представляется в виде асимптотического ряда (4) на отрезке $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$\left|y(x,\varepsilon)-A_{3nx}y(x,\varepsilon)\right|\le M\varepsilon x^{-1}\left(\varepsilon x^{-3/2}\right)^n\le M\varepsilon^{1/3}\varepsilon^{3\alpha n/2},$$

где $A_{3nx}y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+...+\varepsilon^n y_n(x),\quad \alpha+\beta=2/3.$

Теорема доказывается точно также как и теорема 2.1.

Равномерно пригодное решение задачи (1)-(2) на отрезке [0,1] ищем методом обобщенных пограничных функций.

2.5.3. Обобщенный метод пограничных функций

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$y(x) = y_0(x) + \pi_0(t) + \mu\pi_1(t) + \mu^2\pi_2(t) + \mu^3\pi_3(t) + R(x,\varepsilon), \tag{5}$$

где $t = x/\mu^2$, $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Подставляя (5) в (1) имеем

$$\begin{aligned} &\mu^3 y''_0(x) + \sqrt{x}y'_0(x) - q(x)y_0(x) + \sum_{k=0}^{3}\mu^{k-1}\left(\pi''_k(t) + \sqrt{t}\pi'_k(t)\right) - \\ &-q(\mu^2 t)\sum_{k=0}^{3}\mu^k\pi_k(t) + \mu^3 R''(x,\varepsilon) + \sqrt{x}R'(x,\varepsilon) - q(x)R(x,\varepsilon) = f(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Для $y_0(x)$ получаем задачу

$$\sqrt{x}y'_0(x) - q(x)y_0(x) = f(x),\ y_0(1) = b.$$

Решение этой задачи нам известно:

$$y_0(x) = be^{p(x)} + e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds.$$

Отсюда имеем:

$$y'_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(bq(x)e^{p(x)} + q(x)e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds\right) + \frac{f(x)}{\sqrt{x}},$$

$$y''_0(x) = \frac{q'(x)y_0(x) + q(x)y'_0(x)}{\sqrt{x}} - \frac{q(x)y_0(x)}{2\sqrt{x^3}} + \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{2\sqrt{x^3}} =$$

$$= \frac{bq'(x)e^{p(x)}}{\sqrt{x}} - \frac{bq(x)e^{p(x)}}{2\sqrt{x^3}} + \frac{bq^2(x)e^{p(x)}}{x} +$$

$$+\frac{q'(x)}{\sqrt{x}}e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds - \frac{q(x)}{2\sqrt{x^3}}e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds +$$

$$+\frac{q^2(x)}{x}e^{p(x)}\int_1^x e^{-p(s)}s^{-1/2}f(s)ds + \frac{q(x)f(x)}{x} - \frac{f(x)}{2\sqrt{x^3}} + \frac{f'(x)}{\sqrt{x}}$$

или $y''_0(x) = -\dfrac{y_{0,1}}{2\sqrt{x^3}} - \dfrac{y_{0,3}}{\sqrt{x}} + y_{0,r}(x)$,

где

$$y_{0,1} = q_0 y_{0,0} + f_0,$$

$$y_{0,3} = q_0^3 y_{0,0} + q_0^2 f_0 + \frac{1}{2} q_1 y_{0,0} + \frac{1}{2} f_1,\ f_0 = f(0), f_1 = f'(0), y_{0,0} - const,$$

$$y_{0,r}(x) \in C[0,1].$$

Соотношение (6) примет вид

$$\mu^3 \left(-\frac{y_{0,1}}{2\sqrt{x^3}} - \frac{y_{0,3}}{\sqrt{x}} + y_{0,r}(x) \right) + \sum_{k=0}^{3} \mu^{k-1} \left(\pi_k''(t) + \sqrt{t}\pi'_k(t) \right) - q(t\mu^2) \sum_{k=0}^{3} \mu^k \pi_k(t) +$$
$$+\mu^3 R''(x,\varepsilon) + \sqrt{x} R'(x,\varepsilon) - q(x) R(x,\varepsilon) = 0,$$

или

$$-\frac{y_{0,1}}{2\sqrt{t^3}} - \mu^2 \frac{y_{0,3}}{\sqrt{t}} + \mu^3 y_{0,r}(x) + \sum_{k=0}^{3} \mu^{k-1} \left(\pi_k''(t) + \sqrt{t}\pi'_k(t) \right) -$$
$$-q(t\mu^2) \sum_{k=0}^{3} \mu^k \pi_k(t) + \mu^3 R''(x,\varepsilon) + \sqrt{x} R'(x,\varepsilon) - q(x) R(x,\varepsilon) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\pi_0''(t) + \sqrt{t}\pi'_0(t) = 0,\ t \in (0, \tilde{\mu}),\ \pi_0(0) = a - y_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu}) = 0;$$

$$\pi_1''(t) + \sqrt{t}\pi'_1(t) = \frac{y_{0,1}}{2\sqrt{t^3}} + q(t\mu^2)\pi_0(t),\ t \in (0, \tilde{\mu}),\ \pi_1(0) = \pi_1(\tilde{\mu}) = 0;$$

$$\pi_2''(t) + \sqrt{t}\pi'_2(t) = q(t\mu^2)\pi_1(t),\ t \in (0, \tilde{\mu}),\ \pi_2(0) = \pi_2(\tilde{\mu}) = 0;$$

$$\pi_3''(t) + \sqrt{t}\pi'_3(t) = \frac{y_{0,3}}{\sqrt{t}} + q(t\mu^2)\pi_2(t),\ t \in (0, \tilde{\mu}),\ \pi_3(0) = \pi_3(\tilde{\mu}) = 0.$$

В § 2.2 мы доказали существование, единственность и ограниченность решений этих задач.

На основании теоремы 2.2 получаем

$$\pi_0(t) = O\left(t^{-1/2} e^{-\frac{2}{3} t^{3/2}} \right),\ \pi_1(t) = O\left(\frac{1}{t} \right),\ t \to \tilde{\mu},$$

$$\pi_2(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right),\ \pi_3(t) = O\left(ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{t} \right) \right),\ t \to \tilde{\mu};$$

$$\pi_0(t) = O(1),\ \pi_1(t) = O\left(\sqrt{t} \right),\ t \to 0,$$

$$\pi_2(t) = O\left(\sqrt{t^5} \right),\ \pi_3(t) = O\left(\sqrt{t^3} \right),\ t \to 0.$$

Так как функций $\pi_k(t), k=0,1,2,3$ дифференцируемы в интервале $t \in (0, \tilde{\mu})$, то они непрерывны и ограничены в этом интервале. Учитывая асимптотические поведения функций $\pi_k(t), k=0,1,2,3$ на граничных точках интервала $t \in (0, \tilde{\mu})$, заключаем, что функций $\pi_k(t), k=0,1,2,3$ ограничены на отрезке $t \in [0, \tilde{\mu}]$.

Перейдем к оценке остаточного члена $R(x,\varepsilon)$.

Для задачи

$$\mu^3 R''(x,\varepsilon) + \sqrt{x} R'(x,\varepsilon) - q(x) R(x,\varepsilon) = \mu^3 (\pi_3(x\tilde{\mu}) - y_{0,r}(x)), \qquad x \in (0,1),$$

$$R(0,\varepsilon) = 0, \quad R(1,\varepsilon) = 0,$$

применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left| R(x,\varepsilon) \right| \le \varepsilon C \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le t \le \tilde{\mu}}} \left(\left| \pi_3(t) \right| + \left| y_{0,r}(x) \right| \right).$$

Отсюда следует, что $R(x,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,1]$.

Справедлива

Теорема 2.14. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = y_0(x) + \pi_0(t) + \mu \pi_1(t) + \mu^2 \pi_2(t) + \mu^3 \pi_3(t) + O(\varepsilon) \ \varepsilon \to 0, \ x \in [0,1].$$

Заключение по главе 2

В главе 2 построены равномерные асимптотические разложения решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных однородных и неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с негладким коэффициентом. Исследованы несколько различных случаев. Асимптотические разложения построены обобщенным методом пограничных функций. Принципом максимума доказан асимптотический характер построенных асимптотических рядов.

ГЛАВА 3. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНФУНКЦИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

§ 3.1. Случай особой точки степени одна второй

Исследуем задачу

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt{x}y'(x)-y(x)=0,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b. \tag{2}$$

Задача (1)-(2) исследована в § 2.1, здесь мы покажем еще один способ, вернее упрощенный способ, построения асимптотики решения этой задачи.

В задаче (1), (2), произведем замену,

$$y(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}z(x), \tag{3}$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Вставляя соотношение (3) в задачу (1)-(2), получаем:

$$\varepsilon\left(z''(x)+\frac{2}{\sqrt{x}}z'(x)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)z(x)\right)+\sqrt{x}z'(x)=0, \tag{4}$$

$$z(0)=ae^2/b,\qquad z(1)=1. \tag{5}$$

Решение задачи (4)-(5) ищем в виде

$$z(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)), \tag{6}$$

где $t=x/\mu^2$, $\varepsilon=\mu^3$.

Подставляя соотношение (6) в задачу (4)-(5), получаем:

$$\mu^3\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(z_k''(x)+\frac{2}{\sqrt{x}}z_k'(x)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)z_k(x)\right)+\sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k'(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\left(\pi_k''(t)+\frac{2\mu}{\sqrt{t}}\pi_k'(t)+\left(\frac{\mu^2}{t}-\frac{\mu}{2\sqrt{t^3}}\right)\pi_k(t)\right)+\sqrt{t}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\pi_k'(x)=0, \tag{7}$$

$$z_0(1)=1,\ z_k(1)=0,\ \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^2-z_0(0),\pi_0(\tilde\mu)=0,\ \tilde\mu=1/\mu^2, \tag{8}$$

$$\pi_k(0)=-z_k(0),\pi_k(\tilde\mu)=0,\ k=1,2,...$$

Из равенства (7) и (8) для $z_0(x)$, имеем:

$$\sqrt{x}z_0'(x)=0,\ 0<x<1,\quad z_0(1)=1. \tag{9}$$

Задача (9) имеет единственное решение $z_0(x)=1$.

Пусть $z_k(x)\equiv 0$, $k=1,2,...$ Тогда равенство (7) представимо в виде

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt{t}\pi_k'(t)\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_k(t)+\frac{\mu}{t}\pi_k(t)\right)+$$

$$+\mu^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)=0,$$

или

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt{t}\pi_k'(t)\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_k(t)+\frac{\mu}{t}\pi_k(t)\right)+\frac{\mu}{t}-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}=0.$$

Отсюда, для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_0\equiv\pi_0''(t)+\sqrt{t}\pi_0'(t)=0,\ 0<t<\tilde\mu,\qquad \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^2-1,\ \pi_0(\tilde\mu)=0, \tag{10}$$

$$L\pi_1(t)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}+\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_0(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_0'(t), \tag{11}$$

$$L\pi_2(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_1(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_1'(t)-\frac{1}{t}\pi_0(t), \tag{12}$$

$$L\pi_k(t)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_{k-1}(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_{k-1}'(t)-\frac{1}{t}\pi_{k-2}(t),\ k=3,4,\dots, \tag{13}$$

$$\pi_m(0)=0,\ \pi_m(\tilde\mu)=0,\ m=1,2,... \tag{14}$$

Решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi_0(t)=\left(\frac{a}{b}e^2-1\right)A\int_t^{\tilde\mu}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A=\left(\int_0^{\tilde\mu}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\right)^{-1}.$$

Заметим, что $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$.

С помощью теоремы 2.2 доказывается существование, единственность и ограниченность решений уравнений (11)-(13) с соответствующими краевыми условиями (14): $|\pi_k(t)|<l=\text{const}$, $t\in[0,\tilde{\mu}]$.

Интегрируя по частям интегральные представления решений $\pi_k(t)$, при $t\to\infty$, получим:

$$\pi_1(t)=-\frac{1}{2t}\left(1+\frac{4}{5\sqrt{t^3}}+\frac{7}{4t^3}+\frac{42}{11\sqrt{t^9}}+\frac{39}{2t^7}+...\right),$$

$$\pi_2(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{23}{40\sqrt{t^3}}+\frac{173}{2t^3}+...\right),\qquad \pi_3(t)=-\frac{23}{60\sqrt{t^3}}+O\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

$$\pi_{2k+1}(t)=O\left(t^{-1-\frac{1}{2}k}\right),\ \pi_{2k}(t)=O\left(t^{-\frac{1}{2}k}\right),\ k=1,2,...$$

А также $\pi_k(t)=O(\sqrt{t^k}),\ t\to 0, k=0,1,2,...$

Отсюда следует ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\tilde{\mu}]$, когда $\mu\to 0$.

Теперь докажем, что ряд (6) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим усеченный ряд

$$z(x)=1+\sum_{k=0}^{3n}\mu^k\pi_k(t)+R_n(x,\varepsilon). \tag{15}$$

Подставляя (15) в задачу (1)-(2) и учитывая значения $z_k(x)$, $\pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon\left(R_n''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt{x}}R_n'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)R_n(x,\varepsilon)\right)+\sqrt{x}R_n'(x,\varepsilon)=\varepsilon^n\Phi(t,\mu), \tag{16}$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0, R_n(1,\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где $\Phi(t,\mu)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_{3n}(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_{3n}'(t)-\frac{1}{t}\pi_{3n-1}(t)-\mu\frac{1}{t}\pi_{3n}(t)$.

Пусть

$$R_n(x,\varepsilon)=e^{-2\sqrt{x}}r(x,\varepsilon),$$

тогда задача (16)-(17) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon)+\sqrt{x}r'(x,\varepsilon)-r(x,\varepsilon)=e^{2\sqrt{x}}\varepsilon^n\Phi(t,\mu),\quad 0<x<1,$$

$$r(0,\varepsilon)=0,\ \ r(1,\varepsilon)=0.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t,\mu)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_{3n}(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi'_{3n}(t)-\frac{1}{t}\pi_{3n-1}(t)-\mu\frac{1}{t}\pi_{3n}(t).$$

Как нам известно,

$$\pi_{3n-1}(t),\,\pi_{3n}(t)\in C^\infty[0,\tilde{\mu}],\ \pi_{3n-1}(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),\ \ \pi_{3n}(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt{t}^3}\right), t\to\tilde{\mu},$$

$$\pi_{3n-1}(t)=O(\sqrt{t^{3n-1}}),\,\pi_{3n}(t)=O(\sqrt{t^{3n}}),\,t\to 0\,.$$

Поэтому $\Phi(t,\mu)=O(1),\ \mu\to 0,\ t\in[0,\mu^{-2}]$, т.е. существует такое положительное число M, для которого справедливо соотношение

$$M=\max_{t\in[0,\tilde{\mu}]}\left|\Phi(t,\mu)\right|,\ \mu\to 0.$$

Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|r\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon^n Me^{2\sqrt{x}}.$$

Отсюда находим,

$$\left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon^n M,\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Справедлива

Теорема 3.1. Для решения задачи (1), (2) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right).$$

§ 3.2. Случай особой точки степени две третьей

Рассмотрим задачу § 2.2

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt[3]{x^2}\,y'(x)-y(x)=0,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b. \tag{2}$$

В задаче (1), (2) произведем замену,

$$y(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}z(x), \tag{3}$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y'(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}z(x)+z'(x)\right),$$

$$y''(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}\left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}z(x)+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}z(x)+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}z'(x)+z''(x)\right),$$

$$y(0)=a=be^{-3}e^{0}z(0)\Rightarrow z(0)=\frac{a}{b}e^{3},$$

$$y(1)=b=be^{-3}e^{3}z(1)\Rightarrow z(1)=1.$$

Учитывая эти соотношения, получаем новую задачу:

$$\varepsilon\left(z''(x)+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}z'(x)-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}z(x)+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}z(x)\right)+\sqrt[3]{x^2}\,z'(x)=0, \tag{4}$$

$$z(0)=\frac{a}{b}e^{3},\ z(1)=1. \tag{5}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$z(x)=z_0(x)+\pi_0(t)+\mu(z_1(x)+\pi_1(t))+\ldots+\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t))+\ldots, \tag{6}$$

где $t=\dfrac{x}{\mu^3},\ \varepsilon=\mu^5$.

Подставляя (6) в (4) имеем

$$\mu^5\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(z_k''(x)+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}z_k'(x)-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}z_k(x)+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}z_k(x)\right)+\sqrt[3]{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k'(x)+$$
$$+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_k'(t)+\frac{2\mu}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_k'(t)-\frac{2\mu}{3\sqrt[3]{t^5}}\pi_k(x)+\frac{\mu^2}{\sqrt[3]{t^4}}\pi_k(t)\right)=0. \qquad (7)$$

Из граничных условий (2) имеем

$$z_0(1)=1,\ z_k(1)=0,\ \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^3-z_0(0),\pi_0(\tilde{\mu})=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu^3, \qquad (8)$$

$$\pi_k(0)=-z_k(0),\pi_k(\tilde{\mu})=0,\ k=1,2,...$$

Из равенства (7) и (8) для $z_0(x)$, имеем:

$$\sqrt{x}z_0'(x)=0,\ \ 0<x<1,\quad z_0(1)=1. \qquad (9)$$

Задача (9) имеет единственное решение $z_0(x)=1$.

Пусть $z_k(x)\equiv 0$, $k=1,2,...$ Тогда равенство (7) представимо в виде

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_k'(t)+\frac{2\mu}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_k'(t)-\frac{2\mu}{3\sqrt[3]{t^5}}\pi_k(x)+\frac{\mu^2}{\sqrt[3]{t^4}}\pi_k(t)\right)-\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}+\frac{\mu}{\sqrt[3]{t^4}}=0.$$

Отсюда, для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_0\equiv\pi_0''(t)+\sqrt[3]{t^2}\pi_0'(t)=0,\ 0<t<\tilde{\mu},\qquad \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^3-1,\ \ \pi_0(\tilde{\mu})=0, \qquad (10)$$

$$L\pi_1(t)=\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}\pi_0(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_0'(t), \qquad (11)$$

$$L\pi_2(t)=-\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}\pi_1(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_1'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}\pi_0(t), \qquad (12)$$

$$L\pi_k(t)=\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}\pi_{k-1}(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_{k-1}'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}\pi_{k-2}(t),\ k=3,4,\ldots, \qquad (13)$$

$$\pi_m(0)=0,\ \pi_m(\tilde{\mu})=0,\ m=1,2,... \qquad (14)$$

Решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi_0(t)=\left(\frac{a}{b}e^3-1\right)A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds,\ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{5}s^{5/3}}ds\right)^{-1}.$$

и $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$.

С помощью теоремы 2.5 доказывается существование, единственность и ограниченность решений уравнений (11)-(13) с соответствующими краевыми условиями (14): $|\pi_k(t)|<l=\text{const}$, $t\in[0,\tilde{\mu}]$.

При $t\to\tilde{\mu}$ для функции $\pi_k(t)$ справедливы асимптотические разложения

$$\pi_{2k-1}(t)=O\left(\frac{1}{t^{\frac{4}{3}+k}}\right),\ \pi_{2k}(t)=O\left(\frac{1}{t^k}\right),\ k=1,2,...,t\to\tilde{\mu}=1/\mu^3\ .$$

Кроме того, $\pi_k(t)=O\left(\sqrt[3]{t^k}\right),\ t\to 0,\ k=0,1,2,...$

Таким образом мы доказали ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\tilde{\mu}\,]$, когда $\mu\to 0$.

Теперь докажем, что ряд (6) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим усеченный ряд

$$z(x)=1+\sum_{k=0}^{5n}\mu^k\pi_k(t)+R_n(x,\varepsilon)\,. \tag{15}$$

Подставляя (15) в задачу (1)-(2) и учитывая значения $\pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon\left(R_n''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}R_n'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)R_n(x,\varepsilon)\right)+\sqrt[3]{x^2}\,R_n'(x,\varepsilon)=\varepsilon^n\Phi(t,\mu) \tag{16}$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0, R_n(1,\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где $\Phi(t,\mu)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}\pi_{5n}(t)-\dfrac{2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_{5n}'(t)-\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^4}}\pi_{5n-1}(t)-\mu\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^4}}\pi_{5n}(t)$.

Так как

$$\pi_{5n-1}(t),\pi_{5n}(t)\in C^\infty[0,\tilde{\mu}],\ \pi_{5n-1}(t)=O\left(\sqrt[3]{t^{5n-1}}\right),\ \pi_{5n}(t)=O\left(\sqrt[3]{t^{5n}}\right),\ t\to 0\,,$$

$$\pi_{2k-1}(t)=O\left(\frac{1}{t^{\frac{4}{3}+k}}\right),\ \pi_{2k}(t)=O\left(\frac{1}{t^k}\right),\ t\to\tilde{\mu}=1/\mu^3\ .$$

Поэтому $\Phi(t,\mu)=O(1),\mu\to 0,t\in[0,1/\mu^3]$.

Пусть

$$R_n(x,\varepsilon)=e^{-3\sqrt[3]{x}}r(x,\varepsilon)\,,$$

тогда задача (16)-(17) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon)+\sqrt[3]{x^2}\,r'(x,\varepsilon)-r(x,\varepsilon)=e^{3\sqrt[3]{x}}\varepsilon^n\Phi(t,\mu),\quad 0<x<1,$$

$$r(0,\varepsilon)=0,\;\; r(1,\varepsilon)=0.$$

Пусть $M=\max\limits_{t\in[0,\tilde{\mu}]}\Phi(t,\mu)$, $\mu\to 0$. Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|r\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon^n M e^{3\sqrt[3]{x}}.$$

Отсюда находим,

$$\left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon^n M,\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Справедлива

Теорема 3.2. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=be^{3(\sqrt[3]{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right).$$

§ 3.3. Случай особой точки степени $\alpha = \dfrac{m}{m+1}$

Исследуем задачу

$$\varepsilon y''(x) + x^{\alpha} y'(x) - y(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b, \tag{2}$$

где $\alpha = \dfrac{m}{m+1}$, m – фиксированное натуральное число, $y(x)$ – искомая функция.

В задаче (1), (2), произведем замену, пусть

$$y(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)} z(x), \tag{3}$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y'(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)} \left(\frac{1}{x^{\alpha}} z(x) + z'(x) \right),$$

$$y''(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)} \left(-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} z(x) + \frac{1}{x^{2\alpha}} z(x) + \frac{2}{x^{\alpha}} z'(x) + z''(x) \right),$$

$$y(0) = a = be^{-(m+1)} e^{0} z(0) \Rightarrow z(0) = \frac{a}{b} e^{m+1},$$

$$y(1) = b = be^{-(m+1)} e^{m+1} z(1) \Rightarrow z(1) = 1.$$

Учитывая эти соотношения, получаем:

$$\varepsilon \left(z''(x) + \frac{2}{x^{\alpha}} z'(x) - \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} z(x) + \frac{1}{x^{2\alpha}} z(x) \right) + x^{\alpha} z'(x) = 0, \tag{4}$$

$$z(0) = \frac{a}{b} e^{m+1},\ z(1) = 1. \tag{5}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$z(x) = z_0(x) + \pi_0(t) + \mu(z_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^k (z_k(x) + \pi_k(t)) + \ldots, \tag{6}$$

где $t = \dfrac{x}{\mu^{m+1}}$, $\varepsilon = \mu^{2m+1}$.

Подставляя (6) в (4) имеем

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y_k''(x)+\frac{2}{x^{\alpha}}Y_k'(x)-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}Y_k(x)+\frac{1}{x^{2\alpha}}Y_k(x)\right)+x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kY_k'(x)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\left(\pi_k''(t)+\frac{2\mu}{t^{\alpha}}\pi_k'(t)-\frac{\alpha\mu}{t^{1+\alpha}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{t^{2\alpha}}\pi_k(t)\right)+t^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\pi_k'(t)=0. \tag{7}$$

Из граничных условий (2) имеем

$$z_0(1)=1,\ z_k(1)=0,\ \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^{m+1}-z_0(0), \pi_0(\tilde{\mu})=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu^{m+1}, \tag{8}$$

$$\pi_k(0)=-z_k(0), \pi_k(\tilde{\mu})=0,\ k=1,2,...$$

Из равенства (7) и (8) для $z_0(x)$, имеем:

$$x^{\alpha}z_0'(x)=0,\ 0<x<1,\quad z_0(1)=1. \tag{9}$$

Задача (9) имеет единственное решение $z_0(x)=1$.

Пусть $z_k(x)\equiv 0$, $k=1,2,...$ Тогда равенство (7) представимо в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\left(\pi_k''(t)+t^{\alpha}\pi_k'(t)+\frac{2\mu}{t^{\alpha}}\pi_k'(t)-\frac{\alpha\mu}{t^{1+\alpha}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{t^{2\alpha}}\pi_k(t)\right)-\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}+\frac{\mu}{t^{2\alpha}}=0\,.$$

Отсюда, для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_0\equiv\pi_0''(t)+t^{\alpha}\pi_0'(t)=0,\ 0<t<\tilde{\mu},\qquad \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^{m+1}-1,\ \ \pi_0(\tilde{\mu})=0, \tag{10}$$

$$L\pi_1(t)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}+\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_0(t)-\frac{2}{t^{\alpha}}\pi_0'(t)\,, \tag{11}$$

$$L\pi_2(t)=-\frac{1}{t^{2\alpha}}+\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_1(t)-\frac{2}{t^{\alpha}}\pi_1'(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_0(t)\,, \tag{12}$$

$$L\pi_k(t)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{k-1}(t)-\frac{2}{t^{\alpha}}\pi_{k-1}'(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{k-2}(t)\,,\ k=3,4,\ldots, \tag{13}$$

$$\pi_s(0)=0,\ \pi_s(\tilde{\mu})=0,\ s=1,2,\ldots. \tag{14}$$

Как на известно, решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi_0(t)=\left(\frac{a}{b}e^{m+1}-1\right)A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds,\ \ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds\right)^{-1}.$$

и $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$.

С помощью теоремы 2.8 доказывается существование, единственность и ограниченность решений уравнений (11)-(13) с соответствующими краевыми условиями (14): $|\pi_k(t)|<l=\text{const}$, $t\in[0,\tilde{\mu}]$.

При $t\to\tilde{\mu}$ для функции $\pi_k(t)$ справедливы асимптотические разложения

$$\pi_{2k-1}(t)=O\left(\frac{1}{t^{2\alpha+(3\alpha-1)k}}\right),\ \pi_{2k}(t)=O\left(\frac{1}{t^{(3\alpha-1)k}}\right),\ k=1,2,...,\quad t\to\tilde{\mu}=\mu^{-(m+1)}$$

Кроме того, $\pi_k(t)=O\left(\sqrt[m+1]{t^k}\right),\ \ t\to 0,\ k=0,1,2,...$

Таким образом мы доказали ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\ \tilde{\mu}]$, когда $\mu\to 0$.

Теперь докажем, что ряд (6) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим выражение

$$z_n(x)=1+\sum_{k=0}^{(2m+1)n}\mu^k\pi_k(t)+R_n(x,\varepsilon). \tag{15}$$

Подставляя (15) в задачу (1)-(2) и учитывая значения $\pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon\left(R_n''(x,\varepsilon)+\frac{2}{x^\alpha}R_n'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}\right)R_n(x,\varepsilon)\right)+x^\alpha R_n'(x,\varepsilon)=\varepsilon^n\Phi(t,\mu), \tag{16}$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0, R_n(1,\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где $\Phi(t,\mu)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{(2m+1)n}(t)-\frac{2}{t^\alpha}\pi'_{(2m+1)n}(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{(2m+1)n-1}(t)-\mu\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{(2m+1)n}(t)$.

Нетрудно заметить, что $\Phi(t,\mu)=\mathrm{O}(1),\ \mu\to 0,\ t\in[0,\mu^{-m-1}]$.

Пусть

$$R_n(x,\varepsilon)=e^{-(m+1)\sqrt[m+1]{x}}r(x,\varepsilon),$$

тогда задача (16)-(17) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon)+x^\alpha r'(x,\varepsilon)-r(x,\varepsilon)=e^{(m+1)\sqrt[m+1]{x}}\varepsilon^n\Phi(t,\mu),\quad 0<x<1,$$

$$r(0,\varepsilon)=0,\ \ r(1,\varepsilon)=0.$$

Пусть $M=\max\limits_{t\in[0,\tilde{\mu}]}\Phi(t,\mu)$, $\mu\to 0$. Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|r(x,\varepsilon)\right|\le\varepsilon^n M e^{(m+1)\sqrt[m+1]{x}}.$$

Отсюда находим,

$$\left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right| \le \varepsilon^n M\ ,\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Справедлива

Теорема 3.3. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \pi_k(t)\right).$$

§ 3.4. Общий случай, дробной особой точки степени меньше единицы

В данном параграфе обобщаются выше рассмотренные случаи. Исследуем задачу

$$\varepsilon y''(x) + x^{\alpha} y'(x) - y(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b, \tag{2}$$

где $\frac{1}{3} < \alpha < 1$, α – рациональное число, $y(x)$ – искомая функция.

В задаче (1), (2), произведем замену, пусть

$$y(x) = b\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)\right) z(x), \tag{3}$$

где $\exp(t) = e^{t}$, $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y'(x) = b\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right)\right)\left(\frac{1}{x^{\alpha}} z(x) + z'(x)\right),$$

$$y''(x) = b\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right)\right)\left(-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} z(x) + \frac{1}{x^{2\alpha}} z(x) + \frac{2}{x^{\alpha}} z'(x) + z''(x)\right),$$

$$y(0) = a = b\exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}\right) z(0) \Rightarrow z(0) = \frac{a}{b}\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\right),$$

$$y(1) = b = be^{0} z(1) \Rightarrow z(1) = 1.$$

Учитывая эти соотношения, получаем:

$$\varepsilon\left(z''(x) + \frac{2}{x^{\alpha}} z'(x) - \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} z(x) + \frac{1}{x^{2\alpha}} z(x)\right) + x^{\alpha} z'(x) = 0, \tag{4}$$

$$z(0) = z^{0},\ z(1) = 1, \tag{5}$$

где $z^{0} = \frac{a}{b}\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$.

Решение задачи будем искать в виде

$$z(x) = z_0(x) + \pi_0(t) + \mu(z_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^{k}(z_k(x) + \pi_k(t)) + \ldots, \tag{6}$$

где $t = \dfrac{x}{\mu^m}$, $\varepsilon = \mu^{m+n}, \alpha = \dfrac{n}{m}, \left(n < m < 3n, n, m \in N\right)$.

Подставляя (6) в (4) имеем

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(Y_k''(x) + \frac{2}{x^\alpha}Y_k'(x) - \left(\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} - \frac{1}{x^{2\alpha}}\right)Y_k(x)\right) +$$

$$+x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k Y_k'(x) + \mu^n t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-m}\pi_k'(t) + \tag{7}$$

$$+\mu^{n+m}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\frac{1}{\mu^{2m}}\pi_k''(t) + \frac{2}{\mu^{n+m}t^\alpha}\pi_k'(t) - \frac{\alpha}{\mu^{n+m}t^{1+\alpha}}\pi_k(t) + \frac{1}{\mu^{2n}t^{2\alpha}}\pi_k(t)\right) = 0.$$

Из граничных условий (2) имеем

$$z_0(1)=1,\ z_k(1)=0,\ \pi_0(0) = z^0 - z_0(0),\ \pi_0(\tilde{\mu}) = 0,\ \tilde{\mu} = 1/\mu^m, \tag{8}$$

$$\pi_k(0) = -z_k(0), \pi_k(\tilde{\mu}) = 0,\ k = 1,2,...$$

Из равенства (7) и (8) для $z_0(x)$, имеем:

$$x^\alpha z_0'(x) = 0,\ 0 < x < 1,\quad z_0(1) = 1. \tag{9}$$

Задача (9) имеет единственное решение $z_0(x)=1$.

Пусть $z_k(x)\equiv 0$, $k=1,2,...$ Тогда равенство (7) представимо в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\frac{1}{\mu^{m-n}}\left(\pi_k''(t) + t^\alpha\pi_k'(t)\right) + \frac{2}{t^\alpha}\pi_k'(t) - \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_k(t) + \frac{\mu^{m-n}}{t^{2\alpha}}\pi_k(t)\right) - \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}} + \frac{\mu^{m-n}}{t^{2\alpha}} = 0.$$

Отсюда, для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_j \equiv \pi_j''(t) + t^\alpha\pi_j'(t) = 0, 0<t<\tilde{\mu},$$

$$\pi_0(0) = z^0 - 1, \pi_{j+1}(0) = 0, \pi_j(\tilde{\mu}) = 0,\ j = \overline{0, m-n-1} \tag{10}$$

$$L\pi_{m-n}(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_0(t) - \frac{2}{t^\alpha}\pi_0'(t), \tag{11}$$

$$L\pi_j(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{j-(m-n)}(t) - \frac{2}{t^\alpha}\pi_{j-(m-n)}'(t),\ j = \overline{m-n, 2(m-n)-1} \tag{12}$$

$$L\pi_{2(m-n)}(t) = -\frac{1}{t^{2\alpha}} + \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{m-n}(t) - \frac{2}{t^\alpha}\pi_{m-n}'(t) - \frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_0(t), \tag{13}$$

$$L\pi_j(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{j-(m-n)}(t) - \frac{2}{t^\alpha}\pi_{j-(m-n)}'(t) - \frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{j-2(m-n)}(t),\ 2(m-n) \le j \tag{14}$$

$$\pi_s(0) = 0, \pi_s(\tilde{\mu}) = 0,\ s = 1,2,... \tag{15}$$

Как нам известно, решение задачи (10) при j=0 имеет вид:

$$\pi_0(t)=\left(z^0-1\right)A\int\limits_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds,\ A=\left(\int\limits_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds\right)^{-1}.$$

и $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$.

С помощью теоремы 2.8 доказывается существование, единственность и ограниченность решений уравнений (11)-(13) с соответствующими краевыми условиями (14): $|\pi_k(t)|<l$=const, $t\in[0,\tilde{\mu}]$.

При $t\to\tilde{\mu}$ для функции $\pi_k(t)$ справедливы асимптотические разложения

$$\pi_{2k-1}(t)=O\left(\frac{1}{t^{2\alpha+(3\alpha-1)k}}\right),\ \pi_{2k}(t)=O\left(\frac{1}{t^{(3\alpha-1)k}}\right),\ k=1,2,...,t\to\tilde{\mu}=\mu^{-m}.$$

Кроме того,

$$\pi_k(t)=O\left(\sqrt[m+1]{t^k}\right),\ t\to 0,\ k=0,1,2,...$$

Таким образом мы доказали ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\tilde{\mu}]$, когда $\mu\to 0$.

Теперь докажем, что ряд (6) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим выражение

$$z_p(x)=1+\sum_{k=0}^{(m+n)p}\mu^k\pi_k(t)+R_p(x,\varepsilon). \tag{15}$$

Подставляя (15) в задачу (1)-(2) и учитывая значения $\pi_k(t)$ имеем:

$$\varepsilon\left(R''_p(x,\varepsilon)+\frac{2}{x^\alpha}R'_p(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}\right)R_p(x,\varepsilon)\right)+x^\alpha R'_p(x,\varepsilon)=\varepsilon^p\Phi(t,\mu), \tag{16}$$

$$R_p(0,\varepsilon)=0,\qquad R_p(1,\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где

$$\Phi(t,\mu)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{(m+n)p}(t)-\frac{2}{t^\alpha}\pi'_{(m+n)p}(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{(m+n)p-(m-n)}(t)+...-$$
$$-\mu^{p(n+m)+m-n}\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{(m+n)p}(t).$$

Нетрудно заметить, что $\Phi(t,\mu)=\mathrm{O}(1),\ \mu\to 0,\ t\in[0,\mu^{-m}]$.

Пусть

$$R_n(x,\varepsilon)=\exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right)r(x,\varepsilon),$$

тогда задача (16)-(17) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon)+x^{\alpha}r'(x,\varepsilon)-r(x,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right)\varepsilon^n\Phi(t,\mu),\quad 0<x<1,$$

$$r(0,\varepsilon)=0,\;\; r(1,\varepsilon)=0.$$

Пусть $M=\max\limits_{t\in[0,\tilde{\mu}]}\Phi(t,\mu)$, $\mu\to 0$. Применяя теорему 26.4 [26], получаем:

$$\left|r(x,\varepsilon)\right|\le\varepsilon^n M\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right).$$

Отсюда находим,

$$\left|R_n(x,\varepsilon)\right|\le\varepsilon^n M,\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Справедлива

Теорема 3.4. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=b\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha}-1\right)\right)\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right).$$

Заключение по главе 3

В главе 3 с помощью метода преобразования и обобщенным методом пограничных функций построены равномерные асимптотические разложения решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с негладким коэффициентом. Исследованы несколько различных случаев. Приведены точные асимптотические оценки для остаточных членов асимптотических рядов, т.е. асимптотические разложения обоснованы.

ГЛАВА 4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

В данной главе рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с негладким коэффициентом. Доказывается применимость обобщенного метода пограничных функций для построения полного асимптотического разложения решения подобных задач.

§ 4.1. Случай особой точки степени одна второй

Постановка задачи. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи Коши

$$\varepsilon y'(x)+\sqrt{x}Ay(x)=f(x),\ 0<x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=y^0, \tag{2}$$

где $f(x),\ y(x),\ y^0\in R^n$, A – положительная квадратная матрица n-го порядка с собственными значениями $0<\lambda_i$, λ_i–const, $\lambda_i\neq\lambda_j$ $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $f(x)\in C^\infty$.

Как нам известно, существует такая невырожденная квадратная матрица B порядка n, для которого справедливо равенство

$$B^{-1}AB=D,$$

где $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\det(B)\neq 0$.

Применяя подстановку $y(x)=Bz(x)$ к задаче (1)-(2), затем полученные равенства, умножая слева на матрицу B^{-1}, приведем к стандартному виду

$$\varepsilon z'(x)+\sqrt{x}Dz(x)=\tilde{f}(x),\ 0<x\le 1, \tag{3}$$

$$z(0)=z^0, \tag{4}$$

где $\tilde{f}(x)=B^{-1}f(x),\ z^0=B^{-1}y^0$.

Если решение задачи (3)-(4) искать методом малого параметра:

$$z(x)=z_0(x)+\varepsilon z_1(x)+\varepsilon^2 z_2(x)+\ldots+\varepsilon^n z_n(x)+\ldots\ , \qquad (5)$$

то получим

$$z_0(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}D^{-1}\tilde{f}(x)\sim x^{-1/2}D^{-1}\tilde{f}(0),\ x\to 0,$$

$$z_1(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}D^{-1}z'_0(x)=O\left(x^{-2}\right),\ x\to 0,$$

$$\ldots$$

$$z_n(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}D^{-1}z'_{n-1}(x)=O\left(x^{-\frac{3n+1}{2}}\right),\ \ x\to 0,\ n\in N.$$

Ряд можно представить в виде

$$z(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\tilde{z}_0(x)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^3}}\tilde{z}_1(x)+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^3}}\right)^2\tilde{z}_2(x)+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^3}}\right)^n\tilde{z}_n(x)+\ldots\right),$$

где $\tilde{z}_n(x)\in C[0,1]$, n=0,1,…

Следовательно, ряд (5) является асимптотическим только при $x\in[\varepsilon^{2\alpha/3},1],\ 0<\alpha<1$. Причем это асимптотическое решение не удовлетворяет начальному условию (4).

Решения задачи Коши (3)-(4) ищем в виде

$$z(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)), \qquad (6)$$

где $\varepsilon=\mu^3,\ t=x/\mu^2$.

Подставляя соотношение (6) в равенство (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\mu^3 z'_k(x)+\sqrt{x}Dz_k(x)\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi'_{k-1}(t)+\sqrt{t}D\pi_{k-1}(t)\right)=\tilde{f}(x)-h(x)+h(x), \qquad (7)$$

где

$$h(x)=h_0+\varepsilon\frac{h_1}{\sqrt{x}}+\varepsilon^2 h_2+\varepsilon^3\frac{h_3}{\sqrt{x}}+\ldots+\varepsilon^{2n}h_{2n}+\varepsilon^{2n+1}\frac{h_{2n+1}}{\sqrt{x}}+\ldots,$$

h_k – пока неизвестные вектор матрицы.

Из равенства (7) имеем:

$$\sqrt{x}Dz_0(x)=\tilde{f}(x)-h_0,$$

$$\sqrt{x}Dz_1(x)=0,\ \ \sqrt{x}Dz_2(x)=0,$$

$$z'_{3k-3}(x)+\sqrt{x}Dz_{3k}(x)=\begin{cases}-h_k & \text{при } 3k \text{ - четном,}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}h_k & \text{при } 3k \text{ - нечетном,}\end{cases}$$

$$z'_{3k-2}(x)+\sqrt{x}Dz_{3k+1}(x)=0,$$

$$z'_{3k-1}(x)+\sqrt{x}Dz_{3k+2}(x)=0,\ k\in N.$$

Отсюда получаем

$$z_0(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}D^{-1}\left(\tilde{f}(x)-h_0\right).$$

Пусть $h_0=\tilde{f}(0)$, тогда $z_0(x)\in C[0,1]$,

$$z_0(x)=\sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{0,k+1},\ \ x\to 0\,.$$

Заметим, что

$$z_{3k+1}(x)\equiv 0,\qquad z_{3k+2}(x)\equiv 0,\ k=0,1,\ldots;$$

$$z_{3k}(x)=\sqrt{x}\sum_{j=0}^{\infty}x^j z_{3k,j+1},\ x\to 0, \text{ при } 3k-\text{четном}, \text{ если } h_k=-z'_{3k-3}(0);$$

$$z_{3k}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}x^j z_{3k,j},\ x\to 0, \text{ при } 3k-\text{нечетном}, \text{ если } h_k=-\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\,z'_{3k-3}(x).$$

Вспомогательный ряд $h(x)$ запишем в виде:

$$h(\mu^2 t)=h_0+\mu^2\frac{h_1}{\sqrt{t}}+\mu^6 h_2+\mu^8\frac{h_3}{\sqrt{t}}+\ldots+\mu^{6n}h_{2n}+\mu^{6n+2}\frac{h_{2n+1}}{\sqrt{t}}+\ldots$$

Из (7) имеем:

$$\pi'_{6k-1}(t)+\sqrt{t}D\pi_{6k-1}(t)=h_{2k},\ \ k=0,1,\ldots;$$

$$\pi'_{6k}(t)+\sqrt{t}D\pi_{6k}(t)=0,\ \ k=0,1,\ldots;$$

$$\pi'_{6k+1}(t)+\sqrt{t}D\pi_{6k+1}(t)=\frac{h_{2k+1}}{\sqrt{t}},\ \ k=0,1,\ldots;$$

$$\pi'_{6k+j}(t)+\sqrt{t}D\pi_{6k+j}(t)=0,\ j=2,3,4,\ k=0,\ 1,\ldots$$

Начальное условие для функций $\pi_k(t)$ берем в виде:

$$\pi_{-1}(0)=0,\ \pi_0=z^0-z_0(0),\ \pi_k(0)=-\pi_k(0),\ k=1,2,\ldots,$$

т.е.

$$\pi_{-1}(0)=0,\ \ \pi_0=z^0,\ \ \pi_{6k+3}(0)=-z_{6k+3}(0),\ \ k=0,1,2,\ldots;\ \ \pi_{6k+j}(0)=0,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5.$$

Явные решения этих задач представимо виде, соответственно:

$$\pi_{6k-1}(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}\left(\int_0^t e^{\frac{2}{3}s^{3/2}D}ds\right)h_{2k},\ \ k=0,1,\ldots,$$

$$\pi_0(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}z^0,$$

$$\pi_{6k+3}(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}z_{6k+3}(0),\ k=0,1,2,\ldots$$

$$\pi_{6k+1}(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}\left(\int_0^t s^{-1/2}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}D}ds\right)h_{2k+1},\ k=0,1,\ldots$$

$$\pi_{6k+j}(x)\equiv 0,\ j=2,4,6,\ k=0,1,\ldots$$

Заметим, что матрицы-функции $\pi_0(t)$, $\pi_{6k+3}(t)$ экспоненциально убывают при $t\to\mu^{-2}$. А функций $\pi_{6k-1}(t)$, $\pi_{6k+1}(t)$ степенным ростом:

$$\pi_{6k-1}(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),\ \ \ \pi_{6k+1}(t)=O\left(\frac{1}{t}\right),\ \ t\to\infty,\ k=0,1,2,\ldots$$

А также справедливы соотношения

$$\pi_0(t)=\pi_{6k+3}(t)=\pi_{6k-1}(t)=O(1),\ \pi_{6k+1}(t)=O\left(\sqrt{t}\right),\ t\to 0,\ \ k=0,1,2,\ldots$$

Таким образом, нами определены все члены асимптотического разложения (6).

Для обоснования асимптотического разложения (6) оценим остаточный член этого ряда. Пусть

$$z_m(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{6m+3}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)),$$

$$R_m(x,\varepsilon)=z(x)-z_m(x).$$

Тогда для остаточной функции $R_m(x,\varepsilon)$ получим задачу

$$\varepsilon R_m'(x,\varepsilon)+\sqrt{x}DR_m(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{2m+2}z'_{6m+3}(x),\ 0<x\le 1,$$

$$R_m(0,\varepsilon)=0.$$

Эта задача имеет единственное решение

$$R_m\left(x,\varepsilon\right)=-\varepsilon^{2m+1}e^{-\frac{2}{3\varepsilon}x^{3/2}D}\int_0^x z'_{6m+3}\left(s\right)e^{\frac{2}{3\varepsilon}s^{3/2}D}ds,$$

и для него справедлива оценка $R_m(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{2m+1})$, $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le 1$.

Доказана

Теорема 4.1. Для решения задачи при $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le 1$ справедливо асимптотическое разложение (6).

§ 4.2. Случай особой точки степени одна третьей

Постановка задачи. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи Коши

$$\varepsilon y'(x)+\sqrt[3]{x}Ay(x)=f(x),\ 0<x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=y^0, \tag{2}$$

где $f(x),\ y(x),\ y^0\in R^n$, A – положительная квадратная матрица n-го порядка с собственными значениями $0<\lambda_i$, λ_i–const, $\lambda_i\neq\lambda_j$ $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $f(x)\in C^\infty$.

Как нам известно, существует такая невырожденная квадратная матрица B порядка n, для которого справедливо равенство

$$B^{-1}AB=D,$$

где $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\det(B)\neq 0$.

Применяя подстановку $y(x)=Bz(x)$ к задаче (1)-(2), затем полученные равенства, умножая слева на матрицу B^{-1}, приведем к стандартному виду

$$\varepsilon z'(x)+\sqrt[3]{x}Dz(x)=\tilde f(x),\ 0<x\le 1, \tag{3}$$

$$z(0)=z^0, \tag{4}$$

где $\tilde f(x)=B^{-1}f(x),\ z^0=B^{-1}y^0$.

Если решение задачи (3)-(4) искать методом малого параметра:

$$z(x)=z_0(x)+\varepsilon z_1(x)+\varepsilon^2 z_2(x)+\ldots+\varepsilon^n z_n(x)+\ldots, \tag{5}$$

то получим

$$z_0(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}D^{-1}\tilde f(x)\sim x^{-1/3}D^{-1}\tilde f(0),\ x\to 0,$$

$$z_1(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}D^{-1}z'_0(x)=O\left(x^{-5/3}\right),\ \ x\to 0,$$

$$z_2(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}D^{-1}z'_1(x)=O\left(x^{-3}\right),\ \ x\to 0,$$

$$\ldots$$

$$z_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} D^{-1} z'_{n-1}(x) = O\left(x^{-\frac{4n+1}{3}}\right), \;\; x \to 0, \; n \in N.$$

Ряд можно представить в виде

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\tilde{z}_0(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^4}}\tilde{z}_1(x) + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^4}}\right)^2 \tilde{z}_2(x) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x^4}}\right)^n \tilde{z}_n(x) + \ldots\right),$$

где $\tilde{z}_n(x) \in C[0,1]$, n=0,1,…

Следовательно, ряд (5) является асимптотическим только при $x \in [\varepsilon^{3\alpha/4}, 1], 0 < \alpha < 1$.

Решения задачи Коши (3)-(4) ищем в виде

$$z(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (z_k(x) + \pi_k(t)), \tag{6}$$

где $\varepsilon = \mu^4, t = x / \mu^3$.

Подставляя соотношение (6) в равенство (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\mu^4 z'_k(x) + \sqrt[3]{x} D z_k(x)\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\pi'_{k-1}(t) + \sqrt[3]{t} D \pi_{k-1}(t)\right) = \tilde{f}(x) - h(x) + h(x), \tag{7}$$

где

$$h(x) = h_0 + \varepsilon \frac{h_1}{\sqrt[3]{x}} + \varepsilon^2 \frac{h_2}{\sqrt[3]{x^2}} + \varepsilon^3 h_3 + \ldots + \varepsilon^{3n} h_{3n} + \varepsilon^{3n+1} \frac{h_{3n+1}}{\sqrt[3]{x}} + \varepsilon^{3n+2} \frac{h_{3n+2}}{\sqrt[3]{x^2}} + \ldots,$$

h_k – пока неизвестные вектор матрицы.

Из равенства (7) имеем:

$$\sqrt[3]{x} D z_0(x) = \tilde{f}(x) - h_0,$$

$$\sqrt{x} D z_j(x) = 0, \;\; j \neq 4k, \; j,k \in N,$$

$$z'_0(x) + \sqrt[3]{x} D z_4(x) = -\frac{h_1}{\sqrt[3]{x}},$$

$$z'_4(x) + \sqrt[3]{x} D z_8(x) = -\frac{h_2}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$z'_8(x) + \sqrt[3]{x} D z_{12}(x) = -h_3,$$

$$z'_{12k}(x)+\sqrt[3]{x}Dz_{12k+4}(x)=-\frac{h_{3k+1}}{\sqrt[3]{x}},\ k\in N,$$

$$z'_{12k+4}(x)+\sqrt[3]{x}Dz_{12k+8}(x)=-\frac{h_{3k+2}}{\sqrt[3]{x^2}},k\in N,$$

$$z'_{12k+8}(x)+\sqrt[3]{x}Dz_{12(k+1)}(x)=-h_{3(k+1)},\ k\in N\,.$$

Отсюда получаем

$$z_0(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}D^{-1}\left(\tilde{f}(x)-h_0\right),$$

Пусть $h_0=\tilde{f}(0)$, тогда $z_0(x)\in C[0,1]$,

$$z_0(x)=\sqrt[3]{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{0,k+1},\ \ x\to 0\,.$$

Заметим, что

$$z_{4k+1}(x)\equiv 0,\ \ z_{4k+2}(x)\equiv 0,\ \ z_{4k+3}(x)\equiv 0,\ \ k=0,1,\dots;$$

Если $h_1=-\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}y'_0(x)$, то

$$z_4(x)\in C[0,1],\ z_4(x)=\sqrt[3]{x}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{4,k+1},\ \ x\to 0\,,$$

Если $h_2=-\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}y'_4(x)$, то

$$z_8(x)\in C[0,1],\ z_8(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{8,k},\ \ x\to 0\,,$$

Если $h_3=-y'_8(0)$, то

$$z_{12}(x)\in C[0,1],\ z_{12}(x)=\sqrt[3]{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{12,k+1},\ \ x\to 0\,.$$

Аналогично, определяем неизвестные вектор-матрицы h_k:

$$h_{3k}=-y'_{12k-4}(0);\qquad\qquad h_{3k+1}=-\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}y'_{12k}(x);$$

$$h_{3k+2}=-\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}y'_{12k+4}(x);\ k\in N\,.$$

Таким образом, нами определены все коэффициент-матрицы h_k.

Вспомогательный ряд $h(x)$ запишем в виде:

$$h(\mu^3 t) = h_0 + \mu^3 \frac{h_1}{\sqrt[3]{t}} + \mu^6 \frac{h_2}{\sqrt[3]{t^2}} + \mu^{12} h_3 + \ldots + \mu^{12n} h_{3n} + \mu^{12n+3} \frac{h_{3n+1}}{\sqrt[3]{t}} + \mu^{12n+6} \frac{h_{3n+2}}{\sqrt[3]{t^2}} + \ldots$$

Так как

$$z_0(0) = 0,\ z_s(0) = 0,\ s \neq 12k - 4,\ s,k \in N,$$

из (7) имеем:

$$\pi'_{12k-1}(t) + \sqrt[3]{t} D \pi_{12k-1}(t) = h_{3k},\ 0 < t \leq 1/\mu^3,\ \pi_{12k-1}(0) = 0,\ k=0,1,\ldots;$$

$$\pi'_{12k+2}(t) + \sqrt[3]{t} D \pi_{12k+2}(t) = \frac{h_{3k+1}}{\sqrt[3]{t}},\ 0 < t \leq 1/\mu^3,\ \pi_{12k+2}(0) = 0,\ k=0,1,\ldots$$

$$\pi'_{12k+5}(t) + \sqrt[3]{t} D \pi_{12k+5}(t) = \frac{h_{3k+2}}{\sqrt[3]{t^2}},\ 0 < t \leq 1/\mu^3,\ \pi_{12k+5}(0) = 0,\ k=0,1,\ldots;$$

$$\pi'_{12k+j}(t) + \sqrt[3]{t} D \pi_{12k+j}(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1/\mu^3, \quad j = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10,$$

$$\pi_{12k+s}(0) = 0, \quad s = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \quad \pi_0(0) = z^0, \quad \pi_{12k+8}(0) = -z_{12k+8}(0),$$

$$k=0,1,\ldots$$

Явные решения этих задач представимо виде, соответственно:

$$\pi_{12k-1}(t) = e^{-\frac{3}{4} t^{4/3} D} \left(\int_0^t e^{\frac{3}{4} s^{4/3} D} ds \right) h_{3k}, k = 0,1,\ldots,$$

$$\pi_{12k+2}(t) = e^{-\frac{3}{4} t^{4/3} D} \left(\int_0^t e^{\frac{3}{4} s^{4/3} D} s^{-1/3} ds \right) h_{3k+1}, k = 0,1,\ldots,$$

$$\pi_{12k+5}(t) = e^{-\frac{3}{4} t^{4/3} D} \left(\int_0^t e^{\frac{3}{4} s^{4/3} D} s^{-2/3} ds \right) h_{3k+2}, k = 0,1,\ldots$$

$$\pi_0(t) = e^{-\frac{3}{4} t^{4/3} D} z^0,$$

$$\pi_{12k+8}(t) = -e^{-\frac{3}{4} t^{4/3} D} z_{12k+8}(0), k = 0,1,\ldots$$

$$\pi_{12k+j}(t) \equiv 0,\ j = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10;\ k = 0,1,\ldots$$

Заметим, что матрицы-функции $\pi_0(t)$, $\pi_{12k+8}(t)$ экспоненциально убывают при $t \to 1/\mu^3$. А функций $\pi_{12k-1}(t)$, $\pi_{12k+2}(t)$, $\pi_{12k+5}(t)$ степенным ростом:

$$\pi_{12k-1}(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} \right), \pi_{12k+2}(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right), \pi_{12k+5}(t) = O\left(\frac{1}{t} \right), t \to \infty, k=0,1,2,\ldots$$

А также справедливы соотношения

$$\pi_0(t)=\pi_{12k+8}(t)=\pi_{12k-1}(t)=O(1),$$

$$\pi_{12k+5}(t)=O\left(\sqrt[3]{t}\right),\ \pi_{12k+2}(t)=O\left(\sqrt[3]{t^2}\right),\ t\to 0,\ k=0,1,...$$

Таким образом, нами определены все члены асимптотического разложения (6).

Для обоснования асимптотического разложения (6) оценим остаточный член этого ряда. Пусть

$$z_m(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{12m+8}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)),$$

$$R_m(x,\varepsilon)=z(x)-z_m(x).$$

Тогда для остаточной функции $R_m(x,\varepsilon)$ получим задачу

$$\varepsilon R_m{}'(x,\varepsilon)+\sqrt[3]{x}DR_m(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{3m+3}z'_{12m+8}(x),\ 0<x\le 1,$$

$$R_m(0,\varepsilon)=0.$$

Эта задача имеет единственное решение

$$R_m(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{3m+2}e^{-\frac{3}{4\varepsilon}x^{4/3}D}\int_0^x z'_{12m+8}(s)e^{\frac{3}{4\varepsilon}s^{4/3}D}ds,$$

и для него справедлива оценка $R_m(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{3m+2})$, $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le 1$.

Доказана

Теорема 4.2. Для решения задачи при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение (6).

§ 4.3. Общий случай, особой точки дробной степени меньше единицы

Постановка задачи. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи Коши

$$\varepsilon y'(x)+\sqrt[m]{x}Ay(x)=f(x),\ 0<x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=y^0, \tag{2}$$

где $f(x),\ y(x),\ y^0\in R^n$, A – положительная квадратная матрица n-го порядка с собственными значениями $0<\lambda_i$, λ_i–const, $\lambda_i\neq\lambda_j$ $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $f(x)\in C^\infty$, m – фиксированное натуральное число.

Как нам известно, существует такая невырожденная квадратная матрица B порядка n, для которого справедливо равенство

$$B^{-1}AB=D,$$

где $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\det(B)\neq 0$.

Применяя подстановку $y(x)=Bz(x)$ к задаче (1)-(2), затем полученные равенства, умножая слева на матрицу B^{-1}, приведем к стандартному виду

$$\varepsilon z'(x)+\sqrt[m]{x}Dz(x)=\tilde f(x),\ 0<x\le 1, \tag{3}$$

$$z(0)=z^0, \tag{4}$$

где $\tilde f(x)=B^{-1}f(x),\ z^0=B^{-1}y^0$.

Если решение задачи (3)-(4) искать методом малого параметра:

$$z(x)=z_0(x)+\varepsilon z_1(x)+\varepsilon^2 z_2(x)+\ldots+\varepsilon^n z_n(x)+\ldots, \tag{5}$$

то получим

$$z_0(x)=\frac{1}{\sqrt[m]{x}}D^{-1}\tilde f(x)\sim x^{-1/m}D^{-1}\tilde f(0),\ x\to 0,$$

$$z_1(x)=-\frac{1}{\sqrt[m]{x}}D^{-1}z'_0(x)=O\left(x^{-(m+2)/m}\right),\ x\to 0,$$

$$z_2(x)=-\frac{1}{\sqrt[m]{x}}D^{-1}z'_1(x)=O\left(x^{-(2m+3)/m}\right),\ x\to 0$$

$$\dots$$

$$z_n(x) = -\frac{1}{\sqrt[m]{x}} D^{-1} z'_{n-1}(x) = O\left(x^{-\frac{n(m+1)+1}{m}}\right),\ x \to 0,\ n \in N.$$

Ряд можно представить в виде

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt[m]{x}}\left(\tilde{z}_0(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{x^{m+1}}}\tilde{z}_1(x) + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{x^{m+1}}}\right)^2 \tilde{z}_2(x) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{x^{m+1}}}\right)^n \tilde{z}_n(x) + \dots\right),$$

где $\tilde{z}_n(x) \in C[0,1]$, n=0,1,…

Следовательно, ряд (5) является асимптотическим только при $x \in [\varepsilon^{m\alpha/(m+1)},1],\ 0 < \alpha < 1$.

Решения задачи Коши (3)-(4) ищем в виде

$$z(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k (z_k(x) + \pi_k(t)), \qquad (6)$$

где $\varepsilon = \mu^{m+1}, t = x/\mu^m$.

Подставляя соотношение (6) в равенство (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\mu^{m+1}z'_k(x) + \sqrt[m]{x}Dz_k(x)\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi'_{k-1}(t) + \sqrt[m]{t}D\pi_{k-1}(t)\right) = \tilde{f}(x) - h(x) + h(x), \quad (7)$$

где

$$h(x) = h_0 + \varepsilon\frac{h_1}{\sqrt[m]{x}} + \varepsilon^2\frac{h_2}{\sqrt[m]{x^2}} + \dots + \varepsilon^{m-1}\frac{h_{m-1}}{\sqrt[m]{x^{m-1}}} + \varepsilon^m h_m + \dots +$$

$$+\varepsilon^{mn}h_{mn} + \varepsilon^{mn+1}\frac{h_{mn+1}}{\sqrt[m]{x}} + \varepsilon^{mn+2}\frac{h_{mn+2}}{\sqrt[m]{x^2}} + \dots + \varepsilon^{mn+m-1}\frac{h_{mn+m-1}}{\sqrt[m]{x^{m-1}}} + \dots,$$

h_k – пока неизвестные вектор матрицы.

Из равенства (7) имеем:

$$\sqrt[m]{x}Dz_0(x) = \tilde{f}(x) - h_0,$$

$$\sqrt[m]{x}Dz_j(x) = 0,\ j \neq (m+1)k,\ j,k \in N,$$

$$z'_0(x) + \sqrt[m]{x}Dz_{m+1}(x) = -\frac{h_1}{\sqrt[m]{x}},$$

$$z'_{m+1}(x) + \sqrt[m]{x}Dz_{2(m+1)}(x) = -\frac{h_2}{\sqrt[m]{x^2}},$$

$$\dots$$

$$z'_{(m-2)(m+1)}(x)+\sqrt[m]{x}Dz_{(m-1)(m+1)}(x)=-\frac{h_{m-1}}{\sqrt[m]{x^{m-1}}},$$

$$z'_{(m-1)(m+1)}(x)+\sqrt[m]{x}Dz_{m(m+1)}(x)=-h_m,$$

$$z'_{m(m+1)k}(x)+\sqrt[m]{x}Dz_{(m+1)(mk+1)}(x)=-\frac{h_{mk+1}}{\sqrt[m]{x}},\ k\in N,$$

$$z'_{m(m+1)(k+1)}(x)+\sqrt[m]{x}Dz_{(m+1)(mk+2)}(x)=-\frac{h_{mk+2}}{\sqrt[m]{x^2}},\ k\in N,$$

$$\dots$$

$$z'_{(m+1)(mk+m-2)}(x)+\sqrt[3]{x}Dz_{(m+1)(mk+m-1)}(x)=-\frac{h_{mk+m-1}}{\sqrt[3]{x^{m-1}}},k\in N,$$

$$z'_{(m+1)(mk+m-1)}(x)+\sqrt[3]{x}Dz_{(m+1)(mk+m)}(x)=-h_{m(k+1)},\ k\in N.$$

Отсюда получаем

$$z_0(x)=\frac{1}{\sqrt[m]{x}}D^{-1}\left(\tilde{f}(x)-h_0\right),$$

Пусть $h_0=\tilde{f}(0)$, тогда $z_0(x)\in C[0,1]$,

$$z_0(x)=\sqrt[m]{x^{m-1}}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{0,k},\ x\to 0,$$

Заметим, что

$$z_{(m+1)k+j}(x)\equiv 0,\ j=1,2,...,m;\ k=0,1,...$$

Если $h_1=-\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x}y'_0(x)$, то

$$z_{m+1}(x)\in C[0,1],\ z_{m+1}(x)=\sqrt[m]{x^{m-2}}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{m+1,k},\ x\to 0,$$

Если $h_2=-\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x^{m-1}}\,z'_{m+1}(x)$, то

$$z_{2(m+1)}(x)\in C[0,1],\ z_{2(m+1)}(x)=\sqrt[m]{x^{m-3}}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{2(m+1),k},\ x\to 0,$$

и т.д.

Если $h_m=-z'_{(m-1)(m+1)}(0)$, то

$$z_{m(m+1)}(x)\in C[0,1],\ z_{m(m+1)}(x)=\sqrt[m]{x^{m-1}}\sum_{k=0}^{\infty}x^k z_{m(m+1),k},\ \ x\to 0.$$

Аналогично, определяем остальные неизвестные вектор-матрицы h_k:

$$h_{mk} = -z'_{(m+1)(mk-1)}(0);$$

$$h_{mk+j} = -\lim_{x\to 0} \sqrt[m]{x^j}\, z'_{(m+1)(mk+j-1)}(x);\ j = 1,2,...,m-1;\ k \in N.$$

Таким образом, нами определены все коэффициент-матрицы h_k.

Вспомогательный ряд $h(x)$ запишем в виде:

$$h(t\mu^m) = h_0 + \mu^m \frac{h_1}{\sqrt[m]{t}} + \mu^{2m} \frac{h_2}{\sqrt[m]{t^2}} + ... + \mu^{(m-1)m} \frac{h_{m-1}}{\sqrt[m]{t^{m-1}}} + \mu^{(m+1)m} h_m + ... +$$

$$+\mu^{(m+1)mn} h_{mn} + \mu^{(m+1)mn+m} \frac{h_{mn+1}}{\sqrt[m]{t}} + \mu^{(m+1)mn+2m} \frac{h_{mn+2}}{\sqrt[m]{t^2}} + ... + \mu^{(m+1)mn+(m-1)m} \frac{h_{mn+m-1}}{\sqrt[m]{t^{m-1}}} + ...$$

Так как

$$z_0(0) = 0,\ z_s(0) = 0,\ s \neq (m+1)(mk-1),\ s,k \in N,$$

из (7) имеем:

$$L\pi_{m(m+1)k-1} \equiv \pi'_{m(m+1)k-1}(t) + \sqrt[m]{t} D \pi_{m(m+1)k-1}(t) = h_{mk},\ 0 < t \le 1/\mu^m,\ \pi_{m(m+1)k-1}(0) = 0,$$

k=0,1,…;

$$L\pi_{m(m+1)k+m-1}(t) = \frac{h_{mk+1}}{\sqrt[m]{t}},\ 0 < t \le 1/\mu^m,\ \pi_{m(m+1)k+m-1}(0) = 0,\ k\text{=}0,1,\dots$$

$$L\pi_{m(m+1)k+2m-1}(t) = \frac{h_{mk+2}}{\sqrt[m]{t^2}},\ 0 < t \le 1/\mu^m,\ \pi_{m(m+1)k+2m-1}(0) = 0,$$

…

$$L\pi_{m(m+1)k+(m-1)m-1}(t) = \frac{h_{mk+m-1}}{\sqrt[m]{t^{m-1}}},\ 0 < t \le 1/\mu^m,\ \pi_{m(m+1)k+(m-1)m-1}(0) = 0,$$

$$L\pi_s(t) = 0,\ 0 < t \le 1/\mu^3,\ s \neq m(m+1)k + jm - 1;\ j = 0,1,...m-1,$$

$$\pi_s(0) = 0,\ \pi_0(0) = z^0,\ \pi_{(m+1)(mk+m-1)}(0) = -z_{(m+1)(mk+m-1)}(0), k \in N.$$

Явные решения этих задач представимо виде, соответственно:

$$\pi_{m(m+1)k-1}(t) = e^{-\frac{m}{m+1} t^{(m+1)/m} D} \left(\int_0^t e^{\frac{m}{m+1} s^{(m+1)/m} D} ds \right) h_{mk},\ k = 0,1,...,$$

$$\pi_{m(m+1)k+m-1}(t) = e^{-\frac{m}{m+1} t^{(m+1)/m} D} \left(\int_0^t e^{\frac{m}{m+1} s^{(m+1)/m} D} s^{-1/m} ds \right) h_{mk+1},\ k = 0,1,...,$$

$$\pi_{m(m+1)k+2m-1}(t)=e^{-\frac{m}{m+1}t^{(m+1)/m}D}\left(\int_0^t e^{\frac{m}{m+1}s^{(m+1)/m}D}s^{-2/m}ds\right)h_{mk+2},\ k=0,1,...$$

$$\dots$$

$$\pi_{m(m+1)k+(m-1)m-1}(t)=e^{-\frac{m}{m+1}t^{(m+1)/m}D}\left(\int_0^t e^{\frac{m}{m+1}s^{(m+1)/m}D}s^{-(m-1)/m}ds\right)h_{mk+m-1},\ k=0,1,...$$

$$\pi_0(t)=e^{-\frac{m}{m+1}t^{(m+1)/m}D}z^0,$$

$$\pi_{(m+1)(mk+m-1)}(t)=-e^{-\frac{m}{m+1}t^{(m+1)/m}D}z_{(m+1)(mk+m-1)}(0),\ k=0,1,...$$

Остальные пограничные функций тождественно равны нулю.

Заметим, что матрицы-функции $\pi_0(t)$, $\pi_{(m+1)(mk+m-1)}(t)$ экспоненциально убывают при $t\to 1/\mu^m$. А функций $\pi_{m(m+1)k+jm-1}(t),\ j=0,1,...,m-1,k=0,1,2,...$ степенным ростом:

$$\pi_{m(m+1)k+jm-1}(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt[m]{t^{j+1}}}\right),\ t\to\mu^{-m};\qquad j=0,1,...,m-1,k=0,1,2,...$$

А также справедливы соотношения

$$\pi_{k-1}(t)=O\left(t^{\alpha}\right),\ 0\le\alpha,\ t\to 0\ ,\ k=0,1,2,...$$

Таким образом, нами определены все члены асимптотического разложения (6).

Для обоснования асимптотического разложения (6) оценим остаточный член этого ряда. Пусть

$$z_p(x)=\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{(m+1)(mp+m-1)}\mu^k(z_k(x)+\pi_k(t)),$$

$$R_p(x,\varepsilon)=z(x)-z_p(x).$$

Тогда для остаточной функции $R_p(x,\varepsilon)$ получим задачу

$$\varepsilon R_p'(x,\varepsilon)+\sqrt[m]{x}DR_p(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{mp+m}z'_{(m+1)(mp+m-1)}(x),\ 0<x\le 1,$$

$$R_p(0,\varepsilon)=0.$$

Эта задача имеет единственное решение

$$R_p\left(x,\varepsilon\right)=-\varepsilon^{mp+m-1}e^{-\frac{m}{(m+1)\varepsilon}x^{(m+1)/m}D}\int_0^x z'_{(m+1)(mp+m-1)}\left(s\right)e^{\frac{m}{(m+1)\varepsilon}s^{(m+1)/m}D}ds\,,$$

и для него справедлива оценка $R_m(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{mp+m-1})$, $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le 1$.

Доказана

Теорема 4.3. Для решения задачи при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение (6).

Заключение по главе 4

Обобщенным методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с негладким коэффициентом. А также получена оценка для остаточной функции асимптотического ряда, т.е. асимптотическое разложение обосновано.

ВЫВОДЫ

В диссертации впервые, методом обобщенных пограничных функций К. Алымкулова, построены асимптотические ряды для краевых задач сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с негладким коэффициентом.

Обобщенным методом погранфункций построены равномерные асимптотические разложения решений начальной задачи для системы сингулярно возмущенных уравнений с негладким коэффициентом (сингулярной точкой).

Построенные разложения с помощью принципа максимума строго обоснованы, т.е. получены оценки остаточных членов любого порядка по малому параметру.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдувалиев, А. О. Асимптотические представления решений некоторых сингулярно возмущенных задач [Текст] / А.О. Абдувалиев, Н.Х. Розов, В.Г. Сушко // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304, – № 4. – С. 777-780.
2. Азимов, Б.А. Обобщенный метод пограничных функций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с негладким коэффициентом [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов, Б.А. Азимов // Сб. тезисов третьей межд. конф. "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений", Чолпон-ата, 2017. – С. 55.
3. Азимов, Б.А. Обобщенный метод пограничных функций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с негладким коэффициентом [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов, Б.А. Азимов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017. – № 5. – С. 52-55.
4. Азимов, Б.А. Асимптотика решения бисингулярной задачи Дирихле с негладким коэффициентом [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов, Б.А. Азимов // Сб. научных работ XXVII Межд. научной конф. Евразийского Научного Объединения. - Москва: ЕНО, 2017. – № 5 (27). – С. 1-5.
5. Азимов, Б.А. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коула со слабой особенностью [Текст] / К. Алымкулов, Б.А. Азимов, Д.А. Турсунов // Приволжский научный вестник, 2016. – № 8 (60). – С. 5-7.
6. Азимов, Б.А. Об асимптотике решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения со слабой особенностью порядка одна третья [Текст] / Б.А. Азимов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016. – № 1 (32). – С. 9-14.
7. Азимов, Б.А. Об асимптотике решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения со слабой особенностью порядка одна четвертая [Текст] / Б.А. Азимов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016. – № 1 (32). – С. 15-19.

8. Азимов, Б.А. Бисингулярная задача Коула со слабой точкой поворота [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов, Б.А. Азимов // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2016. – Т. 39. – № 1. – С. 13-16.
9. Азимов, Б.А. Об асимптотике решения краевой задачи бисингулярно возмущенного уравнения со слабой особенностью [Текст] / Б.А. Азимов // Вестник ОшГУ, 2015. – № 4. Вып. 4. – С. 17-20.
10. Азимов, Б.А. О построении асимптотику решения краевой задачи бисингулярного уравнения Коула со слабой ообенностью методом погранфункций [Текст] / К. Алымкулов, Б.А. Азимов // Вестник ОшГУ, 2014. – №3. Вып. 5. – С. 7-11.
11. Азимов, Б.А. Об асимптотике решения краевой задачи бисингулярного уравнения второго порядка со слабой особенностью [Текст] / К. Алымкулов, Б.А. Азимов // Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и информатики» посвященная 80-летию со дня рождения Академика НАН РК К.А. Касымова. – Алматы, 2015. – С. 1-5.
12. Алымкулов, К. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. –2016. – № 12. – С. 3–11.
13. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, С.Ф. Долбеева // Матем. Заметки. – Москва. – 2013. Т. 94, вып. 4. – С. 484-487.
14. Алымкулов, К. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Матем. заметки, – 2012. – Т. 92. Вып. 6. – С. 819-824.
15. Алымкулов, К. Обобщенный метод погранфункций для эллиптического уравнения, случай внешнего касания особой характеристики с границей области [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: вторая

межд.науч.конф., посвящ. 20-летию образования КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова. – Бишкек, 2013. – Т. 1. – С. 92-97.

16. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для построения асимптотического разложения сингулярно возмущенных уравнений с точкой поворота [Текст] / К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков //. Вестник КГНУ, спец. выпуск, 2011. – С. 35-40.
17. Алымкулов, К. Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке [Текст] / К. Алымкулов // сб. тезисов межд. конф. «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвящ. 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. – Москва. – 2012. – С. 12-14.
18. Бобочко, В.Н. Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота [Текст] / В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем., 2006, – № 5. – С. 8–18.
19. Бобочко, В.Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений [Текст] / В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем., 2005. – № 4. – С. 8–17.
20. Бобочко, В.Н. Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. II [Текст] / В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем., 2002, – № 5, – С. 3–13.
21. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
22. Вишик, М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН, 1957. – Т. 12. – № 4. – С. 3-122.
23. Зимин, А.Б. О некоторых краевых задачах для квазилинейных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной [Текст] / А. Б. Зимин // Дифференц. уравнения, 1969. – Т. 5. – № 2. – С. 357–370.

24. Зимин, А.Б. Задача Коши для линейного уравнения второго порядка с малым параметром, вырождающегося в пределе в уравнение с особыми точками [Текст] / А. Б. Зимин // Дифференц. уравнения, 1969. – Т. 5. – № 9. – С. 1583–1593.
25. Зимин, А.Б. Задача Коши для линейного уравнения n-го порядка с малым параметром при старшей производной в случае сингулярных начальных данных [Текст] / А. Б. Зимин // Дифференц. уравнения, 1970. – Т. 6. – № 5. – С. 861–870.
26. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.
27. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.
28. Ильин, А.М. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой [Текст] / А.М. Ильин, О.Ю. Хачай // Докл. РАН. – 2008. – Т. 422. – № 4. – С. 1–4.
29. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений [Текст] / С.А. Ломов. – Москва: Наука. – 1981. – 400 с.
30. Розов, Н.Х. Внутренний слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [Текст] / Н. Х. Розов, В. Г. Сушко // Матем. моделирование, 1997. – Т. 9. – № 10. – С. 31–32.
31. Розов, Н.Х. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной [Текст] / Н.Х. Розов, В.Г. Сушко, Д.И. Чудова // Фундамент. и прикл. матем., 1998. – Т. 4. Вып. 3. – С. 1063–1095.
32. Тихонов, А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948. – Т. 22 (64). – С. 193-204.
33. Сушко, В.Г. Асимптотические разложения решений бисингулярных задач [Текст]: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / В.Г. Сушко. – Москва, 1997. – 22 с.

34. Треногин, В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика [Текст] / В.А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. Вып. 4. – С. 123–156.
35. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенно-го дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. 1(21). –С. 34–40.
36. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов // Тр. ИММ УрО РАН, 22:1 (2016), 271–281.
37. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена [Текст] / Д.А. Турсунов // Сиб. электронные матем. изв., 14 (2017), 10–21.
38. Хачай, О.Ю. Асимптотика решений сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с дополнительными асимптотическими слоями [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат . наук: 01.01.02 / О.Ю. Хачай. – Екатеринбург, 2013. – 171 с.
39. Хачай, О.Ю. Асимптотическое разложение решения одной бисингулярной задачи Коши для нелинейного обыкновенного уравнения первого порядка [Текст] / О.Ю. Хачай // Екатеринбург, ИММ УрО РАН, Деп. в ВИНИТИ. 2005. – Т. 16. – № 174-В2005. – С. 1–46.
40. Эркебаев У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат . наук: 01.01.02 / У.З. Эркебаев. – Ош, 2016. – 118 с.
41. Azimov, B.A. Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov, B.A. Azimov // Far East Journal of Mathematical Sciences. Vol. 101. No. 3. 2017. pp. 507-516.
42. Azimov, B.A. About generalized Poincare asymptotical solution of the boundary value problem of the singularly perturbed differential equation of ordered two with weakly singulary point uniformization [Text] / K. Alymkulov,

B.A. Azimov // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev. – Bishkek. 2016. pp. 50.

43. Azimov, B.A. Justification of the asymptotic solution of the Lighthills problem about solid cylinder expanding uniformly in still air by the method of uniformization [Text] / K. Alymkulov, B.A. Azimov // Issyk-Kul International Mathematical Forum. Abstracts. 2015. pp. 28.
44. Alymkulov, K. Extension of boundary layer function method for singularly perturbed differential equation of Prandtle-Tichonov and Lighthill types [Text] / K. Alymkulov // Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, June July, 2009. pp 256-259.
45. Alymkulov, K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill’s Model Equation with the regular Singular Point [Text] / K. Alymkulov // AmericanJ.Math. & Statistics, 2013, v. 3, n.1. pp. 53-61.
46. Alymkulov, K. Method of Boundary Layer Function to Solve the Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed Differential Equation of the Order Two with a Turning Point [Text] / K. Alymkulov // Universal Journal of Applied Mathematics, 2014, 2(3). pp. 119-124.
47. Carrier, C.F. Boundary lave problems in applied mathematics [Text] / C.F. Carrier // Comm. Appl. Math., 1954. Vol. 7. pp.11-17.
48. Cole, J.D. Perturbation methods in applied mathematics [Text] / J.D. Cole // Blaisdell Publishing Company, 1968.
49. Kevorkian, J. Perturbation methods in applied mathematics [Text] / J. Kevorkian, J.D. Cole // Springer-Verlag, 1981.
50. Kevorkian, J. Multiple scale and singular perturbations method [Text] / J. Kevorkian, J.D. Cole // Springer, 1996.