6 – лекция:

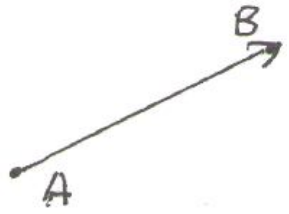
ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

§ 2.1 Векторлор жана алардын мейкиндиктеги сүрөттөлүшү

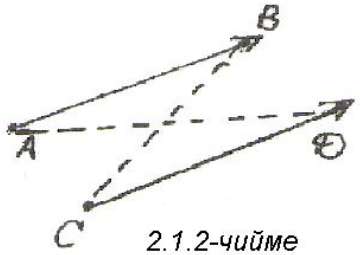
2.1.1 Вектор түшүнүгү

Чөйрөдөгү кубулуштарды математикалык аппараттар менен моделдештирүүдө чоңдуктарды скалярдык жана вектордук деп экиге бөлөбүз. Скалярдык чоңдук деп сандык мааниси боюнча толук мүнөздөөгө мүмкүн болгон чоңдуктарды түшүнөбүз. Мисалы аралык, аянт, көлөм, масса скалярдык чоңдуктар болушат, анткени аларды сандык мааниси боюнча эле толук таанып билүүгө болот. Вектордук чоңдуктарды болсо сандык маанилери боюнча толук мүнөздөй албастан, алардын өзгөрүү кыймылынын багытын кошо кароого мажбур болобуз. Мисалы күч, ылдамдык, ылдамдануу, басым вектордук чоңдуктар болушуп, аларды толук мүнөздөө үчүн сандык мааниси менен катар багытын да билүүгө тийишпиз.

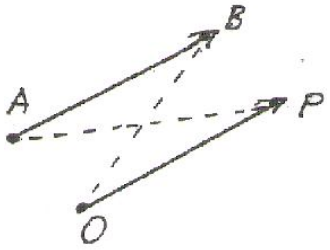
R^2 тегиздигинен эки A жана B чекиттерин алып, аларды AB кесиндиси менен туташтыралы. A чекитин кесиндинин башталуу, B чекитин кесиндинин бүтүүчү учтары десек, анда A чекитинен B чектине карай багыталган AB кесиндиси түзүлөт. Бул багытталган кесиндини $\overrightarrow{AB}$ вектору деп айтабыз. Мындай башталуу жана бүтүүчү учтары белгилүү болгон векторлорду «козголбос векторлор» деп атап, башталуучу жана бүтүүчү чекиттерин көрсөтүп чийебиз жана жазабыз: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MN}$ ж.б.у.с. *(2.1.1-чийме).*



2.1.1-чийме



2.1.2-чийме



2.1.3-чийме

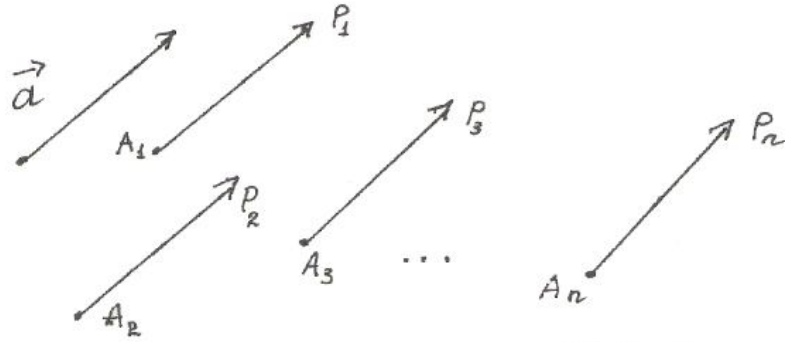
Козголбос векторлорду өз ара салыштырууда жана айрым практикалык колдонууда төмөндөгүдөй эрежелерди сактайбыз:

1^0**. Вектордун башталыш жана бүтүү чекиттери** $A \equiv B$ **дал келишсе, аны «нөлдүк вектор» деп, «**$\vec{0}$**» символу менен белгилейбиз.** A **чекитинен** B **чекитине чейинки аралык** $|AB| = 1$ **бир санына барабар болсо, аны «бирдик вектор» дейбиз.**

2^0. **Эки $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлорун байланыштырган AD жана CD кесиндилеринин кесилишүү чекити алардын тең ортолору менен дал келсе *(2.1.2-чийме),* анда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ векторлору барабар деп аталышат $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.**

3^0. **Тегиздикте жайгашкан каалагандай O чекитинен берилген $\overrightarrow{AB}$ козголбос векторуна барабар болгон бир гана $\overrightarrow{OP}$ векторун курууга болот *(2.1.3-чийме).***

Бул амалды $\overrightarrow{AB}$ векторун O чекиттине параллель которуу дейбиз. Иш жүзүндө $\overrightarrow{AB}$ векторун O чекитине параллель которуу үчүн, OB кесиндисинин тең ортосу менен кесилишкенде тең экиге бөлүнүүчү AP кесиндисинин учу P чекитин табуу керек (2.1.3-чийме). Эгерде ушундай бир гана P чекити табылса, анда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}$ же $\overrightarrow{AB}$ вектору O чекитине параллель которулду (курулду) деп эсептейбиз.



2.1.4-чийме

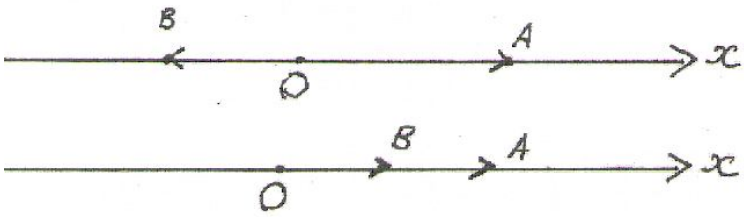
Акыркы 3^0-эрежеден байкагандай тегиздиктеги каалаган чекитке кайсы бир эркин багыттагы векторду курсак, ал кандайдыр бир козголбос векторго барабар болот. Ошондуктан ар бир козголбос векторду кайсы бир жерде курулган эркин вектор деп эсептеп, жалпы учурда эркин векторлорду башталыш жана бүтүү чекиттерин көрсөтпөй эле кичине тамгалар менен белгилеп жазабыз: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, ... ж.б.у.с. Мындан ары атайын эскертүүсүз берилген векторду эркин вектор деп түшүнөбүз. Ошентип эркин $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ векторун тегиздиктин каалагандай бир чекитине бир гана жолу параллель которуу жолу менен кура алабыз. Мисалы, тегиздиктеги ар башка $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ чекиттерине параллель которуу үчүн, 3^0-эрежени сактоо менен ар бир A_i чекитине ылайык бир гана P_i чекитин табабыз $(i=1,2,3,...,n)$. Натыйжада $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1P_1}=\overrightarrow{A_2P_2}=...=\overrightarrow{A_nP_n}$ параллель которулган өз ара барабар векторлордун тобуна ээ болобуз *(2.1.4-чийме).* Бардык векторлордун көптүгүндөгү айрым векторлордун тобунун окшош жалпылыктарына карап, аларга коллинеардуу, компланардуу векторлор деген аттарды беребиз:

I. Бир түздө же өз ара параллель түздөрдө жайгашкан векторлордун тобу коллинеардуу векторлор деп аталышат.

II. Бир тегиздикте же өз ара параллель тегиздиктерде жайланышкан үч вектор же андан көп векторлордун тобу компланардуу векторлор деп аталышат.

III. Эки $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ коллинеардуу векторлорун сан огундагы бир O чекитине курсак, анда алар бир Ox түзүндө (сан огунда) жайгашып калышат. Бул учурда алар O чекитинин бир тарабында же эки тарабында жайгашып калышы мүмкүн *(2.1.5-чийме).*

Биринчи учурда $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ векторлорун багытташ векторлор, экинчи учурда карама – каршы багыттагы векторлор деп атайбыз.



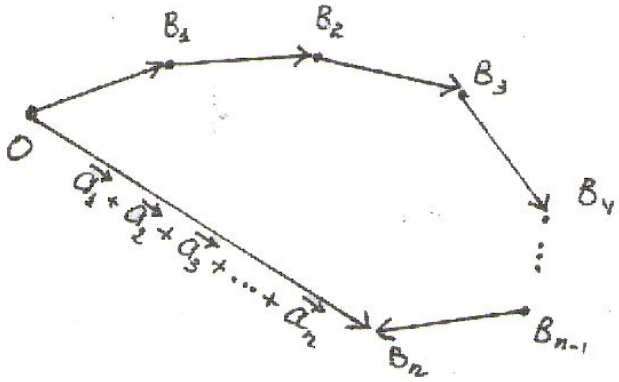
2.1.5-чийме

Багыттары дал келип, узундуктары барабар болгон векторлорду барабар векторлор дейбиз.

Жалпы учурда коллинеардуу векторлорду параллель $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ деп эсептейбиз. $\vec{a}$ векторуна карама - каршы векторду "$-\vec{a}$" деп белгилейбиз. Сандык октун багыты оң деп алынат.

2.1.2 Векторлор менен аткарылуучу сызыктуу амалдар

Жаратылыш кубулуштарын математикалык моделдештирүүдө векторлор көптүгүн пайдалануу үчүн, алар менен жүргүзүлүүчү амалдарды аткаруу эрежелерин киргизебиз. Сызыктуу амалдар деп векторлорду кошуу, кемитүү жана санга көбөйтүү амалдарын түшүнөбүз:



2.1.6-чийме

1. Векторлорду кошуу жана кемитүү.

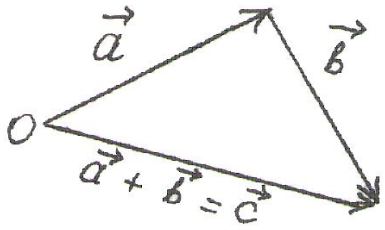
Тегиздикте эркин жайгашкан

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ (1)

векторлору берилсин. Алардын ар бирин каалагандай бир чекитке параллель которуу менен бир гана жолу курууга болгондуктан, эркин

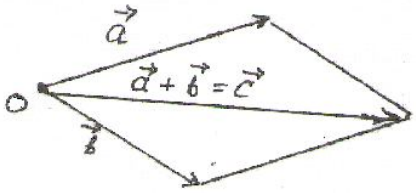
тандалган O башталуу чекитине $\overrightarrow{a_1}$ векторун куралы. $\overrightarrow{a_1}$ векторунун бүтүүчү учу B_1 чекитине $\overrightarrow{a_2}$ векторун куруп, $\overrightarrow{a_2}$ нин бүтүүчү учу B_2 чекитине $\overrightarrow{a_3}$ векторун куруу менен ушул поцессти улантсак, акырында $\overrightarrow{a_{n-1}}$ векторунун бүтүүчү учу B_{n-1} чекитине $\vec{a}_n$ вектору курулган болот. Натыйжада (1) векторлор тобун бири – бирине улаштырылган абалда жайгаштырган болобуз *(2.1.6-чийме).*

2.1.1 Аныктама. *Берилген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлорунун суммасы деп, бул векторлорду улаштыруу жолу боюнча кыймылдап келген чекиттин баштапкы жана акыркы абалдарын туташтырган векторду айтабыз. Векторлордун суммасы да вектор болуп, $\overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2 + ... + \overrightarrow{a}_n$ көрүнүшүндө жазылат. Эгерде чекиттин кыймылы баштапкы абалга келип токтосо, анда суммасы $\overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2 + ... + \overrightarrow{a}_n = \vec{0}$ нөл вектор болот.*



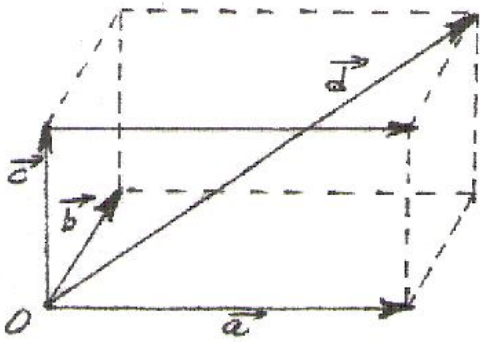
2.1.7-чийме

Жогорудагы аныктамадан эки $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ векторлорун кошуунун *(2.1.7-чийме)* үч бурчтук эрежеси келип чыгат. Эгерде $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ деп белгилесек, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ кемитүүнүн үч бурчтук эрежесине ээ болобуз *(2.1.7-чийме).* Векторлорду кошуунун параллелограмм эрежеси да үч бурчтук эрежесинен келип чыгат *2.1.8-чийме).*



2.1.8-чийме

О чекитине коюлган же курулган $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ векторлорунун суммасы деп, жактары $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ векторлору болгон параллелограммдын O чекитинен чыккан диагоналы болгон $\overrightarrow{c}$ векторун алууга болот. Ал үчүн эркин абалдагы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ векторлорун O чекитине параллель которуп, бир O чекитинен чыгуучу векторлор катарында элестетебиз *(2.1.8-чийме).*



2.1. 9-чийме

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ үч векторун кошууда параллелепипед эрежеси кеңири колдонулат. Ал үчүн бул векторлорду бир O чекитинен чыгуучу абалга параллель которобуз. Алардын суммасы деп, кырлары $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ болгон

параллелепипеддин O чекитинен чыгуучу башкы диагоналы болгон $\vec{d}$ векторун айтабыз *(2.1.9-чийме).*

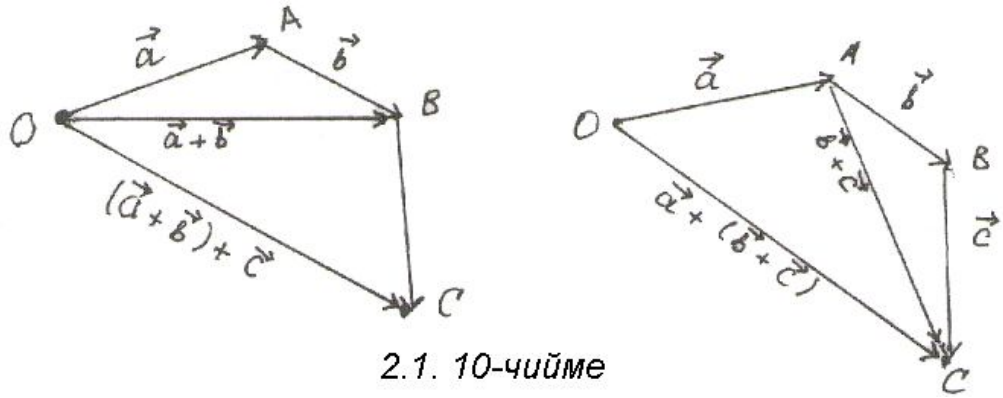
Векторлорду кемитүү амалы ушундай эле эрежелерде жүргүзүлүп, $\vec{a}-\vec{b}$ айырмасын $\vec{a}$ векторуна «-$\vec{b}$» вектору кошулат деп түшүнөбүз.

Векторлорду кошуу амалы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1^0**.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, кошуу коммутативдүү.

Чындыгында эле O чекитине курулган жактары $\vec{a}$, $\vec{b}$ болгон параллелограммдын диагоналы өзгөрбөгөндүктөн *(2.1.8-чийме),* векторлорду кошуу орун алмаштыруучулук касиетине ээ.

2^0**.** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, кошуу ассоциативдүү.



2.1. 10-чийме

Чынында векторлорду кошуунун аныктамасына ылайык O чекитине улаштырылган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлорун курсак *(2.1. 10 – чийме),* үч вектордун суммасы болгон $\overrightarrow{OC}$ векторунун өзгөрбөгөнүн көрөбүз.

Сөз кылынган 1^0, 2^0 эрежелер чектелген сандагы векторлорду кошууда сакталат деп эсептейбиз.

II**. Векторлорду санга көбөйтүү.**

Кандайдыр бир $\lambda \in R$ чыныгы саны жана $\vec{a}$ вектору берилсин.

2.1.2 Аныктама. *$\vec{a}$ векторун λ санына көбөйтүү деп*

1) узундугу $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ санына барабар;

2) $\lambda>0$ болсо, $\vec{a}$ вектору менен бир багытта,

$\lambda<0$ болсо, $\vec{a}$ векторуна карама – каршы багытта;

шарттарын канааттандыруучу $\vec{b}$ векторун түшүнөбүз жана аны $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ деп жазабыз.

Эгерде $\lambda=0$ болсо, $0\cdot\vec{a}=\vec{O}$ нөл вектор деп эсептейбиз. $\vec{a}$ вектору жана $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ вектору коллинеардуу векторлор болушат жана

тескерисинче $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлору коллинеардуу болушса, анда сөзсүз $\lambda \in R$ саны табылып $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ барабардыгы аткарылат. $\vec{a}$ **векторун санга көбөйтүү амалынын жардамы менен ал сүрөттөгөн кесиндилерди берилген λ катышына бөлүүгө болот.**

Векторлорду санга көбөйтүү амалында төмөндөгүдөй касиеттер орун алат:

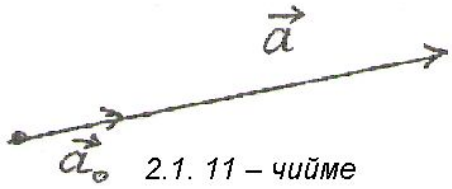
1^0. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$,

2^0. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu)\vec{a}$,

3^0. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$. Мында $\lambda, \mu \in R$, ал эми $\vec{a}$, $\vec{b}$ каалагандай эркин берилген векторлор.

Векторду санга көбөйтүү амалынын жардамы менен каалаган $\vec{a}$ векторунун бирдик векторун жазуу эрежесин чыгарабыз.

2.1.3 Аныктама. *Берилген $\vec{a}$ векторунун багытындагы бирдик векторду $\vec{a_0}$ деп белгилеп, аны $\vec{a}$ векторунун бирдик вектору же орту (кээде ортасы) деп атайбыз.*



2.1. 11 – чийме

Демек, $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$ деп тандасак, анда $\vec{a_0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ болот *(2.1. 11 – чийме).*

Эгерде $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ векторлорунун тобу берилип,

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = 0 \qquad (*)$$

шарты бардык $\lambda_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ болгондо гана аткарылса, анда аларды сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын түзөт дейбиз. Ал эми кайсы бир $\lambda_i \neq 0$ болгон учурда деле (*) шарты аткарыла берсе, бул векторлордун тобу сызыктуу көз каранды системаны түзүшөт.

Векторлор сызыктуу көз каранды системаны түзүшсө, анда алардын бирин башкалары менен сызыктуу туюнтууга болот. Чынында эле (*) шарты кайсы бир $\lambda_k \neq 0$ болгондо аткарылды дейли $(1 \leq k \leq n)$:

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_k \vec{a_k} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = 0 .$$

Бул барабарсыздыкты $\lambda_k \neq 0$ санына бөлүп жиберип,

$\overrightarrow{a_k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overrightarrow{a_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\overrightarrow{a_2} - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\overrightarrow{a}_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\overrightarrow{a_n}$ сызыктуу туюнтуусуна ээ болобуз.

Сызыктуу көз каранды векторлор системасына эң жөнөкөй мисал катары коллинеардуу векторлордун тобун келтирүүгө болот.

Ошентип бардык векторлордун көптүгү кошуу, кемитүү, санга көбөйтүү амалдарына карата сызыктуу мейкиндиктин бардык талаптарын канааттандырып, сызыктуу вектордук мейкиндикти түзөт.

2.1.3 Сандык мейкиндиктерде векторлорду сүрөттөө

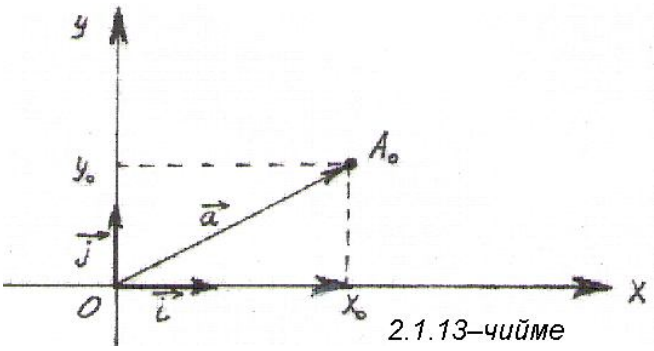
Векторлордун мейкиндиктерде жайгашуу абалын декарттык координаталар системасында үйрөнөбүз. R^1 мейкиндигиндеги векторлордун баары сан огу болгон бир түздө жайгашып, өз ара коллинеардуу болушат. Бул мейкиндиктеги каалаган $\overrightarrow{a}$ эркин векторун O башталмасына оң багытка карап курсак, анын бүтүүчү учу A_0 чекитине бир x_0 саны туура келет *(2.1. 12 – чийме).* Бул x_0 саны $\overrightarrow{a}$ векторунун сызыктуу координатасы деп аталат. $\overrightarrow{a}$ векторунун орту $\overrightarrow{a_0} = \overrightarrow{i}$ векторуна $\lambda = x_0$ санын (координатасын) көбөйтүү менен, $\overrightarrow{a}$ векторун x_0 координатасы аркылуу

2.1. 12– чийме

$$\overrightarrow{a} = x_0 \cdot \overrightarrow{i} \qquad (2)$$

көрүнүшүндө туюнта алабыз.

Эгерде $\overrightarrow{a}$ вектору O чекитинен терс багытка карап курулса, (2) туюнтуусу $\overrightarrow{a} = -x_0 \cdot \overrightarrow{i}$ көрүнүшүндө болот. Демек, R^1 мейкиндигинде бардык векторлорду координаталары менен (2) көрүнүшүндө жаза алабыз.



2.1.13–чийме

R^2 мейкиндигинде (тегиздигинде) жайгашкан каалагандай эркин $\overrightarrow{a}$ векторун Oxy декарттык координаталар тегиздигинде карайбыз. $\overrightarrow{a}$ векторун O координата башталмасына которуп курсак, анын бүтүүчү учу болгон A_0 чекитине кандайдыр бир $(x_0; y_0)$ координаталары туура

келет *(2.1.13 -чийме).* Ox жана Oy координаталык окторунун ортторун тиешелүү түрдө $\vec{i}$, $\vec{j}$ бирдик векторлору десек, анда $\vec{a}$ вектору жактары $x_0\vec{i}$, $y_0\vec{j}$ болгон параллелограммдын диагоналы катарында өзүнүн координаталары менен

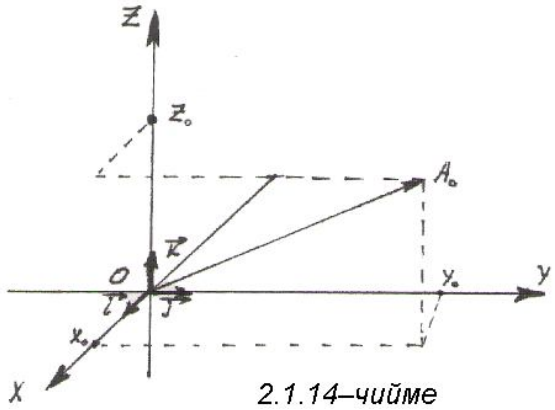
$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \qquad (3)$$

көрүнүшүндө туюнтулат. Бул учурда A_0 чекитинин $(x_0; y_0)$ координаталары $\vec{a}$ векторуна координаталар болуп, $\vec{a} = \{x_0;\ y_0\}$ же $\vec{a}(x_0; y_0)$ көрүнүшүндө жазылышат.

2.1.4 Аныктама. *O координата башталмасына координаталык октордун багыты боюнча курулган өз ара перпендикуляр бирдик векторлордун тобу, берилген декарттык системанын ортонормалдашкан базиси деп аталат (ортобазис). Ортонормалдашкан базис сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын түзөт.*

Oxy декарттык системасында координаталык октордун орттору $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлору ортонормалдашкан базисти түзүшүп, координаталары менен $\vec{i} = \{1; 0\}$, $\vec{j} = \{0; 1\}$ көрүнүшүндө жазылышат. Демек, (3) туюнтуусун $\vec{a}$ векторун $\vec{i}$, $\vec{j}$ ортонормалдык базиси боюнча ажыратуу деп айтабыз. Мындай ажыратуу бир маанилүү болуп, $\vec{i}$, $\vec{j}$ базиси менен $\vec{a}$ векторун экинчи башка көрүнүштө ажыратуу мүмкүн эмес. Анткени A_0 чекитинин бир гана $(x_0; y_0)$ координаталары болуп, $x_0\vec{i}$, $y_0\vec{j}$ векторлорунун суммасы да жалгыз гана вектор болот. Бул ажыралыштагы $x_0\vec{i}$, $y_0\vec{j}$ векторлорун $\vec{a}$ векторунун түзүүчүлөрү (компоненттери) дейбиз.

R^3 мейкиндигинде жайгашкан векторлорду үч өлчөмдүү $Oxyz$ декарттык координаталар системасында карайбыз. Бул мейкиндиктен эркин тандалган $\vec{a}$ векторун O координата башталмасына которуп куралы. $\vec{a}$ векторунун бүтүүчү учу A_0 чекитинин координаталары болгон $(x_0; y_0; z_0)$ - үчтүгү, $\vec{a}$ векторунун координаталар болушат *(2.1.14 -чийме).* $\vec{a}$ вектору координаталары менен $\vec{a} = \{x_0;\ y_0;\ z_0\}$, же $\vec{a}\{x_0;\ y_0;\ z_0\}$



2.1.14–чийме

көрүнүштөрүндө жазылат.

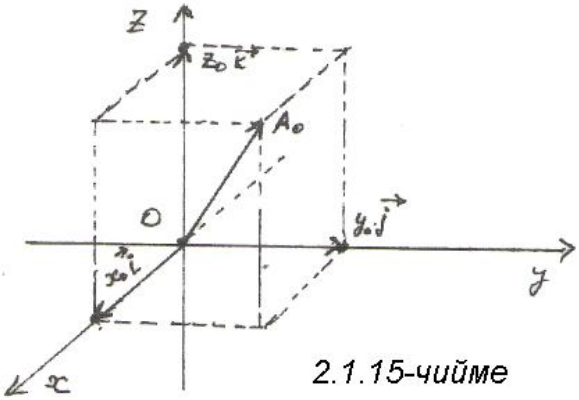
$Oxyz$ координаттык системасында $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлорун же координаттык ортторун ортонормалдашкан базис десек, анда $\vec{a}$ векторун кырлары $x_0\vec{i}$, $y_0\vec{j}$, $z_0\vec{k}$ болгон параллелепипеддин башкы диагоналы катарында

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \qquad (4)$$

үч векторлордун суммасы түрүндө жаза алабыз *(2.1.15 –чийме).* R^3 мейкиндигинин базистик векторлор координаталары менен

$$\vec{i} = \{1;\ 0;0\},\ \vec{j} = \{0;\ 1;\ 0\},\ \vec{k} = \{0;\ 0;1\}$$

көрүнүштө жазылышат. Ошентип R^3 мейкиндигинде кандай гана $\vec{a}$ вектору берилбесин, аны бир маанилүү түрдө $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортонормалдык базиси боюнча (4) көрүнүшүндө ажыратып жазууга болот. $x_0\vec{i}$, $y_0\vec{j}$, $z_0\vec{k}$ векторлору $\vec{a}$ векторунун түзүүчүлөрү (компоненттери), ал эми ажыралыштагы x_0, y_0, z_0 коэффициентери $\vec{a}$ вектору тандалган базиске карата координаталары менен төмөндөгү $\vec{a} = \{x_0;\ y_0;\ z_0\}$, $\vec{a}(x_0;\ y_0;\ z_0)$ көрүнүштө жазылат.



2.1.15-чийме

R^n мейкиндигинде n өлчөмдүү координаталык системанын ортонормалдык базисин $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлорлорунун тобу түзүшсө, анда аларды координаталары менен n координаталуу векторлор

$\vec{e}_1 = \{1;\ 0;\ ...;\ 0\}$,

$\vec{e}_2 = \{0;\ 1;\ ...;\ 0\}$,

- - - - - - - - - - -

$\vec{e}_n = \{0;\ 0;\ ...;\ 1\}$ сыяктуу жазабыз. Бул векторлор n өлчөмдүү декарттык координаталар башталмасынан башталышкан өз ара перпендикуляр $Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n$ координаталык окторунда жайгашып, каноникалык түргө келтирилген базистик система болушат.

R^n мейкиндигинде эркин алынган $\vec{a}$ векторун О координата башталмасына которуп курганда, вектордун бүтүүчү учу $A_0(x_1^0\ ;\ x_2^0\ ;...;\ x_n^0\ )$ координаталуу чекит болсун дейли. Андай болсо,

берилген ортонормалдык базисине карата $\vec{a}$ векторун бир маанилүү түрдө $\vec{a} = x_1^0 \vec{e_1} + x_2^0 \vec{e_2} + ... + x_n^0 \vec{e}_n$ (5)

көрүнүшүндө ажыратууга болот. $\vec{a}$ вектору координаталары менен $\vec{a} = \{x_1^0;\ \ x_2^0;...;\ \ x_n^0\}$, $\vec{a}(x_1^0;\ x_2^0;\ ...;x_n^0)$ көрүнүштөрүндө жазылат.

Жогоруда көрсөтүлгөн каноникалык түргө келтирилген $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ базистик системадан башка каалагандай эле $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын базистик система деп алып, алар аркылуу каалагандай $\vec{a}$ векторун сызыктуу туюнтууга болот:

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n}$. ($5^Б$)

Мындагы λ_1, λ_2, ..., λ_n сандары $\vec{a}$ векторунун $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ базистик системасына карата координаталары деп аталышып, $\vec{a}(\lambda_1;\ \lambda_2;...\lambda_n)$ же $\vec{a} = \{\lambda_1;\ \lambda_2;...\lambda_n\}$ көрүнүшүндө белгиленишет. Ушундай эле векторлордун базистик системаларын R^2, R^3 мейкиндиктеринде тандап, $\vec{a}$ векторун тандалган базиске карата ажыратып жазууга болот.

Айрым учурларда $\vec{a} = \overrightarrow{OA_0}$ векторун, A_0 чекити менен O башталмасын туташтыруучу $\vec{r}$ радиус вектору деп атап, R^2 де $\vec{r} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$, R^3 тө $\vec{r} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$, R^n де $\vec{r} = x_1^0 \vec{e_1} + x_2^0 \vec{e_2} + ... + x_n^0 \vec{e_n}$ көрүнүштөрүндө жазабыз.

2.1.4 Векторлор менен жүргүзүлүүчү сызыктуу амалдарды координаталары аркылуу туюнтуу

R^3 мейкиндигиндеги $Oxyz$ координаталар системасында $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ жана $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ векторлору координаталары менен берилсин. Анда аларды $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ үчтүгү боюнча $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ жана $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ деп ажыратып жазууга болот. Бул ажыроолор бир маанилүү болгондуктан, векторлордун барабар болуу шарты

$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2 \end{cases}$ координаталары тең болсо гана аткарыларын көрөбүз.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорун кошууда

$\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}+x_2\vec{i}+y_2\vec{J}+z_2\vec{k}=(x_1+x_2)\,\vec{i}+(y_1+y_2)\,\vec{j}+(z_1+z_2)\,\vec{k}$

ээ болобуз.

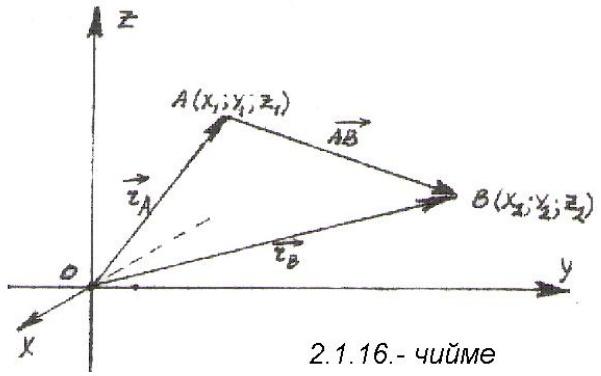
Демек, эки векторду кошууда анын тиешелүү координаталары кошулат же

$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\}$ көрүнүшүндө болот.

Ошондой эле кемитүүдө $\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\}$ болот. Эгерде козголбос $\overrightarrow{AB}$ вектору берилип, анын учтары $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ координаталарына ээ болсо, бул чекиттердин радиус – векторлорун $\overrightarrow{r_A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\overrightarrow{r_B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ көрүнүшүндө жазып, $\overrightarrow{AB}$ векторунун координаталарын

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$

теңдештигинен $\overrightarrow{AB}=\{x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\}$ көрүнүшүндө аныктайбыз *(2.1.16-чийме).* Демек, $\overrightarrow{AB}$ векторунун координаталары вектордун бүтүүчү учу B чекитинин координаталарынан, башталуу учу A чекитинин тиешелүү координаталарын кемитүү менен таылат.



2.1.16.- чийме

Берилген $\vec{a}$ векторун λ чыныгы санына көбөйтүү, анын координаталарын λ санына көбөйтүү менен ишке ашырылып,

$$\lambda\vec{a}=\lambda\,(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})=$$
$$=\lambda\,x_1\vec{i}+\lambda\,y_1\vec{j}+\lambda\,z_1\vec{k}$$

жана $\lambda\vec{a}=\{\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1\}$ көрүнүштөрүндө жазылат. Эгерде $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ векторлору коллинеардуу болушса, анда кандайдыр бир λ саны табылып, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ байланышы аткарылат. Бул учурда алардын координаталары

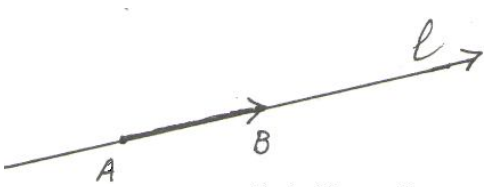
$x_1=\lambda\,x_2,\,y_1=\lambda\,y_2,\,z_1=\lambda\,z_2$ байланышында болуп, $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

теңдештигине ээ болобуз. *Демек, коллинеардуу векторлордун тиешелүү*

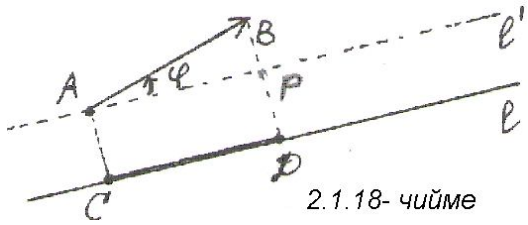
координаталары өз ара пропорционалдуу болушат жана тескерисинче, тиешелүү координаталары пропорционалдуу векторлор сөзсүз коллинеардуу болушат.

2.1.5 Векторлордун сан огундагы проекциясы

Кандайдыр бир ℓ сан огун алып, анда жайгашкан A чекитинен B чекитине карай багытталган AB кесиндисин сызалы *(2.1.17 -чийме).*



2.1.17- чийме

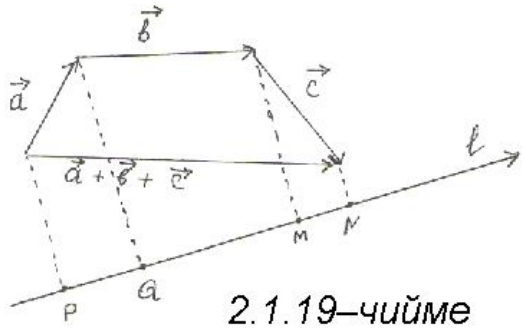


2.1.18- чийме

Бул АВ кесиндисинин узундугу болгон $|AB|$ санын, кесиндинин чоңдугу деп айтабыз. Эгерде кесиндинин багыты сандык октун багыты менен дал келсе, анын чоңдугун оң чоңдук деп «+» белгиде, сандык октун багытына карама - каршы болсо, терс чоңдук деп «-» белгиде жазышат.

ℓ сан огу жана ага таандык болбогон $\overrightarrow{AB}$ козголбос вектору берилсин. Вектордун учтары A, B чекиттеринен ℓ түзүнө перпендикуляр түшүрүп, кесилиш чекиттерин тиешелүү түрдө C, D чекиттери дейли. Натыйжада ℓ түзүндө багытталган CD кесиндиси тургузулат *(2.1.18-чийме).*

2.1.5 ***Аныктама.*** *ℓ сан огундагы $\overrightarrow{AB}$ векторунун проекциясы деп жогорудагы усул менен тургузулган CD кесиндисин чоңдугу (узундугу) болгон $|CD|$ санын айтабыз жана* $\text{Пр}_{\ell}\,\overrightarrow{AB} = |CD|$ *(6)*
деп белгилейбиз.



2.1.19–чийме

Вектордун ℓ түзүндөгү проекциясы менен анын узундугунун арасында кандай байланыш бар экенин көрсөтөлү: ▹ *2.1.18-чиймеде* көрсөтүлгөндөй A чекитинен ℓ түзүнө параллель ℓ' түзүн жүргүзөлү. AB кесиндиси менен ℓ' түзүнүнүн арасындагы φ бурчу, AB кесиндиси менен ℓ түзүнүн арасындагы бурчка барабар жана AP менен CD кесиндилеринин чоңдуктары да барабар $|AP| = |CD|$. ΔAPB тик бурчтуу үч

бурчтугунан $\cos\varphi = \frac{|AP|}{|AB|}$ же $|CD| = |AP| = |AB|\cos\varphi$ келип чыгат. Мындан

$$\text{П}p_{\ell}\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi \qquad (7)$$

вектордун узундугу менен анын проекциясынын арасындагы байланыш формуласына ээ болобуз. ◁

Вектордун ℓ сан огундагы проекциясынын дагы бир касиетин көргөзөлү:

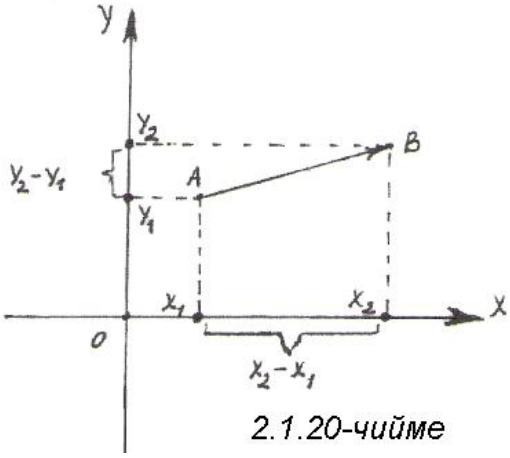
$$\text{П}p_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \text{П}p_{\ell}\vec{a} + \text{П}p_{\ell}\vec{b} + \text{П}p_{\ell}\vec{c} \qquad (8)$$

же векторлордун суммасынын проекциясы, алардын проекцияларынын суммасына барабар болот.

▷ Чынында эле $\text{П}p_{\ell}\vec{a} = |PQ|$, $\text{П}p_{\ell}\vec{b} = |QM|$, $\text{П}p_{\ell}\vec{c} = |MN|$ болуп *(2.1.19-чийме),*

$$\text{П}p_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = |PN| = |PQ| + |QM| + |MN|$$

келип чыгат же (8) дин туура экендиги далилденет. Ошентип вектордун проекциясы вектор болбостон кадимки эле сан болот. ◁



2.1.20-чийме

Декарттык координаталар системасында берилген $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторунун координаталык октордогу проекциялары, анын координаталары болушат $\text{П}p_{ox}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$, $\text{П}p_{oy}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1$. Ошондуктан векторду координаталары менен базистик системаларга карата (3), (4), (5) ажыратууларын тиешелүү түрдө

$$\vec{a} = \text{П}p_{ox}\vec{a}\cdot\vec{i} + \text{П}p_{oy}\vec{a}\cdot\vec{j}, \qquad (3^{A})$$

$$\vec{a} = \text{П}p_{ox}\vec{a}\cdot\vec{i} + \text{П}p_{oy}\vec{a}\cdot\vec{j} + \text{П}p_{oz}\vec{a}\cdot\vec{k}, \qquad (4^{A})$$

$$\vec{a} = \text{П}p_{ox_1}\vec{a}\cdot\vec{e_1} + \text{П}p_{ox_2}\vec{a}\cdot\vec{e_2} + \ldots + \text{П}p_{ox_n}\vec{a}\cdot\vec{e_n} \qquad (5^{A})$$

көрүнүштөрүндө жаза алабыз.

§2.2 Векторлорду скалярдык көбөйтүү

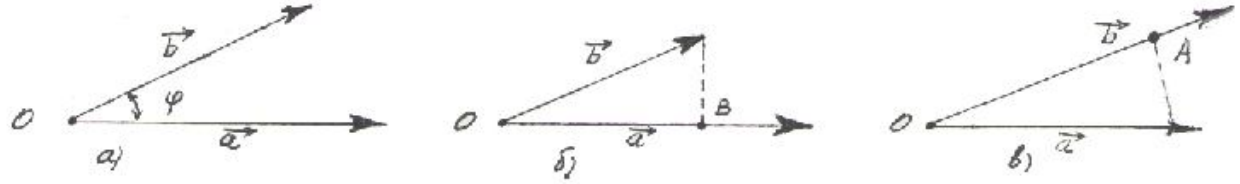
2.2.1 Скалярдык көбөйтүү түшүнүгү

Векторлордун узундук чоңдугу жана проекциялары гана сан болуп, өздөрү вектор бойдон калгандыктан, векторлор менен сандар сыяктуу арифметикалык амалдарды аткара албайбыз. Ошондуктан жогоруда векторлорду кошуунун, санга көбөйтүүнүн жаңы эрежелерин түздүк. Ошол сыяктуу эле векторлорду көбөйтүүнүн жаңы эрежелерин кабыл алабыз. Алардын бири векторлорду скалярдык көбөйтүү (сандык чоңдуктарын көбөйтүү) деп аталат.

2.2.1 ***Аныктама.*** *Берилген* $\vec{a}$ *жана* $\vec{b}$ *векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү деп* $(\vec{a},\vec{b})$ *же* $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ *символу менен белгиленген*

$$(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\hat{}\,\vec{b}) \qquad (9)$$

санын айтабыз.



2.2.1-чийме

Эки векторду скалярдык көбөйтүүдө векторлордун өздөрү көбөйтүлбөстөн, аларды мүнөздөөчү узундуктары жана алардын арасындагы бурчтун косинусу болушкан сандар көбөйтүлүшөт. Эгерде $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурчту $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b}) = \varphi$ десек *(2.2.1 а)-чийме),* анда $\vec{b}$ векторунун $\vec{a}$ векторундагы проекциясы $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$ *(2.2.1 б)- чийме),* жана $\vec{a}$ векторунун $\vec{b}$ векторундагы проекциясы $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi$ *(2.2.1 в)- чийме)* болорун эске алып, скалярдык көбөйтүүнүн (9) эрежесин

$$(\vec{a},\,\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|\cdot\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|OB\right|,$$

$$(\vec{a},\,\vec{b}) = \left|\vec{b}\right|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \left|\vec{b}\right|\cdot\left|OA\right| \qquad (10)$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Демек, эки векторду скалярдык көбөйтүү үчүн биринчисинин узундугуна, экинчи вектордун биринчи векторго түшүрүлгөн проекциясын көбөйтүп коюу жетиштүү. Ал эми векторлордун бирөөсү нөлдүк вектор болсо, анда скалярдык көбөйтүндү $(\vec{a},\,\vec{0}) = 0$ болот.

2.2.2 Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттери

1^0. Өз ара перпендикуляр эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$. (11)

▹Чындыгында эле бул учурда векторлордун арасындагы бурч $\vec{a} \hat{} \vec{b} = 90^0 \Rightarrow \cos 90^0 = 0$ болгондуктан, (9) эрежесинен $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ экендиги келип чыгат. (11) шарты эки вектордун ортогоналдык (перпендикулярдык) шарты деп аталат. Ошентип скалярдык көбөйтүү эки вектордун бирөөсү нөлдүк вектор болгондо жана экөө өз ара перпендикуляр болгондо гана нөл санына барабар болот.◃

2^0. Скалярдык көбөйтүү коммутативдүү $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ болот.

▹ $\cos\varphi$ жуп функция болгондуктан $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ тең болушуп, бурчтун кайсы вектордон башталып ченелүүсүнөн көз каранды болбойт. Ошондуктан коммутативдүүлүк шарты аткарылат.◃

3^0. Скалярдык көбөйтүү кошуу амалына карата бөлүштүрүүчүлүк касиетине ээ:

$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c})$ **жалпы учурда**

$(\vec{a_1} + \vec{a_2} + ... + \vec{a_n})\vec{c} = (\vec{a_1}, \vec{c}) + (\vec{a_2}, \vec{c}) + ... + (\vec{a_n}, \vec{c})$ **болот.**

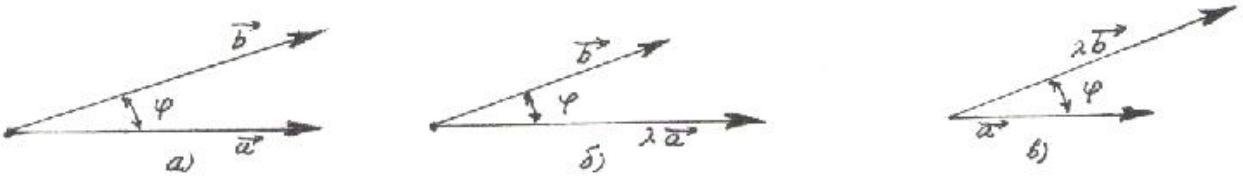
▹Чындыгында эле (10) эрежесин колдонуп, $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c})$ теңдештигинин

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}| \cdot \Pi p_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) \overset{(8)}{=} |\vec{c}| \left[\Pi p_{\vec{c}} \vec{a} + \Pi p_{\vec{c}} \vec{b}\right] = |\vec{c}| \cdot \Pi p_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \cdot \Pi p_{\vec{c}} \vec{b} \overset{(10)}{=} (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

туура экендигин көрөбүз.◃

4^0. λ көбөйтүндүсүн (санын) скалярдык көбөйтүү белгисинин алдынан чыгарууга болот:

$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$. (12)

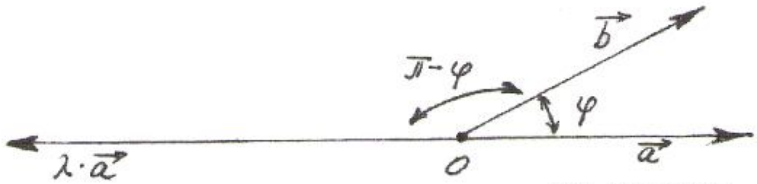


2.2.2 –чийме

▹ $\lambda = 0$ болгон учурда (12) нин туура болору көрүнүп турат. Ошондуктан $\lambda \neq 0$ деп $\lambda > 0,\ \lambda < 0$ учурларга бөлүп карайлы. $\lambda > 0$ болсо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурч өзгөрбөй, $\varphi = (\lambda\vec{a},\hat{}\ \vec{b}) = (\vec{a},\hat{}\ \lambda\vec{b}) = (\vec{a}\hat{}\vec{b})$ барабардыктары сакталат *(2.2.2 -чийме).*

Ошондуктан $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \left|\lambda\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{a}\right| \cdot \lambda\left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = (\vec{a},\lambda\vec{b})$,

$(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \left|\lambda\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = \lambda(\vec{a},\vec{b})$ барабардыктары орун алып, (12) туура болот.



2.2.3-чийме

Эгерде $\lambda < 0$ *(2.2.3-чийме)* болсо, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \varphi$ десек, $\lambda\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурч $\pi - \varphi$ ге барабар. Келтирүүнүн формуласы боюнча $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ болгондуктан,

$$(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \left|\lambda\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot (-\cos\varphi) = -|\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi = -|\lambda| \cdot (\vec{a},\vec{b}) = -(-\lambda) \cdot (\vec{a},\vec{b}) = \lambda\ (\vec{a},\vec{b})$$

орун алат ($|\lambda| > 1$ *болсо узарат*; $|\lambda| < 1$ *,болсо кыскарат*). ◃

2.2.3 Векторлорду координаталары боюнча скалярдык көбөйтүү

R^3 мейкиндигиндеги $Oxyz$ декарттык координаталар системасында $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ ортонормалдашкан базисиндеги координаталары менен берилген

$$\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \qquad \vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$$

векторлорун скалярдык көбөйтөлү. Бул векторлор - аталган базисте өзүнүн координаталары менен

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \qquad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

көрүнүшүндө туюнтулгандыктан, скалярдык көбөйтүүнүн 3^0, 4^0 касиеттерин пайдаланып

$$(\vec{a},\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i},\vec{k}) +$$
$$+ y_1x_2(\vec{j},\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j},\vec{i}) + z_1x_2(\vec{k},\vec{i}) + z_1y_2(\vec{k},\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k},\vec{k})$$

ээ болобуз. Мында ортогоналдык векторлор $(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{j},\vec{k}) = 0$, коллинеардуу бирдик векторлор $(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1$ скалярдык көбөйтүндүлөрүнө ээ болгондуктан,

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (13)$$

ээ болуп, ортогоналдык базиске карата координаталары менен берилген векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежесин табабыз. Ошентип, кайсы бир $R^2, R^3, ..., R^n$ сан мейкиндиктеринде ортонормалдык базистерге карата координаталары менен берилген эки векторду скалярдык көбөйтүү үчүн, алардын бир аттуу координаталарын көбөйтүп, суммалоо жетиштүү.

Мисалы, $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + k$ жана $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ векторлорун скалярдык көбөйтсөк, $(\vec{a},\vec{b}) = 4\cdot 6 + (-2)\cdot 3 + 1\cdot 2 = 20$ саны келип чыгат.

R^2 мейкиндигинде $\vec{i},\vec{j}$ ортонормалдык базисине карата $\vec{a}(x_1;y_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2)$ координаталуу векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү $(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$ көрүнүшүндө, ал эми R^n деги $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ ортонормалдык базисинде $\vec{a}\ (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\vec{b}\ (y_1; y_2; ...; y_n)$ координаталуу векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1\ y_1 + x_2\ y_2 + ... + x_n\ y_n \qquad (14)$$

көрүнүшүндө эсептелет.

Векторду өзүнө өзүн скалярдык көбөйтүү скалярдык квадрат деп аталып, $(\vec{a},\vec{a}) = a^2$ көрүнүшүндө жазылат. R^3 мейкиндигинде (13) эрежесинин жардамы менен $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, векторунун скалярдык квадраты $\vec{a}^{\,2} = (\vec{a},\vec{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ (15)

формуласы менен эсептелет. Ал эми (9) эрежесин пайдаланып,

$\vec{a}^{\,2} = (\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1 = |\vec{a}|^2$ экинчи теңдештикке ээ болобуз. Аларды тендештирсек

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \textit{же} \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (16)$$

(узундук оң болгондуктан тамырдын “+” белгиси алынды) формуласын алабыз. Демек ортонормалдашкан базисте координаталары менен берилген вектордун узундугу - координаталарынын квадраттарынын суммасынан квадраттык тамыр алуу менен эсептелет. R^n деги декарттык координаталар системасында $\vec{a}(x_1;x_2;...;x_n)$ векторунун узундугу $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}$ көрүнүшүндө эсептелет.

Эскертүү: *Векторлордун мейкиндигин скалярдык көбөйтүү эрежеси менен тартиптештирип, скалярдык квадратка негизделеген метриканы киргизүү менен метрикалык мейкиндикти түзүүгө болот.*

2.2.4 Векторлордун арасындагы бурчтун косинусу. Багыттоочу косинустар

Скалярдык көбөйтүүнүн аныктамасында $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$, $\varphi = (\vec{a},\hat{}\,\vec{b})$ эки вектордун арасындагы бурч болгондуктан, мындан

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \qquad (17)$$

формуласы келип чыгат ($\vec{a},\vec{b}$ векторлорун нөлдүк эмес векторлор деп эсептейбиз).

R^3 мейкиндигинде $\vec{a} = \{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2;y_2;z_2\}$ координаталары менен берилген векторлор үчүн (17) формуласын

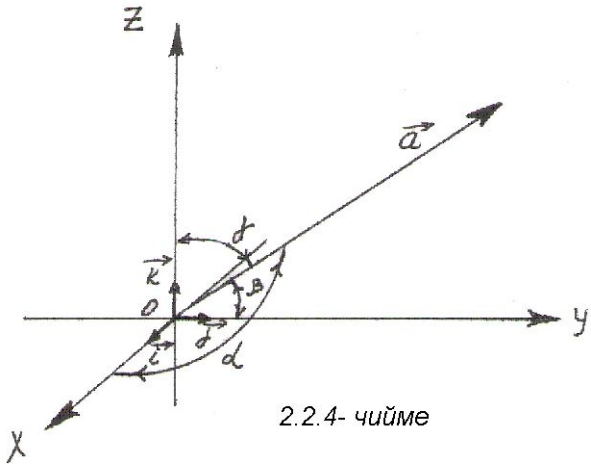
$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (18)$$

көрүнүшүндө жазабыз.

Мисалы: $\vec{a} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{i} = \vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = 6\vec{i} + \vec{j}$ векторлорунун арасындагы бурчтун косинусу

$$\cos\varphi = \frac{0\cdot2+1\cdot1+3\cdot0}{\sqrt{0^2+1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

санына барабар.



2.2.4- чийме

(18) формуласын пайдаланып, R^3 тө эркин алынган $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ вектору менен

$Ox,\ Oy,\ Oz$ координаттык окторунун арасындагы бурчтун косинусун

эсептейли *(2.2.4- чийме).* Айталы, $\vec{a}$ вектору Ox огу менен α, Oy огу менен β, Oz огу менен γ бурчтарын түзсүн.

Ox огу менен $\vec{a}$ векторунун арасындагы бурч $\vec{a}$ жана $\vec{i} = \{1;\ 0;\ 0\}$ векторлорунун арасындагы бурч менен тең болгондуктан, (18) формуласы боюнча

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot x_1 + 0\cdot y_1 + 0\cdot z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{x_1}{|\vec{a}|} \qquad (19)$$

ээ болобуз. Ушундай эле талкуулоолордун натыйжасында $\vec{j} = \{0;1;0\},\ \vec{k} = \{0;0;1\}$ болгондуктан,

$$\cos\beta = \frac{(\vec{a},\vec{j})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \qquad (20)$$

$$\cos\gamma = \frac{(\vec{a},\vec{k})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{z_1}{|\vec{a}|} \qquad (21)$$

формулаларына ээ болобуз.

(19) - (21) формулалары менен табылган бурчтардын косинустары, $\vec{a}$ векторунун координаттык окторго карата багыттоочу косинустары деген атты алышкан. Мисал катарында $\overrightarrow{n_0} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ бирдик векторунун багыттоочу косинустарын эсептеп көрөлү. Бирдик вектор болгондуктан $|\vec{n}_0| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ узундугуна ээ. Ошондуктан $\overrightarrow{n_0}$ вектору менен Ox огун арасындагы бурчтун косинусу $\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_0,\vec{i})}{|\vec{n}_0|\cdot|\vec{i}|} = \frac{x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\cdot 0}{1\cdot 1} = \frac{x}{1} = x$, Oy огу менен болгон бурчтун косинусу $\cos\beta = \frac{(\overrightarrow{n_0},\vec{j})}{|\vec{n}_0|\cdot|\vec{j}|} = \frac{y}{1} = y$, Oz огу менен болгон бурчтун косинусу

$\cos\gamma = \frac{(\overrightarrow{n_0},\vec{k})}{|\overrightarrow{n_0}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{z}{1} = z$ келип чыгып, $\overrightarrow{n_0}$ бирдик векторунун координаталары

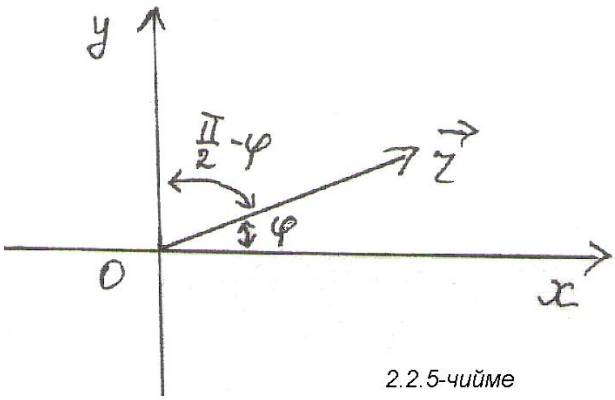
$\overrightarrow{n_0} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$ же

$\overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ көрүнүшүндө болорун көрөбүз. Мындан $|\overrightarrow{n_0}| = 1$ болгондуктан, анын узундугу катарында

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

теңдештиги аткарыларын көрөбүз. Ошентип каалагандай $\overrightarrow{n_0}$ бирдик векторунун координаттык окторго карата багыттоочу косинустары, анын координаталары болушат.

R^2 мейкиндигиндеги *(2.2.5-чийме)* Oxy координаттык тегиздигинде жайгашкан $\overrightarrow{n_0} = x\vec{i} + y\vec{j}$ бирдик векторунун Ox огу менен түзгөн бурчу φ болсо, Оу огу менен түзгөн бурчу $\frac{\pi}{2} - \varphi$ болот. Бул учурда $\vec{i} = \{1,\ 0\}$, $\vec{j} = \{0,\ 1\}$ болгондуктан,



2.2.5-чийме

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_0},\ \vec{i})}{|\overrightarrow{n_0}|\cdot|\vec{i}\,|} = \frac{x}{1} = x,$$

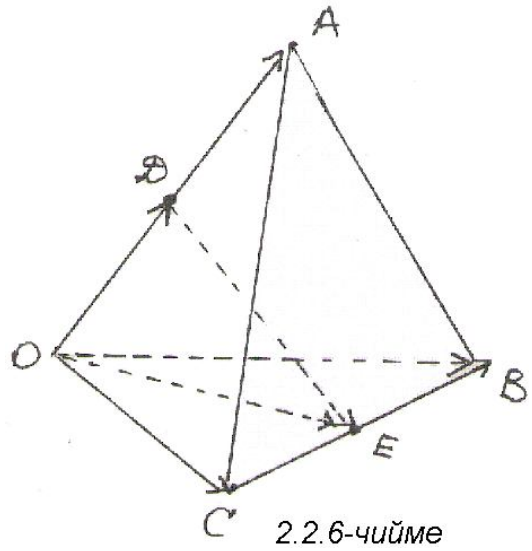
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_0},\ \vec{j})}{|\overrightarrow{n_0}|\cdot|\vec{j}\,|} = \frac{y}{1} = y$$

координаталарын табабыз. Ошондуктан R^2 деги каалагандай $\overrightarrow{n_0}$ бирдик векторун координаталары менен $\overrightarrow{n_0} = \{\cos\varphi;\ \sin\varphi\}$ же $\vec{n}_0 = \cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j}$ деп жазууга болот. Бул учурду R^3 мейкиндигиндеги Oxy тегиздиги деп элестетсек, $\overrightarrow{n_0}$ бирдик вектору Oz огуна ортогоналдуу (перпендикуляр) жайгашып, $\overrightarrow{n_0} = \{\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0\} = \{\cos\varphi;\ \sin\varphi\}$ көрүнүшүндө жазылган десе болот.

R^3 мейкиндигинде $\vec{a}(x; y; z)$ векторун

$\vec{i} = \{1;0;0\}$, $\vec{j} = \{0;1;0\}$, $\vec{k} = \{0;0;1\}$ базистик системага карата координаталарын багытточу косинустары менен

$x = |\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i})$, $y = |\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j})$, $z = |\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k})$ көрүнүшүндө жазабыз.



2.2.6-чийме

Жалпы учурда R^n мейкиндигиндеги $\vec{a}(x_1; x_2; ..., x_n)$ векторунун $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ортонормалдашкан базистик системасына карата координаталары $x_i = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos(\vec{a}, \hat{} \vec{e_i}) = \Pi p_{\vec{e_i}} \vec{a}, \quad i = 1, 2, ..., n$ көрүнүшүндө туюнтулат.

§ 2.1, § 2.2 баяндалган материалдарды бышыктоочу мисалдарды карайлы.

Мисалдар

1. Координаталары менен $M(1; -1; 3)$ жана $N(2; 0; 7)$ чекиттери берилсе, $\overrightarrow{MN}$ векторунун координаттык октордогу проекцияларын тапкыла.

Чыгаруу: ▷ $\overrightarrow{MN}$ векторунун Ox, Oy, Oz координаттык окторундагы проекциялары анын координаталары болгондуктан, аларды аныктайбыз. $\overrightarrow{MN}$ векторунун координатасы анын бүтүүчү учу N чекитинин координаталарынан M башталуу чекитинин координаталарын кемитүү менен аныкталгандыктан:

$$\Pi p_{Ox} \overrightarrow{MN} = 2 - 1 = 1, \quad \Pi p_{Oy} \overrightarrow{MN} = 0 - (-1) = 1,$$

$\Pi p_{Oz} \overrightarrow{MN} = 7 - 3 = 4$ жоопторун алабыз. ◁

2. $OABC$ тетраэдри берилген *(2.2.6-чийме).* Эгерде D жана E чекиттери OA жана BC кырларынын тең ортосу экендиги белгилүү болсо, анда $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ векторлор системасын базис деп эсептеп, ага карата $\overrightarrow{DE}$ векторунун координаталарын тапкыла.

Чыгаруу: ▷ Тетраэдрдин кырларын жана D, E чекиттерин байланыштыруучу кесиндилерди векторлор катарында түшүнсөк: $\Delta\, ODE$ - үч бурчтугунан $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$, ΔOCE үч бурчтугунан $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}$ теңдештиктерине ээ болобуз.

Маселенин шарты боюнча $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ болгондуктан, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ теңдештигинен $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ келип чыгып,

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ сызыктуу туюнтуусуна ээ болобуз. Аны $\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ көрүнүшүндө кайра жазсак, $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ базистик векторлорунун системасына карата $\overrightarrow{DE}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ координаталарына ээ вектор болорун көрөбүз.◁

3. $\overrightarrow{a_1}=\{-1;\,2;\,0\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{3;\,1;\,1\}$, $\overrightarrow{a_3}=\{2;0;1\}$, $\vec{a}=\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{a_3}$ векторлору берилсе:

а) $|\overrightarrow{a_1}|$ узундугун, $\overrightarrow{a_1}$ векторунун орту $\vec{a}_1^0$ векторун тапкыла.

б) $\cos(\overrightarrow{a_1}\,\hat{}\,\vec{j})$ - бурчтун косинусун аныктагыла.

в) $\vec{a}$ векторунун абцисасы x_a координатасын тапкыла.

г) $\Pi p_{\vec{j}}\,\vec{a}$ санын тапкыла.

Чыгаруу: ▷ **а)** $\overrightarrow{a_1}$ векторунун координаталары белгилүү болгондуктан, анын узундугу $\left|\overrightarrow{a_1}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$ саны болот.

а) $\overrightarrow{a_1}$ векторунун ортасы $\vec{a}_1^0=\frac{1}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|}\cdot\overrightarrow{a_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\overrightarrow{a_1}$ болгондуктан, координаталары боюнча теңдеп,

$\vec{a}_1^0=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0\right\}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}};\ 0\right\}$ ээ болобуз .

б) $\cos(\overrightarrow{a_1},\hat{}\,\vec{j})$ саны, Oy огуна карата $\overrightarrow{a_1}$ векторунун багыттоочу косинусу болгондуктан, (20) формуласынын негизинде $\cos(\overrightarrow{a_1},\hat{}\,\vec{j})=\frac{y_{a_1}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ жообуна ээ болобуз.

в) $\vec{a}=\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{a_3}$ (*)

теңдештигинен тиешелүү координаталары барабар болорун эске алып, $\vec{a}$ векторунун абциссасы $x_a=x_{a_1}-2x_{a_2}+\frac{1}{3}x_{a_3}=(-1)-2\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 2=-\frac{19}{3}$ саны экендигин табабыз. (*) ажыралышы $\vec{a}$ векторунун $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ базистик системага карата $\vec{a}=\{1;-2;\frac{1}{3}\}$ координаталарына ээ болорун көрсөтөт.

г) $\text{Пр}_{\vec{j}}\vec{a} = \text{Пр}_{Oy}\vec{a}$ болот, анткени $\vec{j}$ базистик вектору Oy огунда жайгашып, анын орту катарында кызмат кылат. $\vec{a}$ векторунун Oy огундагы проекциясы (4^{A}) формуласынын негизинде анын ординатасы болот. Демек, (*) теңдештигин ординаталарына карата теңдештирсек,

$y_a = y_{a_1} - 2y_{a_2} + \frac{1}{3}y_{a_3} = 2 - 2\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0$ санына ээ болуп, берилген $\vec{a}$ вектору Oy огуна ортогоналдуу (перпендикуляр) жайгашарын көрөбүз. ◁

4. $\vec{a}+\vec{b}$ жана $\vec{a}-\vec{b}$ векторлору өз ара перпендикуляр болушу үчүн, ар түрдүү деп эсептелген $\vec{a},\vec{b}$ векторлоруна кандай шарт коюлууга тийиш?

Чыгаруу: ▷ Ортогоналдык векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болгондуктан $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = 0$ аткарылууга тийиш. Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттерине таянып,

$$(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a},\vec{a}) + (\vec{b},\vec{a}) - (\vec{a},\vec{b}) - (\vec{b},\vec{b}) =$$
$$= (\vec{a},\vec{a}) - (\vec{b},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2$$ ээ

болобуз. Мындан ортогоналдык шарты аткарылуусу үчүн $\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 0$ же $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ болуп, $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун узундуктары барабар болушу керек деген шарт коюларын билебиз. ◁

5. $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу: ▷ Берилген $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлорунун координаталары $\vec{a}(-3;\ 2;\ 0)$, $\vec{b}(4;-2;\ 1)$ белгилүү болгондуктан,

$(\vec{a},\vec{b}) = (-3)\cdot 4 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 = -12 - 4 + 0 = -16$ ээ болобуз. ◁

6. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ жана алардын арасындагы бурч $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b}) = 60^0$ экендиги белгилүү болсо, $(\vec{a},\vec{b})$ скалярдык көбөйтүндүсүн эсептегиле.

Чыгаруу: ▷ Скалярдык көбөйтүндүнүн аныктамасы боюнча

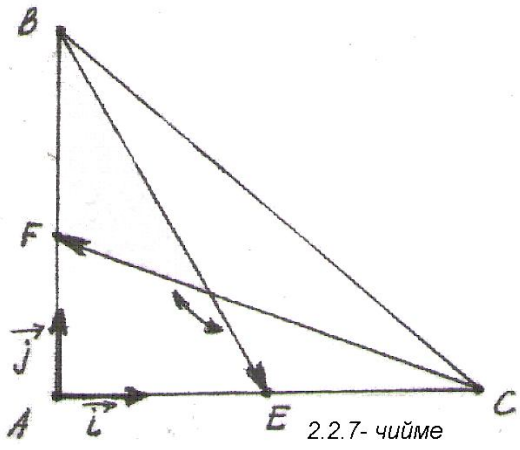
$(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 3\cdot 2\cdot\cos 60^0 = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$ санына барабар. ◁

7. $\left|\vec{a}\right| = 2\vec{i} + \alpha\vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ векторлору α кандай маани кабыл алганда ортогоналдуу болушат?

Чыгаруу: ▹Эки вектордун ортогоналдуулук шарты алардын скалярдык көбөйтүндүсүнүн $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ болушу эсептелгендиктен, координаталары менен берилген векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежеси боюнча

$(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot 1 + \alpha\cdot 3 = 2 + 3\alpha = 0$ шартына ээ болобуз. Мындан $2 + 3\alpha = 0$ же $\alpha = -\frac{2}{3}$ келип чыгат. Ошентип $\alpha = -\frac{2}{3}$ болсо гана, берилген $\vec{a}(2;2)$, $\vec{b}(1;3)$ векторлору өз ара перпендикуляр (ортогоналдуу) болушат.◃

8. $\vec{a} = \{2;\ -3\}$ векторуна ортогоналдуу бирдик векторлорду тапкыла.



2.2.7- чийме

Чыгаруу: ▹Изделүүчү бирдик векторлордун бирөөсү $\overrightarrow{n_0} = \{x_0;\ y_0\}$ болсун дейли. Анда ал $\vec{a}$ векторуна перпендикуляр болуп $(\vec{a},\ \overrightarrow{n_0}) = 2x_0 - 3y_0 = 0$ шартын канааттандырат. Экинчи жактан анын узундугу $\left|\overrightarrow{n_0}\right| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1$ болууга тийиш. Бул эки шартты бириктирсек,

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

эки x_0, y_0 белгисиздерине карата теңдемелер системасына ээ болобуз. Биринчисинен, $x_0 = \frac{3}{2}y_0$ маанисин таап экинчисине коюп, $y_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$ чечимдерин табабыз. Мындан $x_0 = \pm\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$ табылып, берилген $\vec{a}$ векторуна перпендикуляр эки бирдик

$\overrightarrow{n_{01}} = \left\{\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$, $\overrightarrow{n_{02}} = \left\{-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$ векторлорунун жашары келип чыгат. ◃

9. Тең капталдуу ΔABC тик бурчтуу үч бурчтугунун тар бурчтарынын чокуларынан жүргүзүлгөн медианалардын кесилишинен пайда болгон φ туюк бурчун тапкыла *(2.2.7-чийме).*

Чыгаруу: ▷ Тик бурчтуу ΔABC үч бурчтугунун жактарын жана жүргүзүлгөн медианаларын векторлор деп түшүнсөк, анда изделүүчү бурч $\varphi = (\overrightarrow{BE} \hat{,} \overrightarrow{CF})$ векторлорунун арасындагы бурчка барабар болорун көрөбүз.

Тең капталдуу жактардын (катеттердин) узундугун k санына барабар деп алып, тик бурчтуу A чокусуна тургузулган $\vec{i}, \vec{j}$ бирдик векторлорун колдонуп,

$$\overrightarrow{AC} = k\vec{i}, \quad \overrightarrow{AB} = k\vec{j}, \; AE = \frac{k}{2}\vec{i}, \; \overrightarrow{AF} = \frac{k}{2}\vec{j},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -k\vec{j} + \frac{k}{2}\vec{i} = \frac{k}{2}\vec{i} - k\vec{j},$$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = -k\vec{i} + \frac{k}{2}\vec{j}$ теңдештиктерине ээ болобуз. Ошентип $\vec{i}, \vec{j}$ векторлорунун базистик векторлор системасы катарында кабыл алып, $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ векторлорунун бул базиске карата координаталары $\overrightarrow{BE} = \left\{\frac{k}{2}; -k\right\}$, $\overrightarrow{CF} = \left\{-k; \frac{k}{2}\right\}$ болорун аныктайбыз. Бул векторлордун арасындагы бурчту (18) формуласына ылайык

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})}{\left|\overrightarrow{BE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CF}\right|} = \frac{\frac{k}{2} \cdot (-k) + (-k \cdot \frac{k}{2})}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (-k)^2} \cdot \sqrt{(-k)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}} = \frac{-k^2}{\sqrt{\frac{5k^2}{4}}\sqrt{\frac{5k^2}{4}}} = \frac{-k^2}{\frac{5k^2}{4}} = -\frac{4}{5}$$

эсептеп $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$ же $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ жообуна ээ болобуз. ◁

10. ΔABC үч бурчтугу $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 4)$, $C(6;\ 2)$ чокуларынын координаталары менен берилген, анын A чокусундагы ички бурчту тапкыла.

Чыгаруу: ▷ A чокусундагы ички бурч $\overrightarrow{AB}$ *менен* $\overrightarrow{AC}$ векторлорунун арасындагы φ бурчуна барабар болот. Берилген векторлордун

$\overrightarrow{AB} = \{3-1;\ 4-2\} = \{2;\ 2;\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6-1;\ 2-2\} = \left\{5;\ \ 0\right\}$ координаталарын жана

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2^2+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$ узундуктарын табабыз.

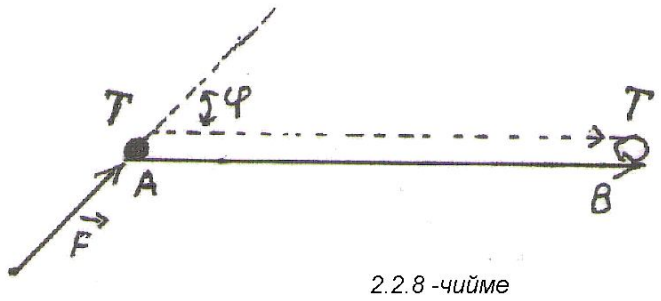
(18) - формуланын негизинде алардын арасындагы бурчтун косинусу

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|} = \frac{2\cdot 5+2\cdot 0}{2\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ болуп,

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^0$$

келип чыгат.◁

11. Турактуу $\vec{F}$ күчүнүн аракети менен A чекитинде жайгашкан тело түз сызыктуу кыймылга келип, B чекитине которулары белгилүү болсо, анда $\vec{F}$ күчүнүн аткарган жумушун эсептегиле *(2.2.8. -чийме).*



2.2.8 -чийме

Чыгаруу: ▷ $\vec{F}$ күчүнүн аткарган жумушу $A = (\vec{F},\vec{AB})$ скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар болору белгилүү. Бул скалярдык көбөйтүндүнүн сандык мааниси же аткарылган жумуш $A = (\vec{F},\vec{AB}) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{AB}\right| \cdot \cos(\vec{F},\hat{}\ \vec{AB}) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{AB}\right| \cdot \cos\varphi$ санына барабар.◁

§ 2.3 Вектордук көбөйтүү

2.3.1 Вектордук көбөйтүүнүн аныктамасы

Эки векторлорду скалярдык көбөйтүүдө аларды мүнөздөөчү сандык чоңдуктар – векторлордун узундугу жана арасындагы бурчтун косинусу көбөйтүлүп, көбөйтүүнүн натыйжасы сан болгон эле. Эки $\vec{a},\vec{b}$ векторлорунун вектордук көбөйтүүнүн натыйжасы, үчүнчү бир жаңы вектор болот. Ошентип скалярдык көбөйтүүдө эки векторлор менен мүнөздөлүүчү кубулуштардын бири – бирине тийгизген таасирлерине сандык баа берилсе, вектордук көбөйтүүдө багыттык өзгөрүүлөрүнө баа берилет.

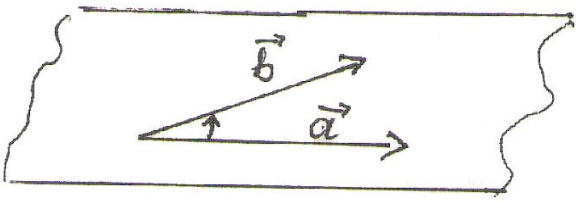
2.3.1 ***Аныктама.*** *Эки $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсү деп $[\vec{a},\vec{b}]$ же $\vec{a}\times\vec{b}$ символу менен белгиленген, төмөндөгүдөй үч шартты канааттандырган үчүнчү бир жаңы векторду айтабыз (жазуу ыңгайлуулугуна карап, кээде аны бир тамга менен көрсөтүү үчүн $\vec{c}$ деп белгилейбиз):*

1. $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ *векторунун узундугу*

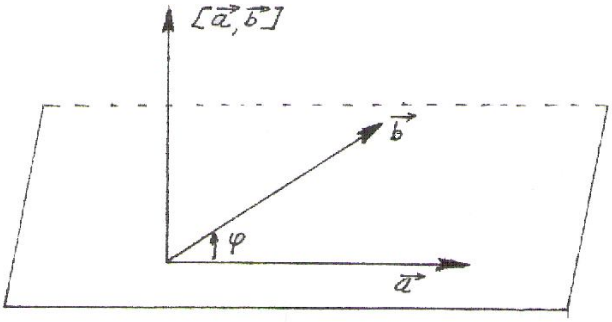
$$|\vec{c}|=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi \qquad (22)$$

санына барабар. φ *деп* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *векторлорунун арасындагы* $\vec{a}$ *дан* $\vec{b}$ *га карай бурулган бурчту алабыз (2.3.1-чийме).*

2. $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ *вектору* $\vec{a}$ *жана* $\vec{b}$ *векторлоруна (б.а.* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *векторлору жайгашкан тегиздикке) перпендикуляр болууга тийиш (2.3.2-чийме).*



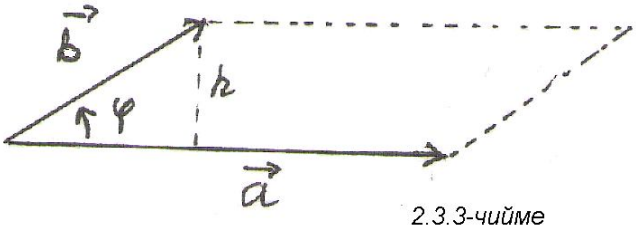
2.3.1-чийме



2.3.2.-чийме

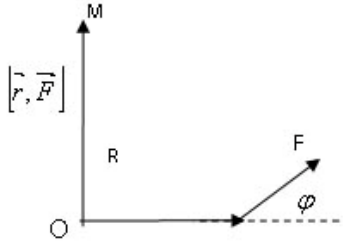
3. $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ *векторунун учунан караганда* $\vec{a}$ *векторунан* $\vec{b}$ *векторуна карай багытталган кыска бурулуу жолу же* φ *бурчу саат стрелкасына каршы багытта болгондой көрүнүп турууга тийиш .*

Аныктаманын **3 – шартын канааттандырган** $\vec{a}, \vec{b}$ *жана* $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ **үч векторлорун «оң үчтүктү» түзөт дейбиз.** Оң үчтүктү түзгөн векторлорду “оң кол” эрежеси менен $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ – бармак, $\vec{a}$ – сөөмөй, $\vec{b}$ - ортоң кол манжаларын абалдарында деп элестетебиз.



2.3.3-чийме

Эгерде $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ **векторунун учунан караган кезде** $\vec{a}$ **дан** $\vec{b}$ **га карай багытталган кыска бурулуу жолу саат стрелкасынын багытында болгондой көрүнсө, анда үч** $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a},\vec{b}]$ **векторлорун «сол үчтүктү»** түзөт дейбиз. Сол үчтүктү “сол кол” эрежесинде $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ – бармактын, $\vec{a}$ - сөөмөйдун, $\vec{b}$ - ортоң кол манжаларын абалында тургандай элестетебиз.



2.3.3.а-чийме

Жактары $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору болгон параллелограммдын аянты

$S_{ПГ} = \left|\vec{a}\right| \cdot h$ болуп, $\sin\varphi = \frac{h}{|\vec{b}|}$ же $h = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$ ден, $S_{ПГ} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ болору келип чыгат*(2.3.3-чийме).* Демек, вектордук көбөйтүндү болгон $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ векторунун (22) узундугу геометриялык мааниде, жактары $\vec{a}, \vec{b}$ векторлору болгон параллелограммдын аянтына барабар болот $S_{ПГ} = \left| \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \right| = |\vec{c}|$.

Механикалык жактан вектордук көбөйтүүнү $\vec{F}$ күчүнүн 0 чекитине салыштырмалуу моментинин чоңдугун табууда колдонобуз *(2.3.3.а-чийме).*

Чынында эле O чекити, күч жана аракет башталган А чекити бир тегиздикте жайгашышса, анда $\vec{r} = \vec{OA}, \vec{F}, \vec{OM}$ векторлору оң үчтүктү түзүшүп, вектордук көбөйтүндү катарында аныкталган $[\vec{r}, \vec{F}]$ векторунун узундугу болгон $M_0 = |[\vec{r}, \vec{F}]| = |\vec{OM}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\varphi$ саны, $\vec{F}$ күчүнүн O чекитине салыштырмалуу моментин эсептөөчү формула болот.

2.3.2 Вектордук көбөйтүүнүн касиеттери

1^0. *Эки вектордун вектордук көбөйтүндүсү нөлдүк вектор болушу үчүн, сөзсүз бул эки векторлордун бирөөсү нөлдүк вектор же болбосо экөөсү коллинеардуу векторлор болушу керек.*

▹Эгерде $\vec{a}, \vec{b}$ векторлору коллинеардуу болушса, анда алардын арасындагы бурч $0°$ же болбосо $\pi = 180°$ болушу гана мүмкүн, анткени алар бир түздө же параллель түздөрдө жатышып, бир багытта же карама - каршы багыттарда гана жайгаша алышат. Бул учурда $\sin 0° = \sin\pi = 0$ болгондуктан, (22) формуласынан $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ ээ болобуз.◃

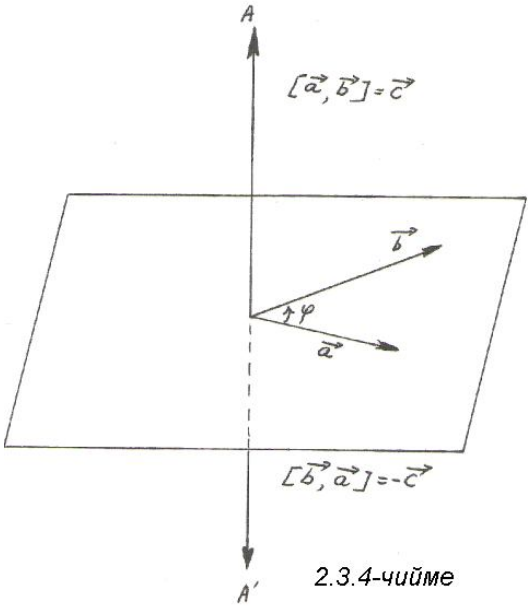
Нөлдүк вектор каалаган векторго коллинеардуу деп эсептелгендиктен, векторлордун бирөөсү нөлдүк вектор болгон учурда да $[\vec{0}, \vec{b}] = \vec{0} = [\vec{a}, \vec{0}]$ болот.

2^0. *Вектордук көбөйтүү коммутативдүү эмес*

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right] \qquad (23)$$

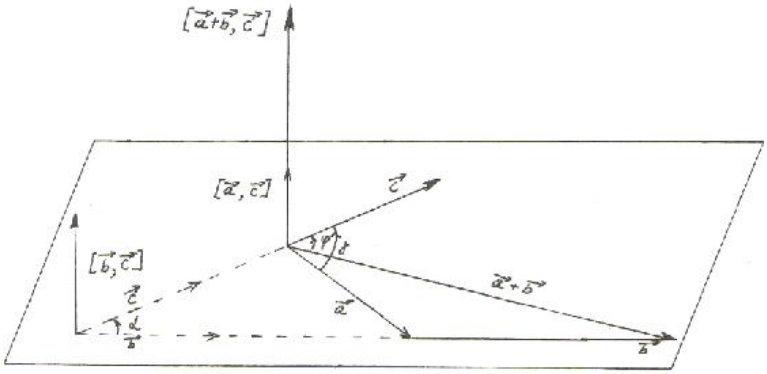
▹Чындыгында эле $\sin\varphi$ так функция болгондуктан, бурчту эсептөө багыты өзгөргөндө $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ болуп, $\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ жана $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ векторлорунун узундуктарын (22) формуласы боюнча эсептегенде, $\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$

векторунун узундугу терс сан болгондой сезилет. Узундук ар дайым оң сан болгондуктан, $\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ көбөйтүндүсүндө φ бурчун $\vec{b}$ векторунан $\vec{a}$ векторуна карай кыска бурулуу жолундагы саат стрелкасына каршы же оң багытты сактап калуу үчүн, φ бурчуна тегиздиктин төмөн жагынан гана кароого туура келет *(2.3.4-чийме).* Демек, $[\vec{a},\vec{b}]$ векторун түзүүдө $\varphi=(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ бурчун тегиздиктин үстүнкү жагындагы A чекитинен карап оң дейбиз, $[\vec{b},\vec{a}]$ векторун түзүүдө $\varphi=(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a})$ бурчун тегиздиктин төмөнкү жагындагы A' чекитинен карап оң дейбиз. Иш жүзүндө $[\vec{a},\vec{b}]$ жана $[\vec{b},\vec{a}]$ вектордук көбөйтүүлөрү бири - бири менен байланышпаган эки башка амал сыяктуу саналып, алардын арасындагы бурч эки учурда тең оң багытын сактап калат, б.а. жогору жагынан караганда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ тартибинде жазылган векторлор оң үчтүктү, ошондой эле төмөн жагынан караганда $\vec{b}$, $\vec{a}$, $[\vec{b},\vec{a}]$ тартибинде жазылган векторлор да оң үчтүктү түзүшөт.



2.3.4-чийме

Демек, (23) барабардыгы аткарылып, $[\vec{a},\vec{b}]$ жана $[\vec{b},\vec{a}]$ векторлору багыттары карама – каршы, бирок узундуктары барабар векторлор болушат



2.3.5 – чийме

$[\vec{a},\vec{b}]$ = - $[\vec{b},\vec{a}]$ жана $\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right| = \left|\left[\vec{b},\ \vec{a}\right]\right|$. ◁

3°. Вектордук көбөйтүү кошуу амалына карата бөлүштүрүүчүлүк касиетине ээ: $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$. (24)

Далилдөө:

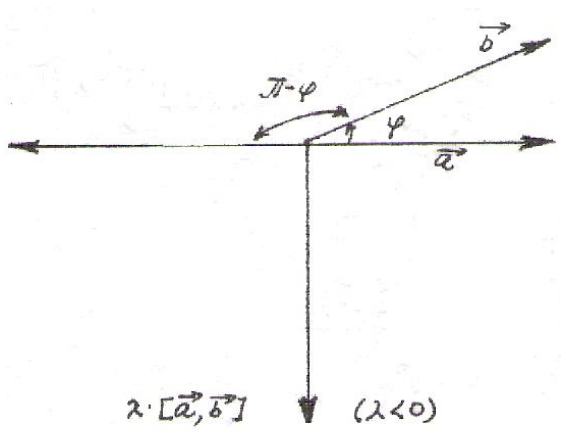
▷ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}$ эки векторлору

бир тегиздикте жайгашып, үчүнчү $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]$ вектору менен оң үчтүктү түзүшкөндүктөн, $\vec{a}$, $\vec{c}$ векторлору жана $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлору да бир тегиздикте жайгашып, тиешелүү түрдө $[\vec{a},\vec{b}]$ вектору менен оң үчтүктү түзүшөт *(2.3.5.-чийме).*

Бул касиетти геометриялык мааниде жактары $\vec{a}$, $\vec{c}$ жана $\vec{b},\vec{c}$ векторлору болгон параллелограммдардын аянттарынын суммасы, жактары $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлору болгон параллелограммдын аянтына барабар деп түшүнөбүз. Жалпы учурда

$$\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n,\vec{c}\right]=$$
$$=\left[\vec{a}_1,\vec{c}\right]+\left[\vec{a}_2,\vec{c}\right]+...+\left[\vec{a}_n,\vec{c}\right]$$

болот.◁



2.3.6.-чийме

4^0. λ көбөйтүүчүсүн (санын) вектордук көбөйтүүнүн сыртына чыгарууга болот

$$\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]. \qquad (25)$$

▷ $\lambda=0$ болсо, (25) теңдештиги аткарылары белгилүү, ал эми $\lambda>0$ болсо, $\vec{a}$ же $\vec{b}$ векторлорунун бирөөсүнүн узундугу λ эсе узарып (кыскарып), арасындагы φ бурчу өзгөрбөйт. Натыйжада $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ векторунун узундугу λ эсе узарып (кыскарып), (25) тендештиги аткарылат. $\lambda<0$ болгондо ушундай эле абал тегиздиктин төмөн жагына карай багытталган $\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ векторуна карата туура болот *(2.3.6-чийме).*◁

2.3.3 Вектордук көбөйтүүнү координаталары боюнча аткаруу

R^3 мейкиндигиндеги декарттык координаталар системасынын ортонормалдык $\vec{i}=\{1;0;0\}$, $\vec{j}=\{0;1;0\}$, $\vec{k}=\{0;0;1\}$ базистик системасында координаталары менен $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ векторлору берилсин. Аларды вектордук көбөйтүүнүн касиеттерине таянып көбөйтсөк,

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \ x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right]\overset{3^0,4^0}{=}x_1x_2\left[\vec{i},\vec{i}\right]+x_1y_2\left[\vec{i},\vec{j}\right]+x_1z_2\left[\vec{i},\vec{k}\right]+$$
$$+y_1x_2\left[\vec{j},\vec{i}\right]+y_1y_2\left[\vec{j},\vec{j}\right]+y_1z_2\left[\vec{j},\vec{k}\right]+z_1x_2\left[\vec{k},\vec{i}\right]+z_1y_2\left[\vec{k},\vec{j}\right]+z_1z_2\left[\vec{k},\vec{\kappa}\right]$$

ээ болобуз. Коллинеардуу жана ортогоналдуу бирдик векторлор катарында

$$\left[\vec{i},\vec{i}\right]=\left[\vec{j},\vec{j}\right]=\left[\vec{k},\vec{k}\right]=\vec{0} \quad \textit{жана} \quad \left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k};$$

$$\left[\vec{j},\vec{i}\right]=-\vec{k};\ \left[\vec{i},\vec{k}\right]=-\vec{j};\ \left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j};$$

$\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i};\ \left[\vec{k},\vec{j}\right]=-\vec{i}$ вектолоруна барабар болгондуктан,

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=x_1y_2\cdot\vec{k}-x_1z_2\cdot\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}-z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=$$
$$=(y_1z_2-z_1y_2)\cdot\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k} \qquad (26)$$

натыйжасына ээ болобуз. (26) формуласын эске оңой тутуу үчүн, аны аныктагыч көрүнүшүндө төмөндөгүдөй жазууга болот:

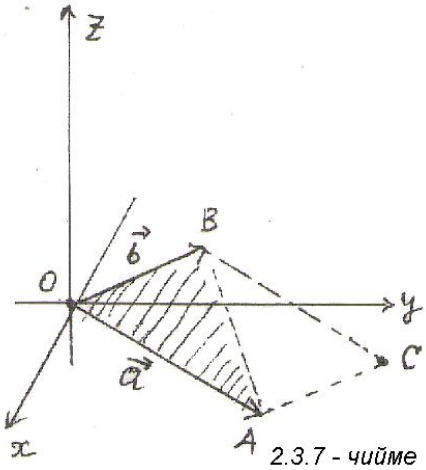
$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (27)$$

Мисалдар

1. Жактары $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ векторлору болгон параллелограммдын аянтын тапкыла.

Чыгаруу: ▹ Изделүүчү аянт S= $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ болгондуктан, берилген векторлордун вектордук көбөйтүндүсүн табабыз. (27) формуласын пайдаланып,

$$\left[\vec{a},\vec{в}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=\vec{i}(-1)+2\cdot(-1)\vec{j}+1\cdot1\cdot\vec{k}-2\cdot\vec{k}-(-1)\cdot1\cdot\vec{i}-1\cdot(-1)\vec{j}=$$
$$=-\vec{j}-\vec{k}$$



2.3.7 - чийме

векторун табабыз. Анын узундугу

S $=\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

параллелограмдын аянты болот .◃

2. Чокулары $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $0(0;0)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын эсептегиле *(2.3.7- чийме).*

Чыгаруу: ▹ Үч бурчтук Oxy координаттык тегиздигинде жайгашкандыктан, (27) формуласын колдонуу үчүн, үчүнчү координатасын $z=0$ деп эсептейбиз. ΔOAB үч бурчтугунун аянты $OACB$ параллелограммынын аянтынын тең жарымына барабар.

Параллелограммдын аянты

$S_{OACB}=\left|\left[\vec{OA},\vec{OB}\right]\right|$ болгондуктан, $\left[\vec{OA},\vec{OB}\right]$ вектордук көбөйтүндүсү болгон векторду табабыз.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\{x_1;y_1;0\},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}=\{x_2;y_2;0\}$ болгондуктан,

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & 0\\ x_2 & y_2 & 0\end{bmatrix}=(x_1y_2-y_1x_2)\cdot\vec{k}$$ ээ болобуз.

Анын узундугу $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\sqrt{0^2+0^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}=|x_1y_2-y_1x_2|$ эсептелип (оң мааниси алынат), үч бурчтуктун аянты $S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{OACB}=\frac{1}{2}\cdot|x_1y_2-y_1x_2|$ келип чыгат. ◃

3. Чокулары $A(0;0)$, $B\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $C(1;0)$ болгон үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Чыгаруу: ▹ Жогорудагы мисалда келтирип чыгарган формула боюнча үч бурчтуктун аянты

$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}|x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2|$ көрүнүшүндө эсептелип,

$B(x_1;y_1)=B\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $C(x_2;y_2)=C(1;0)$

координаталуу чекиттер десек,

$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}$ - саны изделген аянт болот. ◃

4. $\vec{a}=\{1;2;-1\}$, $\vec{b}=\{5;4;3\}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу: ▹ (27) - формуланы колдонуп,

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & 4 & 3\end{bmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=10\vec{i}-8\vec{j}-6\vec{k}$$ векторун

табабыз, аны координаталары менен $[\vec{a},\vec{b}]=\{10;\ -8;\ -6\}$ көрүнүшүндө жазууга болот. ◃

5. Эгерде $\vec{a}\perp\vec{b}$ жана $\left|\vec{a}\right|=1,\ \left|\vec{b}\right|=2$ болсо, $\left[2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\right]$ векторунун узундугун тапкыла.

Чыгаруу: ▹ Вектордук көбөйтүүнүн касиеттерин пайдаланып,

$$\left[2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},\vec{a}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\vec{a}\right]-\left[\vec{b},\vec{b}\right]=2\cdot\vec{0}+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\vec{o}=3\left[\vec{a},\vec{b}\right]$$

векторуна ээ болобуз. Анын узундугу

$$\left|\ \left[2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\right]\ \right|=3\left|\ \left[\vec{a},\vec{b}\right]\ \right|=3\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=3\cdot1\cdot2\cdot\sin 90^0=6\cdot1=6$$

саны болот. ◃

6. Чокулары $A(0;1)$, $B(4;\ 5)$, $C(6;-1)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

Чыгаруу: ▹ Үч бурчтуктун бир да чокусу координата башталмасына дал келбегендиктен, 2 - мисалда келтирип чыгарылган үч бурчтуктун аянтын эсептөө формуласын пайдалана албайбыз.

Үч бурчтуктун жактары $\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\{4-0;5\ -4\}=\{4;\ \ 4\},\\ \overrightarrow{AC}=\{6-0;\ -1-1\}=\{6;\ -2\}\end{array}$

координаталуу векторлор болот десек, анда ΔABC нын аянты

$S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}\left|\ \left[\vec{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\ \right|$ санына барабар болот. Ошондуктан аларды вектордук көбөйтүп,

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 4 & 0\\ 6 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 4\\ 6 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=(-8-24)\cdot\vec{k}=-32\vec{k}$$ векторун табабыз.

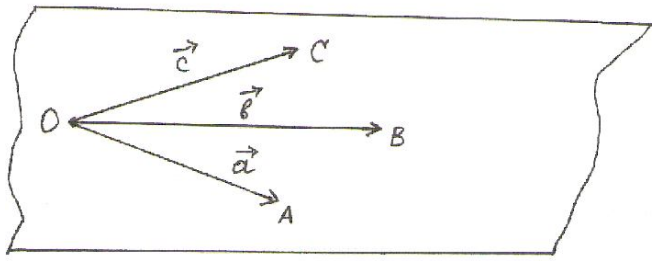
Анын узундугу $\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right|=\sqrt{0^2+0^2+(-32)^2}=32$ саны болуп, изделген аянт

$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$ аянт бирдигине ээ. ◁

§ 2.4 Векторлорду аралаш көбөйтүү

2.4.1 Аралаш көбөйтүү түшүнүгү жана аны геометриялык чечмелөө

Үч $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлору берилсин. Алардын экөөсүн вектордук көбөйтсөк жаңы $[\vec{a}, \vec{b}]$ вектору келип чыгат. Келип чыккан векторду $\vec{c}$ векторуна скалярдык көбөйтсөк $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ саны келип чыгат. Бул санды $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үч векторлорунун аралаш көбөйтүндүсү деп $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ символу менен белгилейбиз, б.а.

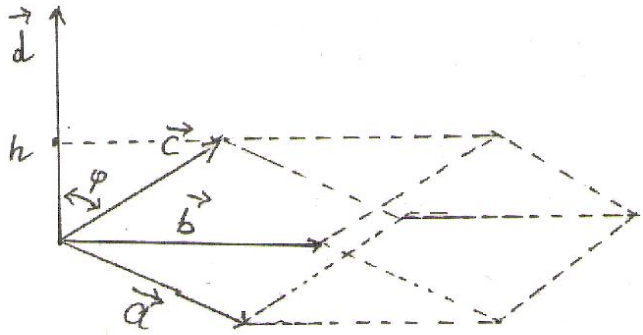


2.4.1-чийме

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}). \qquad (28)$$

Берилген векторлорду бир О чекитине которуп куралы *(2.4.1-чийме).*

Эгерде $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлорунун бүтүүчү учтары А, В, С жана башталма О чекиттеринин төртөөсү тең бир тегиздикте жайгашып калышса, анда бул үч векторлор компланардуу векторлордун тобун түзүшөт. Бул учурда алардын аралаш көбөйтүндүсү нөлгө $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ тең болот, анткени аныктама боюнча $[\vec{a}, \vec{b}]$ вектору $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлоруна перпендикуляр, ошондуктан алар жайгашкан тегиздикке жана тегиздикте жаткан $\vec{c}$ векторуна да перпендикуляр болуп, скалярдык көбөйтүндүсү



2.4.2-чийме

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0 \qquad (29)$$

болот. Бул (29) шарты үч вектордун компланардуулук шарты деп аталат.

Эгерде бул төрт О,А,В,С чекиттери бир тегиздикте жайгашпаган болсо, анда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлору компланардуу эмес же бир тегиздикте

жайгашпаган векторлор болушуп, алардын жардамы менен кырлары $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ болгон параллелепипед кура алабыз *(2.4.2-чийме).*

$\vec{a}, \widehat{b}$ векторлорун вектордук көбөйтүндүсү аларга перпендикуляр $\vec{d}$ вектору болсун $\vec{d}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. $\vec{d}$ векторунун узундугу S=$\left|\vec{d}\right|=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ кырлары $\vec{a}$, $\vec{b}$ болгон параллелограммдын аянтына барабар. $\vec{c}$ векторунун $\vec{d}$ векторуна түшүрүлгөн проекциясы болгон $h=\Pi p_{\vec{d}}\vec{c}$ саны, курулган параллелепипеддин бийиктиги болот. Скалярдык көбөйтүүнүн (10) эрежесине ылайык аралаш көбөйтүү $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\ \vec{c}\right)=(\vec{d},\vec{c})=\left|\vec{d}\right|\cdot\Pi p_{\vec{d}}\vec{c}=S\cdot h=V$ – курулган параллелепипеддин көлөмүнө барабар болот.

Жалпы учурда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлорунун аралаш көбөйтүндүсүн

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=\pm V \qquad (30)$$

кырлары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлору болгон параллелепипеддин «±» белгидеги көлөмүнө барабар дейбиз. Эгерде $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлору оң үчтүктү түзүшсө (φ тар бурч болгондо), «+» белгисин, ал эми сол үчтүктү түзүшсө (φ кең бурч болгондо), $\vec{d}$ вектору карама - каршы багытка өзгөргөндүктөн, « - » белгисин алабыз . Эки учурда тең вектордун жайгашуу абалдарын эске алып, табылган V көлөмүнүн сандык маанисин оң сан деп эсептейбиз.

Ошентип, векторлордун аралаш көбөйтүндүсү векторлор бир үчтүктө турганда гана көбөйтүү иреттеринен көз каранды болбойт. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$; $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$; оң үчтүктөрдү түзүшкөндүктөн,

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\ \vec{b}),$$

ал эми $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$; $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$; $\vec{c},\vec{b}\ \vec{a}$; сол үчтүктү түзүшүп,

$(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=(\vec{c},\vec{b}\ \vec{a})$ орун алат. Ар түрдүү үчтүктөргө кирген учурда векторлорду аралаш көбөйтүүлөр

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\ \vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=$$
$$=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{c},\vec{b}\ \vec{a})$$ байланышында болушат.

2.4.2 Аралаш көбөйтүүнү координаталар аркылуу жүргүзүү

R^3 мейкиндигиндеги декарттык координаталар системасынын $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисинде үч $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{в}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ векторлору

координаталары менен берилсин. Биринчи экөөсүн вектордук $[\vec{a},\vec{в}]$ көбөйтүүнүн натыйжасында келип чыккан төртүнчү векторду курсак, ал (26) эрежесине ылайык

$[\vec{a},\vec{в}]=\{y_1z_2-z_1y_2;x_2z_1-x_1z_2;x_1y_2-y_1x_2\}$ координаталарына ээ болот. $[\vec{a},\vec{в}]$ векторун үчүнчү $\vec{c}$ векторуна скалярдык көбөйтүү (13) формуласы боюнча эсептелгендиктен, аралаш көбөйтүүнү координаталары боюнча аткарып,

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=([\vec{a},\vec{в}],\vec{c})=x_3(y_1z_2-z_1y_2)+y_3(x_2z_1-x_1z_2)+z_3(x_1y_2-y_1x_2)=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-$$

$$-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

көрүнүшүндөгү санга ээ болобуз.

Аны $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$ (31)

үчүнчү тартиптеги аныктагыч катарында эстеп калабыз.

Мисалдар

1. $\vec{a}=\{7;4;6\}$, $\vec{в}=\{2;1;1\}$, $\vec{c}=\{19;11;17\}$ векторлорун бир тегиздикте жайгашып компланардуу болорун көрсөтөлү.

Чыгаруу: ▹ Компланардуулуктун (29) шарты боюнча текшерсек,

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\begin{vmatrix}7 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 1\\ 19 & 11 & 17\end{vmatrix}=7\cdot1-17+2\cdot11\cdot6+4\cdot1\cdot19-19\cdot6\cdot1-7\cdot1\cdot11-2\cdot4\cdot17=$$

$$=119+132+76-114-77-136=0$$

алардын компланардуу экендигине күбө болбуз. ◃

2. $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлору оң үчтүктү түзүшүп: $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $|\vec{a}|=|\vec{в}|=2$, $|\vec{c}|=5$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=120^0$ экендиги белгилүү болсо, $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ аралаш көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу: ▹ $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$ болгондуктан $\vec{c}$ вектору менен $[\vec{a},\vec{в}]$ вектору багытташ коллинеардуу векторлор болушуп, арасындагы бурч 0^0 ка тең болот. Ошондуктан

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=([\vec{a},\vec{в}],\vec{c})=|[\vec{a},\vec{в}]|\cdot|\vec{c}|\cdot cos0^0=$$

$=|\,[\vec{a},\vec{в}]\,|\cdot5\cdot1=5|\,[\vec{a},\vec{в}]\,|=5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin120^0=5\cdot2\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ келип чыгат. ◃

3. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ оң үчтүктү түзүшкөн өз ара перпендикуляр бирдик векторлор болушса, $\left(\vec{i}+\vec{j},\vec{j}-\vec{k},\vec{k}\right)$ аралаш көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу: ▹Вектордук жана скалярдык көбөйтүүлөрдүн касиеттерин эске алып,

$$\left(\vec{i}+\vec{j},\vec{j}-\vec{i},\vec{k}\right)=\left(\left[\vec{i}+\vec{j},\vec{j}-i\right],\vec{k}\right)=(\left[\vec{i},\vec{j}\right]-\left[\vec{i},\vec{i}\right]+\left[\vec{j},\vec{j}\right]-\left[\vec{j},\vec{i}\right],\vec{k})=$$
$$=(\vec{k}-0+0-(-\vec{k}),\vec{k})=(2\vec{k},\vec{k})=2(\vec{k},\vec{k})=2\cdot|\vec{k}|^2=2\cdot1=2$$

аралаш көбөйтүүнүн сандык маанисин табабыз.◃

4. Кырлары $\vec{a}=\{-2;-1;-1\}$, $\vec{в}=\{4;\ 3;\ 1\}$ жана $\vec{c}=\{1;\ 2;\ 3\}$ векторлору болгон параллелепипеддин көлөмүн тапкыла

Чыгаруу: ▹V$=\pm(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ болгондуктан,

$$\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)\overset{(30)}{=}\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-12+11-5=-6$$ келип

чыгат. Ал оң белгиде алынган V$=-(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=-(-6)=6$ көлөм бирдигине барабар.◃

5. Чокулары A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1) жана Д(1;2;3) чекиттери болгон пирамиданын көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу: ▹Бул пирамиданын негизин жана каптал беттерин үч бурчтуктар түзүшкөндүктөн, анын көлөмү кырлары $A\vec{B},A\vec{C},A\vec{Д}$ векторлору болгон параллелепипеддин көлөмүнүн $\frac{1}{6}$ бөлүгүнө барабар. Демек, изделүүчү көлөм

V$=\pm\frac{1}{6}\left(A\vec{B},A\vec{C},A\vec{Д}\right)$ көрүнүшүндө табылат.

$A\vec{B}=\{-1;-1;\ 6\}$, $A\vec{C}=\{-2;\ 0,\ 2\}$, $A\vec{Д}=\{0;\ 0;\ 4\}$координаталарына ээ, анда

$$(A\vec{B},A\vec{C},A\vec{Д})\overset{30}{=}\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-8$$ келип чыгып, изделүүчү

көлөм

V$=-\frac{1}{6}\left(A\vec{B},A\vec{C},A\vec{Д}\right)=-\frac{1}{6}\cdot(-8)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ көлөм бирдигине барабар («-» белгисин алдык).◃

2.4.3 Кош вектордук көбөйтүү

Берилген $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлорунун экөөсүн вектордук $[\vec{в},\vec{c}]$ көбөйтүп, келип чыккан көбөйтүндү векторду кайра $\vec{a}$ вектору менен вектордук көбөйтүү $[\vec{a},[\vec{в},\vec{c}]]$, кош вектордук көбөйтүү деп аталат.

Кош вектордук көбөйтүүнүн натыйжасы да вектор болуп, ал $\vec{a}$ жана $[\vec{в},\vec{c}]$ векторлоруна перпендикуляр абалда жайгашат. Ошондуктан кош вектордук көбөйтүндүнүн натыйжасында түзүлгөн вектор $\vec{в}$ *менен* $\vec{c}$ векторлору жайгашкан тегиздикке таандык болуп, бул векторлор аркылуу сызыктуу туюнтулуп, $[\vec{a},[\vec{в},\vec{c}]]=\vec{в}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{в})$ көрүнүшүндөгү ажыралышка ээ болорун көрсөтүүгө болот.

Көнүгүүлөр

2.1. $ABCDA'B'C'D'$-параллелепипединде $\vec{AB},\vec{AD},\vec{AA}$ кырлары тиешелүү түрдө $\vec{m},\vec{n},\vec{p}$ векторлору менен белгиленсе,

а) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; б) $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-\vec{p}$;

в) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$ векторлорун кургула.

2.2 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ векторлору берилсе, $3\vec{a}_1$, $\frac{1}{2}\vec{a}_2$, $\vec{a}_1+2\vec{a}_2$, $\frac{1}{2}\vec{a}_1-\vec{a}_2$ векторлорун кургула.

2.3. $\vec{AD},\vec{BE}$ жана $\vec{CF}$ векторлору ΔABC үч бурчтугунун медианалары болушса, $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=0$ экендигин далилдегиле.

2.4. $ABCD$ параллелограммында диагоналдардын кесилишүү чекити О, жактары $\vec{AB}=\vec{a},\vec{AD}=\vec{в}$ векторлору болсо, анда $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC},\vec{OD}$ векторлорун $\vec{a}$ жана $\vec{в}$ векторлору менен туюнткула.

(Жообу: $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB},\ \vec{OC}=-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$)

2.5. $ABCDEF$ - туура алты бурчтугунун жактарын $\vec{AB}=\vec{p},\ \vec{BC}=\vec{q}$ векторлору катарында алып, $\vec{CD},\vec{DE},\vec{EF},\vec{FA},\vec{AC},\vec{AD}$ жана $\vec{AE}$ векторлорун $\vec{p},\vec{q}$ векторлору аркылуу туюнткула.

(Жообу:
$\vec{CD}=\vec{q}-\vec{p},\ \vec{DE}=-\vec{p},\ \vec{EF}=-\vec{q},\ \vec{EA}=\vec{p}-\vec{q},\ \vec{AC}=\vec{p}+\vec{q},\ \vec{AD}=2q,\ \vec{AE}=2\vec{q}-\vec{p}.$)

2.6. ΔABC үч бурчтугунун медианалары Р чекитинде кесилишет. Мейкиндикте каалагандай эркин алынган О чекити берилсе,

$\vec{OP}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$ барабардыгы орун аларын далилдегиле.

2.7. Төмөндөгү векторлордун тобунун сызыктуу көз каранды системаны түзөрүн далилдегиле:

а) Эки $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ векторлорунун тобу коллинеардуу болушса гана, б.а багытташ же карама - каршы багытта болсо гана сызыктуу көз каранды векторлор системасын түзүшөт.

б) Үч $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ векторлор тобу компланардуу болушса, б.а. бир тегиздикте же параллель тегиздиктерде жайгашышса гана сызыктуу көз каранды векторлор системасын түзүшөт.

в) R^3 мейкиндигинде каалагандай 4 же андан көп (n>4) векторлордун тобу сызыктуу көз каранды системаны түзүшөт.

2.8. Берилген каалагандай $\vec{a}, \vec{в}$ жана $\vec{c}$ векторлору үчүн $\vec{a}+\vec{в}$, $\vec{в}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ векторлору компланардуу болорун далилдегиле.

2.9. $OABC$ тетраэдринде AL медианасы ABC гранын P чекити менен $|A\vec{P}|:|P\vec{L}| = 3:7$ катышында бөлөт. $O\vec{A}, O\vec{B}, O\vec{C}$ векторлорунун базистик системасында $O\vec{P}$ векторун координатасын тапкыла.

(Жообу: $O\vec{P} = \left\{\frac{7}{10}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}\right\}$)

2.10. $\vec{a}\,(2;-2;-1)$ жана $\vec{e}\left(-1; 1; \frac{1}{2}\right)$ векторлорунун коллинеардуу болорун көрсөтүп, $\vec{a}$ векторун $\vec{e}$ базистик системасы боюнча ажыратып жазгыла.

(Жообу: $\vec{a} = -2\vec{e}$)

2.11. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3j - 2k$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ векторлору берилсе, төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а) $\vec{a}$ векторунун орту болгон $\vec{a}_\circ$ векторун координаталарын;

б) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ векторунун координаталарын;

в) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ векторунун $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базистик системасындагы ажыралуусун;

г) $\Pi p_{\vec{j}}(\vec{a} - \vec{b})$ проекциясын.

(Жообу: а) $\vec{a}_\circ\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; б) $\vec{a} - \frac{2}{1}\vec{b} + \vec{c} = \left\{3; \frac{11}{2}; 0\right\}$

в) $\vec{a} + \vec{в} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$; г) $\Pi p_{\vec{j}}(a-b) = 6$)

2.12. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ векторуна коллинеардуу жана $\vec{j}$ орту менен тар бурч түзгөн, узундугу 15 санына барабар $\vec{b}$ векторун тапкыла.

(Жообу: $\vec{b} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + \vec{k}$)

2.13. $\vec{j}$ - орту менен 60^0, $\vec{k}$ – орту менен 120^0 бурчту түзгөн, узундугу $5\sqrt{5}$ болгон $\vec{a}$ векторун тапкыла.

(Жообу: $\vec{a} = \pm 5\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{k}$)

2.14. Узундуктары $|\vec{a}_1| = 3$, $|\vec{a}_2| = 5$ болгон эки векторлор аркылуу түзүлгөн $\vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{a}_2$ жана $\vec{a}_1 - \alpha \cdot \vec{a}_2$ векторлору, α нын кандай маанисинде ортогоналдуу болушат? (Жообу: $\alpha = \pm\frac{3}{5}$)

2.15. $\vec{a} = \{6;\ 7;\ -6\}$ векторуна параллель болгон $\vec{a}_\circ$ бирдик векторун тапкыла.

(Жообу: $\vec{a}_\circ = \left\{\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; -\frac{6}{11}\right\}$ же $\vec{a}_\circ = \left\{-\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; \frac{6}{11}\right\}$)

2.16. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ векторунун $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ векторуна түшүрүлгөн проекциясын тапкыла. (Жообу: Пр$_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{4}{\sqrt{14}}$)

2.17. Учтары $A(-4;\ 0;\ 4)$, $B(-1;\ 6;\ 7)$, $C(1;\ 10;\ -9)$ чекиттери болгон $\vec{AB}$ жана $\vec{AC}$ векторлорун арасындагы бурчту тапкыла.

(Жообу: $\cos\varphi = 1,\ \varphi = 0^0$)

2.18. Бир учурда $\vec{a}(3;\ 6;\ 8)$ векторуна жана Ox огуна перпендикуляр болгон $\vec{P}_\circ$ бирдик векторун тапкыла.

(Жообу: $\vec{P}_\circ = \pm\left\{0;\ -\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right\}$)

2.19. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ векторлору менен курулган параллелограммдын диагоналдарын арасындагы бурчтун синусун тапкыла.

(Жообу: $\sin\varphi = \sqrt{\frac{248}{273}}$)

2.20. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ жана $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ векторлору менен курулган параллелепипеддин негизинде $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлору жатышат. Параллелепипеддин h бийиктигин аныктагыла.

(Жообу: $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$)