1 – лекция:

САН МОДЕЛДЕРИ

Чөйрө таануу процессинде колдонулган эң алгачкы белги – символдор же моделдер катарында сандарды эсептөөгө болот. Сандардын жардамы менен нерселерди өлчөмүнө, жайгашуу аралыгына, санына карата айырмалап тааныйбыз.

Санак муктаждыктарын канааттандырууга керектелген сандарды натуралдык сандар деп атап, бардык натуралдык сандардын көптүгүн N *тамгасы менен белгилейбиз.*

Натуралдык сандардын көптүгү өсүү тартибинде

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots\}$

көрүнүшүндө жазылып, n тамгасы менен эркин тандалган натуралдык сан белгиленет. Натуралдык сандарды мындай символдор менен белгилөө араб математиктери тарабынан кабыл алынган (Индиядан арабдар аркылуу Европага тараган деген божомолдор да бар). Айрым учурларда Рим цифралары да колдонулат:

I, II, III, IV, V, … , X, … , XXI, … - Рим белгилөөсүндө,

1, 2, 3, 4, 5, …, 10, …, 21, … - Араб белгилөөсүндө.

Теориялык жактан санактын жүрүшүн чексизге чейин уланта берүүгө болгондуктан, N көптүгү да чексиз көп элементтерден же сандардан турат. Иш жүзүндө чексиз санакты аткаруу мүмкүн эмес, ошондуктан чексиз деп эсептелген натуралдык санды « ∞ » символу менен белгилейбиз. Натуралдык сандар адамдардын кыялында гана жашоочу белги – символдор болуп, аларды өзгөртүп жазуу же башкача белгилөө адамдардын эркинен көз каранды. Ошондой болсо да, жалпы бирдейликти сактоо максатында натуралдык сандарды араб цифраларында жазуу эрежеси кабыл алынган. Натуралдык сандарды

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларынын жардамы менен ондук системада же ар бир он сандан кийин, санакты жаңылоо менен толук жазып көрсөтүүгө болот.

Мисалы: 45 эки орундуу натуралдык санын белгилөө үчүн 4 жолу эсепти жаңылоочу ондук жана 5 санактары колдонулат $45 = 4 \cdot 10 + 5$.

Үч орундуу 397 саны $397 = 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7$ көрүнүшүндөгү мааниде түшүнүлүп, 3 жолу $10^2 = 100$ санагы, 9 жолу 10 санагы жана бир жолу 7 санагы, баары кошулуп 397 саны пайда болот деп эсептелет. Ошондой эле $5925 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$ төрт орундуу сан, $78763 = 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$ беш орундуу сан болуп, жалпы учурда m орундуу натуралдык санды жазуу эрежеси

$$C_1C_2C_3...C_m = C_1 \cdot 10^{m-1} + C_2 \cdot 10^{m-2} + C_3 \cdot 10^{m-3} + ... + C_{m-1} \cdot 10 + C_m$$

түрүндө болот. Бул жерде C_i деп 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларынын бири ($i = 1,2,...,m$) алынат. Ошентип көрсөтүлгөн он цифраларды бирдик, ондук, жүздүк, миңдик, …, 10^{m-1} дик, … тартиптеги орундарга коюу менен бардык натуралдык сандарды жазууга болот. Жогорудагы мисалдарда 45 санында 4 - ондук, 5 - бирдик; 397 санында 3 - жүздүк, 9 - ондук, 7 - бирдик; 5925 санында 5 - миңдик, 9 - жүздүк, 2 - ондук, 5 - бирдик; 78763 санында 7 - он миңдик, 8 - миңдик, 7 - жүздүк, 6 - ондук, 3 - бирдик орундарда жайгашышкан; Ал эми $C_1C_2C_3...C_m$ санында $C_1 - 10^{m-1}$ дик, $C_2 - 10^{m-2}$ дик, …, C_{m-1} – ондук, C_m – бирдик орундарда жайгашкан болушат.

Адамдын колдорундагы манжалардын саны он болуп, саноого ыңгайлуу болгондуктан ондук система тандалып алынган. Ошондой болсо да, дүйнө элдеринде эсептөөнүн жетилик, он экилик, жыйырмалык, кырктык ж.б. системалары колдонулуп жүргөн фактылар катарында жуманын жети күндөн, кырк чоро, кырктык, жыйырмалык сыяктуу түшүнүктөр сакталып калганын айтууга болот.

Мисалы: Жетилик системада 10 деп 7 санын түшүнүп, ар бир 7 жолку санактан кийин жаңы санак баштайбыз.

Жетиликте: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, . . . ,

ондукта: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...

Экилик системада ар бир эки 0, 1 деген санактарынан кийин жаңы санак башталып “ажыратуу”, “туташтыруу” абалдарын элестеткендиктен, электр тогунун жардамы менен экилик системада компьютердик эсептөө технологиялары түзүлүп, натыйжасы таблога 10 дук системада жазылып чыгат. Ошондой эле жарыктын “өчүү”, “жануу” кубулуштарына негизделип, лазердик эсептөө технологиялары келип чыккан.

Экиликте: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, . . . ,

ондукта: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Бул учурларда натуралдык санды жазып көрсөтүү эрежелери да алмашат. Жетилик системада бирдик, ондук ж.б. түшүнүктөрүнүн ордуна бирдик, жетилик, 7^2 тык, 7^3 тук ж.б. түшүнүктөрү келип чыгат.

Мисалы: Ондук системадагы $75 = 7 \cdot 10 + 5$ саны, жетилик системада 135 деп жазылып, $135 = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 5$ көрүнүшүндө түшүндүрүлөт. Ондук системадагы бирдик менен жазылган 9 саны, экилик системада 1001 түрүндө жазылат же $1001 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$ санында бирдик, 2 лик, 2^2 тык, 2^3 тук орундарда жайгашкан 0, 1 цифраларынан куралган миңдикке ээ сан катарында түшүнүлөт.

Эсептөө системаларын кандай тандаганыбызга карабай санак тартиби сакталып, бардык эсептөө системаларында нерселердин саны өзгөрбөйт. Ошондой болсо да расмий математикада ондук эсептөө системасын колдонуу макулдашылган.

1.1.1 ***Аныктама.*** *А көптүгүнүн элементтеринин саны анын кубаты деп аталып, $\mu(A)$ символу менен белгиленет. Тең кубаттуу көптүктөр эквиваленттүү көптүктөр болушат.*

Натуралдык сандардын көптүгү чексиз көп элементтерден турганына карабастан, эсептөө иретин бузбастан чексизге чейин уланта берүү мүмкүнчүлүгү сакталгандыктан, теориялык жактан аны эсептеп

чыгууга болот деп ойлоп, кубатын "∞" деп атабай, «санактык» же «эсептелүүчү» кубатка ээ деп "a" символу менен белгилейбиз, же $\mu(N) = a$ көрүнүшүндө жазабыз.

N көптүгүнүн каалагандай элементтери менен арифметикалык кошуу, көбөйтүү амалдарын жүргүзсөк, натыйжасы натуралдык сан болгондуктан, бул амалдарга карата N көптүгүн туюк деп аташып, $N("+","X")$ - символу менен белгилеп жүрүшөт:

$\forall n, m \in N: \quad n + m = k \in N, \; n \cdot m = \rho \in N.$ Бирок кемитүү, бөлүү амалдары ар дайым эле аткарыла бербейт, б.а. натуралдык сандардын айырмасы жана тийиндиси ар дайым эле натуралдык сан боло бербейт.

Мисалы: 4, $7 \in N$, бирок $4 - 7 = -3 \bar{\in} N$ жана $\frac{4}{7} \bar{\in} N$.

Айрым учурларда 0 санын да натуралдык сандарга кошуп жазышып, $N_0 = \{0, \; 1, \; 2, \; 3, \; ..., \; n, ...\}$ көрүнүшүндө белгилешет.

1.1.2 Аныктама. *Эсептөө башталышы жана чен бирдиги бар багытталган түз сызык сан огу деп аталат.*

Сан огун чен бирдиги катарында кыялыбызда «узундугу бир» деп ойлогон кесиндини алып, аны эсептөө башталмасы деп алынган 0 чекитинен оң багытка (түздүн багыты) карап түзгө коюп ченеп кетүү менен, кесиндилердин учтарына туура келген бардык чекиттерди натуралдык сандар деп түшүнөбүз *(1.1.1-чийме).*

1.1.1-чийме

Болжолдуу тандалган «бир» аралыгы ар кимдин кыялында ар башка тандалгандыктан, «бир» узундуктагы кесиндилердин учтарындагы чекиттер деп эсептелген натуралдык сандар, ар түрдүү аралыкта обочолонгон чекиттер менен сүрөттөлүп калат. Ошондуктан «бир» ченин аралык, салмак, убакыт ж.б. чоңдуктары үчүн ченөө жалпылыгын сактоочу эталон - үлгүлөрү кабыл алынган (мм., см, гр, сек, ж.б.у.с.). Мындан ары «бир» аралыгы деп эталон - үлгүдө кабыл алынган ченди түшүнөбүз.

Натуралдык сандар оң багыттагы өсүү тартибиндеги санак жүргүзүү муктаждыгын канааттандырууга ылайыкташкан. Бирок тескери санакты жүргүзүүгө ыңгайсыз, ошондуктан терс белгидеги натуралдык сандар түшүнүгүн киргизүү менен, оң жана тескери же эки багыттуу санакты ишке ашырууга дарамети жеткен сандардын көптүгүн түзөбүз. Аны бүтүн сандардын көптүгү деп Z тамгасы менен белгилейбиз жана

$$Z = \{\ldots,-n,\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ldots\ \}$$

көрүнүшүндө жазабыз. Мында n эркин алынган бүтүн санды түшүндүрөт.

Бүтүн сандардын көптүгүндө натуралдык сандардын көптүгүнө караганда эки эсе көп элементтер бар болгондой көрүнгөнү менен, теориялык жактан N, Z көптүктөрүнүн элементтеринин саны бирдей болуп, тең кубаттуу же эквиваленттүү көптүктөр болушат.

▷ Чынында Z көптүгүн оң жана терс натуралдык сандардын көптүктөрүнө ажыратып:

$$N_+ = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ldots\ \},$$

$N_- = \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$ алардын ар бири санактык, б.а. a кубатындагы көптүктөр экенине ишенебиз. $Z = N_+ \cup N_-$ болгондуктан, саноонун чексиз жүрүшүндө N_+ көптүгүн эсептеп бүткөн соң, N_- көптүгүн эсептеп аягына чыгарууга болот деген теориялык тыянакка таянып, Z көптүгүнүн элементтерин да санап чыгууга болот деген бүтүмгө келебиз. Ошентип Z көптүгү санактык a кубатына ээ жана N көптүгүнө эквиваленттүү $\mu(Z) = \mu(N) = a$. ◁

Z көптүгүндө бүтүн сандарды арифметикалык кошуу, көбөйтүү, кемитүү амалдарынын натыйжасы да бүтүн сан болот, б. а. $Z(\text{"+"},\text{"–"},\text{"}X\text{"})$. Терс багытка карап кеткен чексиздиктеги терс бүтүн сан "$-\infty$" деп белгиленет.

Бүтүн сандарды сан огунда бири – биринен бир аралыгында обочо жайланышкан чекиттер катарында сүрөттөөгө болот *(1.1.2-чийме).*

1.1.2 Математикалык индукция усулу. Комбинаториканын элементтери

Натуралдык жана бүтүн сандардын көптүгү чексиз сандардан тургандыктан, алар менен болгон амалдарды жана айрым касиеттерди бардык сандар үчүн толук текшерип чыгуу мүмкүн эмес. Ошондой болсо да дедуктивдик жана индуктивдик усулдарга таянып, ал касиеттерди бардык сандар үчүн туура же ката деп болжолдоп, кыялыбызда гана ишенип келебиз.

1.1.2-чийме

Дедукция усулу деп, жалпы бүтүмдөрдүн негизинде бир жеке бүтүмгө келүүнү түшүнөбүз.

Мисалы: «Аягы 0 же 5 цифралары менен бүткөн сан сөзсүз 5 ке бөлүнөт» деген жалпы тыянактан, «1725 саны 5 ке бөлүнөт» деген жеке бир бүтүмгө келебиз жана анын чын же жалган экенин текшербестен эле ишенебиз.

Индукция болсо, көптөгөн жекече текшерилген бүтүмдөрдүн негизинде жалпы бир бүтүм чыгаруу ыкмасы болот. Мындайча айтканда 5, 10, 15, 20, …, 625 сандарынын ар биринин 5 ке бөлүнөрүн текшерип, тууралыгына ишенип, «бардык аягы 0 же 5 цифралары менен бүткөн сандар, сөзсүз 5 ке бөлүнөт» деген бир жалпы бүтүмгө келебиз.

Индукция усулу толук жана толук эмес индукция деп аталган эки түргө бөлүнөт. Толук индукцияда мүмкүн болгон бардык чектүү сандагы бүтүмдөрдү өз - өзүнчө бөлүп, текшерип далилдөөнүн негизинде гана, аларды жалпылоочу бир корутунду - бүтүм кабыл алынат. Толук эмес индукция усулунда каралуучу бардык учурлар эске алынбайт. Жетишерлик чоң сандагы учурларды гана текшерип көрүү менен, бардык учурлар үчүн бир корутунду - бүтүм чыгарыла берилет. Ошондуктан айрым учурларда чыгарылган корутунду - бүтүм туура болбой да калат. Мындай катачылыкка жол бербөө максатында «Математикалык индукция принциби» деп аталган төмөндөгүдөй усул колдонулуп жүрөт:

1. Эгерде $A(n)$ сүйлөмүнүн чын экендигин чектүү $n = p$ сандагы учурлардын бардыгы үчүн далилдөө мүмкүн болсо (p чектүү натуралдык сан);

2. Эркин тандалган $n = k$ деп алынган k натуралдык саны үчүн бул сүйлөмдү чын деп болжолдосок;

3. $A(n)$ сүйлөмүнүн чын экендигин $n = k + 1$ болгон учур үчүн далилдей алсак,

анда $A(n)$ сүйлөмүн бардык n натуралдык сандары үчүн чын деп айтабыз.

Мисалы: 1. Берилген n сандагы так сандардын суммасы n^2 болот деген бүтүмдүн чындыгын текшергиле.

Текшерүү:

▷ 1. $n = 1$ учурунда $1^2 = 1$ болсо, $n = 2$ болгондо $1 + 3 = 4 = 2^2$ *болуп,* $n = 3$ болсо $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ болуп, $n = p = 3$ учурларынын бардыгында айтылган бүтүм чын болору текшерилди.

2. $n = k$ учуру үчүн

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2 \qquad (1)$$

чын болсун деп болжолдойбуз.

3. $n = k + 1$ учуру үчүн

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \qquad (2)$$

аткарыларын далилдейли. Болжолубуз боюнча $n = k$ болгондо (1) туура болгондуктан, аны пайдаланып (2) нин сол жагын

$k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ түрүнө келтирип, (2) нин туура экенин көрсөткөн болобуз. Демек, чыгарылган эреже бардык так n натуралдык сандары үчүн туура, б.а.

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. ◁

2. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ (3)

эрежесинин бардык натуралдык сандар үчүн туура экендигин көрсөткүлө.

▹ **Чыгаруу:** $n=1$ болсо, (3) эрежеси $1=\left[\frac{1\,(1+1)}{2}\right]^2$ же 1=1 болуп аткарылат. $n=k$ үчүн (3) туура болсун деп болжолдойлу, б.а.

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \qquad (4)$$

аткарылсын. $n=k+1$ үчүн туура экендигин далилдөө үчүн

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2 \qquad (5)$$

аткарылышын көрсөтүү керек. Чынында эле $n=k$ үчүн (3) эрежеси аткарылат, ошондуктан (4) барабардыгын пайдаланып, (5) тин сол жагын өзгөртүп жазуу менен

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2\cdot\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=(k+1)^2\cdot\frac{(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

натыйжасына ээ болуп, (5) тин туура аткарыларын далилдеген болобуз. ◃

Ошентип математикалык индукция усулу менен көзүбүзгө көрүнгөн санак сандарында аткарылуучу амал – аракеттер чексиз көп сандарга чейин уланып, кыялыбызда чын бойдон кала берет деген ишеничке ээ болобуз.

Элементтеринин санын эсептөөгө мүмкүн болгон көптүктө, кайсы бир шарттарга карата элементтерди тандап жайгаштыруу эрежелери комбинаториканын элементтери деген ат менен белгилүү. Жогорку математика курсун окуп үйрөнүүдө колдонулган комбинаториканын айрым эрежелеринен маалымат берели:

1. Орун алмаштыруу.

Элементтеринин саны экөө болгон $\{n_1, n_2\}$ көптүгүнүн элементтерин эки түрдүү ыкмада $\{n_1, n_2\}$, $\{n_2, n_1\}$ орун алмаштырып жаза алабыз. Элементтеринин саны үчөө болгон көптүктүн элементтерин

$$n_1, \quad n_2, n_3$$

$$n_2, \quad n_1, n_3,$$

$$n_2, \quad n_3, n_1,$$

$$n_3, \quad n_2, \quad n_1,$$

$$n_3, \quad n_1, \quad n_2,$$

$$n_1, \quad n_3, \quad n_2,$$

алты жолу орундарын алмаштырып жаза алабыз. Элементтеринин саны n болгон көптүктүн элементтерин $P_n = n!$ жолу (француз тилинде орун алмаштыруу – permutation сөзүнүн баш тамгасы) орундарын алмаштырууга болот. n! – «эн факториал» деп окулуп, 1 ден n ге чейинки натуралдык сандардын көбөйтүндүсүнө барабар болот: $p_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Жогоруда үч элементтүү көптүктүн элементтерин $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 6$ жолу орундарын алмаштырып жазган элек.

2. Орундаштыруу.

Үч элементтүү $\{n_1, n_2, n_3\}$ көптүгүнүн элементтерин экиден жазып чыгуу мүмкүнчүлүктөрүнүн саны 6 жолу болуп, төмөндөгүдөй жазылат:

$$\{n_1, n_2\}, \ \{n_2, n_1\}, \ \{n_1, n_3\}, \ \{n_3, n_1\}, \ \{n_2, n_3\}, \ \{n_3, n_2\}. \quad (*)$$

Ал эми көптүктүн элементтери көп болсо, аларды белгилүү бир сандагы топторго бөлүп орундаштыруулардын санын жазып көрсөтүү, эсептөө кыйынга турат. Ошондуктан n элементтүү көптүктүн элементтерин k элементтен жазып чыгуунун саны $A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ деп, аны n элементти k элементтен ($k \le n$) орундаштыруу деп айтабыз. Бул формуланы математикалык индукция методу менен далилдөөгө болот. Ал эми (*) орундаштыруусунда $n = 3$, $к = 2$ болгондуктан $A_3^2 = 3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6$ жолу орундаштыра алдык.

3. Топтоштуруу.

Үч элементтүү $\{n_1, n_2, n_3\}$ көптүгүн эки элементтен топтоштурууда бир жолу жазылган экилик топ, экинчи жолу кайталанып жазылбайт. Экиден орундаштырууда бир эле экилик топ, элементтеринин орундарын алмаштырып кайталана бергенин жогоруда (*) дан көрдүк. Демек, үч элементтүү көптүктү экиден топтоштуруу $\{n_1, n_2\}$, $\{n_1, n_3\}$, $\{n_2, n_3\}$, үч жолу гана болуп, кайталоолордун санына эсе кыскарат.

Жалпы учурда n элементтүү көптүктүн элементтерин k элементтен $(k \le n)$ топтоштуруулардын саны

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...1}{(1 \cdot 2 \cdot ...k)(n-k) \cdot (n-(k+1))...1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ же

$C_n^к = \dfrac{n!}{к!(n-к)!}$ жолу болот. Анткени топтоштуруулардын саны орундаштыруудан k! эсе аз, б.а. k сандагы элементтер орундары алмашылып k! жолу кайталанбайт.

Ошондуктан үч элементтүү көптүктүн элементтерин эки элементтен топтоштуруулардын саны, орундаштыруулардын саны 6 га караганда $к! = 2! = 1 \cdot 2 = 2$ эсе аз же

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1!} = 3$$ болот.

Комбинаториканын элементтери болушкан P_n, A_n^k, C_n^k сандары, тиешелүү түрдө n элементтүү көптүктүн элементтерин орун алмаштыруу, орундаштыруу, топтоштуруу мүмкүнчүлүктөрүнүн санын көрсөтүп, алардын бардык n, k натуралдык сандар үчүн тууралыгы математикалык индукция усулу менен далилденет. Аларды эсептөөдө $0! = 1$, $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^{n-k} = C_n^k$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ эрежелери кабыл алынат.

4. Ньютондун биному.

Практикалык эсептөөлөрдө эки сандын суммасын же айырмасын жетишерлик чоң даражаларга көтөрүү зарылчылыктары туулат. Ошондуктан

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ формулаларын математикалык индукция усулу менен жалпылап,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ньютондун биному деп аталган формуланы табабыз. Практикалык эсептөөлөрдө Ньютондун биномундагы C_n^i $(i = 0,1,\ldots,n)$ коэффициенттерин табууну жеңилдетүү үчүн Паскалдын үч бурчтугун түзүп пайдаланабыз:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

--- .

Эгерде n =5 болсо, анда эки сандын суммасын 5 – даражага көтөрүү формуласы төмөндөгүчө жазылат:

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

$n = 4$ болсо, $(a+в)^4 = a^4 + 4a^3в + 6a^2в^2 + 4aв^3 + в^4$. Ошентип үч бурчтуктун ар бир жолчосу (чокусун кошпогондо) эки сандын суммасын же айырмасын көтөрүү даражасын, ал эми жолчодогу сандар ажыралуунун коэффициенттерин түшүндүрүшөт.

1.1.3 Рационалдык сандардын мейкиндиги

Бүтүн сандардын көптүгүндө чексиз көп элементтер болгонуна карабастан, сан огунда бири – биринен «бир» аралыгында обочолонгон чекиттер аркылуу сүрөттөлүп, чөйрөдөгү «бир» аралыгынан жакын жайгашкан нерселерди сүрөттөөгө жетишсиз болот. Ошондой эле бүтүн сандар «бир» салмагынан, убактысынан ж.б. аз же кичине болгон абалдарды баалоого мүмкүнчүлүгү жетпейт. Бул кемчилдикти жоюу үчүн жаңы «бөлчөк» же «рационалдык» сан – моделдери түзүлүп, алар мурдагы эле ондук системадагы бүтүн сандардын жардамы менен жазылат. Ал үчүн кыскарбас же жалпы көбөйтүүчүлөрү жок $p,\ q$ бүтүн сандарын $(q \neq 0)$ алып, аларды $\frac{p}{q}$ көрүнүшүндө жазып «бөлчөк сан» же «рациональдык сан» деп айтабыз. p саны бөлчөктүн алымы, q саны бөлчөктүн бөлүмү деп айтылат. Эгерде бөлчөктүн алымы, бөлүмү кыскаруучу бүтүн сандар болушса, анда $p,\ q$ деп аларды кыскартып бүткөндөн кийинки бүтүн сандарды түшүнөбүз.

1.1.3 Аныктама. *Бардык бүтүн жана бөлчөк сандардын көптүгү рационалдык сандардын көптүгү деп аталып, Q тамгасы менен белгиленет жана* $Q = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathrm{Z},\ q \neq 0 \right\}$ *символу менен жазып түшүндүрүлөт.*

Рационалдык сандардын көптүгү $N,\ Z$ көптүктөрүнүн муктаждыкка жараша кеңейтилүүсү болуп, аларды өзүнө камтып турат же $N \subset Z \subset Q.$ Чынында эле каалагандай a бүтүн санын $\frac{a}{1}$ көрүнүшүндөгү бөлчөк катары түшүнүүгө болот. Рационалдык сандардын көптүгүндө аткарылган бардык арифметикалык төрт амалдардын натыйжасы да рационалдык сан болгондуктан, аны бул амалдарга карата туюк деп эсептеп, Q (“+”, “-”, “×”, “:”) көрүнүшүндө белгилеп жазабыз.

Рационалдык сандар бүтүн сандарга караганда көптөй сезилгени менен, теориялык жактан алардын саны барабар санактык деп

эсептелип, тең кубаттуу эквиваленттүү көптүктөр болушат. Демек, $\mu(\mathrm{N}) = \mu(Z) = \mu(Q) = a$ же $\mathrm{N} \sim \mathrm{Z} \sim Q$.

▹ Чынында эле, бардык оң $Q_+ = \{\frac{p}{q} : p, q \in Z,\ q > 0, p \geq 0\}$ сандары p, q оң бүтүн сандары менен түзүлгөндүктөн, оболу p ны бардык натуралдык сандарды кабыл алсын деп q ну өзгөртүүсүз калтыруу менен, $Q_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, ..., \frac{n}{q}, ...\right\}$ эсептөөгө мүмкүн болгондой санактык көптүктү түзөбүз. Кийинки кадамда $\frac{1}{q}$ санынын бөлүмүндөгү q га бардык натуралдык сандарды коюп, $Q_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ...\right\}$ санактык көптүгүн түзөбүз. Андан кийинки кадамда $\frac{2}{q}$ санын бөлүмүндөгү q га бардык натуралдык сандарды коюп,

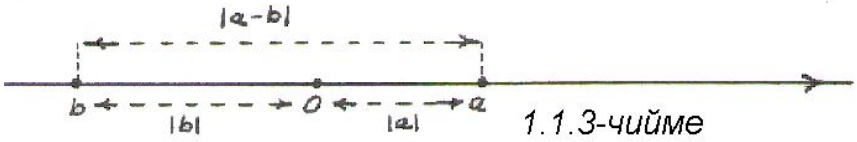
$Q_2 = \left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{2}{k}, ...\right\}$ санактык көптүгүн алабыз.

Ушул процессти улантуу менен

$Q_n = \left\{\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, ..., \frac{n}{k}, ...\right\}$ санактык көптүгүнө ээ болобуз, мында $n, k \in N$. Бул процессти чексиз улантуу менен кыскаруучу бөлчөктөрүн кыскартып бүтүп, оң рационалдык сандардын көптүгүн $Q_+ = Q_q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup ... \cup Q_n \cup ...$ саналуучу сандагы, саналуучу көптүктөрдүн биригүүсү катарында жазууга жетишебиз. Ошентип кыялыбыздагы чексиз эсептөө процессинде алардын ар бирин эсептеп бүтүп, улам экинчисине өтүп олтуруп, Q_+ көптүгүнүн элементтерин санап чыгууга болот деген теориялык бүтүм чыгарабыз же $\mu(Q_+) = a$. Бардык терс рационалдык сандардын саны, бардык оң рационалдык сандардын санына тең болгондуктан, алардын кубаттары тең $\mu(Q_-) = \mu(Q_+) = a$ болот. Ал эми $Q = Q_+ \cup Q_-$ болгондуктан Q_+ жана Q_- саналуучу болуп, Q да саналат деп эсептейбиз же $\mu(Q) = a$.◃

N, Z сандары сан огунда бири – биринен обочолонгон чекиттер аркылуу сүрөттөлсө, Q сандары өтө тыгыз абалда жайгашкан чекиттер аркылуу сүрөттөлүп, алардын тыгыздык деңгээлдерин көз мерчеми менен аныктоо мүмкүн болбой, пределдик абалдар аркылуу гана түшүндүрө алабыз. Ошондуктан эки коңшулаш рационалдык санды көрсөтүүгө мүмкүн эмес. Чынында эле r_1, r_2 сандарын коңшулаш деп ойлосок, алардын арасында $r_3 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ санынын жайгашканын жана бул сыяктуу чексиз көп Q сандары r_1 менен r_2 нин арасында бар экенин көрсөтө алабыз. Демек, сан огунда рационалдык сандар бүтүн сандар сыяктуу бири – биринен обочо абалдарда жайгашпастан, тыгыз коңшуларын табууга мүмкүн эмес абалга чейинки деңгээлде жакын жайгашкан туташ сызыкты элестетүүчү чекиттер сыяктуу көрүнөт. Ошентип, чөйрөдөгү түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрдү чекиттер деп ойлоп, алардын абалдарына сандардын жардамы менен байкоо жүргүзүү мүмкүнчүлүгү түзүлөт. Бүтүн сандарды колдонуп айрым турактуу кубулуштарды үйрөнө алганыбыз менен, «бир» аралыгынан жакын жайгашкан турактуу жана кыймылдуу кубулуштарды үйрөнүү мүмкүн эмес. Рационалдык сандарды ойлоп табуудан кийин, бир чекиттен (сандан) экинчи чекитке (санга) жакындап келүү аппараты - предел ойлонуп табылып, кыймылдуу процесстерди үйрөнүүгө жол ачылган. Предел аппараты аралыктын нөлгө чейин чексиз кичирейүүсү же чексизге чейин чоңоюусу сыяктуу абалдарды түшүндүрүүгө мүмкүнчүлүк жаратып, кыймылдоочу чекиттердин аралыгын ченөөгө шарт түзөт.

1.1.4 Аныктама. *Сан огунда O башталмасынан a рационалдык санына чейинки аралык a санын модулу же абсолюттук чоңдугу деп аталып,* $|a|$ *символу менен белгиленет.*



1.1.3-чийме

О башталмасынан a жана $-a$ сандары бирдей узактыкта жайгашкандыктан $|a|=|-a|$ жана аралык оң сан менен ченелгендиктен $|a|\geq 0$ болот. Демек, абсолюттук чоңдукту:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ эгерде } & a\geq 0 \text{ болсо,} \\ 0, \text{ эгерде } & a=0 \text{ болсо,} \\ -a, \text{ эгерде } & a<0 \text{ болсо} \end{cases}$$

деп түшүнүүгө болот.

1.1.5 Аныктама. *Эки a жана b рационалдык сандарынын арасындагы метрика же аралык чени деп, алардын айырмасынын абсолюттук чоңдугун же сан огунун a дан b га (же b дан a га) чейинки кесиндисинин узундугун айтып, метриканы $\rho(a,b)=|a-b|$ же $\rho(b,a)=|b-a|$ көрүнүшүндө белгилейбиз (1.1.3-чийме).*

Сандын абсолюттук чоңдугунун жана аралыктын айрым касиеттерин көрсөтүп өтөлү:

1^0. $|a|\leq n$ деген $-n\leq a\leq n$ менен,

$|a|>n$ деген $a<-n$ жана $a>n$ менен тең күчтүү.

2^0. $|a+b|\leq|a|+|b|$.

3^0. $|a-b|\geq|a|-|b|$.

Бул касиеттердин далилдөөсү абсолюттук чоңдуктун аныктамасынан келип чыгат.

Рационалдык сандарды элестеткен чекиттер коңшуларын көрсөтө албаган деңгээлде тыгыз жайгашкандыктан, анык бир такталган конкреттүү санга жетүү, аны айырмалап бөлүп көрсөтүү процесси кошуна чекиттерди аралап, өзгөрүп кыймылдаган жакындоо менен ишке ашат деп элестетебиз. Ошондуктан конкреттүү рационалдык сандар менен кошо өзгөрүлмө рационалдык сандарды карап, аларды сан огундагы өзгөрүлмө чекиттер деп, өзгөрүү кесиндилери менен чогуу карайбыз. Сан огунда каралуучу кесиндилердин учтары кесиндиге таандык же таандык эмес болгонуна жараша, аларды сегмент, интервал,

жарым сегмент, жарым интервал деп бөлүштүрөбүз. Кесиндиде жаткан чекиттерди кыймылдуу сан өзгөрүлмөлөрү деп атап x, y, z, t, ... сыяктуу латын тамгалары менен белгилейбиз.

1.1.6 Аныктама. *a, b рационалдык сандарынын арасында жайгашкан бардык x чекиттеринин көптүгү $a \le x \le b$ шартын канааттандырышса сегмент деп аталып, $[a,b]$ символу менен белгиленет: $[a;b]=\{x : a \le x \le b\}$. Ал эми $a < x < b$ шартын канааттандырышса, анда интервал деп аталып $(a,\ b)$, кээде $]a,\ b[$ символдору менен белгиленет: $(a,b)=\{x :\ a < x < b\}$.*

Бардык сегменттер кесиндинин учтарындагы чекиттерди кошо кармап тургандыктан туюк аралык же туюк (кээде жабык) көптүк деп, ал эми интервалдар кесиндинин учтарындагы чекиттерди кармап турбагандыктан, ачык аралык же ачык көптүк деп аталышат. Ошондой эле $(a;b]=\{x : a < x \le b\}$ жарым интервал, $[a;b)=\{x : a \le x < b\}$ жарым сегмент болуп эсептелишет.

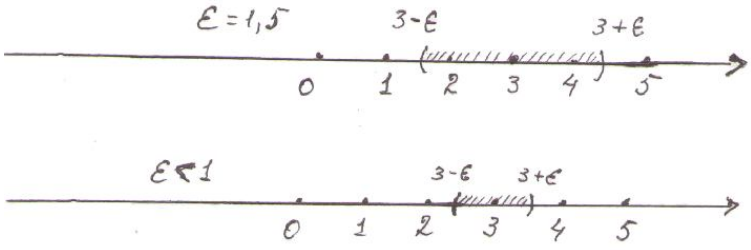
1.1.7 Аныктама. *x_0 рационалдык санынын «ε - чеке бели» же « ε - аймакчасы» деп, x_0 санынан ε аралыгынан узак эмес жайгашкан бардык сандардын (чекиттердин) көптүгү айтылат жана $\omega_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ деп белгиленет. «ε - аймакча» - интервал же ачык аралык катарында алынат (1.1.4 -чийме).*

1.1.4 -чийме

Бизди x_0 рационалдык санына коңшулук деңгээлде жакын жайгашкан сандар көбүрөөк кызыктыргандыктан, ε ду жетишерлик кичине оң сан деп эсептейбиз. Ошентип ε - аймакчада жайгашкан x чекиттери же сандары $\rho(x_0,x)=|x_0-x|<\varepsilon$ шартын канааттандырат жана x чекиттери x_0 чекитине чексиз жакын же андан чексиз кичине гана айырмаланат деп түшүнөбүз.

1.1.8 Аныктама. *Эркибизче алынган жетишерлик кичине* $\varepsilon > 0$ *санынын кандай тандалышына карабастан, берилген көптүктүн кандайдыр бир* x_0 *элементинин каалагандай* ε *- аймакчасында,* x_0 *дөн башка да чексиз көп элементтери кошо кармалып турса, анда* x_0 *элементин берилген көптүктүн пределдик элементи же коюулануу чекити деп атайбыз.*

N, Z көптүктөрүндө пределдик элементтер же чекиттер жок, анткени каалагандай бүтүн сандын жакынкы ε - аймакчасында өзүнөн башка бир да бүтүн сан жок болуп, ε санын 1 ден чоң деп тандаганда гана бир нече бүтүн сандар аймакчага кирип калышы мүмкүн *(1.1.5 - чийме).* Мисалы, 3 санынын кичине ε -аймакчасында бир да бүтүн сан жок, ал эми $\varepsilon = 1{,}5 - деп\ аймакчаны$ жетишерлик чоңойтсок, анда ε - аймакчада эки 2, 4 бүтүн сандары жайгашкан болушат.



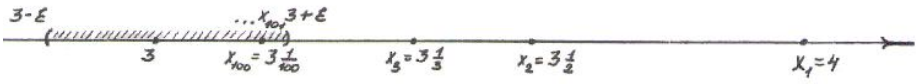
1.1.5-чийме

Рационалдык сандардын көптүгүндө ар бир рационалдык сан пределдик чекит боло алат.

Мисалы: $x_0 = 3$ рационалдык санынын пределдик чекит болорун көрсөтөлү: ▹ $\varepsilon = 0{,}01$ деп тандайлы да,

$$\rho\ (3, x) = |x - 3| < 0{,}01$$

шартын канааттандырган канча x рационалдык сандары бар экенин тактайлы. Эсептөөгө ылайыкташтырып x сандарын $x_n = 3 + \frac{1}{n}$ көрүнүшүндө болсун деп ойлойлу $(n = 1, 2, 3...)$. Анда $\rho\ (3,\ x_n) = |x_n - 3| = \left|3 + \frac{1}{n} - 3\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < 0{,}01$ же $n > \frac{1}{0{,}01} = 100 = N_\varepsilon$ болгон мезгилде бардык x_n сандары 3 санынын тандалган ε - аймакчасында



1.1.6 -чийме

жайгашары келип чыгат. Демек, алгачкы 100 сандагы x_n сандары гана ε =0,01 - аймакчанын сыртында болуп, x_{100} - чекити чек арада жайгашып, калган $n = 101,\ 102,\ \ldots$ номерлүү чексиз көп рационалдык сандар 3 санынын $\varepsilon = 0{,}01$ - аймакчасынын ичинде жайгашкан болот *(1.1.6 – чийме).* Экинчи жолу $\varepsilon = 0{,}04$ деп тандалса, анда $\rho(x_n, 3) = |x_n - 3| = \left|(3 + \frac{1}{n}) - 3\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon = 0{,}04$ шартын $n > \frac{1}{0{,}04} = 25 = N_\varepsilon$ болгон

номерлер менен белгиленген бардык x_n сандары канааттандырат.

Ал эми $N_\varepsilon = 25$ номери менен белгиленген x_{25} саны ε - аймакчасынын чек арасында жайгашкан болот (1.1.7- чийме). Ошентип тандалган $\varepsilon = 0{,}04$ санына жараша x_n

сандарынын алгачкы 24 мүчөсү гана 3 санынын ε - аймакчасын сыртында, бирөөсү $x_{25} = 3\frac{1}{25}$ саны чек арасында, калган x_{26} мүчөсүнөн баштап чексизге чейинки мүчөлөрү ε - аймакчанын ичинде жайгашкан болушат.

Тандалган $\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}04$ сандарына жараша табылган $N_\varepsilon = 100,\ N_\varepsilon = 25$ номерлери ε кичинерсе чоңоюп, ε чоңойсо кичирейип андан көз каранды болот, ошондуктан N_ε номерине ε санын кошо N_ε же $N(\varepsilon)$ көрүнүшүндө тиркеп жазышат. Демек, 1.1.8 – аныктамасына ылайык $x_0 = 3$ саны рационалдык сандардын көптүгүнө пределдик чекит боло алат. ◁

Ар бир рационалдык x_0 чекитинин ε - чеке белинде эбегейсиз көп сандагы, коңшуларын көрсөтүүгө мүмкүн эмес болгон деңгээлде тыгыз жайгашкан рационалдык чекиттер жайгаша алат. x_0 чекитинин $\omega_\varepsilon(x_0)$ аймагында чексиз көп рационалдык x_n чекиттери бар экенин көрсөтүүнүн чексиз көп ыкмалары бар. Ал үчүн x_n чекиттери деп x_0 чекитине жыйналуучу жөнөкөй ыкмада жазылган

$\left\{x_0+\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{x_0+\frac{1}{9n}\right\}, \left\{x_0-\frac{1}{n^3}\right\}, \left\{x_0+\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \ldots$ ж.б.у.с. удаалаштыктары боюнча кыймылдоочу чекиттердин тизмегин алуу жетиштүү.

1.1.9 Аныктама. *Кандайдыр бир эреже табылып, анын жардамы менен көптүктүн элементтеринен удаалаштык түзүп, пределдик чекитин аныктоо мүмкүн болсо, анда ал көптүктү ошол эрежеге карата мейкиндик деп айтабыз. Эгерде пределдик чекиттеринин бардыгы өзүнө таандык болсо, аны толук мейкиндик, ал эми пределдик чекиттерин толугу менен кармап тура албаса, толук эмес мейкиндик дейбиз.*

Элементтери эч бир эрежелерге баш ийбеген эркин элементүү көптүктөрдүн элементтерин тартиптештирип, айырмалап таанып, турмушта колдонуу мүмкүн эмес, ошондуктан каалагандай эле көптүк мейкиндик боло бербейт. Мейкиндик болгон көптүктөрдүн элементтери кайсы бир эрежеге баш ийип тартиптештирилгендиктен, алардын жардамы менен көптүктөрдү чөйрөдөгү кубулуштарга салыштырып, турмуштук маселелерди чечүүдө кеңири колдонуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз. Иш жүзүндө практикалык муктаждыкка жараша, көптүктөрдүн арасынан өзүбүз ойлоп тапкан тартиптештирүү эрежелеринин негизинде (амалдар, предел ж.б.у.с.), колдонуу ынгайына карап, керектүү мейкиндиктерди түзүп, ат коёбуз.

Q рационалдык сандары теориялык жактан N, Z көптүктөрү сыяктуу эле санактык кубатына ээ же аларга эквиваленттүү болгону менен, алардан айырмаланып 1.1.5 - аныктамасында киргизилген аралыкты ченөө эрежесине карата мейкиндикти түзөт. Анткени жогоруда ар бир рационалдык сан пределдик чекит болорун, түзүлгөн удаалаштыктарга карата аралыктарды ченеп баалоо менен ага жакындап келүү ыкмасын көрсөтүүгө болорун түшүндүрдүк. Бирок, Q толук эмес мейкидикти түзөт, анткени ал өзүнүн бардык пределдик чекиттерин толук кармап тура албайт.

1.1.4 Рационалдык сандарды кеңейтүү. Чыныгы сандардын мейкиндиги

Реалдуу чөйрөдө түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрдүн бардыгын рационалдык сандарды элестеткен чекиттер менен сүрөттөй албайбыз, анткени түз сызыктагы (сан огундагы) айрым чекиттерди белгилөөгө рационалдык сандар жетишсиздик кылат.

Мисалы, Сан огунда $\sqrt{2}$ санына туура келүүчү чекит рационалдык чекит болбойт же $\sqrt{2}$ рационалдык эмес сан.

Далилдөө. $\triangleright$ Чынында эле, тескерисинче $\sqrt{2}$ санын рационалдык сан деп болжолдосок, анда аны $\frac{p}{q}$ түрүндөгү кыскарбас бөлчөк көрүнүшүндө жаза алабыз $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. Бул барабардыктын эки жагын тең квадратка көтөрүп $2=\frac{p^2}{q^2}$, (*)

же $p^2=2q^2$ теңдештигине ээ болуп, p нын жуп сан болорун көрөбүз. Андай болсо, p ны жуп сан катарында $p=2n$ деп алууга болот. Бул маанини (*) теңдештигине коюп, $(2n)^2=2q^2$ же $q^2=2n^2$ теңдештигине келебиз. Мындан q да жуп сан экендиги келип чыгат. Демек, алымы жана бөлүмү жуп сандар болгондуктан кыскаруучу бөлчөк келип чыгып, $\sqrt{2}$ саны кыскарбас бөлчөк катарындагы рационалдык сан болот деген болжолубуз туура эмес болот, же $\sqrt{2}$ рационалдык сан боло албайт. Бирок, $\sqrt{2}$ санын жакындаштырып тегеректелген тамырлары рационалдык сандар болуп, улам $\sqrt{2}$ санына умтула жакындап келе берген рационалдык сандардын удаалаштыгын түзүшөт же $\sqrt{2}$ рационалдык сан болбосо да Q көптүгүнө пределдик чекит болот.

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41423,\ 1{,}414235,\ \ldots \to \sqrt{2} \text{ же } \sqrt{2}\approx 1{,}414235\ldots \ . \ \triangleleft$$

Сан огунда рационалдык сандар менен сүрөттөлбөгөн, $\sqrt{2}$ санына туура келген чекиттер сыяктуу чексиз көп чекиттер бар. Мындай чекиттерге туура келген жаңы сан - моделдерди иррационалдык (бөлчөк эмес) сандар деп атап, алардын көптүгүн J тамгасы менен белгилейбиз. Иррационалдык сандар рационалдык сандардын мейкиндигине пределдик чекиттер болушат, анткени ар бир иррационалдык сандын чексиз кичине ε - чеке белинде чексиз көп рационалдык сандар жайгашкан. Жогоруда $\sqrt{2}$ иррационалдык санына, анын тегеректелген

тамырларынын маанилери болушкан рационалдык сандардын удаалаштыгы жыйналарын сөз кылдык. Ошентип Q мейкиндиги өзүнүн бардык рационалдык пределдик чекиттерин толук кармап турганы менен, чексиз көп иррационалдык пределдик чекиттерин кармап тура албаган толук эмес мейкиндик болот.

N, Z, Q көптүктөрүнөн айырмаланып, J көптүгүндө саноого мүмкүн эмес деңгээлдеги көп элементтери бар болуп, санактык эмес көптүктү түзөт. Иррационалдык сандардын көптүгүнүн кубаты же элементтеринин саны $\mu(J) > a$ болуп, аны $\mu(J) = c$ көрүнүшүндө белгилеп, континуум кубаты деп айтабыз.

Рационалдык жана иррационалдык сандарды айырмалап таануу үчүн, аларды ондук бөлчөк көрүнүшүндө жазуу эрежелерин көрсөтөбүз.

1.1.10 Аныктама. *Бөлүмү 10 санынын бүтүн даражаларынан турган бөлчөк санды ондук бөлчөк деп айтабыз.*

Каалаган эле a бүтүн санын $\frac{a}{1} = \frac{a}{10^0} = a, 0$ ондук бөлчөгү деп түшүнүүгө болот. $\frac{p}{q}$ көрүнүшүндөгү бөлчөк санды ондук бөлчөк көрүнүшүндө жазалы:

$\frac{5724176}{10000} = 572 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{6}{10^4} = 572,4176$ ондук бөлчөгү, ал эми

$\frac{28}{5} = \frac{28 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{56}{10} = 5,6 = 5 + \frac{6}{10}$, $\frac{59}{40} = \frac{59 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{59 \cdot 25}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{1475}{1000} = 1,475 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}$

ондук бөлчөктөрү деп түшүнүүгө болот. $\frac{p}{q}$ бөлчөк санын ондук бөлчөк түрүндө жазуу үчүн p ны q га бөлүү эрежеси колдонулуп, үтүрдүн сол жагында бүтүн бөлүгү, оң жагында бөлчөк бөлүгү көрсөтүлөт. Эгерде бөлчөктүн бөлүмү q саны 2, 5 сандарынан башка жок дегенде бир жөнөкөй бөлүүчүнү кармап турса, анда p ны q га бөлүү процесси бүтпөстөн, чексизге чейин улана берет.

Мисалы. $\frac{965}{132}$ санында $q = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ бөлүмү 2 санынан башка 3, 11 деген эки жөнөкөй бөлүүчүлөрү бар, ошондуктан бөлүү эрежесин аткарганда $\frac{965}{132} = 7{,}310606...$ тийиндисинде 0, 6 цифралары чексизге чейин улам кайталана берет, аларды ондук бөлчөктүн мезгили деп, мезгилин (06) көрүнүшүндө кашаанын ичине жазып көрсөтөбүз: $\frac{965}{132} = 7,\ 31\,(06)$.

Терс рационалдык сандар да ушундай эле тартипте жазылып, алдына « - » белгиси коюлат. Ошентип каалаган рационалдык сан чектүү ондук же мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк көрүнүшүндө жазылат.

Иррационалдык сандар мезгилсиз чексиз ондук бөлчөк көрүнүшүндө гана жазылышат. Арифметикалык амалдарды аткарууда иррационалдык сандын ордуна тегеректеп алынган рационалдык сандарды колдонобуз. Мисалы, $\sqrt{2}$ иррационалдык санынын ордуна анын тегеректелген мааниси 1,41 рационалдык санын, ал эми π иррационалдык санынын ордуна ага жакындаштырылган 3,14 рационалдык санын алууга болот. Кээде иррационалдык санды тегеректебей эле π , e , ж.б. сыяктуу тамгалар менен белгилеп, иррационалдык сандарды логарифмдөө, тригонометриялык эсептөө, тамыр чыгаруу амалдарында тамга көрүнүшүндөгү сандар катарында жазышат. Мисалы тегеректин аянтынын формуласында $S = \pi R^2$, айлананын узундугунда $C = 2\pi R$, негизи e саны болгон логарифмде $Ln\ x$ ж.б.у.с.

1.1.11 Аныктама. *Бардык рационалдык жана иррационалдык сандардын көптүктөрүнүн биригүүсү чыныгы сандардын көптүгү деп аталып,* R *тамгасы менен белгиленет.*

R көптүгү аралык эрежесине карата толук мейкиндик болот, б.а. өзүнүн бардык пределдик чекиттерин кармап турат. Демек, $Q \cup J = R$ жана $N \subset Z \subset Q \subset R,\ \ J \subset R$ деп түшүнүүгө болот. Ошентип R чыныгы сандарынын көптүгүнөн J иррационалдык сандарын чыгарып салсак, Q рационалдык сандарынын көптүгү келип чыгат, б. а. $R \setminus J = Q$ жана R ден Q ну чыгарып салсак, J ны алабыз $R \setminus Q = J$. R көптүгүнүн элементтеринин саны же кубаты, теориялык жактан J көптүгүнө тең

деп эсептелип, $\mu(R)=\mu(J)=c$ континуум кубатына ээ болот же $a+c=c$ деп эсептейбиз.

R чыныгы сандарынын мейкиндиги кандай артыкчылыктарга ээ экендигин санап өтөлү:

1. Сан огунда Q сандары менен белгиленген чекиттер канчалык тыгыз жайланышса да, арасында рационалдык сандар менен белгиленбеген бош чекиттер калып кетип, туташ сызыкты түзбөстөн жылчыктуу сызыкты түзөт. Ошондуктан рационалдык сандардын өздөрү гана жайгашкан кесиндинин узундугун так ченөө мүмкүн эмес, анткени бош жылчыктар аралыкка кирбей калат. Чыныгы сандарды пайдалануда мындай кемчилдик жок, анткени сан огунда чыныгы сан менен белгиленбеген бир да чекит калган эмес, б. а. сан огундагы бардык чекиттер менен R чыныгы сандарынын ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулуп, R сандары үзгүлтүксүз сызык же көптүк катарында сүрөттөлүп, ченөө иштерин толук жүргүзүүгө кудурети жетет. Ошондуктан Q ну ченелбөөчү, ал эми R ди ченелүүчү көптүк дейбиз. Чыныгы сандар менен белгиленген сызык бойлой жайгашкан кубулуштарды чекиттер деп ойлоп, үзгүлтүксүз реалдуу абалдагы өзгөрүүлөрүн ченеп баалап үйрөнө алабыз.

2. Ар бир чыныгы сан пределдик чекит болуп, R көптүгү бардык пределдик чекиттерин өзүндө кармап тура алат, б.а. аралык эрежесине карата толук мейкиндик болот. Аралык эрежеси боюнча чекиттердин кыймылдоо механизмин түшүндүргөн предел аппараты үзгүлтүксүз жүрүп, ар бир чекитке тийип аралап өтөт деп эсептейбиз.

3. Сан көптүктөрүнүн ичинен чыныгы сандар эң көп элементтүү же чоң кубатка ээ болгон көптүк болот: $\mu(Q)=a,\quad \mu(R)=c$ жана $c>a$. Ааламдын түзүлүү тартиби татаал жана табышмактуу, анын кичинекей эле бөлүгүндө чексиз көп континуум кубатына ээ сандагы бөлүкчөлөр жайгашкандыктан, ааламдын сандык моделдеринин бири катарында түзүлгөн R мейкиндигиндеги ар бир сегментте же интервалда континуум кубатындагы санда чекиттер бар. $\mu([a;b])=\mu((a;b))=\mu([c,d])=\mu(R)=c$, б.а. R мейкиндиги өзүндө кармалып турган бардык аралыктарга эквиваленттүү жана бардык аралыктар да бири – бирине эквиваленттүү болушат.

Ошентип чыныгы сандар 1.1.5 – аныктамасындагы аралыкты ченөө эрежесине (метрикага) карата бир ченемдүү мейкиндикти түзүп, кыялыбызда гана жашаган символдор же белгилер болгонуна карабастан ааламдын түзүлүшүнө окшоштурулуп түзүлүп, адамдын таануу процессинде негизги математикалык аппарат же каражат катары кызмат кылат. Мындан ары атайын эскертүүсүз сөз кылынган сандардын баарын чыныгы сандар деп түшүнөбүз. Айрым учурларда чыныгы сандарды алгебралык, трансценденттик деп бөлүп айтышат, анын мааниси төмөндөгүчө: Коэффициенттери бүтүн сандар болгон

$$\mathrm{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\ \ x\in R\ ,\ n\in N,\ a_i\in Z\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\ )$$

сыяктуу көп мүчөлөргө карата түзүлгөн $n-$ тартиптеги P(x) = 0 теңдемесине чечимдер болушкан чыныгы сандарды алгебралык сандар, ал эми бир да мындай теңдемелерге чечим боло албаган чыныгы сандарды трансценденттик сандар деп айтабыз. Мисалы x = 3 саны алгебралык сан, анткени ал экинчи тартиптеги бүтүн коэффициенттүү көп мүчөгө карата түзүлгөн $x^2-9=0$ теңдемесине чечим болот. $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}$ чыныгы сандары да алгебралык сандар болушат, себеби $2x^2-x-1=0$ бүтүн коэффициенттүү экинчи даражадагы теңдеменин чечимдери болушат. $\sqrt{2}$ - иррационалдык саны да $x^2-2=0$ бүтүн коэффициенттүү теңдемеге чечим болгондуктан, алгебралык сан болот. Демек, иррационалдык сандардын арасында алгебралык жана трансценденттик сандар кездеше берет. Коэффициенттери бүтүн сандар болушкан теңдемелердин саны санактык сандан ашпагандыктан, алардын чечимдеринин көптүгү болгон алгебралык сандар да санактык көптүк болот. Ал эми трансценденттик сандар эбегейсиз көп болуп, континуум кубатына ээ. Практикалык колдонуу ыңгайына жараша айрым трансценденттик сандарды тамгалардын же символдордун жардамы менен жазабыз: $e,\pi,\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,\ \ldots$.

Бардык трансценденттик сандар иррационалдык сандар болгону менен, тескерисинче бардык иррационалдык сандар трансценденттик боло беришпейт. Трансценденттик деген сөз латындардын «transcendens» сөзүнөн алынып, «чектен чыгуу» деген маанини билдирет.