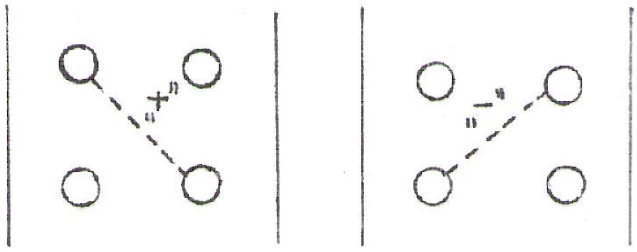
5 – лекция:

Сандарды аныктагыч көрүнүшүндө жазуу

1.5.1 Аныктагыч түшүнүгү

Айрым кубулуштарга байкоо жүргүзүү үчүн бир эле учурда бир канча сандардын тобун колдонуп, алардын маанисин бир чыныгы сан менен белгилөөгө туура келет. Мындай абалда колдонулуучу сан моделдеринин бири аныктагыч деп аталат.



1.5.1-чийме

Айталы $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ чыныгы сандары берилсин. Анда экинчи тартиптеги аныктагыч деп, Δ -“дельта” тамгасы менен белгиленген $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21} = \Delta$ чыныгы санын айтабыз. Бул аныктагычты

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1)$$

көрүнүшүндө жазуу кабыл алынган. Мында $a_{11}(\text{"}a - бир - бир\text{"})$, $a_{12}(\text{"}a - бир - эки\text{"})$, $a_{21}(\text{"}a - эки - бир\text{"})$, $a_{22}(\text{"}a - эки - эки\text{"})$ сандары аныктагычтын элементтери деп аталышып, экинчи тартиптеги аныктагыч эки жолчодон жана эки мамычадан турат деп эсептелет. a_{11}, a_{12} жана a_{21}, a_{22} түгөй сандары жолчолорду, ал эми a_{11}, a_{21} жана a_{12}, a_{22} түгөй сандары мамычаларды түзүшөт. Аныктагычтын элементтеринин жазылышында катышкан индекстердин биринчиси жолчонун, экинчиси мамычынын ордун көрсөтөт, б.а. a_{21}- деп экинчи жолчо менен биринчи мамычанын кесилишиндеги элемент белгиленет. a_{11}, a_{22} түгөй сандары аныктагычтын оң белгидеги башкы диагоналы, ал эми a_{12}, a_{21} түгөй сандары терс белгидеги башкы диагоналы деп аталышып, аныктагычты эсептөөнүн (1) эрежесинде оң башкы

диагоналдын элементтеринин көбөйтүндүсүнөн терс башкы диагоналдын элементтеринин көбөйтүндүсү кемитилет. Эсептөө эрежеси 1.5.1 - чиймедеги схемада көрсөтүлгөн.

Аныктагычтын жолчолору менен мамычаларынын саны дайыма барабар болушуп, аныктагычтын тартибин көрсөтөт. Үчүнчү тартиптеги аныктагыч үч жолчодон жана үч мамычадан туруп,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

көрүнүшүндө жазылат. Жалпы учурда n - тартиптеги аныктагыч n жолчодон жана n мамычадан туруп,

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \downarrow \text{ j-}\textit{мамыча} \\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2j} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ij} & \dots a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nj} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \quad i - \textit{жолчо} \qquad (3)$$

көрүнүшүндө жазылат. Ошентип аныктагыч көптөгөн элементтерден тургандыгына карабастан, бир гана Δ чыныгы санынын аныктагыч көрүнүшүндө белгиленип жазылуусу болуп эсептелет. Аныктагычтын элементтеринин жайгашуу тартиптери i, j индекстери аркылуу иреттелип, a_{ij} элементи анын i - жолчосу менен j - мамычасынын кесилишинде жайгашкан элемент болот. Жазылган аныктагычтардын кандай Δ чыныгы санын билдире турганын билүү максатында, жалпы аныктагычтардын көптүгүндө айрым амалдарды жана эреже - касиеттерди ойлоп таап киргизебиз:

1 ^{0} - эреже. Аныктагычтын бардык жолчолорун ошол эле номердеги бардык мамычалары менен тартибин бузбай орундарын алмаштырып жазуудан, аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөйт:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

2 ^{0} - эреже. Аныктагычтын каалаган эки жолчосунун (же эки мамычасынын) орундарын алмаштырып жазууда анын сандык мааниси карама - каршы белгиге өзгөрөт:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -\Delta .$$

3 ^{0}- эреже. Аныктагычтын кайсы бир жолчосунун (мамычасынын) бардык элементтеринин жалпы көбөйтүүчүсүн аныктагычтын сыртына чыгарып, аныктагычка көбөйтүндү катарында эсептөөгө болот:

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{21} & a_{31} \\ a_{21} & k\,a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k\,a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \Delta.$$

4 ^{0} - эреже. Эгерде аныктагычтын эки жолчосундагы (эки мамычасындагы) тиешелеш элементтер окшош (бирдей) сандар болушса, анда аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болот.

5 ^{0}- эреже. Эгерде аныктагычтын кайсы бир жолчосу (мамычасы) жалаң нөл элементтеринен гана турса, анда аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болот.

6 ^{0} - эреже. Эгерде аныктагычтын эки жолчосунун (эки мамычасынын) тиешелүү элементтери пропорциялаш болушса, анда аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар. Бул учурда, мындай жолчолор (мамычалар) бири - биринин сызыктуу комбинациялары болушат.

7 ^{0} - эреже. Эгерде аныктагычтын кайсы бир жолчосунун (мамычасынын) бардык элементтерин эки кошулуучулардын суммасы түрүндө ажыратып жазууга мүмкүн болсо, анда берилген аныктагычты эки аныктагычтын суммасы түрүндө жазууга мүмкүн. Бул аныктагычтар

бир жолчосу (мамычасы) менен гана айырмаланышат, б.а. биринчи аныктагычтын сөз кылынган жолчосунда (мамычасында) биринчи кошулуучулар, ал эми экинчи аныктагычтын сөз кылынган жолчосунда (мамычасында) экинчи кошулуучулар жайгашып, калган жолчолордо (мамычаларда) элементтер өзгөрүүсүз кала берет.

Мисалы:

$$c+d-5(a+b)=\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 5 & c+d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a \\ 5 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & b \\ 5 & d \end{vmatrix}=c-5a+d-5b=c+d-5\,(a+b)$$

эки аныктагычтын суммасы катарында жазылат.

8^0- эреже. Аныктагычтын кайсы бир жолчосунун (мамычасынын) элементтерине экинчи бир жолчонун (мамычанын) тиешелүү элементерин λ санына $(\lambda \neq 0)$ көбөйтүп, кошуп жазуудан аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөйт.

1.5.2 Аныктагычты эсептөө эрежелери

Аныктагычтарды эсептөө деп анын сандык маанисин табууну түшүнөбүз, ошондуктан сөз кылынган эреже - касиеттерге таянып эсептөө эрежеси ойлонулуп табылган. Экинчи тартиптеги аныктагычты эсептөө эрежеси (1) формуласы менен аныкталып, ал жалпы n - тартиптеги аныктагычтарды эсептөө же сандык маанисин табуу эрежесине жалпыланат. Аныктагыч көрүнүшүндөгү сандын моделин түзүүдө, анын элементтеринин индекстериндеги бир маанилүү инверсиялардын санына жараша, аныктагычтын сандык маанисин аныктоо эрежеси же амалы кошо ойлонулган. Бул эрежеге ылайык, ар бир аныктагычка бир гана чыныгы сан тиешелеш коюлат жана тескерисинче. Ал үчүн аныктагычтын элементинин минору жана алгебралык толуктоочу деген түшүнүктөрдү киргизебиз.

1.5.1 Аныктама. *Δ аныктагычынын a_{ij} элементинин M_{ij} минору деп, берилген Δ аныктагычынан i - жолчосу менен j - мамычасын сызып салгандан кийин келип чыккан аныктагычты айтабыз.*

Ошентип M_{ij} минору берилген Δ аныктагычына караганда бир жолчого жана мамычага кемип, Δ аныктагычына караганда тартиби бирге төмөндөгөн аныктагыч болот.

Мисалы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ үчүнчү тартиптеги аныктагычтын $a_{21} = -1$ элементинин минору $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ экинчи тартиптеги аныктагыч же 4 саны болот.

1.5.2 Аныктама. *Δ аныктагычынын a_{ij} элементинин алгебралык толуктоочу A_{ij} деп, $i + j$ саны жуп болсо M_{ij} минорун өзүн, ал эми так болсо "$-M_{ij}$" минорун айтабыз, б.а.* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (4)

болот.

Жогорудагы мисалдагы аныктагычтын $a_{21} = -1$ элементинин алгебралык толуктоочу $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$ сандык маанисине ээ болгон экинчи тартиптеги аныктагыч болот. (4) теңдештигинен көрүнгөндөй M_{ij} минору менен A_{ij} алгебралык толуктоочу барабар болгон же белгилеринен гана айырмаланган аныктагычтар (сандар) болушат. Алгебралык толуктоочторго байланышкан дагы бир эреже - касиетти жазалы:

9^0- эреже. Аныктагычтын кайсы бир жолчосунун (мамычасынын) элементтерин башка бир жолчосунун (мамычасынын) тиешелүү элементтеринин алгебралык толуктоочторуна көбөйтүп суммалоонун натыйжасы нөлгө барабар болот.

Бул эрежени үчүнчү тартиптеги аныктагычка текшерип көрөлү. Аныктагычтын биринчи жолчосунун элементтерине үчүнчү жолчосунун тиешелүү элементтеринин алгебралык толуктоочторун көбөйтүп суммалаганда

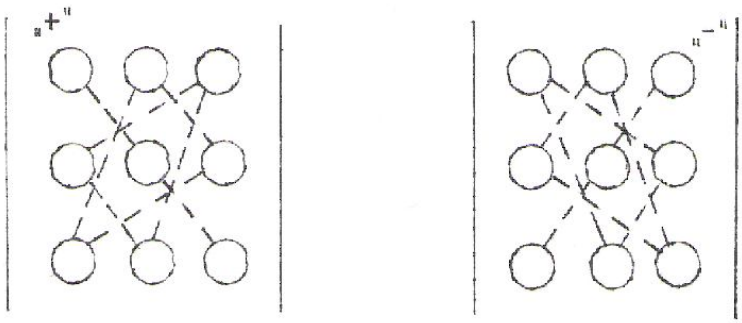
$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=a_{11}(-1)^{3+1}M_{31}+a_{12}(-1)^{3+2}M_{32}+a_{13}(-1)^{3+3}M_{33}=$$
$$=a_{11}M_{31}-a_{12}M_{32}+a_{13}M_{33}=$$
$$=a_{11}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})-a_{12}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})+a_{13}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=$$
$$=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{22}a_{13}-a_{12}a_{11}a_{23}+$$
$$+a_{12}a_{21}a_{13}+a_{13}a_{11}a_{22}-a_{13}a_{21}a_{12}=0$$

келип чыгып, 9^0 **- эреженин** аткарыларына ишенебиз.

1.5.3 Аныктама. *Аныктагычты эсептөө эрежеси – анын каалагандай бир жолчосунун (мамычасынын) элементтерин өздөрүнүн алгебралык толуктоочторуна көбөйтүп суммалоо амалы катарында кабыл алынып, аныктагычты жолчосу (мамычасы) боюнча ажыратуу деп аталат.*

Бул эсептөө эрежеси боюнча аныктагыч кайсыл жолчо (мамыча) менен ажыратылганына карабай, бир эле сандык натыйжага ээ болот. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты биринчи жолчосунун элементтеринин алгебралык толуктоочтору боюнча ажыратып көрөлү:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}\,a_{12}\;a_{13}\\a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\\a_{31}\,a_{32}\;a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+$$
$$+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23})-a_{12}(a_{21}\cdot a_{33}-a_{3i}a_{23})+ \qquad (5)$$
$$+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{3i}a_{22})=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-$$
$$-a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$



Бул ажыралышты байкап көрүп, аны эстеп калуунун жөнөкөй ыкмасын табабыз.

1.5.2-чийме

Оң белгидеги кошулуучулар оң башкы диагоналдын жана анын капталында жайгашкан үч элементтердин

көбөйтүндүлөрүнөн турушат, ал эми

терс белгидеги кошулуучулар терс башкы диагоналдын жана анын капталындагы үч элементтердин көбөйтүндүлөрүнөн турушат. Ошентип экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтарды алгебралык толуктоочтору аркылуу ажыратып эсептебестен, (1), (5) эрежелери аркылуу (1.5.1), (1.5.2) - чиймелерде көрсөтүлгөн “+”, “-” диагоналдарындагы байланыштарга карап, элементтерин көбөйтүп суммалоо менен эсептөөгө болот. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты *1.5.2 - чиймедеги* схема менен эсептөөнү Сарриустун эрежеси деп атап,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\;\; a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\;\; a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - \\ - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21} \qquad (6)$$

көрүнүшүндө эстеп калабыз. Албетте үчүнчү тартиптеги аныктагычты кайсы жолчосунун же мамычасынын элементтеринин алгебралык толуктоочтору менен ажыратсак да, (6) Сарриустун эрежеси келип чыгат, анткени ар бир аныктагыч бир гана сандык маниге ээ болот.

Жалпы n - тартиптеги аныктагычты биринчи жолчонун элементтеринин алгебралык толуктоочтору аркылуу ажыратуу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots\;\; a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots\;\; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots\;\; a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} \qquad (7)$$

көрүнүшүндө, i - жолчосун элементтеринин алгебралык толуктоочтору аркылуу ажыратуу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1j} \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2j} \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ij} \dots\ a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nj} \dots\ a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{1j} M_{ij} \ , \qquad (8)$$

j - мамычасынын элементтери аркылуу ажыратуу

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \qquad (9)$$

көрүнүштөрүндө болуп, иш жүзүндө бир гана Δ сандык маанисине ээ болушат.

Эгерде аныктагычтын бардык элементтери нөлдөр болсо, нөл - аныктагыч деп аталып, сандык мааниси нөлгө тең болот. Аныктагычтын башкы оң диагоналында жалаң гана “1” элементтери туруп, калган бардык элементтери жалаң нөлдөр болсо, анда аны бирдик аныктагыч деп E тамгасы менен белгилейбиз. Каалаган тартиптеги бирдик аныктагычтын сандык мааниси бирге барабар болорун (8), (9) эсептөө эрежелеринен көрүүгө болот

$$\mathrm{E} = \begin{vmatrix} 1\ 0\ \ 0 \dots 0 \\ 0\ 1\ \ 0 \dots 0 \\ 0\ \ 0\ 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0\ \ 0\ \ 0 \dots 1 \end{vmatrix} = 1 \ .$$

Жалпы n -тартиптеги аныктагычтарды минорлордун жардамы менен тартибин төмөндөтүп олтуруп, эсептөөнүн (8), (9) ыкмаларын жеңилдетүүгө болот. Ал үчүн аныктагычтын 1^0 - 9^0 эреже – касиеттерин пайдаланып, аны үч бурчтук формасына келтирүү керек. Бул учурда аныктагычтын башкы оң диагоналынын астындагы бардык элементтер нөл болгондой өзгөртүлүп түзүлөт. Бул элементтер минорлоруна көбөйтүлгөндө нөл саны келип чыгып, (8), (9) суммаларын эсептөө жеңилдейт. Айрым учурларда, кээ бир жолчолордун же

мамычалардын бир элементинен башка элементтеринин баары нөлдөр болгондой өзгөртүүлөр жүргүзүлөт.

Мисалы:

1) ▹ $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ аныктагычынын биринчи жолчосунун элементтеринен үчүнчү жолчонун элементтерин 2 ге көбөйтүп кемитип, ал эми экинчи жолчонун элементтерине үчүнчү жолчонун элементтерин 2 ге көбөйтүп кошуу менен жазсак, берилген аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөй,

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ көрүнүшүнө келет. Аны биринчи мамычанын элементтеринин минорлору боюнча ажыратканда $a_{31} = 4,\ a_{11} = a_{21} = a_{41} = 0$ болгондуктан, $\Delta = (-1)^{1+3} a_{31} M_{31} = (-1)^{1+3} 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ аныктагычына өзгөрөт. Өзгөртүлгөн аныктагычтын биринчи мамычасынын бир элементинен башкасын нөлдөргө өзгөртүп түзөлү. Ал үчүн биринчи жолчону өзүндөй калтырып, экинчи жолчого 10 го көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып, үчүнчү жолчого 4 кө көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып,

$\Delta = (-1)^4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 20 \\ 0 & -27 & 2 \end{vmatrix}$ аныктагычын алабыз. Аны биринчи мамычанын минору боюнча ажыратып ($a_{11} = -1,\ a_{21} = a_{31} = 0$ эске алынат),

$\Delta = 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -45 & 20 \\ -27 & 2 \end{vmatrix} = -4(-45 \cdot 2 + 27 \cdot 20) = -1800$ санына ээ болобуз. ◃

2) Аныктагычты үч бурчтук формасына келтирүү менен эсептегиле:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Чыгаруу: ▹ Биринчи жолчону өзүндөй калтырып, калган жолчолордон биринчини кемитип жазалы, анда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

аныктагычына ээ болобуз. Аны биринчи мамыча боюнча ажыратып $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0,\ a_{11} = 1$ болгондуктан, $\Delta_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$ миноруна, андан соң тартиби төмөндөгөн M_{11} аныктагычынын (минорунун) да биринчи мамычасы боюнча ажыратып,

$$\Delta_1 = (-1)^{1+1} 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (4-0) = -8$$ санына

ээ болобуз.

Айрым учурларда жогорку тартиптеги аныктагычты ага окшош көрүнүштөгү тартиби бир топ төмөн аныктагычтын сандык маанисине окшоштуруп, салыштыруу менен эсептөөгө болот. Окшош көрүнүштөгү аныктагычтарды эсептөөдөгү байланыш формуласы рекурренттик формула менен берилип, анын чындыгы математикалык индукция методу менен текшерилет.

Экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтар (1) жана (6) эрежелери менен эсептелип, тартиби төрттөн жогорку болгон аныктагычтарды (8), (9) эрежелери менен жолчолордун же

мамычалардын элементтерин минорлору боюнча ажыратуу аркылуу эсептейбиз. Ажыратуудан кийин пайда болгон минорлордо баштапкы аныктагычка караганда бирден жолчо жана мамыча кемигендиктен, алардын тартиби бирге төмөндөйт. Эгерде келип чыккан минорлор үчүнчү тартипте болсо, анда аларды Сарриустун эрежеси боюнча эсептеп, берилген аныктагычтын сандык маанисин табабыз. Эгерде минорлордун тартиби төрттөн жогору болсо, анда ар бир минорду өзүнчө аныктагыч катарында жазып, аны да минорлору боюнча ажыратабыз. Ошентип бул процессти ажыратылган минорлор үчүнчү тартипке келгенге чейин уланта беребиз.

Аныктагычтардын сандык маанилерин эсептөөнүн (1), (6), (7), (8), (9) эрежелери аныктагычтардын $1^0 - 9^0$ эреже – касиеттерине баш ийишет, б.а. канааттандырышат. Элементтери комплекстик сандар болгон аныктагычтар үчүн да ушул эле эсептөө эрежелери колдонулат.