2 – лекция:

Удаалаштыктардын пределин табуу ыкмалары

Табыятта болуп жаткан айрым кубулуштар жана окуялар сан удаалаштыктарына окшош кыймылдуу абалдарды башынан кечирип, пределдик бүтүү чекитине келип токтойт. Ошондой эле чыныгы сандарга окшотуп, чөйрөдөгү ар бир атомдук деңгээлдеги майда бөлүкчөнү пределдик чекит деп кароого болот, анткени чөйрөдөгү бөлүкчөлөр да коңшуларын көрсөтүүгө мүмкүн эмес деңгээлде чексиз тыгыз жайгашкан болушат. Таанып билүү процессиндеги удаалаштыктардын өзгөчө ролун эске алып, алардын айрым касиеттерине жана пределин табуу эрежелерине токтолуп өтөбүз.

Сан огундагы кайсы бир $[a;b]$ аралыгында өзгөрүлүүчү x чекиттеринен

$\{x_n\} = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,x_n,\ \ldots$ чексиз удаалаштыгы түзүлүп, x_0 чекитине жакындасын деп ойлойлу. Анын жыйналуу абалын аралыктарды баалоо жолу менен $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon:\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \quad \rho(x_0, x_n) = |x_n - x_0| < \varepsilon$ шартынын аткарылуусуна жараша түшүндүрөбүз. Мындайча айтканда, эркин алынган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына жараша табылган N_ε номерлеринен чоң номерлер менен белгиленген удаалаштыктын чексиз көп x_n мүчөлөрү, x_0 санынан чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланып турушса, же анын чексиз кичине ε – чеке белинде жайгашса, б.а. $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгын x_0 чекитине жыйналат деп айтабыз. Эгерде эркин алынган $\varepsilon > 0$ санына карата айтылган шартты канааттандыруучу N_ε номери табылбаса, анда удаалаштыкты таралуучу дейбиз. Бул учурда x_0 чекитинин чексиз кичине ε – чеке белинде удаалаштыктын чектүү сандагы мүчөлөрү гана жайгашып же бир да мүчөсү жайгашпай, чексиз көп мүчөлөрү чеке белдин сыртында калышат. Бирок, пределдик чекитти же удаалаштыктын пределин табуунун мындай ыкмасы бир топ убарагерчиликти жаратат. Ошондуктан пределди табуунун **алгебралык**

эсептөө ыкмасы түзүлгөн. $\{x_n\}$ удаалаштыгы x_0 чекитине умтулат же жыйналат дегенди

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad n \in N$$

көрүнүшүндө жазып, ага карата:

1^0. Турактууну пределдин сыртына чыгарууга болот

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot x_0;$$

2^0. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ болсо,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 \pm y_0$$ болот;

3^0. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0 \cdot y_0$;

4^0. $y_0 \neq 0$ болгондо

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{x_0}{y_0}$ эсептөө эрежелерин кабыл алабыз. Бул эрежелер аркылуу пределди эсептөөдө бардык алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдү ыңгайына карата пайдалана берүүгө болот.

Удаалаштыктардын пределинин мааниси чектүү сан, нөл же чексиз сан болушу мүмкүн. Айрым удаалаштыктардын предели таптакыр жашабайт же аныктоого мүмкүн эмес болуп, мүчөлөрүн коюуланышын көрсөтө албайбыз.

1.1.12 Аныктама. *Нөл пределине ээ болгондо $\{x_n\}$ удаалаштыгы чексиз кичине чоңдук же чексиз кичине (ЧК) деп аталып, « ∞ » пределине ээ болгондо чексиз чоң чоңдук же чексиз чоң (ЧЧ) деп аталат.*

Демек, «ЧК» учурунда удаалаштыктын чексиз көп мүчөлөрү кайсы бир N_ε номеринен баштап 0 санынын чексиз кичине ε - аймакчасында болуп, чектүү сандагы алгачкы мүчөлөрү гана бул аймакчанын сыртында калышы мүмкүн. «ЧЧ» учурунда удаалаштыктын чексиз көп мүчөлөрү N_E номеринен баштап эбегейсиз чоң деп эсептелген Е оң санынан чоң болуп, $|x_n| > E \quad (n > N_E)$ барабарсыздыгын канааттандырып, чектүү сандагы алгачкы мүчөлөрү гана андан кичине боло алат.

Чексиз кичине чоңдуктарды жалпы $\{x_n\}$ удаалаштыктарынан айырмалап, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \ldots$ сыяктуу тамгалар менен белгилейбиз. Ошентип, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ пределине ээ болсо $x_n = x_0 + \alpha_n$ болуп, удаалаштыктын $n > N_\varepsilon$ номерлери менен белгиленген мүчөлөрү x_0 пределинен чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланганын билдирет. Чексиз кичине чоңдуктарды чектүү a санына көбөйтсөк да чексиз кичине чоңдук бойдон кала берет. Ошондой эле чектүү сандагы чексиз кичине чоңдуктардын суммасы да чексиз кичине чоңдук болот.

Чексиз чоң чоңдуктарда удаалаштыктын алгачкы мүчөлөрү анчалык чоң болбосо да, кайсы бир N_E номеринен баштап $x_n > E$ же $x_n < -E$ (Е эбегейсиз чоң оң сан) шарты аткарылат. Бул учурларда удаалаштыктын предели "$+\infty$" же "$-\infty$" болот деп айтып, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ же $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ көрүнүшүндө жазабыз. Жалпы учурда чексиз чоң чоңдукту $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ деп түшүнүүгө болот. Чоң чоңдуктарды чектүү a санына көбөйтүүдөн жана чектүү сандагы чоң чоңдуктарды суммалоодон анын чоңдугу бузулбайт.

Чексиз кичине жана чоң чоңдуктардын 0 жана ∞ сандарына жакындоо ылдамдыктары ар кандай болуп, жыйынтыгында бирөө ылдам экинчиси жайыраак болсо да пределдик маанисине жетишет. Чексиз кичине жана чоң чоңдуктар өз ара тескери

$$чон = \frac{1}{кичине}, \qquad кичине = \frac{1}{чон}$$ байланышта болушат.

Пределди алгебралык эрежелер менен эсептөөдө (a чектүү сан болгондо)

$\frac{a}{\infty}=0,\quad a\cdot\infty=\infty,\quad \frac{\infty}{a}=\infty,\quad \frac{a}{0}=\infty,\quad a^{\infty}=\infty\quad (a\neq 1),\quad \frac{0}{\infty}=0,\quad \frac{\infty}{0}=\infty$ деп алынганына карабастан, $"\frac{0}{0}",\quad "\frac{\infty}{\infty}",\quad "0\cdot\infty",\quad "\infty-\infty",\quad "1^{\infty}",\quad "0^{0}",\quad "\infty^{0}"$ болгон учурларды эсептөөгө мүмкүн эмес - аныксыздыктар деп атайбыз. Аныксыздыктарды пайда кылуучу удаалаштыктардын умтулуу ылдамдыктарына жараша, алгебралык өзгөртүп түзүү менен аныксыздыкты пайда кылуучу удаалаштыктарды жоюштурууга, кыскартып жиберүүгө болот. Мындай учурда аныксыздыкты ачууга болот дейбиз (айрым учурларда аныксыздык бойдон кала берет).

Удаалаштыктардын пределдик чекитке жетүү механизми ырааттуу жүрүш сыяктуу процесс болуп эсептелип, алар чексиз көп чыныгы сандардын арасында жайгашкан удаалаштыктын мүчөлөрү аркылуу, тартибин бузбай натуралдык сандар менен номерленген сандар боюнча секирип олтуруп, пределдик чекитке жетишет.

Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, болуп $x_0 > p$ $(x_0 < p)$ болсо, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгынын мүчөлөрү кайсы бир номерден баштап p санынан чоң (кичине) боло баштайт деп түшүнүү керек (p чектүү сан). Жыйналуучу удаалаштыктын предели бирөө гана болуп, сан огунда пределдик чекитке оң же сол жактардан же эки жактан тең умтулуу болот.

Удаалаштыктын предели жашаганы менен, аны табуу же бар экендигин далилдөө кыйынчылык жараткан учурлар да кездешет. Мындай учурларда удаалаштыктыктарды башка удаалаштыктар менен салыштыруу, мүчөлөрүнүн өсүү же кемүү тартибинде жазылышы, мүчөлөрүнүн өз ара жакын жайгашуусу сыяктуу абалдардын натыйжасында болжол бүтүмдөр чыгарылат.

I. Кошинин болжол бүтүмү (принциби).

Эркин тандалган жетишерлик кичине ε оң санына жараша N_ε номери табылып $n,m > N_\varepsilon$ номерлери үчүн $\rho\,(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$ шарты аткарылса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы сөзсүз жыйналат.

Бул жыйналуучулуктун зарыл жана жетиштүү шарты болуп, $\{x_n\}$ фундаменталдык удаалаштык деп аталат. Демек, жыйналуучу удаалаштыктын мүчөлөрү улам коюуланып олтуруп, кайсы бир N_ε номеринен баштап бири – бирине чексиз жабыша жакындап айырмаланбай турган деңгээлге чейин жетишет.

II. Чектелген удаалаштыктын предели же Больцано – Вейерштрасстын леммасы.

Кайсы бир чектүү $[a;\, b]$ аралыгында жайгашып, мүчөлөрү $a \le x_n \le b$ шартын канааттандырган $\{x_n\}$ удаалаштыгын чектелген удаалаштык деп айтабыз. Мында a - саны удаалаштыктын төмөнкү чеги, b - саны жогорку чеги болушат.

Айрым учурларда удаалаштык жогору же төмөн жагынан гана чектелип, экинчи жагынан чектелбейт. Удаалаштык бир жагынан эле же эки жагынан тең чектелбесе, анда чектелбеген деп аталат. Ар дайым эле чектелген удаалаштыктарды чектүү пределге ээ болот деп айтууга болбойт, бирок алардын мүчөлөрүнүн арасынан тандап терип алып, жыйналуучу удаалаштыктарды түзүүгө же бөлүп алууга болот.

***Лемма**. Каалагандай чектелген удаалаштыктын мүчөлөрүнүн арасынан терип алып, сөзсүз чектүү пределге ээ болуучу курама удаалаштыктарды түзүүгө болот. Курама удаалаштыктардын пределдеринин эң чоңу «жогорку предел» $\overline{\lim} x_n$, эң кичинеси «төмөнкү предел» $\underline{\lim} x_n$ деп аталышат. Жыйналуучу удаалаштыктарда жогорку жана төмөнкү пределдер дал келишип, удаалаштыктын пределине барабар болушат, б.а.* $\overline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

Айрым адабияттарда бул лемма Больцано – Кошинин аты менен берилген.

III. Монотондуу удаалаштыктын пределі же Вейерштрасстын теоремасы.

Эгерде $\{x_n\}$ *удаалаштыгынын мүчөлөрү монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болуп жогору (төмөн) жагынан чектелген болсо, анда ал сөзсүз жыйналуучу удаалаштык болуп, чектүү пределге ээ болот.*

IV. Салыштыруу ыкмалары.

а) Берилген $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ удаалаштыктарынын мүчөлөрү кайсы бир номерден баштап $\forall n \in N$ үчүн $x_n \le y_n$ шартын канааттандырса, анда $\{y_n\}$ удаалаштыгынын жыйналуучу болушунан, андан кичине болгон $\{x_n\}$ удаалаштыгынын да жыйналуучулугу келип чыгат. Тескерисинче, $\{x_n\}$ удаалаштыгы таралуучу болсо, андан чоң болгон $\{y_n\}$ удаалаштыгы да таралуучу болот.

б) Эгерде $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удаалаштыктарынын мүчөлөрү кайсы бир орундан баштап $\forall n \in \mathrm{N}$ үчүн $x_n \le y_n \le z_n$ шартын канаатандырышса жана $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ удаалаштыктары жыйналуучу болуп жалпы бир c пределине ээ болушса, анда мүчөлөрү экөөнүн арасында жайгашкан $\{y_n\}$ удаалаштыгы да жыйналуучу болуп, ошол эле c пределине ээ болот же

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c .$$

Удаалаштыктын пределинин маанисин билбей туруп, анын жыйналуучу экендигин болжолдоп билүүнүн жогорудагы ыкмаларына мисал катарында, “экинчи сонун предел” деп аталуучу $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ удаалаштыгынын жыйналуучу экендигин далилдөөнү көрсөтөлү.

1.1.6 е - саны

Монотондуу удаалаштыктын пределі жөнүндөгү Вейерштрасстын теоремасын жана салыштыруу ыкмасын пайдаланып, **экинчи сонун предел** деп аталып, кеңири колдонулган $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ формуласын келтирип чыгарабыз.

▷ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ удаалаштыгын n ге натуралдык 1, 2, 3, … , n , … маанилерди берүү менен $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$ көрүнүшүндө жазалы. Анын мүчөлөрүн эсептеп, салыштырып көрүп улам монотондуу (ырааттуу) өсүүчү экенин байкайбыз, бирок жалпы учурда $x_n < x_{n+1}$ болооруна ишенүү үчүн Ньютондун биномун пайдаланып, удаалаштыктын жалпы x_n мүчөсүн n - даражага көтөрөбүз:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2\ 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+ C_n^3 1^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + C_n^k 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + C_n^n 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots$$

$$+ \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

n - номерден $(n+1)$ - номерге өтүп, x_{n+1} - мүчөсүн Ньютондун биному менен ($n+1$) - даражага көтөрүп ажыратсак, (1) сыяктуу оң сандардын суммасы келип чыгып, кашаалардагы $\left(1-\frac{s}{n}\right)$ оң сандарынын ордуна алардан чоңураак $\left(1-\frac{s}{n+1}\right)$ оң сандары жазылат $(s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n-1)$. Себеби экинчисинде 1 ден кичинерээк сан кемитилип

жатат. Мындан сырткары (1) де n кошулуучу болсо, кийинки ажыратууда $n+1$ кошулуучу болот. Натыйжада бардык кошулуучулар чоңойот жана дагы бир оң кошулуучу кошулат. Чынында эле

$\frac{s}{n} > \frac{s}{n+1}$ болгондуктан, 1 ден чоң сан кемитилгендиктен

$\left(1-\frac{s}{n}\right) < \left(1-\frac{s}{n+1}\right)$ барабарсыздыгы орун алат. Демек $x_{n+1} > x_n$ же удаалаштык монотондуу өсүүчү болот.

Берилген удаалаштыктын жогору жагынан чектелген экендигин көрсөтөлү. Ал үчүн (1) кошулуучулардын ар бириндеги $\left(1-\frac{s}{n}\right)$ сыяктуу кашааларда турган, бирден кичине болгон көбөйтүүчүлөрдү таштап жиберип, математикалык индукция усулу менен далилденген, бардык $n > 4$, $n \in N$ сандары үчүн туура деп эсептелген $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^n}$ барабарсыздыгын эске алып,

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Акыркы сумма экинчи кошулуучудан баштап $q = \frac{1}{2}$, $в_1 = \frac{1}{2}$ болгон геометриялык прогрессияны түзгөндүктөн, алгачкы n мүчөсүнүн суммасынын формуласы боюнча $S_n = \frac{в_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ээ болуп, $x_n < 2 + 1 - \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3$ натыйжасына келебиз. Демек, $\forall n \in N$ үчүн $x_n < 3$ же $\{x_n\}$ удаалаштыгы жогору жагынан чектелген. Андай болсо, Вейерштрасстын бүтүмү боюнча анын чектүү предели сөзсүз жашайт деген тыянак чыгарабыз. Ал предел ($2 < x_n < 3, \forall n \in N$) эки менен үч сандарынын арасында жайгашканы белгилүү болгону менен, анын так маанисин жакындаштырып гана таба алабыз. Бул пределдин сандык

мааниси Эйлердин урматына e тамгасы менен белгиленип, $e = 2,718281828459045...$ иррационалдык саны болот.

Ошентип $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ формуласы "1^∞" аныксыздыгын ачууда колдонулуп, «экинчи сонун предел» деп аталат. Негизи e саны болгон $\log_e x$ натуралдык логарифм деп аталып, $\ln x$ көрүнүшүндө жазылат. Бул пределге «сонун» деген аттын берилиши чектүү сандагы «1» сандарынын көбөйтүндүсү 1 ге барабар болгону менен, 1 санына жетишерлик чексиз жакын жайгашкан сандардын чексиз көбөйтүндүсү бирге жакындабай, андан жетишерлик узактыкта жайгашкан e санына жакындарын көрсөткөндүгү менен байланышкан.◁

Мисалдар.

1. $x_n = \frac{2n-3}{3n}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун «ε-тилинде» жана алгебралык ыкмада далилдеп, монотондуулугун аныктагыла.

Чыгаруу: ▷ $n = 1, 2, 3, \ldots$ маанилерин коюп удаалаштыктын бир канча мүчөлөрүн жазалы:

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \quad \ldots \quad .$$

Жазылган мүчөлөрдү салыштырып, алардын монотондуу өсүүчү экендигин байкайбыз. Бирок, анын бардык мүчөлөрүндө монотондуулук сакталарын билүү үчүн $\forall n:\ x_{n+1} > x_n$ аткарылышын көрсөтүүгө тийишпиз. $x_{n+1} = \frac{2(n+1)-3}{3(n+1)} = \frac{2n-1}{3n+3}$ болгондуктан,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n-1}{3n+3} - \frac{2n-3}{3n} = \frac{6n^2 - 3n - 6n^2 + 9n - 6n + 9}{(3n+3)-3n} = \frac{9}{9n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

келип чыгат $(n \in N)$. Мындан $\forall n \in N:\ x_{n+1} > x_n$ болуп, удаалаштыктын мүчөлөрү монотондуу өсүүчү болору белгилүү болот.

Удаалаштыктын чектүү $x_0 = \frac{2}{3}$ пределине ээ болорун эки ыкмада көрсөтөлү:

а) «ε - тилинде» же аралык чендерин салыштыруу ыкмасында :

Эркин тандалган $\varepsilon > 0$ снын алып,

$\rho(x_n, x_0) = |x_n - x_0| = \left|\frac{2n-3}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n-3-2n}{3n}\right| = \left|\frac{-3}{3n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ шарты кайсы N_ε номери менен белгиленген мүчөдөн кийинки бардык x_n мүчөлөрү $(n > N_\varepsilon)$ үчүн аткарыларын көрсөтөлү. Акыркы барабарсыздыктан $n > \frac{1}{\varepsilon}$ келип чыгып, N_ε деп $\frac{1}{\varepsilon}$ санын бүтүн бөлүгүн алууга болорун байкайбыз. Аны $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - “бүтүн бөлүгү” деп белгилейбиз. Эгерде $\varepsilon = 0{,}03$ маанисин алсак, $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{0{,}03}\right] = \left[\frac{100}{3}\right] = [33{,}33(3)] = 33$ болуп, x_{33} - мүчөсү $x_0 = \frac{2}{3}$ санынын $\omega_\varepsilon(x_0)$ аймакчасынын чек арасында, алгачкы 32 мүчөсү аймакчанын сыртында, ал эми калган x_{34}, x_{35}, ... сыяктуу чексиз көп мүчөлөрү аймакчанын ичинде жайгашып, $x_0 = \frac{2}{3}$ санынын пределдик чекит болорун далилдейт.

б) Алгебралык ыкма:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{3\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3} = \frac{2-\frac{3}{\infty}}{3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}.$$

Удаалаштыктын мүчөлөрү $x_0 = \frac{2}{3}$ пределдик чекитине сол жактан жакындап келип, $\forall n \in N:\ -\frac{1}{3} \le x_n \le \frac{2}{3}$ аралыгында чектелген болот.◁

2. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун изилдегиле.

Изилдөө: ▷ Удаалаштыктын бир канча мүчөлөрүн жазуудан кийин $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots,$ жуп орундагы мүчөлөрү өсүп, так орундагы мүчөлөрү кемип барарын байкайбыз. Жалпы учурда аны

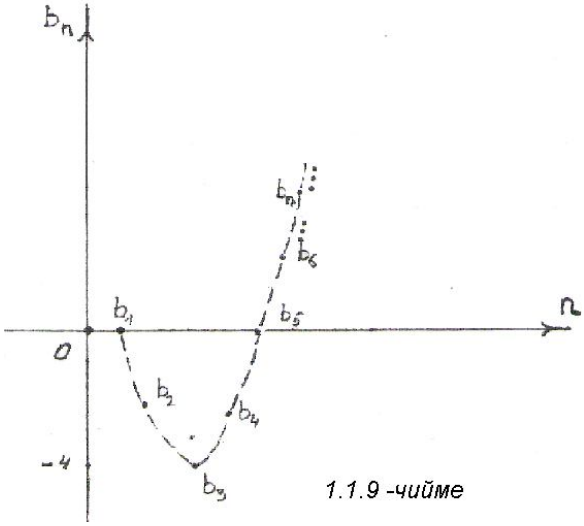
монотондуу өсүүчү же кемүүчү удаалаштык деп айта албайбыз. Бирок, $|a_n| = \frac{1}{n}$ абсолюттук чоңдуктарын карасак, $\{|a_n|\}$ удаалаштыгы $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ монотондуу кемүүчү болот. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ удаалаштыгы $x_0 = 0$ чектүү пределине ээ болуп, ага жуп мүчөлөрү сол жагынан, так мүчөлөрү оң жагынан жакындап келет *(1.1.8 -чийме).*

1.1.8 -чийме

Эркин алынган $\varepsilon > 0$ санына жараша

$$\rho(a_n, 0) = |a_n - 0| = |a_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

шартын канааттандыруучу n номерлеринин эң кичинеси болгон $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ номери ар дайым табылгандыктан, $x_0 = 0$ пределдик чекит болот. Удаалаштык чектелген, б.а.



1.1.9 -чийме

$\forall n \in N: \ -\frac{1}{2} \le x_n \le 1.$ ◁

3. $в_n = n^2 - 6n + 5$ удаалаштыгын изилдегиле.

Изилдөө: ▷ Удаалаштыктын мүчөлөрүн жазып

$0, -3, -4, -3, 0, 5, \ldots, n^2 - 6n + 5, \ldots$

анын мүчөлөрүнүн монотондуу өсүүсү же кемүүсү жөнүндө сөз кыла албайбыз. Бирок, анын графигин тургузуп, $n \ge 3$ болгондон баштап монотондуу өсүүчү болуп, төмөн жагынан - 4 чекити менен чектелген,

жогору жагынан чектелбеген удаалаштык болорун көрөбүз *(1.1.9 - чийме).* Демек, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-6n+5)=+\infty$. ◁

4. $y_n=\sin\frac{\pi}{2}n$ удаалаштыгын изилдегиле.

Изилдөө: ▷ Удаалаштыктын бир канча мүчөлөрүн жазып көрүп,

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ ...,\ \sin\frac{\pi}{2}n,...,$ анын мүчөлөрү бири – биринен обочо жайгашып, жакындашпаганын байкайбыз.

Эркин алынган $\varepsilon>0$ саны бирден чоң тандалса, анда пределдик чекит деп болжолдонгон x_0 чекитинин ε- аймакчасында экиден ашык удаалаштыктын мүчөлөрү жайгашпайт. Демек, ал $\forall n\in N:\quad -1\le x_n\le 1$ аралыгында чектелген удаалаштык болгонуна карабастан, таралуучу удаалаштык болот. Бирок, Больцано – Кошинин леммасына ылайык анын мүчөлөрүнөн терип алып,

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad ...,\quad 1,\quad ...\ \to 1,$$

$$0,\quad 0,\quad 0,\quad ...,\quad 0,\quad ...\ \to 0,$$

$-1,\ -1,\ -1,\ ...,\ -1,\ ...\ \to -1$ жыйналуучу курама удаалаштыктарын түзүүгө болот. Бул учурда берилген удаалаштыктын предели жашабаганы менен жогорку жана төмөнкү пределдери жашайт:

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\sin\frac{\pi}{2}n\right)=-1$ – төмөнкү предели, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\sin\frac{\pi}{2}n\right)=1$ – жогорку предели. ◁

5. $z_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n$ пределин тапкыла.

Чыгаруу: Бул удаалаштыкты $x_n=\frac{1}{n}$ удаалаштыгы менен салыштырып, $|z_n|=\left|\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2}n\right|=\left|\frac{1}{n}\right|\cdot\left|\sin\frac{\pi}{2}n\right|\le\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}=x_n$ ээ болобуз. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ болгондуктан, андан кичине удаалаштык $0\le|z_n|\le|x_n|$

шартына баш ийгендиктен салыштыруу эрежесине таянып, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right)=0$ деп түшүнөбүз. Бул учурда удаалаштыктын айрым мүчөлөрү пределдик $x_0=0$ чекитине сол жактан, айрымдары оң жактан жакындап барат.◁

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\cos n}{n}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу: ▷ Кошумча чексиз кичине $\alpha_n=\frac{\cos n}{n}\to 0$ удаалаштыгын алып, берилген удаалаштыкты $y_n=\frac{n+\cos n}{n}=1+\frac{\cos n}{n}=1+\alpha_n$ көрүнүшүнө келтирели. (Мында $|\alpha_n|=\left|\frac{\cos n}{n}\right|\le\frac{1}{n}$ жана $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ болгондуктан, α_n чексиз кичине чоңдук болот.)

Удаалаштыктын предели $x_0=1$ саны, анын мүчөлөрүнөн кайсы бир N_ε номерден баштап чексиз кичинеге гана айырмаланып калгандыктан, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+cos\,n}{n}=1$ болот.◁

7. Пределин тапкыла $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(n^2+2n+1)}{1-n-n^2}$.

Чыгаруу: ▷ Алгебралык усулду колдонуп, предел алдындагы бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн n дин эң чоң даражасына бөлүп жиберсек $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(n^2+2n+1)}{1-n-n^2}=5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}{\frac{1-n-n^2}{n_2}}=5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}-1}=5\cdot\frac{1}{(-1)}=-5$

келип чыгат. ◁

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^n}$ пределин аныктагыла.

Чыгаруу: ▹ Берилген удаалаштыктын $n \geq 15$ болгон номерлер менен белгиленген бардык мүчөлөрү үчүн $\frac{5}{n} \leq \frac{1}{3}$ барабарсыздыгы аткарылгандыктан, жалпы чоң n дер үчүн

$$0 < \left(\frac{5}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ аткарылат.}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{\infty} = 0,$ андай болсо удаалаштыктарды салыштыруу эрежеси боюнча

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)^n = 0$ келип чыгат. ◃

9. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \textit{эгерде } |q| < 1, \\ \infty, & \textit{эгерде } |q| > 1 \end{cases}$ болорун далилдегиле.

Далилдөө. ▹ Башында Бернуллинин барабарсыздыгы деп аталган $(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha \cdot n,\ \alpha \in R \quad \textit{жана}\ \alpha > -1,\quad n \in N \qquad (2)$

барабарсыздыгынын тууралыгын математикалык индукция усулу менен көрсөтөлү.

1. $n = 1$ болсо барабарсыздык
   $(1+\alpha)^1 \geq 1 + \alpha$ же $1 + \alpha \geq 1 + \alpha$ туура болот.

2. $n = k$ болсо (2) аткарылсын деп болжолдойлу
   $(1+\alpha)^k \geq 1 + k\alpha$. (3)

3. (3) барабарсыздыгынын эки жагын тең $1+\alpha$ оң санына көбөйтөлү $(\alpha > -1)$, анда

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+k\alpha)\cdot(1+\alpha) = 1 + 2 + k\alpha + k\alpha^2 = 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1 + (k+1)\alpha$$

келип чыгат, себеби $k\alpha^2$ оң сан жана аны таштап жиберсек сумма кичирейет. Демек, $n = k + 1$ болгон учурда (2) туура болуп, Бернуллинин барабарсыздыгы математикалык индукция методуна ылайык бардык $n \in N$ сандары үчүн аткарылат деп жыйынтыкталат.

Эми эки учурга токтолойлу:

а) $|q|>1$ болсун, аны $|q|=1+h$ $(h>0)$ саны сыяктуу жазып алып, (2) нин негизинде

$|q|^n=(1+h)^n\geq 1+nh$ деп эсептейли. Анда $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ болгондуктан, андан чоң удаалаштык катары $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=\infty$ ал да чексиз чоң чоңдук болот.

б) $|q|<1$ болсун. Эгерде $q=0$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$ болору талашсыз, ал эми $q\neq 0$ болсо $\left|\frac{1}{q}\right|>1$ аткарылып, жогорку учурда айтылгандай $\left\{\frac{1}{q^n}\right\}$ удаалаштыгы чексиз чоң чоңдук болот. Ал эми $\{q^n\}$ удаалаштыгы ага тескери удаалаштык катары чексиз кичине болуп, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ келип чыгат. ◁

10. Пределин тапкыла. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Чыгаруу: ▷ Адегенде кашаанын ичин $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ көрүнүшүндө өзгөртүп жазалы. Анда кошулуучулар жоюшуп, биринчи жана акыркы кошулуучулар гана калаарын байкайбыз.

Демек $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$ ◁