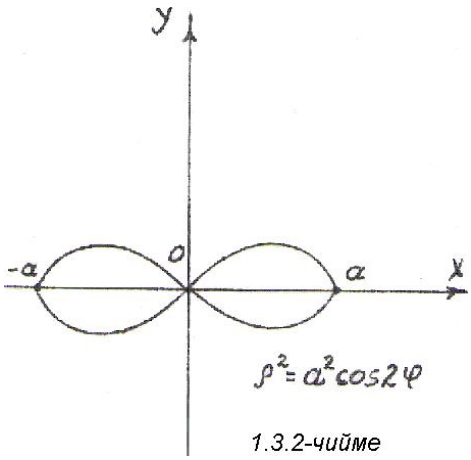
4 –лекция:

Мейкиндик чекиттерин полярдык, цилиндрдик, сфералык координаталар менен даректештирүү

1.3.1 Полярдык координаталар системасы

R^2 тегиздигинде (мейкиндигинде) жайгашкан чекиттерди декарттык координаталар системасы менен катар эле, полярдык координаталар системасында даректештирип таанууга болот. Айталы Oxy декарттык координаталар тегиздигинде $M(x;y)$ чекити берилип, O башталмасынан M чекитине чейинки аралык ρ санына, ал эми $|OM|$ менен Ox координаттык огунун арасындагы оң бурч φ ге тең дейли *(1.3.1 - чийме).* Бул учурда тегиздиктин ар бир $M(x,y)$ чекитине бир гана $(\rho;\varphi)$ түгөй сандары туура келип, иш жүзүндө M чекитин ρ,φ координаталарына ээ деп эсептөөгө болот. Ошентип, тегиздикте жайгашкан M чекитинин дарегин $(x;y)$ декарттык координаталарынан башка, $(\rho;\varphi)$ координаталары менен белгилөө мүмкүнчүлүгү бар. O чекити полярдык координаталар системасынын уюлу, ал эми ρ,φ полярдык координаталар деп аталышат. Мындай ыкмада даректештирүү полярдык координаталар системасы деген атты алып, декарттык координаталар системасы менен



1.3.2-чийме

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

байланышында болот (ΔOMx тик бурчтуу үч бурчтугунан $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$ алынат).

R^2 тегиздигинде жайгашкан бардык чекиттерди полярдык координаталар системасында бир маанилүү жазып көрсөтүү үчүн, φ бурчун $0 \le \varphi \le 360^0 = 2\pi$ аралыгында өзгөрөт деп түшүнүү керек, анткени φ бурчу O полюсунун айланасында эки жолу же андан көп κ жолу айланса, анда бир эле M чекитинин полярдык координаталары төмөндөгүдөй көп мааниде жазылып калат:

$(\rho;\varphi), (\rho;\varphi+2\pi), (\rho;\varphi+4\pi), ..., (\rho;\varphi+2\pi\kappa)$.

Мында k ($\kappa \in Z$) айлануулардын саны ($k>0$ болсо оң жакка, $k<0$ сол жакка айланат). Ошентип бир эле M чекитине ар түрдүү координата - даректер коюлуп, тегиздиктеги чекиттерди бир маанилүү даректештирүү принциби бузулат. Бул учурда полярдык координаталар системасы өз маанисин жоготуп калмак.

(1) байланыш формуласынан чекиттин декарттык жана полярдык координаталарынын арасындагы түрдүү байланыштарды келтирип чыгарууга болот. (1) системасындагы барабардыктардын эки жагын тең квадратка көтөрүп, кошуп

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2$$

же $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ **(2)**

табылат.

Аларды өз ара мүчөлөп бөлүп, $\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = tg\varphi$ же

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} \qquad (3)$$

ээ болобуз.

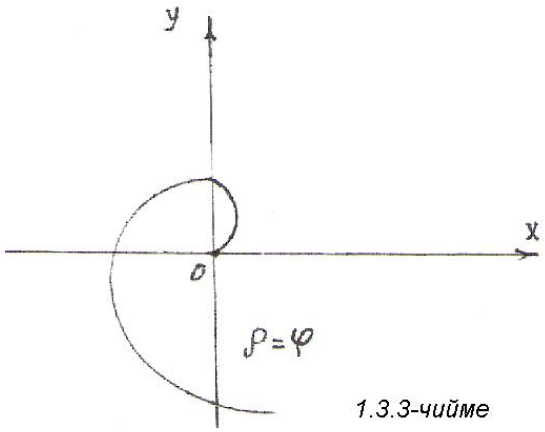
Ошондой эле, ΔOMx тик бурчтуу үч бурчтугунун φ бурчуна карата

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (4)$$

байланыштарына ээ болобуз.

R^2 тегиздигинде жайгашкан айрым фигураларды декарттык координаталар системасында айкын жазып көрсөтүү ыңгайсыз болгон учурларда, эсептөө иштерин жеңилдетүү үчүн полярдык координаталар системасы колдонулат. Мындан сырткары асманда жана деңизде кыймылдаган обьекттерге байкоо жүргүзүү көбүнчө полярдык координаталарда ишке ашырылат.

Мисалдар: 1. Бернуллинин лемнискаты деп аталуучу ийри $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ теңдештиги менен берилип, мындан y өзгөрүлмөсүн x өзгөрүлмөсү аркылуу айкын $y=f(x)$ көрүнүшүндө жазуу кыйынчылыкты туудурат. (1) байланышын пайдаланып, Бернуллинин лемнискатын полярдык координаталар системасында $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ деп жазабыз (1.3.2 – чийме)



1.3.3-чийме

2. Архимеддин спиралы деп аталуучу ийри $x^2+y^2=arctg^2\dfrac{y}{x}$ теңдештигин

канааттандыруучу $(x;y)$ координаталуу чекиттердин геометриялык изи болот (1.3.3-чийме). Архимеддин спиралы полярдык координаталар системасында $\rho=\varphi$ теңдештиги менен жазылып, φ чектелген эмес деп алынат, анткени айлануудан кийин чекиттер кайра мурдагы ордуна кайталанып келбейт.

3. $x^2+y^2=9$ айланасы полярдык координаталар системасында $\rho=3$ теңдемеси менен берилет.

4. Декарттык координаталары менен берилген $M(-1;\ 1)$ чекитин полярдык координаталар системасында жазуу үчүн (2), (4) формулаларды пайдаланабыз:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

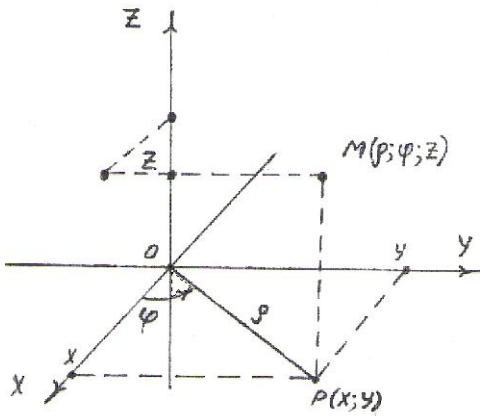
Мындан $\varphi = 135^0$, $\rho = \sqrt{2}$ келип чыгып, берилген чекит полярдык координаталарда $M\left(135^0; \sqrt{2}\right)$ көрүнүшүндө жазыларын көрөбүз.

1.3.2 Цилиндрдик координаталар

R^3 мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди тик бурчтуу декарттык координаталар системасында $M(x;y;z)$ көрүнүшүндө даректештирип жазуу менен, бир эле учурда цилиндрдик деп аталуучу $M(\rho;\varphi;z)$ координаталары аркылуу бир маанилүү даректештирип жазууга болот. Мында ρ, φ деп M чекитинин Oxy тегиздигине түшүрүлгөн проекциясы болгон P чекитинин полярдык координаталары, ал эми z деп M чекитинин декарттык координаталар системасындагы аппликатасы алынат (1.3.4 – чийме). Эгерде M чекити Oxy тегиздигинин жогору жагында болсо, z оң, ал эми төмөн жагында жайгашса, терс сан болот. Ошентип цилиндрдик координаталар $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ аралыктарында өзгөрө алышат. Цилиндрдик координаталар менен декарттык координаталардын арасындагы байланыш

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad (5)$$

формулалары менен ишке ашырылат.



1.3.4-чийме

Мисалы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферасын цлиндрдик координаталарда жазалы. (5) - байланыш формулаларын пайдаланып, сфераны $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + z^2 = R^2$ же $\rho^2 + z^2 = R^2$ же $z^2 = R^2 - \rho^2$

көрүнүшүндө жаза алабыз. Акыркы теңдемени z ке карата чечип, айкын көрүнүштө сферанын Oxy тегиздигинин жогору жагындагы бөлүгүн $z=\sqrt{R^2-\rho^2}$, төмөн жагындагы бөлүгүн $z=-\sqrt{R^2-\rho^2}$ көрүнүштөрүндө жазабыз.

1.3.3 Сфералык координаталар

R^3 мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди сфералык деп аталуучу ($\rho;\varphi;\theta$) координатары менен да тартиптештирип даректештирүүгө болот. Ал үчүн үч ченемдүү тик бурчтуу $Oxyz$ декарттык координаталар системасынын башталмасын - $O(o;o;o)$ уюл катарында тандап, мейкиндикте жайгашкан M чекитинен O уюлуна чейинки аралыкты - ρ, M чекитинин Oxy тегиздигиндеги проекциясы P чекитине карата түзүлгөн $|OP|$ кесиндиси менен Ox огу түзгөн бурчту φ, $|OM|$ кесиндиси менен Oz аппликатасынын арасындагы бурчту θ аркылуу белгилейбиз*(1.3.5-чийме).*

Натыйжада декарттык координаталар системасында $M(x;y;z)$ координаталары менен сүрөттөлгөн чекит, сфералык координаталар менен $M(\rho;\varphi;\theta)$ көрүнүшүндө жазылат. Мейкиндиктин чекиттеринин абалын мындай көрүнүштө даректештирүү, сфералык кординаталар $O\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta<2\pi$ аралыктарында өзгөрүлгөн кезде өз ара бир маанилүү болот, б.а. бир чекитке бир гана сфералык координаталардын үчтүгү тиешелеш болот жана тескерисинче.

Сфералык координаталар менен декарттык координаталардын арасындагы байланыш

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta. \end{cases} \qquad (6)$$

формулалары менен ишке ашырылат.

Мисалы:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферасынын теңдемесин сфералык координаталарда жазалы. (6) байланышын пайдаланып

$$\rho^2 \cos^2\varphi \ \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \ \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta = R^2,$$

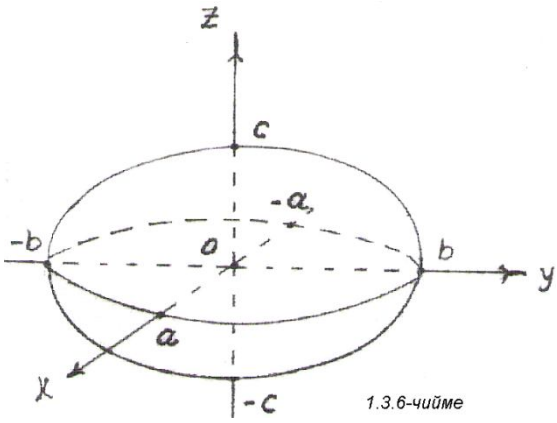
же $\rho^2 \sin^2\theta \ (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^2 \cos^2\theta = R^2$, же $\rho^2 \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta = R^2$, же

$\rho^2 = R^2$, же $\rho = R$ көрүнүшүндөгү сфералык координаталарда жазылган сферанын теңдемесине ээ болобуз.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиддин теңдемеси сфералык координаталарда

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\cdot\cos\theta. \end{cases}$$

көрүнүшүндөгү байланышта жазылат *(1.3.6 - чийме).*



1.3.6-чийме

Эскертүү.

Сан мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди координаталар менен тартиптештирип даректештирүү ыкмасы тик бурчтуу декарттык, полярдык, цилиндрдик, сфералык координаталар системасынан башка ыкмалар менен да жүргүзүлөт. Жаратылыш чөйрөсү учу - кыйыры жок, көз таанымын күчү жетпеген сырларды кармап тургандыктан, болуп жаткан кубулуштарды элестетип моделдерин болжолдоодо, өз ара перпендикуляр болбогон, эркин бурчтуу координаттык октуу системалар, кээде координаттык октордун ордуна координаттык ийрилер болгон координаттык системалар пайдаланылат.