МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

На правах рукописи

УДК 517.928

Омуралиев Марсбек Кенешалиевич

О ПОСТРОЕНИИ РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАГЕРСТРОМА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент НАН КР Алымкулов К.

Бишкек-2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $0<\varepsilon$ – малый параметр, μ – тоже малый параметр, связанный с ε.
- **N**, **Z**, **R** – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно.
- $\in$ – «принадлежность».
- $\sim$ – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^{\infty}[0,1]$ – множество дифференцируемых функций на отрезке [0,1]. Например, если функции $f(x)$, $g(x)\in C^{\infty}[0,1]$, то их разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x=0, записываются в виде $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$, где $f_k=f^{(k)}(0)/k!$, $g_k=g^{(k)}(0)/k!$.

  Отметим, что эти ряды являются асимптотическими рядами, т.е.

  $$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k x^k + O(x^{n+1}),\ \ g(x)=\sum_{k=0}^{n} g_k x^k + O(x^{n+1}),\quad x\to 0\ .$$
- O, o – символы порядка (Ландау).
- Ссылка к формулам разделяется тремя точками, сначала номер главы, затем номер параграфа и последний номер формулы и они отделяются точками.

Определение 1. Переменную x назовем внешней переменной.

Определение 2. Внешним решением задачи (1) назовем решение этой задачи, которое удовлетворяет условию $y(1)=1,\ \ y'(1)=a,$ где a=*const* – пока не определена, и существует на конечном, но на большом отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-\alpha}]\ \ (0<\alpha<1)$.

Определение 3. Переменную t назовем внутренней, а функцию $u(t)$ внутренним решением, причем внутреннее решение удовлетворяет краевому условию на бесконечности $u(\infty)=0$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Асимптотический анализ постоянно растет под влиянием различных прикладных задач небесной механики, радиофизики, механики жидкостей и газа, квантовой механики, математической биофизикии медицины и других прикладных исследований. К этому разделу также относится терии возмущений (пертурбаций) дифференциальных уравнений. Впервые такие регулярно возмущенные уравнения возникли в небесной механике. И в теории возмущений возник классический метод разложения по малому параметру решений дифференциальных уравнений, если эти уравнения зависят от малого параметра регулярным образом. Так как если исходное, изучаемое дифференциальнное уравнение зависит от малого параметра аналитически (или достаточно гладко), то решение этого уравнения является также аналитической функцией по малому параметру(гладкой функцией, т.е. разлагается в ряд Тейлороа с остаточным членом). В теорию классического метода возмущений большой вклад внес французский математик Анри Пуанкаре (Jules Henri Poincaré) [32].

Он, впервые дал строгое определение асимптоти ического ряда.

В изучении вопросов обтекания тел механики жидкостей и газа возникли сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, родоначальником появления этой теории, по видимому, был немецкий механик Людвиг Прандтль **(**LudwigPrandtl).

Сингулярно возмущенные уравнения с малым параметром не зависят от малого параметра гладко, т.е. если написать исследуемое уранение в нормальном виде, то это уравнение имеет полюс некоторого порядка по малому параметру. Поэтому при построении асимптотики решения этих уравнений возникают определенные трудности, в связи понижением порядка или появлением особой точки соответствующего невозмущенного уравнения.

Затем в радиофизике также возник сингулярно возмущенное уравнение

Ван-дер-поля (Van der Pol - датский инженер).

По словам известных математиков К. Фридрихса (K. Friedrich) и Л.Сегал (L. Segel) “Асимптотическое описание является прекрасным математическим инструментом анализом явлений природы, но имеет глубокое значение для прикладной математики и вычислительной математики”.

Поэтому, разработка методов построения асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений вызывает большой интерес для прикладных исследований.

В данной диссертационной работе методом структурного сращивания строится равномерная асимптотика решения модельного уравнения Лагерстрома на бесконечном отрезке.

Цель работы

1. Получить равномерные асимптотические разложения решений для возмущенного исходного модельного уравнения Лагерстрома второго порядка на бесконечном отрезке.

2. Получить равномерные асимптотические разложения решений для возмущенного обобщенного модельного уравнения Лагерстрома второго порядка на бесконечном отрезке.

Методы исследования

Применятся метод структурного сращивания, метод доминантного анализа с дальнейшим применением функции Грина.

Научная новизна работы

Впервые получены равномерные асимптотические приближения исходного и обобщенного модельного уравнения Лагерстрома второго порядка на бесконечном отрезке. Доказана асимптотический характер решения и равномерная сходимость построенной асимптотики.

Теоретическая и практическая ценность

Настоящая работа носит теоретический характер, но ее результаты могут найти приложение в механике жидкостей и газа, в квантовой механике и других областях техники и науки.

Основное положение, выносимое на защиту

Построение равномерных асимптотических приближений исходного и обобщенного модельного уравнения Лагерстрома второго порядка на бесконечном отрезке. Доказан не только асимптотический характер решения, но и равномерная сходимость построенной асимптотики. Так как ранее в основном кроме работ Хсиао в случае размерности два (хотя здесь методом сращивания внешнего и внутренного разложений получено полная асимптотика решения, однако оценка остаточного разложения не доказана) были получены только несколько членов разложения, без оценки остаточного члена.

Апробация результатов

Результаты настоящей работы докладывались

- на межрегиональном семинаре математиков южного Кыргызстана (руководитель член-корр. НАН КР К. Алымкулов);

- на международной конференции посвященной 70-летию заслуженного деятеля науки КР, д.ф.-м.н., профессора Б. Арапова (2013 г., г. Ош);
- на международной конференции посвященной 20-летию КРСУ и 100-летию чл.-корр. НАН КР Я.В. Быкова (2013, Ысык-Куль).
- на международном конференции посвященном 70-летию академика РК Отелбаева (2012, г. Астана).

Публикации по теме диссертации

Основное содержание настоящей работы опубликовано в 9 статьях [8]-[15], [31] и в двух тезисах [6], [7]. В работах [6]-[11], [31] Алымкулову К. принадлежит постановка проблемы, в работе [15] Алымкулову К. и Зулпукарову А.З. принадлежит постановка проблемы, а автору – получение научных результатов и доказательства теорем.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из трех глав, содержащих 12 параграфа, выводов и списка использованных литератур, всего 88 страниц.

ГЛАВА 1. ОБЗОР РАННИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

§ 1.1. Обзор работ других авторов по теме диссертации

Возмущенные сингулярные дифференциальные уравнения можно делить на три класса. К первому классу можно отнести дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных, что при нулевом значении малого параметра порядок рассматриваемого уравнения понижается. Такие уравнения исследованы в трудах Л. Прандтля, Г. Биркгофа, М. Нагумо, И.С. Градштейна, К. Фридрихса, В. Вазова А.Н. Тихонова, А. Эрдейи, Н. Левинсона, А.Б. Васильевой В.Ф. Бутузова [3], М. Иманалиева, О'Малли, Е.Ф. Мищенко, Л.С. Понтрягина, Ван Дайка, Кэррьера Дж. Коула, С.А. Ломова, К.А. Касымова, А.М. Ильина, В.П. Маслова, Н.Х. Розова, П.С. Панкова, С. Каримова, К. Какишова, К.С. Алыбаева и др.

Теорема существовании решений таких уравнений доказана А.Н.Тихоновым. Разложения асимптотических решений этих уравнений получены А.Б. Васильевой [3], В. Вазовым (W.Wasov) [39], Й. Сибуйа (Y. Sibua) методом сращивания внешнего и внутреннего решений (МСВИВР). Параллельно с МСВИВР разрабатывалась метод составных разложений или метод погранслоя. Начало этого метода были положены в работах Ж.У. Латта и Е. Бромберга. Систематически МСВИВР был применен Л.А. Люстерником, М.И. Вишиком для линейных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Этот метод для сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (в частности и для сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений) был разработан М. Иманалиевым [5].

Для представления равномерно точного решения на всем рассматриваемом отрезке разработаны следующие методы:

1. Метод погранфункций, или его зарубежное название «Составное разложение» представляет решения сингулярно возмущенных уравнений в виде суммы асимптотического ряда, функций зависящих от исходной и «быстрой» переменных.

2. Метод сращивания внешнего и внутреннего разложений решения. Для разработки этого метода большой вклад внесли С. Каплун (S.Kaplun), М. Ван-Дайк (M.VanDyke) [38], Дж. Коул (J.D.Cole) [21], [26], А.М.Ильин [4], В.Г.Мазья, С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский и др.

Метода сращивания (МС) обоснован А.М. Ильиным [4].

К. Алымкуловым упрощен метод сращивания Ван-Дайка и разработан метод структурного сращивания (МСС).

Второй класс сингулярно возмущенных уравнений начал изучать английский математик и механик М.Дж. Лайтхилл (M.J.Lighthil).

Ко второму классу можно отнести такие возмущенные уравнения, которые при нулевом значении малого параметра порядок уравнений не понижается, однако, у невозмущенного уравнения появляется особая точка. Классический метод малого параметра, для построения асимптотики решений таких уравнений не применим, так как с увеличением порядка приближения по малому параметру в окрестности особой точки их особенность возрастают и перестают приближаться к точному решению.

Это явление напоминает «бисингулярной задачу» или «задачу с точкой поворота».

Изучению второго класса особых возмущений, кроме работ М.Дж. Лайтхилла, посвящены работы В. Вазова, И. Сибуйя, К.Ж. Такахаси, К. Комстока (C.Comstok), П.Хабетса (P.Habets), Цянь-Сюэ-сена, М.Ф. Притуло, Дж. Темпла и других.

К третьему классу можно отнести сингулярно возмущенные уравнения с малым параметром, которые рассматриваются на бесконечном отрезке времени. К такому классу относится, в частности, модельные уравнения Лагерстрома (1) и (2). Задачей Лагерстрома можно ознакомиться в монографиях [22, 33,34,20,24].

В [22] Cohen D.S., Fokas A., P.A.Lagerstrom сведением к интегральному уравнению доказали существование решение задачи

$$u''(x) + kx^{-1}u' + \alpha uu' + \beta \dot{u}^2(x) = 0,\ u(\varepsilon) = 0,\ \ u'(\varepsilon) = M \geq \varepsilon, \alpha, \beta \geq 0$$

на отрезке $(\varepsilon, \infty]$.

В [33], [34] Popovich, Szmovian используя метод центральных многообразий и переходя в трехмерное пространство исследует уравнение Lagerstrom.

В [20] Bush строит внешние и внутренние разложения исходной задачи Лагерстрома

В [24] Hsia доказал для исходной задачи Лагерстрома

$$y''(x) + \left(x^{-1}(n-1) + \varepsilon\right)y'(x) - \varepsilon y(x)y'(x) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(\infty) = 0$$

в случае $n = 2$, существование асимптотики решени по степеням $\{(-ln\varepsilon)^{-1}\}$ однако обоснование асимптотики отсутствует.

В [29] Nunter C. Tandary, Boyer S.D. доказали методом внешних и внутренных разложений решение исходной задачи в случае $n = 2$, $n = 3$, однако обоснование асимптотики решения отсутствует.

В [36] Skinner L.A. методом внешних и внутренних разложений построила несколько приближений для исходной задачи Лагерстрома в случае $n = 2{,}3$.

В [37] Tam K.K. рассмотрел решение исходной задачи Лагерстрома методом внешних и внутренних разложений.

В [35] Posenblat S.S. Shepherd получили асимптотическая разложения исходной задачи Лагерстрома интегральных уравнений.

В [27] Kuda Teruhiko изучали решение исходной задачи Лагерстрома методом внешнего и внутреннего разложений.

В [18] Алымкулов К. и Толубаев Ж. методом фиктивного параметра получили равномерного сходящегося решения исходного и обобщенной задачи Лагерстрома.

§1.2. Обзор результатов полученных в данной диссертации

Отметим, что Лапласиан в *n*-мерном декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},\ \text{где}\ u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

а при $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(r)$, *где* $r = \sqrt{\left(x_1 - x_{0,1}\right)^2 + \left(x_2 - x_{0,2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_{0,n}\right)^2}$,

примет вид

$$\Delta u\left(r\right) = \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

1950 году английский механик и математик Лагерстром (Lagerstrom A.P.) для исследования несжимаемой жидкости при низких числах Рейнольдса вместо уравнения Навье Стокса предложил модельную задачу

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} + u(r)\frac{du}{dr} = 0, \quad u(\varepsilon) = 0, \quad u(\infty) = 1, \tag{1}$$

где 0<ε – малый параметр, *n*-размерность пространства.

Отметим, что в уравнении (1) к *n* мерному оператору Лапласа добавлен член $u(r)u'(r)$ который отражает некоторые тепловые потери для изучаемой стационарной системы.

Позже Лагерстром предложил обобщенную модельную задачу

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} + u(r)\frac{du}{dr} + \beta\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = 0, \quad u(\varepsilon) = 0, \quad u(\infty) = 1, \tag{2}$$

Пусть $r = \varepsilon x,\ y = 1 - u$, тогда (1) и (2) примет соответственно вид

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{x} + \varepsilon\right)\frac{dy}{dx} - \varepsilon y(x)y'(x) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(\infty) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{x} + \varepsilon\right)\frac{dy}{dx} - \varepsilon y(x)y'(x) - \beta\left(y'(x)\right)^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(\infty) = 0, \tag{4}$$

где α=*n*–1.

Далее всюду в диссертации под исходной задачи понимаем задачу (3), а под обобщенной задачей Лагерстрома – задачу (4).

В первой главе в обзоре приведены результаты по теории модельного уравнения Лагерстрома, которые в основном были получены зарубежными математиками.

В §1.2 приведены основные содержания полученных научных результатов диссертации.

В конце главы сделано заключение по первой главе.

Во второй главе строится асимптотика решения исходной задачи Лагерстрома.

§2.1 построено равномерное представление решения исходной задачи Лагерстрома размерности один:

$$y''(x) + y(x)y'(x) = 0,\ y(\varepsilon) = 0, y(\infty) = 1$$

которое интегрируется точно и имеет решение

$$y(x) = \left(e^{x-\varepsilon} - 1\right) / \left(e^{x-\varepsilon} + 1\right) = th\frac{x-\varepsilon}{2},$$

и разлагается в асимптотический ряд по ε:

$$y(x) = y(x,\varepsilon) = y(x,0) + y_x'(x,0)\varepsilon + \ldots + y_x^{(n)}(x,0)\varepsilon^n + \ldots = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} + 2\frac{e^x - e^{3x}}{(e^x+1)^4}\varepsilon + \ldots$$

В §2.2 Рассматривается одномерная задача

$$y''(x) + \left(x^{-1} + \varepsilon\right)y'(x) = \varepsilon y(x)y'(x), \quad y(1) = 1, \quad y(\infty) = 0, \tag{5}$$

Доказаны следующие теоремы

Теорема 2.1. Внешнее решение задачи (5) на отрезке $I(\varepsilon) = \left[1, \varepsilon^{-1}\right)$ представимо в виде

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + R_{n+1}(x,\varepsilon) \tag{6}$$

и для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива оценка: $\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right| \le l\mu^{n+1}$, где $\mu = \left(-ln\varepsilon\right)^{-1}$, 0<$l$ – const.

Теорема 2.2. Решение задачи (5) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_m(x,\varepsilon)\mu^m+\ldots,$$

где $\mu\sim(\ln 1/\varepsilon)^{-1}$, $y_m(x,\varepsilon)=O(1),\ x\in[1,\infty),\ \varepsilon\to 0$.

В §2.3 строится асимптотика решения исходной задачи Лагерстрома размерности большего двух, но меньших трех

$$y''(x)+(\alpha x^{-1}+\varepsilon)y'(x)=\varepsilon y(x)y'(x),\quad y(1)=1,\ y(\infty)=0, \tag{7}$$

где 1<α<2.

Доказаны

Теорема 2.3. Внешнее решение задачи (7) на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$, представимо в виде (6), где $|R_{n+1}(x,\varepsilon)|\le l\varepsilon^{n+1}$.

Теорема 2.4. Решение задачи (7) представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_n(x,\varepsilon)\mu^n+\ldots,$$

где $\mu\sim O(\varepsilon^{\alpha-1})$. $y_m(x,\varepsilon)=O(1),\ x\in[1,\infty),\ \varepsilon\to 0$.

В §2.4 построена асимптотика решения исходной задачи Лагерстрома размерности три, т.е. исследуется задача

$$y''(x)+(2x^{-1}+\varepsilon)y'(x)=\varepsilon y(x)y'(x),\quad y(1)=1,\ y(\infty)=0. \tag{8}$$

Доказаны

Теорема 2.5. Внешнее решение задачи (8) на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1})$ можно представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\mu y_1(x)+\ldots+\mu^n y_n(x)+\mu^{n+1}R_{n+1}(x,\varepsilon)$$

где $|R_{n+1}(x,\varepsilon)|\le l\mu^{n+1},\ \mu=-\varepsilon ln(\varepsilon)$.

Теорема 2.6. Решение задачи (8) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_n(x,\varepsilon)\mu^n+\ldots,$$

где $\mu \sim \varepsilon[\ln 1/\varepsilon]$, $y_m(x,\varepsilon) = O(1)$, $x \in [1,\infty)$, $\varepsilon \to 0$.

В § 2.5 строится асимптотика решения исходной задачи Лагерстрома размерности четыре

$$y''(x) + \left(3x^{-1} + \varepsilon\right) y'(x) = \varepsilon y(x) y'(x), \quad y(1) = 1,\ y(\infty) = 0. \tag{9}$$

Доказаны

Теорема 2.7. Внешнее решение задачи (9) на отрезке $I(\varepsilon) = \left[1, \varepsilon^{-1}\right)$ имеет вид (6), где $\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right| \le l\varepsilon^{n+1}$.

Теорема 2.8. Решение задачи (9) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu) = y_0(x,\varepsilon) + y_1(x,\varepsilon)\mu + y_2(x,\varepsilon)\mu^2 + \ldots + y_n(x,\varepsilon)\mu^n + \ldots,$$

где $\mu \sim O(\varepsilon)$, $y_m(x,\varepsilon) = O(1)$, $x \in [1,\infty)$, $\varepsilon \to 0$.

В конце главы приведено заключение по этой главе.

В третьей главе исследуется обобщенное уравнение Лагерстрома

В §3.1 построено равномерное представление решения обобщенной задачи Лагерстрома размерности один, т.е. задачи

$$y''(x) + y(x)y'(x) = -\beta \dot{y}^2(x), \quad y(\varepsilon) = 0, \quad y(\infty) = 1 \tag{10}$$

где $0 < \beta$ - постоянная.

Доказана

Теорема 3.1. Решение задачи (10) имеет вид

$$x - \varepsilon = \beta^2 \int_0^y \frac{ds}{1 - \beta s + c\beta^2 e^{-\beta s}}.$$

Отметим, что функция $F(s) = 1 - \beta s + c\beta^2 e^{-\beta s}$ должна имеет нуль первого порядка в точке $s = 1$, т.е.

$$F(1) = 1 - \beta + c\beta^2 e^{-\beta} = 0$$

В §3.2 построена асимптотика решения обобщенной задачи Лагерстрома размерности два

$$y''(x) + (x^{-1} + \varepsilon) y'(x) - \varepsilon y(x) y'(x) = -\beta (y'(x))^2,\ y\ (1) = 1,\ \ y(\infty) = 0 \tag{11}$$

Доказаны

Теорема 3.2. Внешнее решение задачи (11) с начальным условием $y(1)=1,\ y'(1)=\mu=(-ln\,\varepsilon)^{-1}$ на отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$ представимо в виде

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \qquad (12)$$

Теорема 3.3. Решение задачи (11) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_n(x,\varepsilon)\mu^n+...,$$

где $\mu\sim[\ln 1/\varepsilon]^{-1},\ y_m(x,\varepsilon)=O(1),\ x\in[1,\infty),\ \varepsilon\to 0.$

§ 3.3 строится асимптотика решения обобщенной задачи Лагерстрома размерности большего двух, но меньших трех

$$y''(x)+(\alpha x^{-1}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=-\beta(y'(x))^2,\ y\ (1)=1,\ y(\infty)=0 \qquad (13)$$

Доказаны

Теорема 3.4. Внешнее решение задачи (13) с начальными условиями $y(1)=1,\ y'(1)=\varepsilon$ на отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1})$ можно представить в виде (12).

Теорема 3.5. Асимптотика решение задачи (13) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_n(x,\varepsilon)\mu^n+...,$$

где $\mu\sim O(\varepsilon^{\alpha-1})\ .\ y_m(x,\varepsilon)=O(1),\ x\in[1,\infty),\ \varepsilon\to 0$.

В §3.4 построена асимптотика решения обобщенной задачи Лагерстрома размерности три

$$y''(x)+(2x^{-2}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=-\beta(y'(x))^2,\ y\ (1)=1,\ \ y(\infty)=0 \qquad (14)$$

Доказаны

Теорема 3.6. Внешнее решение задачи (14) с начальными условиями $y(1)=1,\ y'(1)=\mu=-\varepsilon\ln\varepsilon$ на отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$ представимо в виде (13).

Теорема 3.7. Решение задачи

$$u''(t)+\left(\frac{2}{t}+1\right)u'(t)=-\beta\left(u'(t)\right)^2+u(t)u'(t),\ u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0$$

можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t,\mu)+u_1(t,\mu)+u_2(t,\mu)+...+u_n(t,\mu)+$$

где $u_k(t,\mu)=O(\mu^k)$, $u'_k(t)=O(\mu^k)$, $(k=0,1,2,...)$

Теорема 3.8. Асимптотика решение задачи (14) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_n(x,\varepsilon)\mu^n+...,$$

где $\mu\sim\varepsilon[\ln 1/\varepsilon]$, $y_m(x,\varepsilon)=O(1)$, $x\in[1,\infty)$, $\varepsilon\to 0$.

В §3.5 строится асимптотика решения обобщенной задачи Лагерстрома размерности четыре

$$y''(x)+(3x^{-2}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=-\beta(y'(x))^2,\ y(1)=1,\ y(\infty)=0 \quad (15)$$

Доказаны

Теорема 3.9. Внешнее решение задачи (15) с начальными условиями $y(1)=1$, $y'(1)=a=\varepsilon$ на отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$ можно представить в виде (12).

Теорема 3.10. Решение задачи

$$u''(t)+\left(\frac{3}{t}+1\right)u'(t)=-\beta(u'(t))^2+u(t)u'(t),\ u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0$$

можно представить в виде

$$u_k(t,\varepsilon)=u_0(t)+u_1(t)+...+u_m(t)+...,$$

где $u_k(t)=u_k(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{3k}),\ (k=0,1,2,...),\ \varepsilon\to 0$,

$$u_0(\varepsilon)=1,\ u_0(\infty)=1,\ u_k(\varepsilon)=0,\ u_k(\infty)=0,\ (k=0,1,2,...).$$

Теорема 3.11. Асимптотика решение задачи (15) представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x,\mu)=y_0(x,\varepsilon)+y_1(x,\varepsilon)\mu+y_2(x,\varepsilon)\mu^2+\ldots+y_n(x,\varepsilon)\mu^n+...,$$

где $\mu\sim O(\varepsilon)$, $y_m(x,\varepsilon)=O(1)$, $x\in[1,\infty)$, $\varepsilon\to 0$.

Заключение по главе 1

Как видно из обзора полное изучение асимптотики исходной и обобщенной задачи Лагерстрома с единой точки зрения не были сделаны.

Из приведенного обзора также видно, что кроме работ Алымкулов К. и Толубаев Ж. общего единого подхода для построения асимптотики решения исходной и обобщенной задачи Лагерстрома отсутствует.

Поэтому построения равномерной асимптотики решения асимптотики решения исходной и обобщенной задачи Лагерстрома представляет большой интерес для асимптотической теории.

ГЛАВА 2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛАГЕРСТРОМА

§ 2.1. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности один

Рассмотрим задачу

$$u''(r)+u(r)u'(r)=0\ ,\ u(\varepsilon)=0, u(\infty)=1. \tag{1}$$

Задача (1) интегрируется точно:

$$\left(u'\left(r\right)+u^2\left(r\right)/\,2\right)'=0\ \Rightarrow u'\left(r\right)=c_1^2-u^2\left(r\right)/\,2$$

где c_1 – произвольная постаянная.

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln\frac{c_1+u}{c_1-u}=(r+c_2)c_1\Rightarrow\frac{c_1+u}{c_1-u}=e^{(r+c_2)c_1}\Rightarrow\frac{c_1-u}{c_1+u}=e^{-(r-c_2)c_1}$$

$$u(\infty)=1\Rightarrow c_1-1=0\Rightarrow c_1=1.$$

Т.е. $\left(1-u\right)/\left(1+u\right)=e^{-r+c_2}$.

$$u(\varepsilon)=0\Rightarrow 1=e^{-\varepsilon+c_2}\Rightarrow c_2=\varepsilon.$$

$$u(r)=\frac{1-e^{\varepsilon-r}}{1+e^{\varepsilon-r}}=\frac{e^{r-\varepsilon}-1}{e^{r-\varepsilon}+1}=th\frac{r-\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Формулу (2) разлагая в ряд Тейлора по степеням ε, получим асимптотический ряд т.е.

$$u(r)=\frac{2e^r}{(e^r+1)^2}+2\frac{e^r-e^{3r}}{(e^r+1)^4}\varepsilon+\ldots$$

§ 2.2. Построение асимптотики решения задачи Лагерстрома размерности два

Здесь рассматривается задача

$$y''(x)+(x^{-1}+\varepsilon)y'(x)=\varepsilon y(x)y'(x),\ \ y\ (1)=1,\ \ y(\infty)=0. \qquad (1)$$

Внешнее решение ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенная функция, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1)=1,\ y'_0(1)=a,\ y_k(1)=0,\ y'_k(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)(j=0,1,2,...)$ имеем следующие задачи:

$$Ly_0(x)=y_0''(x)+\frac{1}{x}y_0'(x)=0,\ \ y_0(1)=1,\quad y_0'(1)=a \qquad (3.0)$$

$$Ly_m(x)=-y'_{m-1}(x)+\sum_{i+j=m-1}y_i(x)y'_j(x),\ \ y_m(1)=0,\ \ y'_m(1)=0, m\in N. \qquad (3.m)$$

Решение задачи (3.0) представляется в виде: $y_0(x)=1+a\,lnx.$

Используя (3.0), для определения $y_1(x)$ имеем уравнение

$$Ly_1(x)=-ax^{-1}+a^2x^{-1}lnx,\ \ y_1(1)=0,\ \ y'_1(1)=0.$$

Если положить, $u_1(x)=y'_1(x)$, то для $u_1(x)$ имеем уравнение

$$Tu_1(x):=u'_1(x)+\frac{1}{x}u_1(x)\sim a^2x^{-1}\ln x,$$

Отсюда, интегрируя асимптотически имеем

$$y'_1(x)=u_1(x)=x^{-1}\int_1^x a^2\,\mathrm{lnsds}=a^2\ln x,\ x\to\infty. \qquad (4.1)$$

Или

$$y_1(x)\sim a^2x\ln x,\ x\to\infty. \qquad (5.1)$$

Учитывая (4.1) и (5.1) уравнение (3.m), m=1, можем записать в виде

$$Ly_2(x) \sim a^3 ln^2 x,\ x \to \infty.$$

Решая это уравнение, получим

$$y'_2(x) \sim x^{-1} \int_{-1}^{x} a^3 s \ln^2 s\, ds \sim \frac{a^3}{2} x \ln^2 x,\ x \to \infty.$$

Поэтому,

$$y_2(x) \sim \frac{a^3}{4} x^2 \ln^2 x,\ x \to \infty.$$

Методом полной математической индукции докажем, что

$$y'_m(x) \sim m\, l_m x^{m-1} ln^m x\ , x \to \infty \qquad (4.m)$$

$$y_m(x) \sim l_m x^m ln^m x\ ,\ x \to \infty, \forall m \in N, \qquad (5.m)$$

где l_m некоторая положительная постоянная.

Предположим, что они верны и докажем, что справедливы:

$$y_{m+1}(x) \sim l_{m+1}(x \ln x)^{m+1}\ , y'_{m+1}(x) \sim l_{m+1} x^m \ln^{m+1} x,\ x \to \infty. \qquad (4.m+1)$$

Уравнение для определения функции $y_{m+1}(x)$ имеет вид:

$$Ly_{m+1}(x) = f_{m+1}(x) := -y'_m(x) + y_0(x) y'_m(x) + \ldots + y_{m-1}(x) y'_1(x) + y_m(x) y'_0(x)$$

Вычисляя функцию $f_{m+1}(x)$ согласно (4.0) и (4.m) и их производных получим

$$Ly_{m+1}(x) \sim m l_m x^{m-1} ln^{m+1} x,\ x \to \infty.$$

Отсюда

$$y'_{m+1}(x) \sim x^{-1} \int_{1}^{x} m l_m s^m ln^{m+1} s\ ds \sim \frac{m l_m}{m+1} x^m \ln^{m+1} x,\ x \to \infty.,$$

Теперь интегрируя это выражение, получим (4.m+1).

Таким образом, внешнее решение (2) имеет следующую структуру, с учетом (5.m)

$$y(x,\varepsilon) \sim a\left\{ lnx + \varepsilon ax\, lnx\, d_1 + (\varepsilon axlnx)^2 d_2 + \ldots + (\varepsilon axlnx)^m d_m + \ldots \right\},\ x \to \infty. \qquad (6)$$

Если постоянную a выбрать равной $a = \mu = (-ln\,\varepsilon)^{-1}$, то уравнение: $\varepsilon\mu x\, lnx = 1$ имеет точное решение $x_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$.

При этом (6) можно записать в виде

$$y(x,\varepsilon)\sim\mu\left\{lnx+\varepsilon\mu xlnxd_1+(\varepsilon\mu xlnx)^2d_2+\ldots+(\varepsilon\mu xlnx)^m d_m+\ldots\right\},\ x\to\infty \quad (7)$$

Отсюда следует, что ряд (7) является асимптотическим на отрезке $J(\varepsilon)=\left[1,\varepsilon^{-\gamma}\right],0<\gamma<1\cdot$

Справедлива

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon)=\left[1,\varepsilon^{-1}\right)$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+R_{n+1}(x,\varepsilon)$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right|\le l\mu^{n+1}\ ,$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Докажем для ясности в случае $n=0$, решение задачи (1) ищем в виде

$$y(x)=y_0(x)+R(x), \quad (8)$$

где $y_0(x)=1+\mu ln(x),\ \ y_0'(x)=\mu x^{-1}, \qquad x\in[1,\varepsilon^{-\alpha}], \quad 0<\alpha<1$

Подставляя (8) в (1) для функции $R(x)$имеем задачу:

$$R''(x)+x^{-1}R'(x)=\varepsilon\mu^2\frac{lnx}{x}+\varepsilon\big(y_0R'(x)+y_0'R(x)+RR'(x)\big)-\varepsilon R'(x),$$

$$R(1)=R'(1)=0.$$

Интегрируя один раз, отсюда получим

$$R'(x)=\varepsilon\mu^2(lnx-1+x^{-1})+\varepsilon x^{-1}\int_1^x[s\mu lnsR'(s)+\mu s^{-1}R(s)+R(s)R'(s)]ds.$$

Чтобы не интегрировать повторно, здесь производим подстановку

$$R'(x)=\varepsilon\mu(lnx-1+x^{-1})u(x)$$

Тогда это уравнение приводится к виду

$$u(x)=\mu+[lnx-1+x^{-1}]^{-1}x^{-1}\mu^{-1}\int_1^x s[\mu lns\mu(lns-1+s^{-1})u(s)$$

$$+\mu s^{-1}R(s)\ +\varepsilon\mu(lns-1s^{-1})R(s)u(s)]ds=T_2(u) \quad (9)$$

Таким образом, получим систему

$$R(x)=\varepsilon\mu\int_1^x(lns-1+s^{-1})u(s)ds=T_1(u) \quad (10)$$

Из (10) вытекает, что если $2\varepsilon^{1-\alpha}\le 1$ то оператор $T_1(u)$ переводить шар S_μ: $\|u\|\le 2\mu$ в себя. Аналогично, из (9) вытекает, что оператор $T_2(u)$ также переводит шар S_μ в себя.

Внутреннее и полное решение

Теперь построим внутреннее решение, которое удовлетворяет условию на бесконечности $y(\infty)=0$. Для этого введем внутреннюю переменную t

$$t=x\varepsilon$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$u''(t)+\left(1+t^{-1}\right)u'(t)=u(t)u'(t) \quad (11)$$

где $u(t)=y(x)/_{x=t\varepsilon^{-1}}$

Оказывается, что внутреннее решение уравнения (11) существует не только в некоторой окрестности точки $t=\infty$, но и на всем отрезке $I(\varepsilon)=[\varepsilon,\infty)$, т.е. мы решаем уравнение (11) со следующими граничными условиями

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0\,. \quad (12)$$

Решение задачи (11)-(12) ищем в виде:

$$U(t,\mu)=\varepsilon u_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^2u_2(t,\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^m u_m(t,\varepsilon)+..., \quad (13)$$

где$u_j(t)$ являются асимтотической последовательностью, т.е.

$$u_{j+1}(t)=o(u_j(t)),\ \varepsilon\to 0\ \ (j=0,1,2...).$$

Далее зависимость функций $u_j(t)$ от ε не будем указывать. Тогда для определения $u_j(t)$получим следующие задачи:

$$Mu_1(t):=u''_1(t)+(1+t^{-1})u'_1(t)=0,\ u_1(\varepsilon)=\varepsilon^{-1},\ u_1(\infty)=0, \quad (14.1)$$

$$Mu_m(t)=\sum_{i+j=m-1}u_i(t)u'_j(t),\ u_m(\varepsilon)=u_m(\infty)=0, \quad (14.m)$$

Однородное уравнение (14.1) имеет двух линейно независимых решений

$$U_1(t)=1,\ X(t):=X(t,\varepsilon)=b_1\int_\varepsilon^t s^{-1}e^{-s}ds,$$

$$b_1:=[b_1(\varepsilon)]^{-1}=\int_\varepsilon^\infty s^{-1}e^{-s}ds=\int_\varepsilon^1 s^{-1}e^{-s}ds+\int_1^\infty s^{-1}e^{-s}ds= \quad .$$

$$=\int_\varepsilon^1 s^{-1}ds+\int_\varepsilon^1 s^{-1}(e^{-s}-1)ds+l=\ln\varepsilon^{-1}[1+o(1)],\ \varepsilon\to 0$$

и $[b_0(\varepsilon)]^{-1}=\int_\varepsilon^\infty e^{-s}ds=e^{-\varepsilon}.$

Отсюда вытекает, что

$$b_1=b_1(\varepsilon)=O(\ln\varepsilon^{-1}),\ \varepsilon\to 0,\quad b_0=b_0(\varepsilon)=O(1)>0 \tag{15}$$

Краевая задача (14.1) имеет единственное решение

$$u_1(t)=\varepsilon^{-1}K(t);\ K(t)=1-X(t).$$

Очевидно, что для функции $K(t)$ имеет место оценка:

$$0\le K(t)\le 1,\ |K'(t)|\le b_1t^{-1}e^{-t}.$$

Поэтому, для функций $u_1(t),\ u_1'(t)$ имеют место оценки

$$0\le u_1(t,\varepsilon)\le\varepsilon^{-1},\ |u_{1t}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^{-1}b_1t^{-1}e^{-t}.$$

Краевые задачи (14.*m*), *n*=2,3,… можно решить используя функцию Грина.

Лемма 1. Однородная задача

$$Mz(t)=0,\ z(\varepsilon)=z(\infty)=0$$

имеет функцию Грина

$$G(t,s,\varepsilon)=-b_1^{-1}X(t)K(s),\ \varepsilon\le t\le s,$$
$$G(t,s,\varepsilon)=-b_1^{-1}X(s)K(t),\ s\le t<\infty.$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$Mz(t)=f(t),\ z(\varepsilon)=0,\quad z(\infty)=0$$

где $f(t)\in C[\varepsilon,\infty)$, имеет единственное решение представимое в виде

$$z(t)=\int_\varepsilon^\infty s^1e^sG(t,s,\varepsilon)f(s)ds\ .$$

Доказательство этих лемм проверяются непосредственно.

Решение краевой задачи (14.*m*), *m*=2, в силу (15) запишется в виде

$$u_2(t)=\int_\varepsilon^\infty s^1 e^s G(t,s,\varepsilon)u_1(s)u_1'(s)ds\,.$$

Используя выражение для функции Грина, отсюда получим

$$u_2(t)=-\varepsilon^{-1}b_1\int_\varepsilon^\infty G(t,s,\varepsilon)u_1(s)ds=\varepsilon^{-1}\int_\varepsilon^t K(t)X(s)u_1(s)ds+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_\varepsilon^t X(t)K(s)u_1(s)ds\le\varepsilon^{-2}K(t)\{\int_\varepsilon^t K(s)ds+\int_t^\infty K(s)ds\}\le$$

$$\le\varepsilon^{-2}K(t)\int_\varepsilon^\infty K(s)ds.$$

Отсюда, после интегрирования по частям имеем

$$\int_\varepsilon^\infty K(s)ds=sK(s)\Big|_\varepsilon^\infty+\int_\varepsilon^\infty sK(s)ds=-\varepsilon K(\varepsilon)+b_1\int_\varepsilon^\infty e^{-s}ds\le O(b_1),\varepsilon\to 0$$

$$u_2(t)\le K(t)\varepsilon^{-2}O(b_1).$$

Поэтому

$$\varepsilon^2 u_2(t)\le K(t)O(b_1),\ \varepsilon\to 0.$$

Аналогично, для производной этой функции имеем оценку

$$\left|u'_2(t)\right|\le l\varepsilon^{-2}b_1^2\,t^{-1}e^{-t}.$$

Действительно

$$\left|u'_2(t)\right|=\left|\int_\varepsilon^\infty s^1e^sG_t(t,s,\varepsilon)u_1(s)u'_1(s)ds\right|=$$

$$=\left|\int_\varepsilon^t s^1e^sG_t(t,s,\varepsilon)u_1(s)u'_1(s)ds+\int_t^\infty s^1e^sG_t(t,s,\varepsilon)u_1(s)u'_1(s)ds\right|=$$

$$=\left|b_1^{-1}\int_\varepsilon^t s^1e^sK'(t)X(s)u_1(s)u'_1(s)ds+b_1^{-1}\int_t^\infty s^1e^sK(s)U(t)u_1(s)u'_1(s)ds\right|$$

Отсюда

$$\left|u'_2(t)\right|\le\left|\varepsilon^{-1}b_1^{-1}b_1\int_\varepsilon^t K'(t)X(s)u_1(s)ds+\varepsilon^{-1}b_1^{-1}b_1\int_t^\infty K(s)X(t)u_1(s)ds\right|$$

$$\le\left|\varepsilon^{-1}b_1^{-1}b_1\int_\varepsilon^t K'(t)X(s)u_1(s)ds+\varepsilon^{-1}b_1^{-1}b_1\int_t^\infty K(s)X'(t)u_1(s)ds\right|\le$$

$$\le\varepsilon^{-2}\left|K'(t)\right|[\int_\varepsilon^t K(s)ds+\int_t^\infty K(s)ds]\le$$

$$\le\varepsilon^{-2}\left|K'(t)\right|\int_\varepsilon^\infty K(s)ds\le\varepsilon^{-2}O(b_1)\left|K'(t)\right|,\ \varepsilon\to 0$$

Отсюда

$$\left|u'_2(t)\right|\le\varepsilon^{-2}O\left(b_1\right)\left|K'(t)\right|\le\varepsilon^{-2}O(b_1)t^{-\alpha}e^{-t},\ \varepsilon\to 0.$$

Далее методом математической индукции получим

$$u_{m+1}(t) \le \varepsilon^{-m-1} K(t) O\{(b_1)^m\},\ \left|u'_{m+1}(t)\right| \le \varepsilon^{-m-1} b_1 O\{(b_1)^m\} t^{-1} e^{-t}\ \ (m = 0,1,2,...).$$

Действительно, пусть

$$u_k(t) \le \varepsilon^{-k} K(t) O\{(b_1)^{k-1}\},\ \varepsilon \to 0\ \left|u'_k(t)\right| \le \varepsilon^{-k} b_1 O\{(b_1)^{k-1}\} t^{-1} e^{-t}\ \ (k = 1,2,...,m).$$

Тогда, уравнение для определения функции $u_{m+1}(t)$ имеет вид

$$Mu_{m+1}\left(t\right) = u_0(t)u'_m(t) + u_1(t)u'_{m-1}(t) + u_2(t)u'_{m-2}(t) + ... + u_{m-2}(t)u'_2(t) +$$
$$u_{m-1}(t)u'_1(t) + u_m(t)u'_0(t) := f(u_0(t), u_1(t), ..., u_m(t)),$$
$$u_{m+1}(\varepsilon) = u_{m+1}\left(\infty\right) = 0$$

Определяя отсюда функцию $u_{m+1}(t)$ имеем

$$u_{m+1}(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} se^s\, G(t,s,\varepsilon)\{u_0(s)u'_m(s) + \ ... + u_{m-1}(s)u'_1(s) + u_m(s)u'_0(s)\}ds$$

Запишем это уравнение в виде

$$u_{m+1}(t) = -\int_{\varepsilon}^{t} s^1 e^s b_1^{-1} X(s) K(t)\{u_0(s)u'_m(s) + \ ... + u_{m-1}(s)u'_1(s) + u_m(s)u'_0(s)\}ds +$$
$$-\int_{t}^{\infty} s^1 e^s b_1^{-1} X(t) K(s)\{u_0(s)u'_m(s) + u_1(s)u'_{m-1}(s) + \ ... + u_m(s)u'_0(s)\}ds.$$

Отсюда, оценивая этот интеграл получим

$$|u_{m+1}(t)| \le \int_{\varepsilon}^{\infty} s^1 e^s |G(t,s)| \left[\frac{K(s)}{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^m}(b_1 b_0^{-1})^{m-1} b_1 s^{-1} e^{-s}\right.$$
$$+ \frac{|K(s)|}{\varepsilon^2} b_1 b_0 \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} b_1 s^{-1} e^{-s} (b_1 b_0^{-1})^{m-2}$$
$$+ \varepsilon^{-3}(b_1 b_0^{-1})^2 b_1 \frac{1}{\varepsilon^{m-2}} b_1 s^{-\alpha} e^{-s} (b_1 b_0^{-1})^{m-3}$$
$$\left. + \varepsilon^{-m}(b_1 b_0^{-1})^{m-1} \varepsilon^{-1} b_1 s^{-1} e^{-s}\right] ds \le$$
$$\le \varepsilon^{-m-1} \int_{\varepsilon}^{\infty} |G(t,s)| K(s) b_1 (b_1 b_0)^{m-1}$$
$$\le \varepsilon^{-m-1}(b_1 b_0^{-1})^{m-1} \left[\int_{\varepsilon}^{t} K(t) X(s) K(s) ds + \int_{t}^{\infty} X(t) K^2(s) ds\right]$$

$$\leq \varepsilon^{-m-1}(b_1 b_0^{-1})^{m-1} \int_{\varepsilon}^{\infty} K(t)K(s)ds \ \leq \ \frac{(b_1 b_0)^m}{\varepsilon^{m+1}} K(t).$$

Аналогично

$$|u'_{m+1}(t)| \leq \varepsilon^{-m-1} b_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} |G(t,s)| K(s)(b_1 b_0^{-1})^m ds$$

$$\leq \varepsilon^{-m-1}(b_1 b_0^{-1})^m \left[\int_{\varepsilon}^{t} |K'(t)| X(s)K(s)ds + \int_{t}^{\infty} X'(t)K^2(s)ds \right]$$

$$\leq \ \varepsilon^{-m-1}(b_1 b_0^{-1})^m b_1 t^{-1} e^{-t}$$

Значит, ряд (13) мажорирутся следующим асимптотическим числовым рядом

$$1 + O\{b_1\} + \ldots + O\{(b_1)^m\} + \ldots \prec 1 + O(\ln \varepsilon^{-1}) + \ldots + O[(\ln \varepsilon^{-1})^m] + \ldots, \varepsilon \to 0 \qquad (16)$$

Отсюда, получаем формальное доказательство следующей теоремы

Теорема 2. Решение задачи (1) представляется в виде асимптотического ряда (13), для членов которого имеет место оценки (16).

Доказательстово теоремы проведем методом мажорант. Задача (11)-(12) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u(t) = K(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^1 G(t,s)u(s)u'(s)ds \\ u'(t) = K'(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^1 G_2(t,s)u(s)u'(s)ds \end{cases} \qquad (17)$$

В этом системе сделаем преобразование

$$u(t) = K(t)Z_1(t), \quad u'(t) = K'(t)Z_2(t)$$

Тогда система (17) перейдет к системе

$$Z_1(t) = 1 + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^1 e^s Q_1(t,s)K(s)K'(s)Z_1(s)Z_2(s)sds \qquad (18)$$

$$Z_2(t) = 1 + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^1 e^s Q_2(t,s)K(s)K'(s)Z_1(s)Z_2(s)sds$$

где

$$Q_1(t,s) = \begin{cases} -b_1^{-1}K^{-1}(t)X(t)K^2(s)K^1(s)\varepsilon \leq t \leq s \\ -b_1^{-1}K^{-1}(t)X(s)K(s)K^1(s)s \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$$Q_2(t,s)=\begin{cases}-b_1^{-1}(K^{-1}(t))^{-1}X(t)K(s)K(s)K(s), \varepsilon\le t\le s\\ -b_1^{-1}(K^{-1}(t))^{-1}X(s)K(t)K(s)K^1(s) s\le t\le\infty\end{cases}$$

Нам нужна следующая

Лемма 3. Справедливы оценки

$$\int_\varepsilon^\infty s^1e^s(Q_1(t,s))\,ds\le lb_1,\quad \varepsilon\to 0\ ,$$

$$\int_\varepsilon^\infty s^1e^s(Q_2(t,s))\,ds\le lb_1,\ \varepsilon\to 0 \qquad . \tag{19}$$

Учитывая, что

$$K'(t)=-X'(t)=-b_1t^{-1}e^{-t}, K'(t)\le 0, t\in[\varepsilon,\infty),\qquad 0\le X(t)\le 1.$$

Имеем

$$\int_\varepsilon^\infty s^1e^s|Q_1(t,s)|ds=b_1^{-1}\int_\varepsilon^t s^1e^sK(s)s^{-1}e^{-s}b_1$$

$$+b_1^{-1}\int_t^\infty K^{-1}(t)K^2(s)s^1e^sb_1s^{-1}e^sds\le$$

$$\le\int_\varepsilon^t K(s)ds+\int_t^\infty K(s)ds=\int_\varepsilon^t K(s)ds\le O(b_1),\varepsilon\to 0$$

Аналогично доказывается вторая оценка (19).

Обозначив, $Sup_{\varepsilon\le t<\infty}\big(Z_1(t),Z_2(t)\big)=\lambda$. Из (18) Имеем для уравнения $Z_1(t),Z_2(t)$ мажорантное уравнение $\lambda=1+lb_1\lambda^2$.

Это уравнение имеет аналитическое решение β относительно b_α если, например, $b_1\le(8l)^{-1}$. При этом условии

$$\lambda=(2lb_1)^{-1}[1-(1-4lb_1)^{-1}]=1+\lambda_1b_1+\lambda_2{b^2}_1+\cdots \tag{20}$$

Тогда решение (13) мажорируется рядом (20).

Значить решение задачи является аналитической функцией малого параметра $b_1=O(ln\varepsilon^{-1})$.Отсюда следует этот ряд является таже асимптотическим рядом при $\varepsilon\to 0$.

Мы доказали более сильную теорему

Теорема 3. Решение задачи (1) представляется в виде равномерно сходящегося ряда (13) при малом ε.

§ 2.3. Построение асимптотики решения задачи Лагерстрома размерности большего двух, но меньших трех

Рассматривается задача

$$y'' + (\alpha x^{-1} + \varepsilon) y' = \varepsilon y(x) y', \; y(1) = 1, \; y(\infty) = 0. \qquad (1)$$

Требуется построить асимптотику решения задачи (1) на отрезке $I(\varepsilon) = [1, \infty)$. Внешнее решение ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)(j = 0,1,...)$ – пока неопределенные функции, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1) = 1, \; y'_0(1) = a, \; y_k(1) = 0, \; y'_k(1) = 0 \;\; (k = 1,2,\ldots).$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)(j = 0,1,2,...)$ имеем следующие задачи

$$Ly_0(x) = y'_0(x) + \alpha x^{-1} y'_0(x) = 0, \;\; y_0(1) = 1, \quad y'_0(1) = a \qquad (3.0)$$

$$Ly_m(x) = -y'_{m-1}(x) + \sum_{i+j=m-1} y_i(x) y'_j(x), \; y_m(1) = 0, \;\; y'_m(1) = 0 \qquad (3.m)$$

Решение задачи (3.0) представляется в виде:

$$\frac{dy_0}{dx} = a x^{-\alpha}, \;\; y_0(x) = 1 - \frac{a}{1-\alpha} - \frac{a}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Rightarrow y_0(x) = 1 + \frac{a}{\alpha - 1}, x \to \infty. \qquad (4.0)$$

Используя (3.0), для определения $y_1(x)$, имеем задачу

$$Ly_1(x) = \frac{a^2}{\alpha - 1} x^{-\alpha}, \; y_1(1) = 0, \;\; y'_1(1) = 0.$$

Решая её получим, $\qquad y_1'(x) \sim \dfrac{a^2}{\alpha - 1} x^{1-\alpha}, \; x \to \infty$

Отсюда

$$y_1(x) \sim \frac{a^2}{(\alpha - 1)(2 - \alpha)} x^{2-\alpha}, \; x \to \infty. \qquad (4.1)$$

Используя (4.1) и (4.2), уравнение для определения $y_2(x)$ запишется в виде

$$Ly_2(x) \sim \frac{a^3}{(\alpha-1)^2} x^{1-\alpha}, \quad x \to \infty.$$

Решая это уравнение получим

$$y_2(x) \sim \frac{a^3}{(2-\alpha)(\alpha-1)^2(3-\alpha)} x^{3-\alpha}, \; y_2'(x) \sim \frac{a^3 x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(\alpha-1)^2}, x \to \infty.$$

Далее, методом математической индукции легко показать , что

$$y_n(x) \sim \frac{a^{n+1} x^{n+1-\alpha}}{n!(\alpha-1)^n (n+1-\alpha)}, \; y_n'(x) \sim \frac{a^{n+1} x^{n-\alpha}}{n!(\alpha-1)^n}, \; x \to \infty, \forall n \in N. \qquad (4.n)$$

Действительно, пусть имеет место (4.n), тогда докажем, что имеет место (4.n+1).

Для функции $y_{n+1}(x)$ имеем задачу

$$Ly_{n+1}(x) = -y'_n(x) + \sum_{i+j=n} y_i(x) y'_j(x) := f_{n+1}(x), \; y_{n+1}(1) = y'_{n+1}(1) = 0$$

Учитывая оценки (4.0) и (4.n) имеем

$$Ly_{n+1}(x) \sim \frac{a^{n+2} x^{n-\alpha}}{n!(\alpha-1)^{n+1}}, \; x \to \infty.$$

Отсюда, после интегрирования имеем

$$y_{n+1}(x) \sim \frac{a^{n+2} x^{n+2-\alpha}}{(n+1)!(\alpha-1)^{n+1}(n+2-\alpha)}, \; y_n'(x) \sim \frac{a^{n+2} x^{n+1-\alpha}}{(n+1)!(\alpha-1)^{n+1}}, \; x \to \infty.$$

Таким образом, внешнее решение (2) имеет следующую структуру

$$y(x,\varepsilon) \sim 1 + a\frac{1}{\alpha-1} + \frac{\varepsilon a^2 x^{2-\alpha}}{(\alpha-1)}\{\frac{1}{2-\alpha} + \frac{\varepsilon a x}{2(\alpha-1)(3-\alpha)} ... + \frac{(\varepsilon a x)^{n-1}}{n!(\alpha-1)^n (n+1-\alpha)} + ...\}, \; x \to \infty \qquad (5)$$

Если в (5) положить $x = \varepsilon^{-1}$, то имеем

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon) \sim 1 + a\frac{1}{\alpha-1} + \frac{a^2 \varepsilon^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\{\frac{1}{2-\alpha} + ... + \frac{a^{n-1}}{n!(\alpha-1)^n (n+1-\alpha)} + ...\}. \qquad (6)$$

Постоянную a выберем равную ε, т.е. $a = \varepsilon$,

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon) \sim 1 + \varepsilon\frac{1}{\alpha-1} + \frac{a^2 \varepsilon^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\{\frac{1}{2-\alpha} + ... + \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!(\alpha-1)^n (n+1-\alpha)} + ...\}.$$

тогда последнее выражение является асимптотическим рядом на отрезке $J(\varepsilon) = [1,\varepsilon^{-1}]$.

Справедлива

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+R_{n+1}(x,\varepsilon)$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$|R_{n+1}(x,\varepsilon)|\le l\varepsilon^{n+1},$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Докажем для ясности, эту теорему в случае $n=0$, решение задачи (1) ищем в виде

$$y(x)=y_0(x)+R(x), \tag{7}$$

где $y'_0(x)=\varepsilon x^{-\alpha}$, $y_0(x)=1-\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}-\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Rightarrow y_0(x)=1+\dfrac{\varepsilon}{\alpha-1}, x\to\infty.$

Подставляя (7) в уравнение (1) для R(x) имеем

$$R''+\frac{\alpha}{x}R'(x)=\varepsilon^3\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}x^{1-\alpha}\right)x^{-\alpha}+$$

$$\varepsilon^2x^{-\alpha}R(x)+\varepsilon^2\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}x^{1-\alpha}\right)R'+\varepsilon R(x)R'(x)$$

$$R'(x)=x^{-\alpha}\varepsilon^3\int_1^x\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}s^{1-\alpha}\right)ds$$

$$+\varepsilon^2x^{-\alpha}\int_1^x R(s)ds$$

$$+\varepsilon^2x^{-\alpha}\int_1^x s^\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}s^{1-\alpha}\right)R'(s)ds$$

$$+\varepsilon x^{-\alpha}\int_1^x s^\alpha R(s)R'(s)ds$$

$$=\frac{\varepsilon^3}{\alpha-1}x^{1-\alpha}+\frac{\varepsilon^3}{(\alpha-1)(2-\alpha)}x^{2-\alpha}-\frac{\varepsilon^3}{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2-\alpha}\right)$$

$$+\varepsilon^2x^{-\alpha}\int_1^x R(s)ds$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}x^{-\alpha}\int_1^x s^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\alpha-1}s^{1-\alpha}\right)R'(s)ds+\varepsilon x^{-\alpha}\int_1^x s^\alpha R(s)R'(s)ds$$

В этом уравнении сделаем подстановку

$$R'(x) = \left[\frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}x^{1-\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{(\alpha-1)(2-\alpha)}x^{2-\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2-\alpha}\right)\right]U(x) \quad (8)$$

Тогда для $u(x)$ имеем уравнение

$$u(x) = \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}x^{1-\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{(\alpha-1)(2-\alpha)}x^{2-\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2-\alpha}\right)\right)^{-1}$$

$$\Bigg\{x^{-\alpha}\int_1^x R(s)ds$$

$$+\frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha}\int_1^x s^{\alpha}\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha-1}s^{1-\alpha}\right)\left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}s^{1-\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{(\alpha-1)(2-\alpha)}s^{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}(1+\frac{1}{2-\alpha}\right)u(s)$$

$$+\varepsilon s^{-\alpha}\int_1^x s^{\alpha}R(s)\left[\frac{s^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)}s^{2-\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2-\alpha}\right)\right]u(s)ds\Bigg\} \qquad (9)$$

Из (8) интегрируя один раз имеем

$$R(x) = \int_1^x \frac{\varepsilon^2}{\alpha-1}\left[s^{1-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha}s^{2-\alpha} - \frac{3-\alpha}{2-\alpha}\right]u(s)ds \qquad (10)$$

Систему (9) и(10) можно решить методом сжимащих отображений.

Рассмотрим шар

$$\| u(x) \| \le 2\varepsilon, \qquad \| R(x) \| \le 2\varepsilon.$$

На отрезке $x \in [1, \varepsilon^{-1}]$.Очевидно, что этот отображает оператор $T(R, U) = (R, U)$. С другой стороны этот оператор является сжимающим. Поэтому, теорема доказана.

Внутреннее и полное решение

Теперь построим внутреннее решение, которое удовлетворяет условию на бесконечности $y(\infty)=0$. Для этого введем внутреннюю переменную $t = x\varepsilon$.

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$u''(t) + \left(1+\alpha t^{-1}\right)u'(t) = u(t)u'(t) \qquad (11)$$

где $u(t) = y(x)/_{x = t\varepsilon^{-1}}$

Решаем уравнение (11) со следующими граничными условиями

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0\,. \tag{12}$$

Решение задачи (11)-(12) ищем в виде:

$$U(t,\mu)=\varepsilon u_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^2 u_2(t,\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^m u_m(t,\varepsilon)+..., \tag{13}$$

где $u_j(t)$ являются асимтотической последовательностью, т.е.

$$u_{j+1}(t)=o(u_j(t)),\ \varepsilon\to 0\ \ (j=0,1,2...).$$

Далее зависимость функций $u_j(t)$ от ε не будем указывать. Тогда для определения $u_j(t)$ получим следующие задачи:

$$Mu_1(t):=u_1''(t)+(1+\alpha t^{-1})u'_1(t)=0, u_1(\varepsilon)=\varepsilon^{-1},\ u_1(\infty)=0, \tag{14.1}$$

$$Mu_n(t)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(t)u'_{n-i}(t),\ \ u_n(\varepsilon)=u_n(\infty)=0,\ n\in\mathrm{N} \tag{14.n}$$

Однородное уравнение (14.1) имеет двух линейно независимых решений

$$U_1(t)=1,\ X(t):=X(t,\varepsilon)=b_\alpha\int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s}ds,$$

$$b_\alpha:=[b_\alpha(\varepsilon)]^{-1}=\int_\varepsilon^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds=\int_\varepsilon^1 s^{-\alpha}e^{-s}ds+\int_1^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds= \quad .$$

$$=\int_\varepsilon^1 s^{-\alpha}ds+\int_\varepsilon^1 s^{-\alpha}[e^{-s}-1]ds+l=\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1}[1+o(1)],\quad \varepsilon\to 0$$

и

$$[b_{\alpha-1}(\varepsilon)]^{-1}=\int_\varepsilon^\infty s^{1-\alpha}e^{-s}ds=\int_\varepsilon^1 s^{1-\alpha}e^{-s}ds+\int_1^\infty s^{1-\alpha}e^{-s}ds\le\int_\varepsilon^1 s^{1-\alpha}ds+l=O(1)>o,$$

где 0<l const.

Отсюда вытекает, что

$$b_\alpha=b_\alpha(\varepsilon)=O(\varepsilon^{\alpha-1}),\ \varepsilon\to 0,\ b_{\alpha-1}^{-1}=b_{\alpha-1}^{-1}(\varepsilon)=O(1)>0 \tag{15}$$

Краевая задача (14.1) имеет единственное решение

$$u_1(t)=\varepsilon^{-1}K(t);\ K(t)=1-X(t)\,.$$

Очевидно, что для функции $K(t,s)$ имеет место оценка:

$$0\le K(t)\le 1,\ |K'(t)|\le b_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}.$$

Поэтому, для функций $u_1(t),\ u_1'(t)$ имеют место оценки

$$0 \le u_1(t,\varepsilon) \le \varepsilon^{-1}, \left|u_{1t}(t,\varepsilon)\right| \le \varepsilon^{-1} b_\alpha t^{-\alpha} e^{-t}.$$

Краевые задачи (14.n), n=2,3,… можно решить используя функцию Грина.

Лемма 1. Однородная задача

$$Mz(t) = 0, \ \ z(\varepsilon) = z(\infty) = 0$$

имеет функцию Грина

$$G(t,s,\varepsilon) = -b_\alpha^{-1} X(t) K(s), \ \varepsilon \le t \le s, \ \ G(t,s,\varepsilon) = -b_\alpha^{-1} X(s) K(t), \ \ s \le t < \infty.$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$Mz\big(t\big) = f(t), \ \ z\big(\varepsilon\big) = 0, \quad z\big(\infty\big) = 0$$

где $f(t) \in C[\varepsilon, \infty)$, имеет единственное решение представимое в виде

$$z(t) = \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s \, G(t,s,\varepsilon) f(s) ds \, .$$

Доказательство этих лемм проверяются непосредственно.

Решение краевой задачи (14.n), n=2, в силу (12) запишется в виде

$$u_2(t) = \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s G(t,s,\varepsilon) u_1(s) u'_1(s) ds \, .$$

Используя выражение для функции Грина, отсюда получим

$$u_2(t) = -\varepsilon^{-1} b_\alpha \int_\varepsilon^\infty G(t,s,\varepsilon) u_1(s) ds = \varepsilon^{-1} \int_\varepsilon^t K(t) X(s) u_1(s) ds + \varepsilon^{-1} \int_t^\infty X(t) K(s) u_1(s) ds$$
$$\le \varepsilon^{-2} K(t) \{ \int_\varepsilon^t K(s) ds + \int_t^\infty K(s) ds \} \le \varepsilon^{-2} K(t) \int_\varepsilon^\infty K(s) ds.$$

Отсюда, после интегрирования по частям имеем

$$\int_\varepsilon^\infty K(s) ds = sK(s) \Big|_\varepsilon^\infty + \int_\varepsilon^\infty sK(s) ds = -\varepsilon K(\varepsilon) + b_\alpha \int_\varepsilon^\infty s^{1-\alpha} e^{-s} ds \le b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1} \le O(b_\alpha), \varepsilon \to 0$$

$$u_2(t) \le K(t) \varepsilon^{-2} b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1}.$$

Очевидно, что $b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1} = O(\varepsilon^{\alpha-1}) O(1) \overset{(12)}{=} O(\varepsilon^{\alpha-1})$. Поэтому

$$\varepsilon^2 u_2(t) \le K(t) O(b_\alpha), \ \varepsilon \to 0.$$

Аналогично, для производной этой функции имеем оценку

$$\left|u'_2(t)\right| \le l \varepsilon^{-2} b_\alpha^2 t^{-\alpha} e^{-t}.$$

Далее методом математической индукции получим

$$u_{m+1}(t) \le \varepsilon^{-m-1} K(t) O\{(b_\alpha)^m\}, \ \left|u'_{m+1}(t)\right| \le \varepsilon^{-m-1} b_\alpha O\{(b_\alpha)^m\} t^{-\alpha} e^{-t} \ \ (m = 0,1,2,...).$$

Действительно, пусть

$$u_k(t) \le \varepsilon^{-k} K(t) O\{(b_\alpha)^{k-1}\},\ |u'_k(t)| \le \varepsilon^{-k} b_\alpha O\{(b_\alpha)^{k-1}\} t^{-\alpha} e^{-t}\ \ , k \in N.$$

Тогда, уравнение для определения функции $u_{m+1}(t)$ имеет вид

$$Mu_{m+1}(t) = u_0(t)u'_m(t) + \ldots + u_k(t)u'_{m-k}(t) + \ldots + u_m(t)u'_0(t) := f(u_0, u_1, \ldots, u_m),$$

$$u_{m+1}(\varepsilon) = u_{m+1}(\infty) = 0$$

Определяя отсюда функцию $u_{m+1}(t)$ имеем

$$u_{m+1}(t) = \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s\, G(t,s,\varepsilon)\{u_0(s)u'_m(s) + u_1(s)u'_{m-1}(s) + \ \ldots + u_m(s)u'_0(s)\}ds$$

Запишем это уравнение в виде

$$u_{m+1}(t) = -\int_\varepsilon^t s^\alpha e^s b_\alpha^{-1} X(s)K(t)\{u_0(s)u'_m(s) + u_1(s)u'_{m-1}(s) + \ \ldots + u_m(s)u'_0(s)\}ds +$$

$$-\int_t^\infty s^\alpha e^s b_\alpha^{-1} X(t)K(s)\{u_0(s)u'_m(s) + u_1(s)u'_{m-1}(s) + \ \ldots + u_m(s)u'_0(s)\}ds.$$

Оценивая получим

$$|u_{m+1}(t)| \le \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s |G(t,s)| \left[\frac{K(s)}{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^m}(b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^{m-1} b_\alpha s^{-\alpha} e^{-s}\right.$$
$$+ \frac{|K(s)|}{\varepsilon^2} b_\alpha b_{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} b_\alpha s^{-\alpha} e^{-s} (b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^{m-2}$$
$$+ \varepsilon^{-3}(b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^2 b_\alpha \frac{1}{\varepsilon^{m-2}} b_\alpha s^{-\alpha} e^{-s} (b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^{m-3}$$
$$\left. + \varepsilon^{-m}(b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^{m-1} \varepsilon^{-1} b_\alpha s^{-\alpha} e^{-s}\right] ds \le$$

$$\varepsilon^{-m-1}\int_\varepsilon^\infty |G(t,s)| K(s) b_\alpha (b_\alpha b_{\alpha-1})^{m-1}$$

$$\le \varepsilon^{-m-1}(b_\alpha b_\alpha^{-1})^{m-1}\left[\int_\varepsilon^t K(t)X(s)K(s)ds + \int_t^\infty X(t)K^2(s)ds\right]$$

$$\le (b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^{m-1}\varepsilon^{-m-1}\int_\varepsilon^\infty K(t)K(s)ds \ \le \ \frac{(b_\alpha b_{\alpha-1})^m}{\varepsilon^{m+1}} K(t).$$

Аналогично

$$|u'_{m+1}(t)| \le \varepsilon^{-m-1} b_2 \int_\varepsilon^\infty |G(t,s)| K(s) (b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^{-m-1}$$

$$\leq \varepsilon^{-m-1}(b_\alpha b_\alpha^{-1})^{m-1}\left[\int\limits_{\varepsilon}^{t}|K'(t)|X(s)K(s)ds+\int\limits_{t}^{\infty}X'(t)K^2(s)ds\right]$$

$$\leq\ \varepsilon^{-m-1}b_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}(b_\alpha b_{\alpha-1}^{-1})^m$$

Значит, ряд (10) мажорирутся следующим асимптотическим числовым рядом

$$1+O\{b_\alpha\}+...+O\{(b_\alpha)^m\}+...\prec 1+O(\varepsilon^{\alpha-1})+...+O(\varepsilon^{m(\alpha-1)})+... \quad (16)$$

Отсюда, получаем формальное доказательство следующей теоремы

Теорема 2. Решение задачи (1) представляется в виде асимптотического ряда (13), для членов которого имеет место оценки (16).

Доказательстово теоремы проведем методом мажорант. Задача (11)-(12) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u(t)=K(t)+\int_\varepsilon^\infty s^\alpha G(t,s)u(s)u'(s)ds \\ u'(t)=K'(t)+\int_\varepsilon^\infty s^\alpha G_2(t,s)u(s)u'(s)ds \end{cases} \quad (17)$$

В этом системе сделаем преобразование

$$u(t)=K(t)Z_1(t),\quad u'(t)=K'(t)Z_2(t)$$

Тогда система (17) перейдет к системе

$$Z_1(t)=1+\int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s Q_1(t,s)K(s)K'(s)Z_1(s)Z_2(s)sds \quad (18)$$

$$Z_2(t)=1+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}s^\alpha e^s Q_2(t,s)K(s)K'(s)Z_1(s)Z_2(s)sds$$

где $$Q_1(t,s)=\begin{cases}-b_\alpha^{-1}K^{-1}(t)X(t)K^2(s)K^1(s)\varepsilon\leq t\leq s\\ -b_\alpha^{-1}K^{-1}(t)X(s)K(s)K^1(s)s\leq t\leq\infty\end{cases}$$

$$Q_2(t,s)=\begin{cases}-b_\alpha^{-1}(K^{-1}(t))^{-1}X(t)K(s)K(s)K(s),\varepsilon\leq t\leq s\\ -b_\alpha^{-1}(K^{-1}(t))^{-1}X(s)K(t)K(s)K^1(s)s\leq t\leq\infty\end{cases}$$

Нам нужна следующая

Лемма 3. Справедливы оценки

$$\int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s(Q_1(t,s))\,ds\leq lb_\alpha,\quad \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s(Q_2(t,s))\,ds\leq lb_\alpha, \quad (19)$$

Учитывая, что

$$K'(t)=-X'(t)=-b_\alpha t^{-\alpha}e^{-t},\qquad K'(t)\leq 0,t\in[\varepsilon,\infty),0\leq X(t)\leq 1,$$

Имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} s^{\alpha}e^{s}|Q_1(t,s)|ds = b_{\alpha}^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} s^{\alpha}e^{s}K(s)s^{-\alpha}e^{-s}b_{\alpha}ds +$$

$$+\int_{t}^{\infty} K^{-1}(t)K^{2}(s)ds \leq \int_{\varepsilon}^{t} K(s)ds + \int_{t}^{\infty} K(s)ds = \int_{\varepsilon}^{t} K(s)ds \leq lb_{\alpha,}\, l = b_{\alpha-1}$$

Аналогично доказывается вторая оценка (19).

Обозначив, $Sup_{\varepsilon\leq t<\infty}\big(Z_1(t), Z_2(t)\big) = \beta$. Из (18) Имеем для уравнения $Z_1(t), Z_2(t)$ мажорантное уравнение $\lambda = 1 + lb_{\alpha}\lambda^2$.

Это уравнение имеет аналитическое решение β относительно b_{α} если, например $b_{\alpha} \leq (8l)^{-1}$. При этом условии

$$\lambda = (2lb_{\alpha})^{-1}[1-(1-4lb_{\alpha})^{-1}] = 1 + \lambda_1 b_{\alpha} + \lambda_2 {b^2}_{\alpha} + \cdots, \qquad (20)$$

где λ_k - неоторые постоянные. Тогда решение (13) мажорируется рядом (20). Значить решение задачи является аналитической функций малого параметра $b_{\alpha} = O(\varepsilon^{\alpha-1})$. Отсюда следует, что этот ряд является таже асимптотическим рядом при $\varepsilon \to 0$. Мы доказали более сильную теорему

Теорема 3. Решение задачи (1) представляется в виде равномерно сходящегося ряда (13) при малом ε.

§ 2.4. Построение асимптотики решения задачи Лагерстрома размерности три

Здесь рассмотриается случай n=3

$$y'' + (2x^{-1} + \varepsilon)y' = \varepsilon y(x)y', y(1) = 1, \; y(\infty) = 0. \tag{1}$$

Внешнее решение ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots \tag{2}$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенная функция на отрезке $J(\varepsilon)$, при чем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1) = 0, \; y'_0(1) = a, \; y_k(1) = 0, \; y_k'(1) = 0 \;\; (k = 1,2,\ldots) \; .$$

Подставляя (2) в (1) имеем:

$$Ly_0(x) = y_0''(x) + 2x^{-1}y_0'(x) = 0, \;\; y_0(1) = 0, \quad y_0'(1) = a \tag{3.0}$$

$$Ly_m(x) = -y'_{m-1}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} y_i(x)y'_{m-1-i}(x), \, y_m(1) = 0, \;\; y'_m(1) = 0 \tag{3.m}$$

Решение задачи (3.0) представляется в виде:

$$y_0(x) = 1 + a - ax^{-1}, \; y'_0(x) = ax^{-2}. \tag{4.0}$$

Используя (3.0), для определения $y_1(x)$ имеем уравнение

$$Ly_1(x) = a^2x^{-2} - a^2x^{-3}, \; y_1(1) = 0, \;\; y'_1(1) = 0,$$

Решая это уравнение получим :

$$y_1'(x) = a^2x^{-1} - a^2x^{-2} - a^2 lnx\, x^{-2} \sim a^2x^{-1}, \, x \to \infty$$

Отсюда,

$$y_1(x) = a^2\, lnx + a^2x^{-1}\ln x - 2a^2 + 2a^2x^{-1} \sim a^2\, lnx, \, x \to \infty \; . \tag{4.1}$$

Аналогично, мы можем определить функцию

$$y_n(x) \sim \frac{a^{n+1}}{(n-1)\cdot n!}x^{n-1} + O(x^{n-2}\ln x), \, x \to \infty. \tag{4.n}$$

Формула (4.n) доказывается методом полной математической индукции.

Таким образом, внешнее решение (2) имеет следующую структуру

$$y(x,\varepsilon)\sim 1+a\{1+\varepsilon a\ln x+\frac{\varepsilon^2a^2}{2}x+\ldots+\frac{(\varepsilon a)^n}{(n-1)\cdot n!}x^{n-1}+\ldots\},\ x\to\infty \qquad (5)$$

Если в (5) положить $x=\varepsilon^{-1}$, то имеем

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon)\sim 1+a\{1+a\,\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{2\cdot 3!}+\frac{a^4}{3\cdot 4!}+\ldots+\frac{a^n}{(n-1)\cdot n!}+\ldots\}, \qquad (6)$$

В этом ряде появилась малый параметр $\mu=-\varepsilon ln\varepsilon$ Если, постоянную a выберем равную, $a=\mu=-\varepsilon ln\varepsilon$ то выражение (6) запишется в виде:

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon)\sim 1+\mu+\mu^3+\mu^3[\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2\cdot 3!}+\frac{\mu^2}{3\cdot 4!}+\ldots+\frac{\mu^{n-1}}{(n-1)\cdot n!}+\ldots\}.$$

Справедлива

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon)=\left[1,\varepsilon^{-1}\right)$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\mu y_1(x)+\ldots+\mu^n y_n(x)+R_{n+1}(x,\varepsilon)$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right|\le l\mu^{n+1},$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Теорема доказывается точно также как и в предыдущем параграфе.

Внутреннее и полное решение

Теперь построим внутреннее решение, которое удовлетворяет условию $y(\infty)=0$. Для этого введем внутреннюю переменную t: $t=x\varepsilon$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$u''(t)+\left(1+2t^{-1}\right)u'(t)=u(t)u'(t) \qquad (7)$$

где $u(t)=y(x)\big|_{x=t\varepsilon^{-1}}$

Оказывается, что внутреннее решение уравнения (7) существует не только в некоторой окрестности точки $t=\infty$, но и на всем отрезке $I(\varepsilon)=[\varepsilon,\infty)$, т.е. мы решаем уравнение (7) со следующими граничными условиями

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0. \qquad (8)$$

Решение задачи (7)-(8) ищем в виде:

$$U(t,\mu)=\varepsilon u_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^2 u_2(t,\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^m u_m(t,\varepsilon)+..., \qquad (9)$$

где$u_j(t)$ являются асимтотической последовательностью, т.е.

$$u_{j+1}(t)=o(u_j(t)),\ \varepsilon\to 0\ \ (j=0,1,2...).$$

Тогда для определения $u_j(t)$получим следующие задачи:

$$Mu_1(t):=u''_1(t)+(1+2t^{-1})u'_1(t)=0,\ u_1(\varepsilon)=\varepsilon^{-1},\ u_1(\infty)=0, \qquad (10.1)$$

$$Mu_n(t)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(t)u'_{n-i}(t),\ \ u_n(\varepsilon)=u_n(\infty)=0,\ n\in \mathrm{N} \qquad (10.n)$$

Однородное уравнение (10.1) имеет двух линейно независимых решений

$$U_1(t)=1,\ X(t):=X(t,\varepsilon)=b_2\int_{\varepsilon}^{t}s^{-2}e^{-s}ds,$$

$$b_2:=[b_2(\varepsilon)]^{-1}=\int_{\varepsilon}^{\infty}s^{-2}e^{-s}ds=\int_{\varepsilon}^{1}s^{-2}e^{-s}ds+\int_{1}^{\infty}s^{-2}e^{-s}ds= \quad .$$

$$=\int_{\varepsilon}^{1}s^{-2}ds+\int_{\varepsilon}^{1}s^{-2}[e^{-s}-1]ds+l=O(\varepsilon^{-1}),\ \varepsilon\to 0\Rightarrow \qquad b_2(\varepsilon)=O(\ \varepsilon)$$

и $[b_{-1}(\varepsilon)]^{-1}=\int_{\varepsilon}^{\infty}s^{-1}e^{-s}ds=\int_{\varepsilon}^{1}s^{-1}e^{-s}ds+\int_{1}^{\infty}s^{-1}e^{-s}ds=O(\ln\varepsilon^{-1}),\varepsilon\to 0$

Отсюда вытекает, что

$$b_2=b_2(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-1}),\ \varepsilon\to 0, b_{-1}^{-1}=b_{-1}^{-1}(\varepsilon)=O(\ln\varepsilon^{-1}),\quad \varepsilon\to 0 \qquad (11)$$

Краевая задача (10.1) имеет единственное решение

$$u_1(t)=\varepsilon^{-1}K(t);\ K(t)=1-X(t).$$

Очевидно, что для функции $K(t)$ имеет место оценка:

$$0\le K(t)\le 1,\ |K'(t)|\le b_2 t^{-\alpha}e^{-t}.$$

Поэтому, для функций $u_1(t),\ u_1'(t)$ имеют место оценки

$$0\le u_1(t,\varepsilon)\le\varepsilon^{-1},\ |u_{1t}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^{-1}b_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}.$$

Краевые задачи (10.n), n=2,3,… можно решить используя функцию Грина.

Лемма 1. Однородная задача

$$Mz(t)=0,\ \ z(\varepsilon)=z(\infty)=0$$

имеет функцию Грина

$$G(t,s,\varepsilon)=-b_2^{-1}X(t)K(s),\ \varepsilon\le t\le s,\ \ G(t,s,\varepsilon)=-b_2^{-1}X(s)K(t),\ \ s\le t<\infty.$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$Mz\left(t\right)=f(t),\ \ z\left(\varepsilon\right)=0,\quad z\left(\infty\right)=0$$

где $f(t)\in C[\varepsilon,\infty)$, имеет единственное решение представимое в виде

$$z(t)=\int_{\varepsilon}^{\infty}s^2e^s\,G(t,s,\varepsilon)f(s)ds\,.$$

Доказательство этих лемм проверяются непосредственно.

Решение краевой задачи (10.n), n=2, в силу (11) запишется в виде

$$u_2(t)=\int_{\varepsilon}^{\infty}s^2e^sG(t,s,\varepsilon)u_1(s)u_1'(s)ds\,.$$

Используя выражение для функции Грина, отсюда получим

$$u_2(t)=-\varepsilon^{-1}b_2\int_{\varepsilon}^{\infty}G(t,s,\varepsilon)u_1(s)ds=\varepsilon^{-1}\int_{\varepsilon}^{t}K(t)X(s)u_1(s)ds+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_{t}^{\infty}X(t)K(s)u_1(s)ds\le\varepsilon^{-2}K(t)\{\int_{\varepsilon}^{t}K(s)ds+\int_{t}^{\infty}K(s)ds\}\le\varepsilon^{-2}K(t)\int_{\varepsilon}^{\infty}K(s)ds.$$

Отсюда, после интегрирования по частям имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}K(s)ds=sK(s)\Big|_{\varepsilon}^{\infty}+\int_{\varepsilon}^{\infty}sK(s)ds=-\varepsilon K(\varepsilon)+b_2\int_{\varepsilon}^{\infty}s^{-1}e^{-s}ds\le b_2b_{-1}^{-1}=O(\varepsilon\ln\varepsilon^{-1}),$$

$$u_2(t)\le K(t)\varepsilon^{-2}b_2b_{-1}^{-1}.$$

Очевидно, что $b_2b_{-1}^{-1}=O(\varepsilon)O(\ln\varepsilon^{-1})=O(\varepsilon\ln\varepsilon^{-1}).$

Поэтому, $\varepsilon^2u_2(t)\le K(t)O(b_2b_{-1}^{-1}),\ \ \varepsilon\to 0.$

Аналогично, для производной этой функции имеем оценку

$$\left|u'_2(t)\right|\le l\varepsilon^{-2}b_2^2b_{-1}^{-1}t^{-\alpha}e^{-t}.$$

Действительно,

$$\left|u'_2(t)\right|=\left|\int_{\varepsilon}^{\infty}s^2e^sG_t(t,s,\varepsilon)u_1(s)u'_1(s)ds\right|=$$

$$=\left|\int_{\varepsilon}^{t}s^2e^sG_t(t,s,\varepsilon)u_1(s)u'_1(s)ds+\int_{t}^{\infty}s^2e^sG_t(t,s,\varepsilon)u_1(s)u'_1(s)ds\right|=$$

$$=\left|b_2^{-1}\int_{\varepsilon}^{t}s^2e^sK'(t)X(s)u_1(s)u'_1(s)ds+b_2^{-1}\int_{t}^{\infty}s^2e^sK(s)U(t)u_1(s)u'_1(s)ds\right|$$

Отсюда

$$\left|u_2'(t)\right| \le \left|\varepsilon^{-1} b_2^{-1} b_2 \int_\varepsilon^t K'(t) X(s) u_1(s) ds + \varepsilon^{-1} b_2^{-1} b_2 \int_t^\infty K(s) X(t) u_1(s) ds\right|$$

$$\le \left|\varepsilon^{-1} \int_\varepsilon^t K'(t) X(s) u_1(s) ds + \varepsilon^{-1} \int_t^\infty K(s) X'(t) u_1(s) ds\right| \le$$

$$\le \varepsilon^{-2} \left|K'(t)\right| [\int_\varepsilon^t K(s) ds + \int_t^\infty K(s) ds] \le$$

$$\le \varepsilon^{-2} \left|K'(t)\right| \int_\varepsilon^\infty K(s) ds \le \varepsilon^{-2} b_2 b_{-1}^{-1} \left|K'(t)\right|$$

Отсюда

$$\left|u_2'(t)\right| \le \varepsilon^{-2} b_2 b_{-1}^{-1} \left|K'(t)\right| \le \varepsilon^{-2} O(b_2 b_{-1}^{-1} b_2) t^{-\alpha} e^{-t}, \varepsilon \to 0 .$$

Далее методом математической индукции получим

$$u_{m+1}(t) \le \varepsilon^{-m-1} K(t) O\{(b_2 b_{-1}^{-1})^m\},$$

$$\left|u_{m+1}'(t)\right| \le \varepsilon^{-m-1} b_2 O\{(b_2 b_{-1}^{-1})^m\} t^{-2} e^{-t} \quad (m = 0,1,2,...).$$

Значит, ряд (9) мажорирутся следующим асимптотическим рядом

$$1 + O\{b_2 b_{-1}^{-1}\} + ... + O\{(b_2 b_{-1}^{-1})^m\} + ... \prec 1 + O(\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}) + ... + O[(\varepsilon \ln \varepsilon^{-1})]^m + ... \quad (12).$$

Отсюда, получаем формальное доказательство следующей теоремы

Теорема 2. Решение задачи (1) представляется в виде асимптотического ряда (9), для членов которого имеет место оценки (12).

Строгое доказательстово этой теоремы проведем методом мажорант. Задача (7)-(8) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u(t) = K(t) + \int_\varepsilon^\infty s^\alpha G(t,s) u(s) u'(s) ds \\ u'(t) = K'(t) + \int_\varepsilon^\infty s^\alpha G_2(t,s) u(s) u'(s) ds \end{cases} \quad (13)$$

В этом системе сделаем преобразование

$$u(t) = K(t) Z_1(t), \quad u'(t) = K'(t) Z_2(t)$$

Тогда система (13) перейдет к системе

$$Z_1(t) = 1 + \int_\varepsilon^\infty s^2 e^s Q_1(t,s) K(s) K'(s) Z_1(s) Z_2(s) s ds \quad (14)$$

$$Z_2(t) = 1 + \int_\varepsilon^\infty s^2 e^s Q_2(t,s) K(s) K'(s) Z_1(s) Z_2(s) s ds ,$$

где $Q_1(t,s) = \begin{cases} -b_2^{-1} K^{-1}(t) X(t) K^2(s) K^1(s) \varepsilon \le t \le s \\ -b_2^{-1} K^{-1}(t) X(s) K(s) K^1(s) s \le t \le \infty \end{cases}$

$$Q_2(t,s)=\begin{cases}-b_2^{-1}(K^{-1}(t))^{-1}X(t)K(s)K(s)K(s), \varepsilon\le t\le s\\ -b_2^{-1}(K^{-1}(t))^{-1}X(s)K(t)K(s)K^{1}(s) s\le t\le\infty\end{cases}$$

Нам нужна следующая

Лемма 3. Справедливы оценки

$$\int_\varepsilon^\infty s^2e^s(Q_1(t,s))\,ds\le lb_2b_{-1}^{-1} \qquad \int_\varepsilon^\infty s^2e^s(Q_2(t,s))\,ds\le lb_2b_{-1}^{-1}. \qquad (15)$$

Учитывая, что

$$K'(t)=-X'(t)=-b_2t^{-2}e^{-t}, \qquad K'(t)\le 0,\ \ t\in[\varepsilon,\infty), \quad 0\le X(t)\le 1,$$

Имеем

$$\int_\varepsilon^\infty s^2e^s|Q_1(t,s)|ds$$

$$=b_2^{-1}\int_\varepsilon^t s^2e^sK(s)s^{-2}e^{-s}b_2-b_2^{-1}\int_t^\infty K^{-1}(t)K^2(s)s^2e^sb_2s^{-2}e^sds$$

$$\le\int_\varepsilon^t K(s)ds+\int_t^\infty K(s)ds=\int_\varepsilon^t K(s)ds\le b_2b_{-1}^{\ -1}$$

Аналогично доказывается вторая оценка (15).

Обозначив, $Sup_{\varepsilon\le t<\infty}\big(Z_1(t),Z_2(t)\big)=\beta$. Из (14) Имеем для уравнения $Z_1(t),Z_2(t)$ мажорантное уравнение $\beta=1+lb_2b_{-1}^{-1}\beta^2$. Это уравнение имеет аналитическое решение β относительно если, например, $b_\alpha\le(8l)^{-1}$. При этом условии

$$\beta=(2lb_2b_{-1}^{-1})^{-1}\left[1-(1-4lb_2b_{-1}^{-1}{}^{-1}\right]=1+\beta_1lb_2b_{-1}^{-1} \qquad (16)$$

Тогда решение (9) мажорируется рядом (16).

Значить решение задачи является аналитической функций малого параметра $b_\alpha=O(\varepsilon^{\alpha-1})$.Отсюда следует этот ряд является также асимптотическим рядом при $\varepsilon\to 0$.

Мы доказали более сильную теорему

Теорема 3. Решение задачи (1) представляется в виде равномерно сходящегося ряда (9) при малом ε.

§2.5. Построение асимптотики решения лагерстрома размерности четыре

Здесь рассмотриается случай

$$y'' + (3x^{-1} + \varepsilon)y' = \varepsilon y(x)y', y(1) = 1,\ y(\infty) = 0. \qquad (1)$$

где $n - 1 = \alpha = 3$

Внешнее решение ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенная функция на отрезке $J(\varepsilon)$, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1) = 0,\ y'_0(1) = a,\ y_k(1) = 0,\ y'_k(1) = 0\ \ (k = 1,2,\ldots)\ .$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)(j = 0,1,2,...)$ имеем следующие уравнения:

$$Ly_0(x) = y''_0(x) + 3x^{-1}y'_0(x) = 0,\ \ y_0(1) = 0,\ y'_0(1) = a \qquad (3.0)$$

$$Ly_m(x) = -y'_{m-1}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} y_i(x)y'_{m-1-i}(x),\ y_m(1) = 0,\ \ y'_m(1) = 0 \qquad (3.m)$$

Решение задачи (3.0) представляется в виде:

$$y_0(x) = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}x^{-2},\ y'_0(x) = a\,x^{-3}. \qquad (4.0)$$

Используя (3.0), для определения $y_1(x)$ имеем уравнение

$$Ly_1(x) = a^2x^{-3}\ /\ 2 - a^2x^{-5}\ /\ 2,\ y_1(1) = 0,\ \ y'_1(1) = 0,$$

Решая это уравнение получим

$$y_1(x) = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{2}x^{-1} + \frac{a^2}{2}x^{-2} - \frac{a^2}{6}x^{-3}, \qquad (4.1)$$

Отсюда,

$$y'_1(x) = \frac{a^2}{2}x^{-2} - a^2x^{-3} + \frac{a^2}{2}x^{-4}\ , \qquad (4.1.1)$$

Используя (4.1)и (4.1.1) ,уравнение для определения $y_2(x)$ запишется в виде

$$Ly_2(x)=\frac{a^3}{4}x^{-1}+\frac{2}{3}a^3x^{-3}+O(x^{-4}),\ x\to\infty$$

Решая это уравнение получим, $\quad y'_2(x)=\frac{a^3}{8}x^{-1}-\frac{2}{3}a^3x^{-2}+O(x^{-3}),\ \ x\to\infty$

Значит

$$y_2(x)=\frac{a^3}{8}\ln x-\frac{2a^3}{3}+\frac{2a^3}{3}x^{-1}+O(x^{-2}),\ x\to\infty. \tag{4.2}$$

Аналогично, мы можем определить функцию

$$y_n(x)\sim\lambda_n a^{n+1}x^{n-2},\quad y_n'(x)\sim\ \lambda_n(n-2a^{n+1}x^{n-3},\ x\to\infty. \tag{4.n}$$

где λ_n - натуральное число, которое стремится к бесконечности при $n\to\infty$.

Таким образом, внешнее решение (2) имеет следующую структуру

$$\begin{aligned}&y(x,\varepsilon)=1+\frac{\alpha}{2}+\varepsilon\,a^2\frac{1}{6}+\varepsilon^2a^3\frac{1}{8}\ln x+\varepsilon^3a^4\frac{1}{18}x+\varepsilon^4a^5x^2\{\lambda_0+\lambda_1(a\varepsilon x)+\\&\lambda_2(a\varepsilon x)^2+\ldots+\lambda_n(a\varepsilon x)^n+\ldots\},\lambda_k=const,\ x\to\infty\end{aligned} \tag{5}$$

Если в (5) положить $x=\varepsilon^{-1}$, то имеем

$$y(x,\varepsilon)\Big|_{x=\varepsilon^{-1}}=1+\frac{a}{2}+\varepsilon\,a^2\frac{1}{6}+\varepsilon^2a^3\frac{1}{8}\ln(\varepsilon^{-1})+\varepsilon^2a^4+\varepsilon^2a^5\{\lambda_0+\lambda_1a+\ldots+\lambda_na^n+\ldots\}. \tag{6}$$

Если, постоянную a выберем равную, $a=\varepsilon$ то выражение (6), является асимптотическим рядом.

Справедлива

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon)=\left[1,\varepsilon^{-1}\right)$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+R_{n+1}(x,\varepsilon) \tag{7}$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right|\le l\varepsilon^{n+1}\ ,$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Теорема доказывается точно также как и ранее.

Внутреннее и полное решение

Теперь построим внутреннее решение, которое удовлетворяет условию на бесконечности. Для этого введем внутреннюю переменную t: $t = x\varepsilon$. Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$u''(t) + \left(3 + t^{-1}\right)u'(t) = u(t)u'(t) \tag{8}$$

где $u(t) = y(x)\Big|_{x=t\varepsilon^{-1}}$

Решаем уравнение (8) со следующими граничными условиями

$$u_0(\varepsilon) = 1,\ u_n(\varepsilon) = 0\ (n = 1,2,...). \tag{9}$$

Решение задачи (8)-(9) ищем в виде:

$$U(t,\mu) = \varepsilon u_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(t,\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^m u_m(t,\varepsilon) + ..., \tag{10}$$

где $u_j(t)$ являются асимтотической последовательностью, т.е.

$$u_{j+1}(t) = o(u_j(t)),\ \varepsilon \to 0\ \ (j = 0,1,2...).$$

Далее зависимость функций $u_j(t)$ от ε не будем указывать. Тогда для определения $u_j(t)$ получим следующие задачи:

$$Mu_1(t) := u''_1(t) + (1 + 3t^{-1})u'_1(t) = 0,\quad u_1(\varepsilon) = \varepsilon^{-1},\ u_1(\infty) = 0, \tag{11.1}$$

$$Mu_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t)u'_{n-i}(t),\ \ u_n(\varepsilon) = u_n(\infty) = 0, \tag{11.n}$$

Однородное уравнение (11.1) имеет двух линейно независимых решений

$$U_1(t) = 1,\ X(t) := X(t,\varepsilon) = b_3\int_\varepsilon^t s^{-3}e^{-s}ds,$$

$$b_3 := [b_3(\varepsilon)]^{-1} = \int_\varepsilon^\infty s^{-3}e^{-s}ds = \int_\varepsilon^1 s^{-3}e^{-s}ds + \int_1^\infty s^{-3}e^{-s}ds = \int_\varepsilon^1 s^{-3}ds + \quad .$$

$$+\int_\varepsilon^1 s^{-2}ds + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 s^{-1}ds + \int_\varepsilon^1 s^{-3}[e^{-s} - 1 - t - t^2/2]ds + l = \varepsilon^{-2}[1/2 + o(1)], \varepsilon \to 0$$

и $[b_2(\varepsilon)]^{-1} = \int_\varepsilon^\infty s^{-2}e^{-s}ds = \int_\varepsilon^1 s^{-2}e^{-s}ds + \int_1^\infty s^{-2}e^{-s}ds = O(\varepsilon^{-1}) > 0.$

Отсюда вытекает, что

$$b_3 = b_3(\varepsilon) = O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,\qquad b_2^{-1} = b_2^{-1}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1}) > 0 \tag{12}$$

Краевая задача (11.0) имеет единственное решение

$$u_1(t)=\varepsilon^{-1}K(t);\; K(t)=1-X(t).$$

Очевидно, что для функции $K(t,s)$ имеет место оценка:

$0\le K(t)\le 1,\ |K'(t)|\le b_3 t^{-3}e^{-t}.$

Поэтому, для функций $u_1(t),\ u_1'(t)$ имеют место оценки

$$0\le u_1(t,\varepsilon)\le \varepsilon^{-1},\ |u_{1t}(t,\varepsilon)|\le \varepsilon^{-1}b_2 t^{-3}e^{-t}.$$

Краевые задачи (11.n), n=2,3,… можно решить используя функцию Грина.

Лемма 1. Однородная задача

$$Mz(t)=0,\;\; z(\varepsilon)=z(\infty)=0$$

имеет функцию Грина

$$G(t,s,\varepsilon)=-b_3^{-1}X(t)K(s),\;\varepsilon\le t\le s,\qquad G(t,s,\varepsilon)=-b_3^{-1}X(s)K(t),\; s\le t<\infty.$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$Mz(t)=f(t),\;\; z(\varepsilon)=0,\quad z(\infty)=0$$

где $f(t)\in C[\varepsilon,\infty)$, имеет единственное решение представимое в виде

$$z(t)=\int_\varepsilon^\infty s^3e^s\,G(t,s,\varepsilon)f(s)ds.$$

Доказательство этих лемм проверяются непосредственно.

Решение краевой задачи (11.n), n=2, в силу (12) запишется в виде

$$u_2(t)=\int_\varepsilon^\infty s^3e^sG(t,s,\varepsilon)u_1(s)u_1'(s)ds.$$

Используя выражение для функции Грина, отсюда получим

$$u_2(t)=-\varepsilon^{-1}b_3\int_\varepsilon^\infty G(t,s,\varepsilon)u_1(s)ds=\varepsilon^{-1}\int_\varepsilon^t K(t)X(s)u_1(s)ds+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_t^\infty X(t)K(s)u_1(s)ds\le\varepsilon^{-2}K(t)\{\int_\varepsilon^t K(s)ds+\int_t^\infty K(s)ds\}\le$$
$$\le\varepsilon^{-2}K(t)\int_\varepsilon^\infty K(s)ds.$$

Отсюда, после интегрирования по частям имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(s)ds = sK(s)\Big]_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} sK(s)ds = -\varepsilon K(\varepsilon) + b_3\int_{\varepsilon}^{\infty} s^{-2}e^{-s}ds$$

$$\le b_3 b_2^{-1} = \gamma(\varepsilon) = \gamma = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0$$

$$u_2(t) \le K(t)\varepsilon^{-2}\gamma.$$

Поэтому, $\varepsilon^2 u_2(t) \le K(t)\gamma(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$

Аналогично, для производной этой функции имеем оценку

$$|u'_2(t)| \le l\varepsilon^{-2} b_3 \gamma(\varepsilon) t^{-3} e^{-t}.$$

Действительно

$$\left|u_2'(t)\right| = \left|\int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 e^s G_t(t,s,\varepsilon) u_1(s) u_1'(s) ds\right| =$$

$$= \left|\int_{\varepsilon}^{t} s^3 e^s G_t(t,s,\varepsilon) u_1(s) u_1'(s) ds + \int_{t}^{\infty} s^3 e^s G_t(t,s,\varepsilon) u_1(s) u_1'(s) ds\right| =$$

$$= \left|b_3^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} s^3 e^s K'(t) X(s) u_1(s) u_1'(s) ds + b_3^{-1}\int_{t}^{\infty} s^3 e^s K(s) U(t) u_1(s) u_1'(s) ds\right|$$

Отсюда

$$|u'_2(t)| \le \left|\varepsilon^{-1} b_3^{-1} b_3 \int_{\varepsilon}^{t} K'(t) X(s) u_1(s) ds + \varepsilon^{-1} b_3^{-1} b_3 \int_{t}^{\infty} K(s) X(t) u_1(s) ds\right|$$

$$\le \left|\varepsilon^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} K'(t) X(s) u_1(s) ds + \varepsilon^{-1}\int_{t}^{\infty} K(s) X'(t) u_1(s) ds\right| \le$$

$$\le \varepsilon^{-2}\left|K'(t)\right| \left[\int_{\varepsilon}^{t} K(s) ds + \int_{t}^{\infty} K(s) ds\right] \le \varepsilon^{-2}\left|K'(t)\right| \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s) ds \le \varepsilon^{-2} b_2^{-1} b_3 \left|K'(t)\right|$$

Отсюда, $|u'_2(t)| \le \varepsilon^{-2} O(\varepsilon) |K'(t)| \le \varepsilon^{-2} O(\varepsilon^{-3}) t^{-3} e^{-t}, \varepsilon \to 0$.

Далее методом математической индукции получим

$$u_{m+1}(t) \le \varepsilon^{-m-1} K(t) O\{(\varepsilon)^m\}, \ \ |u'_{m+1}(t)| \le \varepsilon^{-m-1}\varepsilon^2 O\{(\varepsilon)^m\} t^{-3} e^{-t} \ \ (m = 0,1,2,...).$$

Значит, ряд (10) мажорирутся следующим асимптотическим числовым рядом

$$1 + O\{\varepsilon\} + O\{\varepsilon^2\} + ... + O\{\varepsilon^m\} + ... \qquad (13)$$

.

Отсюда, получаем формальное доказательство следующей теоремы

Теорема 2. Решение задачи (1) представляется в виде асимптотического ряда (10), для членов которого имеет место оценки (13).

Доказательстово теоремы проведем методом мажорант. Задача (8)-(9) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u(t) = K(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 G(t,s) u(s) u'(s) ds \\ u'(t) = K'(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 G_2(t,s) u(s) u'(s) ds \end{cases} \tag{14}$$

В этом системе сделаем преобразование

$$u(t) = K(t) Z_1(t)\,, \quad u'(t) = K'(t) Z_2(t)$$

Тогда система (14) перейдет к системе

$$Z_1(t) = 1 + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 e^s Q_1(t,s) K(s) K'(s) Z_1(s) Z_2(s) s ds \tag{15}$$

$$Z_2(t) = 1 + \int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 e^s Q_2(t,s) K(s) K'(s) Z_1(s) Z_2(s) s ds$$

где $Q_1(t,s) = \begin{cases} -b_3^{-1} K^{-1}(t) X(t) K^2(s) K^1(s) \varepsilon \le t \le s \\ -b_3^{-1} K^{-1}(t) X(s) K(s) K^1(s) s \le t \le \infty \end{cases}$

$$Q_2(t,s) = \begin{cases} -b_3^{-1} (K^{-1}(t))^{-1} X(t) K(s) K(s) K(s), \varepsilon \le t \le s \\ -b_3^{-1} (K^{-1}(t))^{-1} X(s) K(t) K(s) K^1(s) s \le t \le \infty \end{cases}$$

Нам нужна следующая

Лемма 3. Справедливы оценки

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 e^s (Q_1(t,s))\, ds \le l\varepsilon\,, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} s^{\alpha} e^s (Q_2(t,s))\, ds \le l\varepsilon\,. \tag{16}$$

Учитывая, что

$$K'(t) = -X'(t) = -b_3 t^{-3} e^{-t}, \qquad K'(t) \le 0,\ \ t \in [\varepsilon, \infty), \quad 0 \le X(t) \le 1,$$

Имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} s^3 e^s |Q_1(t,s)| ds$$

$$= b_3^{-1} \int_{\varepsilon}^{t} s^3 e^s K(s) s^{-3} e^{-s} b_3 + b_3^{-1} \int_{t}^{\infty} K^{-1}(t) K^2(s) s^3 e^s b_3 s^{-3} e^s ds$$

$$\le \int_{\varepsilon}^{t} K(s) ds + \int_{t}^{\infty} K(s) ds = \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s) ds = b_3 b_2^{-1} = \gamma(\varepsilon) = \gamma = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0$$

Аналогично доказывается вторая оценка (16).

Обозначив, $Sup_{\varepsilon\leq t<\infty}\big(Z_1(t), Z_2(t)\big) = \beta$. Из (19) Имеем для уравнения $Z_1(t), Z_2(t)$ мажорантное уравнение: $\lambda = 1 + l\varepsilon\lambda^2$. Это уравнение имеет аналитическое решение β относительно b_α если, например, ε≤ $(8l)^{-1}$. При этом условии

$$\lambda = (2l\varepsilon)^{-1}[1 - (1 - 4l\varepsilon)^{-1}] = 1 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \cdots \qquad (17)$$

Тогда решение (10) мажорируется рядом (17).

Значить решение задачи является аналитической функций малого параметра $O(\varepsilon)$.Отсюда следует этот ряд является таже асимптотическим рядом при $\varepsilon \to 0$.

Мы доказали более сильную теорему

Теорема 3. Решение задачи (1) представляется в виде равномерно сходящегося ряда (10) при малом ε.

Заключение по главе 2

В данной главе построены равномернвые асимптотические разложения решения исходной задачи Лагерстрома в случаях, когда размерность пространтсва n=1,2,3,4, а также нецелой размерности $2<n<3$.

Построенные асимптотические разложения строго обоснованы, т.е. получены точные оценки для остаточных членов асимптотических рядов.

ГЛАВА 3. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛАГЕРСТРОМА

§ 3.1.Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома размерности один, методом структурного сращивания

Рассмотрим задачу

$$y''(x) + yy' = -\beta \dot{y}^2, \quad y(\varepsilon) = 0, \quad y(\infty) = 1 \tag{1}$$

Это задача решается точно. Обозначим

$$\dot{y} = u, y''(x) = \frac{d}{dx}\dot{y}(x) = \frac{d}{dx}u = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}\, u$$

тогда

$$\frac{du}{dy}u + yu = -\beta u^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} + y = -\beta u$$

Решая это уравнение имеем

$$u(y) = e^{-\beta y}\left(c - \int e^{-\beta y}\, y dy\right) = e^{-\beta y}\left(c - \frac{y}{\beta}e^{\beta y} + \frac{1}{\beta^2}e^{\beta y}\right)$$

$$= ce^{-\beta y} - \frac{y}{\beta} + \beta^{-2}, \quad u^r = -\frac{y}{\beta} + \beta^{-2}$$

Проверка

$-\frac{1}{\beta} + y = y - \frac{1}{\beta}$, $\frac{dy}{dx} = ce^{-\beta y} - \frac{y}{\beta} + \beta^{-2}$, $x + c_1 = \int \frac{\beta^2 dy}{1 - \beta y + c\beta^2 e^{-\beta y}}$

Отсюда у удовлетворяя граничное условие $y(\varepsilon) = 0$ имеем

$$x - \varepsilon = \beta^2 \int_0^y \frac{ds}{1 - \beta s + c\beta^2 e^{-\beta s}}$$

Функция $F(s) = 1 - \beta s + c\beta^2 e^{-\beta s}$ должна имеет нуль первого порядка в точке $y = 1$, т.е.

$$F(1) = 1 - \beta + c\beta^2 e^{-\beta} = 0$$

Т.о.

$$x-\varepsilon=\beta^2\int_0^y \frac{ds}{1-\beta s-(1-\beta)e^{\beta(1-s)}}$$

Функция

$$f(t,\beta)=1-\beta t-(1-\beta)e^{\beta(1-t)}$$

При $\beta>0,\quad t\in[0,1]$является строго возрастающей функцией.

$$f(0,\beta)=1-(1-\beta)e^{\beta}>0,\qquad \beta>0$$

Поэтому функция

$$F(y,\beta)=\int_0^y \frac{ds}{1-\beta s-(1-\beta)e^{\beta(1-s)}}$$

$$F'(y,\beta)=\frac{1}{f(y,\beta)}$$

Является строго убивающей функцией.

Поэтому по теореме о неявной функции имеет единственную обратную функцию $y=Y(x-\varepsilon,\beta)$, причем

$$Y(x-\varepsilon,\beta)/_{x=\varepsilon}=0\quad Y(\infty,\beta)=1$$

§ 3.2. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи лагерстрома размерности два, методом структурного сращивания

Рассматривается обобщенная задача Лагерстрома

$$y''(x)+(x^{-1}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2, y\ (1)=1,\ y(\infty)=0 \qquad (1)$$

Внешнее решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y\ (1)=1$ ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенная функция, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1)=0,\ y'_0(1)=a,\ y_k(1)=0,\ y'_k(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots)$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)(j=0,1,2,...)$ имеем следующие уравнения:

$$y_0''(x)+\frac{1}{x}y_0'(x)-\beta y_0'^2(x)=0,\quad y_0(1)=1,\quad y_0'(1)=a, \qquad (3.0)$$

$$Ly_1:=y_1''(x)+\frac{1}{x}y_1'-2\beta y_0'(x)y_1'(x)=-y_0'(x)+y_0y_0'(x), \qquad (3.1)$$

$$Ly_{2m}=-y'_{2m-1}+\beta y_m^2+\sum_{\substack{i+j=6\\ i;j\geq 1 i\neq j}}y_i'y_j'+\sum_{i+j=2m-1}y_iy'_j,\ y_{2m}(1)=y'_{2m}(1)=0,\ (3.2m)$$

$$Ly_{2m+1}=-y'_{2m}+\sum_{\substack{i+j=2m+1\\ i,j\geq 1}}y_i'(x)y_j'(x)+\sum_{i+j=2m}y_iy_j'(x),\quad y_{2m+1}(1)=y_{2m+1}(1)=0. \ (3.2m+1)$$

Уравнение (3.0) является уравнением Бернулли и его можно решить следующим образом.

Если обозначить: $y'_0=z\Rightarrow z_0'+\frac{1}{x}z_0=\beta z_0^2\Rightarrow \frac{z'_0}{z_0}+\frac{1}{x}\frac{1}{z_0}=\beta$.

Если ввести обозначение: $v_0=\frac{1}{z_0}=\frac{1}{y'_0(x)},\ v_0(1)=a^{-1}:=b$

Тогда $v'_0(x)=\frac{1}{x}v_0-\beta\Rightarrow v_0(x)=x[b-\beta\int\limits_1^x s^{-1}ds]=\beta x-\beta x\ln x$.

Отсюда

$$y'_0(x)=\frac{1}{x(b-\beta\ln x)}\Rightarrow y_0(x)=1+\int\limits_1^x\frac{ds}{s(b-\beta\ln s)} \qquad (4.0.1)$$

или $y_0(x)=1+\frac{1}{\beta}\ln\frac{b}{b-\beta\ln x}$.

Далее мы будем считать, что a=0(1), $\varepsilon\to 0$ или b=a$^{-1}\to\infty$, $\varepsilon\to 0$.

Поэтому из (4.0.1.) вытекает, что

$$y_0(x)\sim 1+a\ln x,\ x\to\infty \qquad y'_0(x)\sim a\,x^{-1},\ x\to\infty. \qquad (5.0)$$

Используя (5.0) уравнение (3.1), запишется в виде

$$Ly_1=(y_0-1)y'_0(x)\sim a^2\frac{\ln x}{x},\ x\to\infty.$$

Если обозначить $z_1=y'_1(x)$, то это уравнение имеет вид

$$z'_1+\left(x^{-1}-2\beta y'_0(x)\right)z_1\sim\frac{a^2\ln x}{x},\ x\to\infty.$$

Отсюда, получим: $y'_1(x)=z_1(x)\sim a^2\ln x,\ x\to\infty$.

Интегрируя это выражение, получим

$$y_1(x)\sim a^2x\ln x,\ x\to\infty \qquad y'_1(x)\sim a^2\ln x,\ x\to\infty \qquad (5.1)$$

Учитывая (5.0) и (5.1) уравнение для определения $y_2(x)$ можно записать в виде

$$Ly_2=(y_0-1)y'_1+\beta y'^2_1+y_1y'_0\sim\lambda_2a^3\ln^2 x,\quad x\to\infty,$$

Или $$(y'_2)'+\left(x^{-1}-2\beta y'_0\right)y'_2\sim\lambda_2a^3\ln^2 x,\ x\to\infty,$$

где λ_2–некоторое положительное число.

Отсюда

$$y'_2(x)\sim\lambda_2a^3x\,ln^2 x,\ x\to\infty \qquad y_2(x)\sim\lambda_2a^3x^2\,ln^2 x,\ x\to\infty \qquad (5.2)$$

Используя (5.0), (5.1), (5.2) уравнение для определения функций y_3(x) запишется в виде

$$Ly_3 \sim \left(a^4 / 2\right) x\, ln^3 x + a^4 \beta x\, ln^3 x \sim \lambda_3 a^4 x\, ln^3 x, \qquad x \to \infty$$

где λ_3 –некоторое положительное число. Или

$$\left(y'_3\right)' + \left(x^{-1} - 2\beta y'_0(x)\right) y'_3(x) \sim \lambda_3 a^4 x \ln^3 x.$$

Отсюда

$$y'_3(x) \sim \lambda_3 a^4 x^2 ln^3 x, \;\; x \to \infty \qquad\qquad y_3(x) \sim \lambda_3 a^4 x^3 ln^3 x, \;\; x \to \infty$$

Здесь и далее через λ_k (k=1,2,...) – обозначим положительные числа.

Методом математической индукции можно показать, что

$$y'_n(x) \sim \lambda_n a\left(ax\, ln x\right)^n, \;\; x \to \infty \qquad\qquad y_n(x) \sim \lambda_n a^n \left(x\, ln x\right)^n, \;\; x \to \infty$$

Таким образом, внешнее решение задачи (1) запишется в виде

$$Y(x,\varepsilon) \sim 1 + a\ln x + a\{\varepsilon ax\ln x + \lambda_2(\varepsilon ax\ln x)^2 + \lambda_3(\varepsilon ax\ln x)^3 + \ldots + \lambda_n(\varepsilon ax\ln x)^n + \ldots\} \quad (6)$$

Если неизвестное число a взять в виде $a = \left(-ln\,\varepsilon\right)^{-1} = \mu$ то ряд (6) является асимптотическим рядом по малому параметру $\mu = \left(-ln\,\varepsilon\right)^{-1}$ на отрезке $J(\varepsilon) = [1, \varepsilon^{-1}]$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Если взять внешнее решение с начальным условием $y(1)=1$, $y'(1) = \mu = \left(-ln\,\varepsilon\right)^{-1}$, то оно является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon) = \left[1, \varepsilon^{-1}\right)$. другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + R_{n+1}(x,\varepsilon)$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right| \le l\mu^{n+1},$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Докажем для ясности в случае $n = 0$, решение задачи (1) ищем в виде

$$y(x) = y_0(x) + R(x), \qquad (7')$$

где $y_0(x) \sim 1 + \mu ln(x)$, $y_0'(x) \sim \mu x^{-1}$, $\quad x \in [1, \varepsilon^{-\alpha}]$, $\quad 0 < \alpha < 1$

Подставляя (7) в (1) для функции $R(x)$имеем задачу:

$$R''(x) + x^{-1}R'(x) = \varepsilon\mu^2 \frac{lnx}{x} + \varepsilon\left(y_0 R'(x) + y_0' R(x) + RR'(x)\right) - \varepsilon R'(x),$$

$$R(1) = R'(1) = 0.$$

Интегрируя один раз, отсюда получим

$$R'(x) = \varepsilon\mu^2(lnx - 1 + x^{-1}) + \varepsilon x^{-1}\int_1^x [s\mu lnsR'(s) + \mu s^{-1}R(s) + R(s)R'(s)]ds.$$

Чтобы не интегрировать повторно, здесь производим подстановку

$$R'(x) = \varepsilon\mu(lnx - 1 + x^{-1})u(x)$$

Тогда это уравнение приводится к виду

$$u(x) = \mu + [lnx - 1 + x^{-1}]^{-1}x^{-1}\mu^{-1}\int_1^x s[\mu lns\mu(lns - 1 + s^{-1})u(s)$$

$$+ \mu s^{-1}R(s) \ + \varepsilon\mu(lns - 1s^{-1})R(s)u(s)]ds = T_2(u) \qquad (8)$$

Таким образом, получим систему

$$R(x) = \varepsilon\mu\int_1^x (lns - 1 + s^{-1})u(s)ds = T_1(u) \qquad (9)$$

Из (9) вытекает, что если $2\varepsilon^{1-\alpha} \leq 1$ то оператор $T_1(u)$переводить шар S_μ: $\|u\| \leq 2\mu$в себя. Аналогично, из (8) вытекает, что оператор $T_2(u)$также переводит шар S_μ в себя.

Теперь построим внутреннее решение удовлетворяющее условию $y(\infty)=0$. Для этого в (1) сделаем подстановку $t=x\varepsilon$, тогда оно запишется в виде

$$u''(t) + (t^{-1} + 1)u'(t) = \beta(u'(t))^2 + u(t)u'(t) \qquad (10)$$

где $u(t,\varepsilon) = y(x,\varepsilon)\big|_{x=t\varepsilon^{-1}}$.

Уравнение (10) решается с краевыми условиями:

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0 \qquad (11)$$

Теорема 2. Решение задачи (10)-(11) можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t,\mu) + u_1(t,\mu) + u_2(t,\mu) + \ldots + u_n(t,\mu) + \qquad (12)$$

где $u_k(t,\mu) = O(\mu^k)$, $u'_k(t) = O(\mu^k)$, $(k = 0,1,2,\ldots)$, т.е. $u_k(t,\mu)$ – является асимптотической последовательностью.

Подставляя (12) в (10) получим задачи:

$$Mu_0(t) \equiv u''_0(t) + \left(1 + t^{-1}\right)u'_0(t) = 0, \qquad u_0(\varepsilon) = 1, u_0(\infty) = 0 \tag{13.0}$$

$$Mu_1(t) = \beta\left(u'_0(t)\right)^2 + u_0(t)u'_0(t), \qquad u_1(\varepsilon) = u_1(\infty) = 0 \tag{13.1}$$

$$Mu_{2m} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m \\ i,j\geq 1}} u'_i(t)u'_j(t) + u_m^2(t) + \sum_{j+i=2m} u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m}(\varepsilon) = u_{2m}(\infty) = 0 \tag{13.2m}$$

$$Mu_{2m+1} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m+1 \\ i,j\geq 1}} u'_i(t)u'_j(t) + \sum_{j+i=2m+1} u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m+1}(\varepsilon) = u_{2m+1}(\infty) = 0 \tag{13.2m+1}$$

Решение задачи (13.1) имеет вид

$$u_1(t) = 1 - \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + \alpha_0 X(t)\right), \ \left(\alpha_0 = e^{\beta} - 1\right)$$

где $\alpha_0 = e^{\beta} - 1,\ X(t) \coloneqq X_1(t,\varepsilon) = A_1 \int_{\varepsilon}^{t} s^{-1}e^{-s}ds,$

$$A_1^{-1} = \int_{\varepsilon}^{\infty} s^{-1}e^{-s}ds\,; A_1 = O(ln\varepsilon^{-1}), \varepsilon \to 0;\ \ X(\varepsilon) = 0, X(\infty) = 1.$$

Отметим, что

$$u_1'(t) = -\alpha_0\beta^{-1}A_1t^{-1}e^{-t} \tag{14}$$

Для определения остальных функций $u_k(t)\ (k = 1,2,\dots)$ мы используем функцию Грина. Справедлива

Лемма 1. Решение однородной задачи

$$Mu_2(t) \coloneqq u_2''(t) + \left(1 + t^{-1} - 2\beta u'_1(t)\right)u_2'(t) = f(t), \quad z(\varepsilon) = z(\infty) = 0,$$

представляется в виде

$$z(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} s^1 e^{s - 2\beta u'_1(s)} G(t,s) f(s) ds,$$

где $\ f(t) \in C^{\infty}[C,\infty),\ Q(t,s) = \begin{cases} -B_1^{-1}U(t)K(s), & \varepsilon \leq t \leq s \\ -B_1^{-1}U(s)K(t), & s \leq t < \infty \end{cases}$

$$U(t) \coloneqq U_1(t,\varepsilon) = B_1 \int_{\varepsilon}^{t} s^{-1}e^{-s-2\beta u'_1(s)}ds,$$

$$K(t) \coloneqq K_1(t,\varepsilon) = 1 - U(t);\ B_1^{-1} = \int_\varepsilon^t s^{-1} e^{-s-2\beta u'_1(s)} ds \tag{15}$$

$$B_1 = O(ln\varepsilon^{-1}) = O(A_1), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Решение задачи (13.2*m*), *m*=1, представляется в виде

$$u_2(t) = \int_\varepsilon^\infty Q(t,s) s^{1+2\beta u'_1(s)} u_1(s) u'_1(s) ds \tag{16}$$

Отсюда используя (14), (15) и оценивая $u_1(t)$имеем

$$u_2(t) \le l \int_\varepsilon^\infty B_1 Q(t,s) u_1(s) ds = l \int_\varepsilon^t K(t) U(s) u_1(s) ds +$$

$$+ l \int_\varepsilon^\infty U(t) K(s) u_1(s) ds \le lK(t) \int_\varepsilon^\infty u_1(s) ds \le$$

$\le lK(t) \int_\varepsilon^\infty s|u_1'(s)| ds \le lK(t) \int_\varepsilon^\infty A_1 e^{-s} ds \le lK(t)A_1, (l = const).$

Таким образом, получим оценку

$$|u_2(t)| \le lK(t)A_1$$

Аналогично, дифференцируя (16) и оценивая имеем

$$|u_2'(t)| \le lA_1 |K'(t)|.$$

Решение уравнения (13.2*m*+1), *m*=1, запишется в виде: $u_3(t) = I_1(t) + I_2(t)$, где $I_1(t) = \int_\varepsilon^\infty Q(t,s) s^1 e^{s-2\beta u_0(s)} u'^2_1(s) ds$,

$$I_2(t) = \int_\varepsilon^\infty Q(t,s) s^1 e^{s+2\beta u_0(s)} [u_1(s) u_1'(s) + u_1'(s) u_1(s)] ds$$

Оценивая функции $I_1(t)$, $I_1'(t)$ получим

$$|I_1(t)| \le lA_1^3 \int_\varepsilon^t K(t) U(s) s^{-1} e^{-s} ds + lA_1^3 \int_\varepsilon^t K(t) U(s) s^{-1} e^{-s} ds \le$$

$$lA_1^3 \int_\varepsilon^t K(t) U(s) s^{-1} e^{-s} ds + lA_1^3 \int_\varepsilon^t K(t) U(s) s^{-1} e^{-s} ds \le$$

$$lA_1^3 \int_\varepsilon^\infty K(t) U(s) s^{-1} e^{-s} ds \le lA_1^3 \int_\varepsilon^\infty K(t) U(s) s^{-1} e^{-s} ds \le lA_1^2 K(t),$$

$$|I_2'(t)| \le lA_1^2|K'(t)|.$$

Аналогично оценивая $I_2(t)$ и $I_2'(t)$имеем

$$|I_2(t)| \le lA_1^2K(t), |I_2'(t)| \le lA_1^2|K'(t)|.$$

Таким образом: $|u_2(t)| \le lA_1^2K(t), |u_2'(t)| \le lA_1^2|K'(t)|$.

Далее методом полной математической индукции доказывается, что для решения задачи (13.m) имеет место оценка

$$|u_m(t)| \le lA_1^mK(t), |u_m'(t)| \le lA_1^m|K'(t)|, \quad \forall m \in N.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Асимптотика решение задачи (1) представляется в виде

$$y(x) = y_0(x) + A_1y_1(x,\varepsilon) + A_1^2y_2(x,\varepsilon) + \cdots + A_1^my_m(x,\varepsilon) + \cdots,$$

где $y_j(x,\varepsilon) = u_i(x\varepsilon^{-1}) = O(1), \quad A_1 = O(ln\varepsilon^{-1}), \ \ \varepsilon \to 0$.

Мы докажем более сильную теорему

Теорема 4. Решение задачи разлагается в равномерно сходящи ряд по степеням $A_\alpha = O(ln\varepsilon^{-1})$ при малом ε.

В (10) сделаем подстановку: $u(t) = u_1(t) + z(t)$. Тогда для $z(t)$ имеем задачу

$$Mz \coloneqq z''(t) + [t^{-1} + 1 - 2\beta u_1'(t)]z'(t) = \beta\big(z'(t)\big)^2 + \big(u_1(t) + z(t)\big)\big(u_1'(t) + z'(t)\big), \qquad z(\varepsilon) = z(\infty) = 0. \tag{17}$$

Отсюда используя Лемму 1 из (17) переходим в интегральное уравнение

$$z(t) = \int_\varepsilon^\infty s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}Q(t,s)[\beta(z'(s))^2 + (u_1(s) + z(s))(u_1'(s) + z'(s))]ds$$

$$z'(t) = \int_\varepsilon^\infty s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}Q_t(t,s)[\beta(z'(s))^2 + (u_1(s) + z(s))(u_1'(s) + z'(s))]ds$$

В этой системе сделаем подстановку

$$z(t) = K(t,\varepsilon)\varphi_1(t), \ \ z'(t) = K'(t,\varepsilon)\varphi_2(t)$$

Тогда получим систему:

$$\varphi_1(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} (G_{00}(t,s) + G_{10}(t,s)\varphi_1(s) +$$

$$+G_{01}(t,s)\varphi_2(s) + G_{11}(t,s)\varphi_1(s)\varphi_2(s) + \beta G_{02}(t,s)\varphi_2^2(s))ds \qquad (18)$$

$$\varphi_2(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} [Q_{00}(t,s) + Q_{11}(t,s)\varphi_1(s) + Q_{01}(t,s)\varphi_2(s) + Q_{11}(t,s)\varphi_1(s)\varphi_2(s)$$

$$+ \beta Q_{02}(t,s)\varphi_2^2(s)]ds$$

где

$G_{00}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s)u_1'(s)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$G_{10}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1'(s,\varepsilon)K(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$G_{01}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$G_{11}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)V(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$G_{02}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)K'^2(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$Q_{00}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s)u_1'(s)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$Q_{10}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1'(s)V(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$Q_{01}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$Q_{11}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)V(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

$Q_{02}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)K'^2(s,\varepsilon)(s,\varepsilon)s^1e^{s-2\beta u_1'(s)}$,

Нам нужна из системы (18) получить мажорантное уравнение, для этого нужна следующая:

Лемма 2. Справедливы оценки

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |G_{00}(t,s)|ds \le lA_1, \quad \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{00}(t,s)|ds \le lA_1$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |G_{10}(t,s)|ds \le lA_1, \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{10}(t,s)|ds \le lA_1$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |G_{01}(t,s)|ds \le \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds \le lA_1, \ \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{01}(t,s)|ds \le \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds \le lA_1,$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{11}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s)ds \le lA_1, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{11}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s)ds \le lA_1,$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{02}(t,s)|ds \le l, \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{02}(t,s)|ds \le l = const.$$

Доказательство:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{00}(t,s)|ds = \int_{\varepsilon}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)Q\,(t,s,\varepsilon)u_1(s)u_1'(s)s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{t} K^{-1}(t,\varepsilon)B_1^{-1}K\,(t,\varepsilon)U(s,\varepsilon)u_1(s)\frac{A_1}{\beta}\frac{s^{-1}e^{-s}}{1+\alpha_0X(s)}s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)B_1^{-1}K\,(t,\varepsilon)U(s,\varepsilon)u_1(s)\frac{A_1}{\beta}\frac{s^{-1}e^{-s}}{1+\alpha_0X(s)}s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds \le$$

$$\le l\int_{\varepsilon}^{t} u_1(s)ds + l\int_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds \le l\int_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds =$$

$$\le l\frac{1}{\beta}\int_{\varepsilon}^{\infty} sA_1s^{-\alpha}e^{-s}\,ds = \beta^{-1}lA_1\int_{\varepsilon}^{\infty} s^{1-\alpha}e^{-s}ds = l\,A_1 = O(A_1).$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{10}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s,\varepsilon)\,u_1'(s)K(s,\varepsilon)s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{t} K^{-1}(t,\varepsilon)B_1^{-1}K(t,\varepsilon)s^{-1}e^{-s}\frac{A_\alpha U(s,\varepsilon)}{\beta(1+\alpha_0X(s))}s^1e^{s+2\beta u_1'(s)ds}K(s,\varepsilon)ds$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{t} K^{-1}(t,\varepsilon)B_1^{-1}U(t,\varepsilon)K(s,\varepsilon)\frac{s^{-1}e^{-s}A_\alpha}{\beta(1+\alpha_0X(s))}K(s,\varepsilon)s^1e^{-s+2\beta u_1'(s)}d$$

$$\le l\int_{\varepsilon}^{t} K(s,\varepsilon)ds + l\int_{t}^{\infty} K(s,\varepsilon)ds \le l\int_{\varepsilon}^{\infty} K(s,\varepsilon)ds = lB_1\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-s}ds = lB_1 = O(A_1).$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{11}(t,s)|ds = \int_{\varepsilon}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)Q\,(t,s)K(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{t} K^{-1}(t,\varepsilon)B_1^{-1}K\,(t,\varepsilon)U(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)B_1^{-1}U\,(t,\varepsilon)K(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^1e^{s+2\beta u_1'(s)}ds \leq$$

$$= \int_{\varepsilon}^{t} K(s,\varepsilon)ds + \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s,\varepsilon)ds = \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s,\varepsilon)ds =$$

$$\leq l\int_{\varepsilon}^{\infty} sB_1s^{-1}e^{-s+2\beta u_1'(s)}\,ds \leq lB_1 = O(A_1).$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{02}(t,s)|ds = \int_{\varepsilon}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)[K'(s,\varepsilon)]^2s^1e^{s+2\beta u_1'}ds$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)\,B_1K'(s,\varepsilon)ds =$$

$$= K^{-1}(t,\varepsilon)[\int_{\varepsilon}^{t} U(s)K(t,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)ds + \int_{t}^{\infty} U(t)K(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)ds =$$

$$\int_{\varepsilon}^{t}|K'(s,\varepsilon)|ds + \int_{t}^{\infty}|K'(s,\varepsilon)|ds = \int_{\varepsilon}^{\infty}|K'(s,\varepsilon)|ds = B_1\int_{\varepsilon}^{\infty} s^{-1}e^{-s-2\beta u'_1(s)}\,ds \leq l.$$

Из леммы 2 вытекает следущая

Лемма 3. Обозначим через β=max$\{|\varphi_1(t)|, |\varphi_2(t)|\}$ из уравнения (18) получим, для него мажорантное уравнение

$$\beta = l_3\beta^2 + l_1A_1\beta + l_2A_1, (l_k = const)$$

Это уравнение имеет единственное аналитическое решение при малом A_α . Теорема доказана.

§ 3.3. Построение асимптотики решения обобщенной задачи Лагерстрома размерности большего двух, но меньших трех

Рассматривается задача

$$y''(x)+(\alpha x^{-1}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2, y\ (1)=1,\ y(\infty)=0 \qquad (1)$$

где 2<α<3, $x\in[1,\infty)$.

Внешнее решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y\ (1)=1$ ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенные функция, которые должны удовлетворять граничным условиям:

$$y_0(1)=1,\ y'_0(1)=a,\ y_k(1)=0,\ y'_k(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Тогда имеем:

$$y''_0(x)+\alpha x^{-1}y'_0(x)-\beta\left(y'_0(x)\right)^2=0,\ y_0(1)=0,\quad y'_0(1)=a \qquad (3.0)$$

$$Ly_1:=y''_1(x)+\alpha x^{-1}y'_1-2\beta y'_0(x)y'_1(x)=-y_0'(x)+y_0y_0'(x), \qquad (3.1)$$

$$Ly_{2m}=-y'_{2m-1}+\beta y_m^2+\sum_{\substack{i+j=6\\ i;j\ge1\\ i\ne j}}y'_i\,y'_j+\sum_{i+j=2m-1}y_iy'_j,\ y_{2m}(1)=y'_{2m}(1)=0 \qquad (3.2m)$$

$$Ly_{2m+1}=-y'_{2m}+\sum_{\substack{i+j=2m+1\\ i,j\ge1}}y'_i(x)y'_j(x)+\sum_{i+j=2m}y_iy'_j(x),\quad y_{2m+1}(1)=y_{2m+1}(1)=0 \ (3.2m+1)$$

Уравнение (3.0) является уравнением Бернулли и его можно решить следующим образом. Если обозначить

$$y'_0=z\Rightarrow z'_0+\frac{\alpha}{x}z_0=\beta z_0^2\Rightarrow\frac{z'_0}{z_0}+\frac{\alpha}{x}\frac{1}{z_0}=\beta.$$

Если ввести обозначение

$$v_0=\frac{1}{z_0}=\frac{1}{y'_0(x)},\ v_0(1)=a^{-1}:=b$$

Далее мы будем считать, что a=0(1), $\varepsilon\to0$ или b=a$^{-1}\to\infty$, $\varepsilon\to0$,т.е. $\gamma\sim b$.

Тогда

$$v'_0(x)=\frac{\alpha}{x}v_0-\beta \Rightarrow v_0(x)=x^{\alpha}[b-\beta\int_1^x s^{-\alpha}ds]=x^{\alpha}[b-\beta\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha}].$$

Или $\quad y'_0(x)\sim\gamma^{-1}x^{-\alpha},\ \ (\gamma=b-\frac{\beta}{1-\alpha}),\ x\to\infty.$

Отсюда

$$y_0(x)=1-\gamma^{-1}(1-\alpha)^{-1}+\gamma^{-1}(1-\alpha)^{-1}x^{1-\alpha}\sim 1-\gamma^{-1}(1-\alpha)^{-1}\ ,x\to\infty. \qquad (4.0.1)$$

Поэтому из (4.0.1.) вытекает, что

$$y_0(x)\sim 1-a(1-\alpha)^{-1},\ \ x\to\infty \quad y'_0(x)\sim ax^{-\alpha},\ \ x\to\infty. \qquad (5.0)$$

Используя (5.0) уравнение (3.2m),m=1, запишется в виде

$$Ly_1=(y_0-1)\,y'_0(x)\sim(\alpha-1)^{-1}a^2(1-x^{1-\alpha})x^{-\alpha}\sim(\alpha-1)^{-1}a^2x^{-\alpha},\ x\to\infty.$$

Интегрируя это выражение имеем

$$y'_1(x)\sim(\alpha-1)^{-1}a^2x^{1-\alpha},\ \ x\to\infty \qquad y_1(x)\sim[(\alpha-1)(2-\alpha)]^{-1}a^2x^{2-\alpha},\ \ x\to\infty \qquad (5.1)$$

Учитывая (5.0) и (5.1) уравнение для определения $y_2(x)$ можно записать

$$Ly_2\sim\lambda_2a^3x^{1-\alpha},\ \ x\to\infty$$

где λ_2 –некоторое число.

Отсюда

$$y'_2(x)\sim\lambda_3a^3x^{2-\alpha},\ \ x\to\infty \qquad y_2(x)\sim\lambda_4a^3x^{3-\alpha},\ \ x\to\infty \qquad (5.2)$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$y_n(x)\sim\delta_n ax^{2-\alpha}(ax)^{n-1},\ \ x\to\infty \qquad y'_n(x)\sim\delta'_n ax^{2-\alpha}(ax)^{n},\ \ x\to\infty,$$

где δ_n,δ_n' -некторые постоянные. Таким образом, внешнее решение задачи (1) запишется в виде

$$Y(x,\varepsilon)\sim 1++a^2\varepsilon x^{1-\alpha}\{\delta_1+\delta_2\varepsilon ax+\delta_3(\varepsilon ax)^2+\ldots+\delta_n(\varepsilon ax)^{n-1}+\ldots\} \qquad (6)$$

Если неизвестное число a взять в виде $a=\varepsilon$ то ряд (6) является асимптотическим рядом по малому параметру ε на отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1})$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+R_{n+1}(x,\varepsilon)$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right|\le l\varepsilon^{n+1},$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Теперь построим внутреннее решение удовлетворяющее условию $y(\infty)=0$. Для этого в (1) сделаем подстановку $t=x\varepsilon$, тогда оно запишется в виде

$$u''(t)+\left(\alpha t^{-1}+1\right)u'(t)=\beta\left(u'(t)\right)^2+u(t)u'(t) \tag{7}$$

где $u(t,\varepsilon)=y(x,\varepsilon)\Big|_{x=t\varepsilon^{-1}}$.

Оказывается внутреннее решение уравнение (7) существует не только в окрестности бесконечной точки $x=\infty$, но и на всем отрезке $t\in[\varepsilon,\ \infty)$ или $x\in[1,\infty)$. Поэтому уравнение (7) решается с краевыми условиями:

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0 \tag{8}$$

Теорема 2. Решение задачи (7)-(8) можно представить в виде

$$U(t,\mu)=u_1(t,\varepsilon)+u_2(t,\varepsilon)+\ldots+u_m(t,\varepsilon)+..., \tag{9}$$

где $u_j(t)$ являются асимтотической последовательностью, т.е.

$$u_{j+1}(t)=o(u_j(t)),\ \varepsilon\to 0\ \ (j=0,1,2...),\ u_k(t)=u_k(t,\varepsilon)\quad \text{(k=1,2,…)}$$

$$\varepsilon\to 0,\ u_1(\varepsilon)=1,\ u_1(\infty)=0;\ \ u_{k+1}(\varepsilon)=u_{k+1}(\infty)=0,\qquad \text{(k=1,2,…)}.$$

Подставляя (9) в (7) для функций $u_k(t)$ получим следующие задачи:

$$u_1''(t)+(1+\alpha t^{-1})u_1'(t)-\beta u_1'^2(t)=0,\ u_0(\varepsilon)=1,\ u_0(\infty)=0, \tag{10.1}$$

$$Mu_2(t)\equiv u''_2(t)+\left(1+\alpha t^{-1}-2\beta u'_1(t)\right)u'_2(t)=u_1(t)u'_1(t),\ \ u_2(\varepsilon)=1,\ u_2(\infty)=0 \tag{10.2}$$

$$Mu_{2m}=2\beta\sum_{\substack{j+i=2m\\ i,j\ge 1}}u_i'(t)u_j'(t)+u_m^2(t)+\sum_{j+i=2m}u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m}(\varepsilon)=u_{2m}(\infty)=0 \tag{10.2m}$$

$$Mu_{2m+1} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m+1 \\ i,j\geq 1}} u_i'(t)u_j'(t) + \sum_{j+i=2m+1} u_i(t){u'}_j(t),$$

$$u_{2m+1}(\varepsilon) = u_{2m+1}(\infty) = 0 \quad (10.2m+1)$$

Решение задачи (10.1) имеет вид

$$u_1(t) = 1 - \frac{1}{\beta}\ln\bigl(1 + \alpha_0 X(t)\bigr), \ \ \bigl(\alpha_0 = e^{\beta} - 1\bigr)$$

где $\alpha_0 = e^{\beta} - 1,\ X(t) \coloneqq X_\alpha(t,\varepsilon) = A_\alpha \int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s}ds,$

$$A_\alpha^{-1} = \int_\varepsilon^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds\,; A_\alpha = O(\varepsilon^{1-\alpha}), \varepsilon \to 0;\ \ X(\varepsilon) = 0, X(\infty) = 1.$$

Отметим, что

$$u_1'(t) = -\alpha_0\beta^{-1}A_\alpha t^{-\alpha}e^{-t} \quad (11)$$

Для определения остальных функций $u_k(t)\ (k = 1,2,\dots)$ мы используем функцию Грина. Справедлива

Лемма 1. Решение однородной задачи

$$Mu_2(t) \coloneqq u_2''(t) + \bigl(1 + \alpha t^{-1} - 2\beta {u'}_1(t)\bigr)u_2'(t) = f(t), \quad z(\varepsilon) = z(\infty) = 0$$

представляется в виде

$$z(t) = \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^{s-2\beta {u'}_1(s)} G(t,s)f(s)ds,$$

где $f(t) \in C^\infty[C,\infty)$, $\quad Q(t,s) = \begin{cases} -B_\alpha^{-1}U(t)K(s), & \varepsilon \leq t \leq s \\ -B_\alpha^{-1}U(s)K(t), & s \leq t < \infty \end{cases}$

$$U(t) \coloneqq U_\alpha(t,\varepsilon) = B_\alpha \int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s-2\beta {u'}_1(s)}ds,$$

$$K(t) \coloneqq K_\alpha(t,\varepsilon) = 1 - U(t);\ \ B_\alpha^{-1} = \int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s-2\beta {u'}_1(s)}ds \quad (12)$$

$$B_\alpha = O(\varepsilon^{\alpha-1}) = O(a_\alpha), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Решение задачи (10.2) представляется в виде

$$u_2(t) = \int_\varepsilon^\infty Q(t,s)s^{\alpha+2\beta {u'}_1(s)}u_1(s){u'}_1(s)ds \quad (13)$$

Отсюда используя (11), (12) и оценивая $u_1(t)$имеем

$$u_2(t) \leq l\int_{\varepsilon}^{\infty} B_\alpha Q(t,s)u_1(s)ds = l\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)u_1(s)ds +$$

$$+l\int_{\varepsilon}^{\infty} U(t)K(s)u_1(s)ds \leq lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds \leq$$

$\leq lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} s|u_1'(s)|ds \leq lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} A_\alpha s^{-\alpha+1}e^{-s}ds \leq lK(t)A_\alpha, (l = const).$

Таким образом, получим оценку

$$|u_2(t)| \leq lK(t)A_\alpha$$

Аналогично, дифференцируя (13) и оценивая имеем

$$|u_2'(t)| \leq lA_\alpha|K'(t)|.$$

Решение уравнения (10.2m+1), m=1, запишется в виде: $u_3(t) = I_1(t) + I_2(t)$,

где $I_1(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} Q(t,s)s^\alpha e^{s-2\beta u_0(s)}u'^2_1(s)ds$,

$$I_2(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} Q(t,s)s^\alpha e^{s+2\beta u_0(s)}[u_1(s)u_1'(s) + u_1'(s)u_1(s)]ds$$

Оценивая функции $I_1(t)$, $I_1'(t)$ получим

$$|I_1(t)| \leq lA_\alpha^3\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds + lA_\alpha^3\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \leq$$

$$lA_\alpha^3\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds + lA_\alpha^3\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \leq$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \leq lA_\alpha^2K(t),$$

$$|I_2'(t)| \leq lA_\alpha^2|K'(t)|.$$

Аналогично оценивая $I_2(t)$ и $I_2'(t)$имеем

$$|I_2(t)| \leq lA_\alpha^2K(t), |I_2'(t)| \leq lA_\alpha^2|K'(t)|.$$

Таким образом: $|u_2(t)| \leq lA_\alpha^2K(t), |u_2'(t)| \leq lA_\alpha^2|K'(t)|$.

Далее методом полной математической индукции доказывается, что для решения задачи (10.m) имеет место оценка

$$|u_m(t)| \le lA_\alpha^m K(t), |u_m'(t)| \le lA_\alpha^m |K'(t)|, \quad \forall m \in N.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Асимптотика решение задачи (1) представляется в виде

$$y(x) = y_0(x) + A_\alpha y_1(x,\varepsilon) + A_\alpha^2 y_2(x,\varepsilon) + \cdots + A_\alpha^m y_m(x,\varepsilon) + \cdots,$$

где $y_j(x,\varepsilon) = u_i(x\varepsilon^{-1}) = O(1), \quad A_\alpha = O(\varepsilon^{\alpha-1}), \ \varepsilon \to 0.$

Т.е. решения задачи (1) разлагается в асимптотический ряд по асимптотической последовательности

$$\{\varepsilon^{\alpha-1}\}^k \qquad k = 0,1,\dots, \qquad \text{при} \quad 1 < \alpha < 2.$$

Мы докажем более сильную теорему

Теорема 4. Решение задачи разлагается в равномерно сходящи ряд по степеням $A_\alpha = O(\varepsilon^{\alpha-1})$ при малом ε.

В (7) сделаем подстановку $u(t) = u_1(t) + z(t)$. Тогда для $z(t)$ имеем задачу

$$Mz := z''(t) + [\alpha t^{-1} + 1 - 2\beta u_1'(t)]z'(t) = \beta\big(z'(t)\big)^2 + \big(u_1(t) + z(t)\big)\big(u_1'(t) + z'(t)\big), \ z(\varepsilon) = z(\infty) = 0. \tag{14}$$

Отсюда используя Лемму 1 из (14) переходим в интегральное уравнение

$$z(t) = \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^{s-2\beta u_1'(s)} Q(t,s)[\beta(z'(s))^2 + (u_1(s) + z(s))(u_1'(s) + z'(s))]ds$$

$$z'(t) = \int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^{s-2\beta u_1'(s)} Q_t(t,s)[\beta(z'(s))^2 + (u_1(s) + z(s))(u_1'(s) + z'(s))]ds$$

В этой системе сделаем подстановку

$$z(t) = K(t,\varepsilon)\varphi_1(t), \ \ z'(t) = K'(t,\varepsilon)\varphi_2(t)$$

Тогда получим систему:

$$\varphi_1(t) = \int_\varepsilon^\infty (G_{00}(t,s) + G_{10}(t,s)\varphi_1(s) + G_{01}(t,s)\varphi_2(s) + \\ + G_{11}(t,s)\varphi_1(s)\varphi_2(s) + \beta G_{02}(t,s)\varphi_2^2(s)\ )ds \tag{15}$$

$$\varphi_2(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} [Q_{00}(t,s) + Q_{11}(t,s)\varphi_1(s) + Q_{01}(t,s)\varphi_2(s) + Q_{11}(t,s)\varphi_1(s)\varphi_2(s)$$

$$+ \beta Q_{02}(t,s)\varphi_2^2(s)]ds$$

где

$$G_{00}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s)u_1'(s)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$G_{10}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1'(s,\varepsilon)K(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$G_{01}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$G_{11}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)V(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$G_{02}(t,s) = K^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)K'^2(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$Q_{00}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s)u_1'(s)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$Q_{10}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1'(s)V(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$Q_{01}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)u_1(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$Q_{11}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)V(s,\varepsilon)K'(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

$$Q_{02}(t,s) = K_t^{-1}(t,\varepsilon)Q(t,s)K'^2(s,\varepsilon)(s,\varepsilon)s^{\alpha}e^{s-2\beta u_1'(s)},$$

Нам нужна из системы (15) получить мажорантное уравнение, для этого нужна следующая:

Лемма 3. Справедливы соотношения

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{00}(t,s)|ds \le lA_{\alpha}, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{00}(t,s)|ds \le lA_{\alpha}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{10}(t,s)|ds \le lA_{\alpha}, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{10}(t,s)|ds \le lA_{\alpha}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{01}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds \le lA_{\alpha}, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{01}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} u_1(s)ds \le lA_{\alpha},$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{11}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s)ds \le lA_{\alpha}, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{11}(t,s)|ds \le \int_{\varepsilon}^{\infty} K(s)ds \le lA_{\alpha},$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |G_{02}(t,s)|ds \le l = const, \int_{\varepsilon}^{\infty} |Q_{02}(t,s)|ds \le l = const.$$

Доказательство проводится аналогично, как в предыдущем параграфе.

Из леммы 2 вытекает следущая

Лемма 3. Обозначим через β=max$\{|\varphi_1(t)|, |\varphi_2(t)|\}$ из уравнения (15) получим , для него мажорантное уравнение

$$\beta = l_3\beta^2 + l_1 A_\alpha \beta + l_2 A_\alpha, (l_k = const)$$

Это уравнение имеет единственное аналитическое решение при малом A_α .

Теорема доказана.

§3.4. Построение асимптотики решения обобщенной задачи лагерстрома размерности три

Рассматривается обобщенная задача Лагерстрома

$$y''(x)+(2x^{-2}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2, y\ (1)=1,\ y(\infty)=0 \quad (1)$$

Внешнее решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y\ (1)=1$ ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots\ , \quad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенные функции на отрезке $J(\varepsilon)$, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1)=0,\ y'_0(1)=a\ ,\ y_k(1)=0,\ y'_k(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots)$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)(j=0,1,2,...)$ имеем следующие уравнения:

$$y_0''(x)+2x^{-1}y_0'(x)-\beta y_0'^2(x)=0,\quad y_0(1)=1,\quad y_0'(1)=a, \quad (3.0)$$

$$Ly_1:=y_1''(x)+2x^{-1}y_1'-2\beta y_0'(x)y_1'(x)=-y_0'(x)+y_0y_0'(x), \quad (3.1)$$

$$Ly_{2m}=-y_{2m-1}'+\beta y_m'^2+\sum_{\substack{i+j=6\\ i;j\ge1\\ i\ne j}}y_i'y_j'+\sum_{i+j=2m-1}y_iy_j',\ y_{2m}(1)=y_{2m}'(1)=0,m\in N \quad (3.2\text{m})$$

$$Ly_{2m+1}=-y_{2m}'+\sum_{\substack{i+j=2m+1\\ i,j\ge1}}y_i'y_j'+\sum_{i+j=2m}y_iy_j',\quad y_{2m+1}(1)=y_{2m+1}(1)=0,\ m\in N \quad (3.2\text{m}+1)$$

Уравнение (3.0) является уравнением Бернулли и его можно решить следующим образом:

$$y'_0=z\Rightarrow z_0'+\frac{2}{x}z_0=\beta z_0^2\Rightarrow\frac{z'_0}{z_0}+\frac{2}{x}\frac{1}{z_0}=\beta\ .$$

Если ввести обозначение, то получим: $v_0=\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{1}{y'_0(x)},\ \ v_0(1)=a^{-1}:=b$

Тогда $v'_0(x)=\dfrac{2}{x}v_0-\beta\Rightarrow v_0(x)=x^2[b-\beta\int\limits_1^x s^{-2}ds]=(b-\beta)x^2+\beta x\ .$

Отсюда имеем

$$y'_0(x)=\frac{1}{x^2(b-\beta)+\beta x}\Rightarrow$$

$$y_0(x)=1+\int_1^x\frac{ds}{s(\beta-[b-\beta]s])}=1+\frac{1}{\beta}\ln\frac{bx}{\beta+(b-\beta)x} \qquad (4.0.1)$$

Далее мы будем считать, что a=0(1), $\varepsilon\to 0$ или b=a$^{-1}\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. Тогда (4.0.1.) можно записать в виде

$$y_0(x)=1+A-\ln(1+\frac{\beta}{(b-\beta)x})\sim 1+A-\frac{\beta}{(b-\beta)x}+O(x^{-2}),\ x\to\infty \qquad (5.0)$$

где $A=\frac{1}{\beta}\ln\frac{b}{b-\beta}=(b=a^{-1})=\frac{1}{\beta}\ln\frac{1}{1-a\beta}=a+O(a^2),\ a\to 0.$

Из (5.0) имеем

$$y'_0(x))\sim\frac{\beta}{(b-\beta)x^2}+O(x^{-3})=\frac{a\beta}{(1-a\beta)x^2}+O(x^{-3}),\ \ x\to\infty \qquad (5.1)$$

Используя (5.0) и (5.1), уравнение (3.1) запишется в виде

$$Ly_1=(y_0-1)y'_0(x)\sim a^2\beta x^{-2},\ x\to\infty..$$

Если обозначить $z_1=y'_1(x)$, то это уравнение имеет вид

$$z'_1+\left(2x^{-1}-2\beta y'_0(x)\right)z_1\sim a^2\beta x^{-2},\ x\to\infty.$$

Отсюда, получим: $y'_1(x)=z_1(x)\sim a^2\beta x^{-1},\ \ x\to\infty.$

Интегрируя это выражение, получим

$$y_1(x)\sim a^2\beta\ln x,\ \ x\to\infty \quad y'_1(x)\sim a^2\beta x^{-1},\ \ x\to\infty \qquad (5.1.1)$$

Учитывая (5.0), (5.1) и (5.1.1) уравнение для определения $y_2(x)$ можно записать в виде

$$Ly_2=(y_0-1)y'_1+\beta y'^2_1+y_1y'_0\sim\lambda_2a^3x^{-1},\quad x\to\infty,$$

Или $$(y'_2)'+\left(2x^{-1}-2\beta y'_0\right)y'_2\sim\lambda_2a^3x^{-1},\ \ x\to\infty,$$

где λ_2 –некоторое положительное число.

Отсюда имеем

$$y'_2(x)\sim 2^{-1}\lambda_2a^3,\ \ x\to\infty \qquad y_2(x)\sim 2^{-1}\lambda_2a^3x,\ \ x\to\infty \qquad (5.2)$$

Используя (5.0), (5.1), (5.2) уравнение для y_3(x) запишется в виде

$$Ly_3 = (y_0 - 1)y_2' + 2\beta y_1' y_2' + + y_1 y_1' + y_2 y_0' \sim \lambda_3 a^4,\ x \to \infty \quad ,$$

где λ_3 –некоторое положительное число. Или

$$\left(y'_3\right)' + \left(2x^{-1} - 2\beta y'_0\left(x\right)\right) y'_3\left(x\right) \sim \lambda_3\, a^4.$$

Отсюда

$$y_3'\left(x\right) \sim \lambda_3 a^4 x,\ \ x \to \infty \qquad\qquad y_3\left(x\right) \sim 2^{-1}\lambda_3 a^4 x^2,\ \ x \to \infty$$

Здесь и далее через λ_k (k=1,2,...) – обозначим положительные числа.

Методом математической индукции можно показать, что

$$y_n'\left(x\right) \sim \lambda_n a\left(ax\right)^{n-2},\ \ x \to \infty \qquad\qquad y_n\left(x\right) \sim (n-1)^{-1}\lambda_n a\left(ax\right)^{n-1},\ \ x \to \infty$$

Таким образом, внешнее решение задачи (1) запишется в виде

$$Y\left(x,\varepsilon\right) \sim 1 + a + \varepsilon a^2[\ln x + \lambda_2 \varepsilon a x + \lambda_3(\varepsilon a x)^2 + ... + \lambda_n(\varepsilon a x)^{n-1} + ...] \qquad (6)$$

Если неизвестное число a взять в виде $a = -\varepsilon\ln\varepsilon = \mu$ то ряд (6) является асимптотическим рядом по малому параметру $\varepsilon\ln\left(1/\varepsilon\right) = \mu$ на отрезке $J\left(\varepsilon\right) = [1, \varepsilon^{-1}]$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Если взять внешнее решение с начальным условием $y(1)=1$, $y'\left(1\right) = \mu = -\varepsilon\ln\varepsilon$, то оно является асимптотическим рядом на отрезке J(ε).

Внутреннее решение

Теперь построим внутреннее решение удовлетворяющее условию $y(\infty)=0$.

Для этого в (1) сделаем подстановку $t=x\varepsilon$, тогда оно запишется в виде

$$u''\left(t\right) + \left(2t^{-1} + 1\right)u'\left(t\right) = \beta\left(u'\left(t\right)\right)^2 + u\left(t\right)u'\left(t\right) \qquad (7)$$

где $u\left(t,\varepsilon\right) = y\left(x,\varepsilon\right)\Big|_{x=t\varepsilon^{-1}}$.

Уравнение (7) решается с краевыми условиями:

$$u(\varepsilon) = 1,\ u(\infty) = 0 \qquad (8)$$

Теорема 2. Решение задачи (7)-(8) можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_m(t) + \cdots, \qquad (9)$$

где $u_k(t) = u_k(t,\varepsilon)$ - асимптотическая последовательность при $\varepsilon \to 0$

$$u_0(\varepsilon) = 1, u_0(\infty) = 0; \;\; u_k(\varepsilon) = u_k(\infty) = 0, \qquad \text{(k=1,2,…)}.$$

Подставляя (9) в (7) для функций $u_k(t)$ получим следующие задачи:

$$u_0''(t) + (1 + \alpha t^{-1})u_0'(t) - \beta u_0'^2(t) = 0, u_0(\varepsilon) = 1, \; u_0(\infty) = 0, \quad (10.0)$$

$$Mu_1(t) \coloneqq u_1''(t) + \left(1 + 2t^{-1} - 2\beta u'_0(t)\right)u_1'(t) = u_0(t)u_0'(t),$$

$$u_1(\varepsilon) = u_1(\infty) = 0 \; (10.1)$$

$$Mu_2(t) \coloneqq \beta u_1'^2(t) + u_0 u_1' + u_0' u_1(t), u_1(\varepsilon) = u_1(\infty) = 0 \qquad (10.2)$$

$$Mu_{2m} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m \\ i,j\geq 1}} u_i'(t)u_j'(t) + u_m^2(t) + \sum_{j+i=2m} u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m}(\varepsilon) = u_{2m}(\infty) = 0 \qquad (10.2\text{m})$$

$$Mu_{2m+1} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m+1 \\ i,j\geq 1}} u_i'(t)u_j'(t) + \sum_{j+i=2m+1} u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m+1}(\varepsilon) = u_{2m+1}(\infty) = 0 \qquad (10.2\text{m+1})$$

Решение задачи (10.0) имеет вид

$$u_0(t) = 1 - \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + \alpha_0 X(t)\right), \;\; \left(\alpha_0 = e^{\beta} - 1\right)$$

где $\alpha_0 = e^{\beta} - 1, \; X(t) \coloneqq X_2(t,\varepsilon) = a_2 \int_{\varepsilon}^{t} s^{-2}e^{-s}ds,$

$$a_{\alpha}^{-1} = \int_{\varepsilon}^{\infty} s^{-2}e^{-s}ds = O(\varepsilon^{-1}); a_2 = O(\varepsilon^1), \varepsilon \to 0; \;\; X(\varepsilon) = 0, X(\infty) = 1.$$

Отметим, что здесь

$$|u_0'(t)| \leq \alpha_0 \beta^{-1} a_2 t^{-2} e^{-t} \qquad (11)$$

Для определения остальных функций $u_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots)$мы используем функцию Грина. Справедлива

Лемма 1. Решение однородной задачи

$$Mz(t) = f(t), \quad z(\varepsilon) = z(\infty) = 0,$$

представляется в виде

$$z(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} s^2 e^{s - 2\beta u_0(s)} G(t,s) f(s) ds,$$

где $f(t) \in C^{\infty}[C,\infty)$, $\qquad G(t,s) = \begin{cases} -\gamma_2^{-1}U(t)K(s), & \varepsilon \le t \le s \\ -\gamma_2^{-1}U(s)K(t), & s \le t < \infty \end{cases}$

$$U(t) := U_2(t,\varepsilon) = \gamma_2 \int_{\varepsilon}^{t} s^{-2}e^{-s+2\beta u_0(s)}ds,$$

$$K(t) := K_\alpha(t,\varepsilon) = 1 - U(t);\ \gamma_2^{-1} = \int_{\varepsilon}^{t} s^{-2}e^{-s+2\beta u_0(s)}ds \tag{12}$$

$$\gamma_2 = O(\varepsilon) = O(a_2), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Решение задачи (10.1) представляется в вид

$$u_1(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^2e^{s-2\beta u_0(s)}u_0(s){u'}_0(s)ds \tag{13}$$

Отсюда используя (11), (12) и оценивая $u_1(t)$имеем

$$u_1(t) \le l\int_{\varepsilon}^{\infty} a_2G(t,s)u_0(s)ds <= la_2\gamma_2^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)u_0(s)ds +$$

$$+la_2\gamma_2^{-1}\int_{\varepsilon}^{\infty} U(t)K(s)u_0(s)ds \le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} u_0(s)ds \le$$

$$\le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} s|u_0'(s)|ds \le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} a_2s^{-1}e^{-s}ds \le K(t)\beta_2\ ,(\beta_2 = O(\varepsilon ln\varepsilon^{-1}).$$

Таким образом, получим оценку

$$|u_1(t)| \le K(t)\beta_2$$

Аналогично, дифференцируя (13) и оценивая имеем

$$|u_1'(t)| \le \beta_2|K'(t)|.$$

Решение уравнения (10.2) запишется в виде: $u_2(t) = I_1(t) + I_2(t)$,

где $I_1(t) = \beta\int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^2e^{s-2\beta u_0(s)}{u'}_1^2(s)ds$,

$$I_2(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^2e^{s+2\beta u_0(s)}[u_0(s)u_1'(s) + u_0'(s)u_1(s)]ds$$

Оценивая функции $I_1(t)$получим

$$|I_1(t)| = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)\beta_2^2|u_0(t)|ds \le l\beta_2^2\gamma_2^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-2}e^{-s}ds +$$

$$\leq l\beta_2^2\gamma_2^{-1}\int_\varepsilon^t K(t)U(s)s^{-2}e^{-s}ds \leq \beta_2^2 K(t), \qquad |I_1'(t)| \leq \beta_2^2|K'(t)|.$$

Аналогично оценивая $I_2(t)$ и $I_2'(t)$имеем

$$|I_2(t)| \leq \beta_2^2 K(t), |I_2'(t)| \leq \beta_2^2|K'(t)|.$$

Таким образом, $|u_2(t)| \leq \beta_2^2 K(t), |u_2'(t)| \leq \beta_2^2|K'(t)|$.

Теперь методом полной математической индукции доказывается, что для решения задачи (10.m) имеет место оценка

$$|u_m(t)| \leq \beta_2^m K(t), |u_m'(t)| \leq \beta_2^m|K'(t)|, \quad \forall m \in N.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Асимптотика решение задачи (1) представляется в виде

$$y(x) = y_0(x) + \beta_2 y_1(x,\varepsilon) + \beta_2^2 y_2(x,\varepsilon) + \cdots + \beta_2^m y_m(x,\varepsilon) + \cdots,$$

где $y_j(x,\varepsilon) = u_i(x\varepsilon^{-1}) = O(1),\ \beta_2 = O(\varepsilon ln\varepsilon^{-1}). \quad \varepsilon \to 0.$

Как и в предыдушем параграфе можно доказать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке [1,∞).

§3.5. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома размерности четыре, методом структурного сращивания

Рассматривается обобщенная задача Лагерстрома

$$y''(x)+(3x^{-2}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2,\; y\ (1)=1,\; y(\infty)=0 \qquad (1)$$

Внешнее решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y\ (1)=1, y'(1)=a$ ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенные функции на отрезке $J(\varepsilon)$, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1)=0,\; y'_0(1)=a,\; y_k(1)=0,\; y'_k(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots)$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)(j=0,1,2,...)$ имеем следующие уравнения:

$$y_0''(x)+\frac{3}{x}y_0'(x)-\beta y_0'^2(x)=0,\quad y_0(1)=1,\quad y_0'(1)=a, \qquad (3.0)$$

$$Ly_1:=y_1''(x)+\frac{3}{x}y_1'-2\beta y_0'(x)y_1'(x)=-y_0'(x)+y_0y_0'(x), \qquad (3.1)$$

$$Ly_{2m}=-y_{2m-1}'+\beta y_m'^2+\sum_{\substack{i+j=6\\ i;j\ge1\\ i\ne j}}y_i'y_j'+\sum_{i+j=2m-1}y_iy_j',\; y_{2m}(1)=y_{2m}'(1)=0, m\in N \quad (3.2m)$$

$$Ly_{2m+1}=-y_{2m}'+\sum_{\substack{i+j=2m+1\\ i,j\ge1}}y_i'y_j'+\sum_{i+j=2m}y_iy_j',\quad y_{2m+1}(1)=y_{2m+1}(1)=0,\, m\in N \quad (3.2m+1)$$

Уравнение (3.0) является уравнением Бернулли и его можно решить следующим образом: $y'_0=z\Rightarrow z_0'+\frac{3}{x}z_0=\beta z_0^2\Rightarrow\frac{z'_0}{z_0}+\frac{3}{x}\frac{1}{z_0}=\beta$.

Если ввести обозначение: $v_0=\frac{1}{z_0}=\frac{1}{y'_0(x)},\; v_0(1)=a^{-1}:=b$, то

$$v'_0(x)=\frac{3}{x}v_0-\beta\Rightarrow v_0(x)=x^3[b-\beta\int_1^x s^{-3}ds]=(b-2^{-1}\beta)x^2+2^{-1}\beta x\,.$$

Отсюда $y'_0(x)=\dfrac{2}{x^3(2b-\beta)+\beta x}\Rightarrow$

$$y_0(x)=1+2\int_1^x\frac{ds}{s\left(\beta+\gamma s^2\right)}=\left|\gamma=2b-\beta\right|=\frac{2}{\beta}\int_1^x\left[\frac{1}{s}-\frac{\gamma s}{\beta+\gamma s^2}\right]=1+\frac{1}{\beta}\ln\frac{2bx^2}{\beta+\gamma x^2}\qquad(4.0.1)$$

Далее мы будем считать, что a=0(1), $\varepsilon\to 0$ или b=$a^{-1}\to\infty$, $\varepsilon\to 0$.Тогда (4.0.1.) можно записать в виде

$$y_0(x)=1+A+\ln\frac{1}{1+\beta\gamma^{-1}x^{-2}}\sim 1+A+O(x^{-2}),\qquad(5.0.1)$$

где $A=\ln\dfrac{2b}{\gamma}=\ln\dfrac{1}{1-(2b)^{-1}\beta}=\ln\dfrac{1}{1-2^{-1}a\beta}\sim-\dfrac{\beta a}{2}$.

Из (4.0.1) (или из (5.0.1)) имеем

$$y'_0(x))=O(x^{-3}),\ \ x\to\infty\qquad(5.0)$$

Используя (5.0.1) и (5.0), уравнение (3.1) запишется в виде

$$Ly_1=\left(y_0-1\right)y'_0\left(x\right)=O(a\,x^{-3}),\ \ x\to\infty..$$

Если обозначить $z_1=y'_1\left(x\right)$, то это уравнение имеет вид

$$z'_1+\left(3x^{-1}-2\beta y'_0\left(x\right)\right)z_1=O(a\,x^{-3}),\quad x\to\infty.$$

Отсюда имеем: $\qquad y'_1\left(x\right)=z_1\left(x\right)=O(a\,x^{-2}),\ \ x\to\infty.$

Интегрируя это выражение, получим

$$y'_1\left(x\right)=O(a^2x^{-1}),\ \ x\to\infty\qquad\qquad y_1\left(x\right)=O(a^2\ln x),\ \ x\to\infty\qquad(5.1)$$

Учитывая (5.0.1), (5.0) и (5.1) уравнение для определения y_2(x) можно записать в виде

$$Ly_2=\left(y_0-1\right)y'_1+\beta y'^2_1+y_1y'_0=O(a^3x^{-1}),\quad x\to\infty.$$

Отсюда

$$y'_2\left(x\right)=O(a^3\ln x),\ \ x\to\infty\qquad\qquad y_2\left(x\right)=O(a^3x\ln x),\ \ x\to\infty\qquad(5.2)$$

Используя (5.0), (5.1), (5.2) уравнение для y_3(x) запишется в виде

$$Ly_3=(y_0-1)y_2'+2\beta y_1'y_1'++y_2y_0'=O(a^4\ln x),\ x\to\infty.$$

Или $\qquad\left(y'_3\right)'+\left(2x^{-1}-2\beta y'_0\left(x\right)\right)y'_3\left(x\right)=O(a^4\ln x),\ x\to\infty..$

Отсюда $\quad y'_3\left(x\right)=O(a^4x\ln x),\ \ x\to\infty\qquad\qquad y_3\left(x\right)=O(a^4x^2\ln x),\ \ x\to\infty$

Методом математической индукции можно показать, что

$$y_n^{'}(x) = a^3 \ln x O(ax)^{n-2}, \quad x \to \infty \qquad\qquad y_n(x) = a^2 \ln x O(ax)^{n-1}, \quad x \to \infty$$

Таким образом, внешнее решение задачи (1) запишется в виде

$$Y(x,\varepsilon) \sim 1 + a + \varepsilon a^2 \ln x\{[\lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon ax + \lambda_2 (\varepsilon ax)^2 + ... + \lambda_{n-1}(\varepsilon ax)^{n-1} + ...] \ , \qquad (6)$$

где λ_k – некоторые положительные числа.

Если неизвестное число a взять в виде $a = \varepsilon$ то ряд (6) является асимптотическим рядом по малому параметру ε на отрезке $J(\varepsilon) = [1, \varepsilon^{-1}]$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если взять внешнее решение с начальным условием $y(1)=1$, $y'(1) = a = \varepsilon$, то оно является асимптотическим рядом на отрезке J(ε).

Теперь построим внутреннее решение удовлетворяющее условию $y(\infty)=0$. Для этого в (1) сделаем подстановку $t=x\varepsilon$, тогда оно запишется в виде

$$u''(t) + (3t^{-1} + 1)u'(t) = \beta(u'(t))^2 + u(t)u'(t) \qquad (7)$$

где $u(t,\varepsilon) = y(x,\varepsilon)\big|_{x = t\varepsilon^{-1}}$.

Уравнение (7) решается с краевыми условиями:

$$u(\varepsilon)=1, \ u(\infty)=0 \qquad (8)$$

Теорема 2. Решение задачи (7)-(8) можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_m(t) + \cdots, \qquad (9)$$

где $u_k(t) = u_k(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{3k})$ (k=0,1,2,…) $\varepsilon \to 0$

$$u_0(\varepsilon) = 1, u_0(\infty) = 0; \ \ u_k(\varepsilon) = u_k(\infty) = 0, \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Подставляя (9) в (7) для функций $u_k(t)$ получим следующие задачи:

$$u_0''(t) + (1 + 3t^{-1})u_0'(t) - \beta u_0'^2(t) = 0, u_0(\varepsilon) = 1, \ u_0(\infty) = 0, \quad (10.0)$$

$$Mu_1(t) := u_1''(t) + \left(1 + 3t^{-1} - 2\beta u'_0(t)\right)u_1'(t) = u_0(t)u_0'(t),$$

$$u_1(\varepsilon) = u_1(\infty) = 0 \ (10.1)$$

$$Mu_2(t) := \beta u_1'^2(t) + u_0 u_1' + u_0' u_1(t), u_1(\varepsilon) = u_1(\infty) = 0 \qquad (10.2)$$

$$Mu_{2m} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m \\ i,j\geq 1}} u_i'(t)u_j'(t) + u_m^2(t) + \sum_{j+i=2m} u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m}(\varepsilon) = u_{2m}(\infty) = 0 \qquad (10.2\text{m})$$

$$Mu_{2m+1} = 2\beta \sum_{\substack{j+i=2m+1 \\ i,j\geq 1}} u_i'(t)u_j'(t) + \sum_{j+i=2m+1} u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m+1}(\varepsilon) = u_{2m+1}(\infty) = 0 \qquad (10.2\text{m+1})$$

Решение задачи (10.0) имеет вид

$$u_0(t) = 1 - \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + \alpha_0 X(t)\right), \ \left(\alpha_0 = e^{\beta} - 1\right)$$

где $\alpha_0 = e^{\beta} - 1,\ X(t) \coloneqq X_3(t,\varepsilon) = a_3 \int_\varepsilon^t s^{-3}e^{-s}ds,$

$$a_3^{-1} = \int_\varepsilon^\infty s^{-3}e^{-s}ds\,; a_\alpha = O(\varepsilon^{-2}), \varepsilon \to 0;\ \ X(\varepsilon) = 0, X(\infty) = 1.$$

Отметим, что

$$u_0'(t) = -\alpha_0\beta^{-1}a_2t^{-3}e^{-t} \qquad (12)$$

Для определения остальных функций $u_k(t)\ (k = 1,2,\dots)$мы используем функцию Грина. Справедлива

Лемма 1. Решение однородной задачи

$$Mz(t) = f(t), \quad z(\varepsilon) = z(\infty) = 0$$

представляется в виде

$$z(t) = \int_\varepsilon^\infty s^3 e^{s-2\beta u_0(s)}G(t,s)f(s)ds,$$

где $f(t) \in C^\infty[C,\infty)$, $\qquad G(t,s) = \begin{cases} -\gamma_3^{-1}U(t)K(s), & \varepsilon \leq t \leq s \\ -\gamma_3^{-1}U(s)K(t), & s \leq t < \infty \end{cases}$

$$U(t) \coloneqq U_3(t,\varepsilon) = \gamma_3 \int_\varepsilon^t s^{-3}e^{-s+2\beta u_0(s)}ds\,, \gamma_3 = O(\varepsilon^2) = O(a_2), \varepsilon \to 0.$$

$K(t) \coloneqq K_\alpha(t,\varepsilon) = 1 - U(t);\ \ \gamma_3^{-1} = \int_\varepsilon^t s^{-3}e^{-s+2\beta u_0(s)}ds \qquad (13)$

Решение задачи (10.1) представляется в виде

$$u_1(t) = \int_\varepsilon^\infty G(t,s)s^3e^{s-2\beta u_0(s)}u_0(s)u'_0(s)ds \qquad (14)$$

Отсюда используя (12), (13) и оценивая $u_1(t)$имеем

$$u_1(t) \le l\int_{\varepsilon}^{\infty} \gamma_3 G(t,s)u_0(s)ds = l\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)u_0(s)ds +$$

$$+l\int_{\varepsilon}^{\infty} U(t)K(s)u_0(s)ds \le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} u_0(s)ds \le$$

$$\le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} s|u_0'(s)|ds \le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} a_3 s^{-2}e^{-s}ds \le lK(t)\beta_3, (\beta_3 = O(\varepsilon)$$

Таким образом, получим оценку: $|u_1(t)| \le K(t)\beta_3$

Аналогично, дифференцируя (14) и оценивая имеем: $|u_1'(t)| \le \beta_3|K'(t)|$.

Решение уравнения (11.2) запишется в виде: $u_2(t) = I_1(t) + I_2(t)$,

где $I_1(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^3 e^{s-2\beta u_0(s)} u_1'^2(s)ds$,

$$I_2(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^3 e^{s+2\beta u_0(s)}[u_0(s)u_1'(s) + u_0'(s)u_1(s)]ds$$

Оценивая функции $I_1(t)$, $I_1'(t)$ получим

$$|I_1(t)| \le l\beta_3^2\gamma_3^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-3}e^{-s}ds +$$

$$+l\beta_3^2\gamma_3^{-1}\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-3}e^{-s}ds \le l\beta_3^2\gamma_3^{-1}\int_{\varepsilon}^{\infty} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \le$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \le \beta_3^2 K(t), \qquad |I_1'(t)| \le \beta_3^2|K'(t)|.$$

Таким образом, $|u_2(t)| \le \beta_3^2 K(t), |u_2'(t)| \le \beta_3^2|K'(t)|$.

Теперь методом полной математической индукции доказывается, что для решения задачи (10.m) имеет место оценка

$$|u_m(t)| \le \beta_3^m K(t), |u_m'(t)| \le \beta_3^m|K'(t)|, \quad \forall m \in N.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Асимптотика решение задачи (1) представляется в виде

$$y(x) = y_0(x) + \beta_3 y_1(x,\varepsilon) + \beta_3^2 y_2(x,\varepsilon) + \cdots + \beta_3^m y_m(x,\varepsilon) + \cdots,$$

где $y_j(x,\varepsilon) = u_i(x\varepsilon^{-1}) = O(1)$, $\beta_3 = O(\varepsilon^1)$, $\varepsilon \to 0$.

Как и в §3.3 можно доказать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке [1,∞).

Заключение по главе 3

В главе 3 построены равномернвые асимптотические разложения решения обобщенной задачи Лагерстрома в случаях, когда размерность пространтсва n=1,2,3,4, а также нецелой размерности $2<n<3$.

Построенные асимптотические разложения строго обоснованы, т.е. получены точные оценки для остаточных членов асимптотических рядов.

ВЫВОД

В данной диссертации построены равномернвые асимптотические разложения решения исходной и обобщенной задачи Лагерстрома в случаях, когда размерность пространтсва n=1,2,3,4, а также нецелой размерности $2<n<3$.

Доказана асимптотический характер решения и равномерная сходимость построенной асимптотики.

Построенные асимптотические разложения строго обоснованы, т.е. получены точные оценки для остаточных членов асимптотических рядов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алымкулов, К., Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст] / К. Алымкулов. Илим, Бишкек, 1992.
2. Алымкулов, К. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Матем. заметки, – 2012. – Т. 92. Вып. 6. – С. 819-824.
3. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
4. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.
5. Иманалиев, М.И. Асимптотические методы в теории интегро- дифференциальных систем [Текст] / М.И. Иманалиев. – Илим, Бишкек, 1972.
6. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К. // Тезисы докл. межд. конф. Функц. анализ и его приложения .Астана, 2012, 2-5 октября,с.106-107.
7. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома размерности три, методом структурного сращивания [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К. // Материалы 2-й международной конференции, посвященной 20-и летию образования КРСУ им. Б.Н. Ельцина и 100 летию профессора Я.В. Быкова. Т. 2. 2013. – С. 88-94.
8. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности два, методом структурного сращивания [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К. // Вестник ОшГУ. – 2013. - №1. – С. 55-61.

9. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности три, методом структурного сращивания [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К. // Вестник ОшГУ. – 2013. - №1. – С. 61-65.
10. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания в случае нецелой размерности пространства [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К. // Приволжский научный вестник. – 2017. -№ 3(67). – С. 5-9.
11. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома в случае, когда размерности больше одного, но меньших двух методом структурного стращивания [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К. // Сборник научных работ Евразийского Научного Объединения. – Москва: ЕНО, 2017. – С. 1-4.
12. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности четыре, методом структурного сращивания [Текст] /Омуралиев М.К. // Вестник ОшГУ. – 2013. -№2. Вып. 2. – С. 192-196.
13. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома размерности четыре, методом структурного сращивания [Текст] /Омуралиев М.К. // ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. – 2014. - № 11. – С. 3-6.
14. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания в случае размерности больше двух, но меньших три [Текст] /Омуралиев М.К. // ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. – 2014. - № 11. – С. 10-14.
15. Омуралиев, М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома размерности два,

методом структурного сращивания [Текст] / К. Алымкулов, Омуралиев М.К., Зулпукаров А. // Вестник ОшГУ. – 2013. -№2. Вып. 2. – С. 173-176.
16. Треногин, В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика [Текст] / В.А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. Вып. 4. – С. 123–156.
17. Alymkulov, K Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “Recent Studies in Perturbation Theory” [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov. Chapter 1. Edited by Dimo I. Uzunov, 198 p.
18. Alymkulov, K. Solution of the Lagerstrom model problem [Text] / K. Alymkulov, J. Tolubaev. Math.Note, Vol.56, No.4, pp. 3-8,1994,
19. Alymkulov, K. Method of structural matching for the model Lighthill equation with the regular critical point [Text] / K. Alymkulov, J.K. Jeentaeva. Math. Note, Vol.79, No.5, pp. 643-652, 2006.
20. Bush, B. On the Lagerstrom mathematical model for viscous flow at low Reynolds number [Text] / B. Bush. SIAM J.Appl.Math.,Vol.20, No 2, pp.279-287, 1971.
21. Cole, J.D. Perturbation methods in applied mathematics [Text] / J.D. Cole // Blaisdell Publishing Company, 1968.
22. Cohen, D.S. Proof of some asymptotic results for a model equation for low Reynolds number flow [Text] / D.S. Cohen, A. Fokas, P.A. Lagerstrom. SIAM J.Apll.Math. Vol.35, No1, pp.187-207,1978.
23. Hastings, S.P. Classical methods in ordinary differential equations, with applications to boundary value problems [Text] / S.P. Hastings, J.B. Mcleod. AMS, 2012.
24. Hsia, G.C. Singular perturbation for a nonlinear differential equation with small parameter [Text] / G.C. Hsia. SIAM J.Math.Anal.,Vol.4, No 2, pp.283-301, 1973.
25. Hinch, E.J. Perturbation methods [Text] / E.J. Hinch. Cambridge university press, 1981.

26. Kevorkian, J. Perturbation methods in applied mathematics [Text] / J. Kevorkian, J.D. Cole // Springer-Verlag, 1981.
27. Kida Teruhiko An asymptotic approach on Lagerstrom mathematical model for viscous flow at Reynolds numbers [Text] / Kida Teruhiko, Bull.Univ.Osaka Prevecture,ser.A, 1988. 36(2), pp.83-97.
28. Lagerstrom, P.A. Matched asymptotic expansions. Ideas and techniques [Text] / P.A. Lagerstrom. Springer-Verlag, 1988.
29. Nunter, C. On lagerstrom,s model of slow incompressible viscous flow [Text] / C. Nunter, S.D. Tagdari Boyer. SIAM J.Appl.Math., Vol.50, No 1, pp.48-63, 1980.
30. O'Malley, R. E. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations [Text] / R. E. O'Malley. Springer-Verlag, 1991.
31. Omuraliev, M.K. Method of Structural Matching and its Application to Lagerstrom's Model Equation [Text] / K. Alymkulov, M.K. Omuraliev // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR), Volume 3, Issue 3, March 2015. –Pp. 81-88.
32. Poincare, H. Acta Math. [Text] / H. Poincare, 8 1886. – P. 295-344.
33. Popović, N. A geometric analysis of the Lagerstrom model problem [Text] / N. Popović, P. Szmolyan. Journal of Differential Equations Volume 199, Issue 2, 20 May 2004, Pages 290–325.
34. Popović, N. Rigorous asymptotic expansions for Lagerstrom's model equation a geometric approach [Text] / N. Popović, P. Szmolyan. Nonlinear Analysis: Theory, Methods& Applications,Volume 59, Issue 4, November 2004, Pages 531–565.
35. Rosenblat, S. On the asymptotic solution Lagerstom model equation [Text] / S. Rosenblat, J. Shepherd. SIAM J.Appl. Math., Vol.29, No.1, pp.110-120, 1975.
36. Skinner, L.A. Note on Lagerstrom singular perturbation models [Text] / L.A. Skinner. SIAM J.Appl. Math., Vol.41, No.2, pp. 362-364 1984.

37. Tam, K.K. On the Lagerstrom model for flow at low Reynolds numbers [Text] / K.K Tam. Journal of Mathematical Analysis and Applications,Volume 49, Issue 2, February 1975, Pages 286–294.
38. Van Dyke, M. Perturbation methods in fluid dynamics [Text] / M. Van Dyke. Academic Press, New York, 1964.
39. Wasow, W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations [Text] / W. Wasow. Dover Publ., Inc., New York, 1987.