7 –лекция:

ТҮЗ ЖАНА ТЕГИЗДИК

§3.1 Тегиздикте жайгашкан түздөр

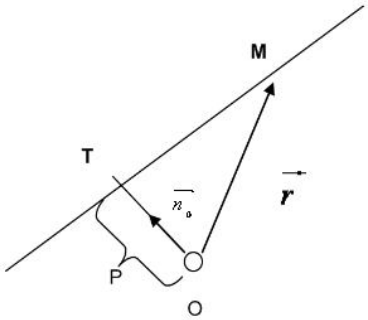
3.1.1 Түздүн нормалдык жана жалпы теңдемелери

Жаратылыш чөйрөсүн таанып билүүдө түз сызыктарга салыштырып үйрөнүү учурлары көп кездешет. Анткени курчап турган чөйрөдөгү кыймылдар, байкоочу турган чекиттен түз сызыкка окшоп кыймылдагандай же таралгандай көрүнөт. Ааламды таануу байкоочу турган чекиттен жүргүзүлгөндүктөн, түздүн теңдемесин да байкоочу турган О чекитине салыштырмалуу түзө алабыз. Байкоочу адам турган О чекити ар кандай тандала бергендиктен, бир эле түз алардын ар биринен ар башка абалда жайгашкандай көрүнөт. Ошондой болсо да, түздүн математикалык модели болгон теңдемесин декарттын координаталар системасында О башталма чекитине салыштырмалуу түзөбүз, б.а. кандай байкоочу адам болбосун координата башталмасында турат деп элестетебиз.

Тегиздикте жайгашкан кандайдыр бир О чекитин тандап алып, ага салыштырмалуу ушул эле тегиздикте жайгашкан L түзүнүн математикалык моделин (теңдемесин) түзөлү. L түзүнүн теңдемесин түзүү үчүн:

1). О чекитинен L түзүнө чейинки р аралыгы же О чекитинен L түзүнө түшүрүлгөн перпендикуляр ОТ кесиндисинин узундугу $p = |OT|$;

2). О чекитинен L түзүнө карай багытталган перпендикуляр $\overrightarrow{n_0}$ бирдик вектору $|\overrightarrow{n_0}| = 1$ берилген болушу керек (3.1.1-чийме).



3.1.1.-чийме

Чынында эле L түзүнөн каалагандай эркин чекит катарында тандалган $M(x;y)$ чекитинин $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ радиус – векторунун, $\overrightarrow{n_0}$ векторуна түшүрүлгөн проекциясы р санына барабар болот

$$Пр_{\vec{n}_0}\vec{r} = p. \qquad (1)$$

(1) ди скалярдык көбөйтүү көрүнүшүндө жазып

$$\left(\vec{n}\ ,\ \vec{r}\ \right)=\ p\ \text{ же }\ \left(\vec{n}_0\ ,\vec{r}\right)-p=O, \qquad (2)$$

түздүн вектордук формада жазылган нормалдаштырылган (2) теңдемесин алабыз. М чекити L түзү боюнча өзгөрүп жылып жүрүүчү чекит болгондуктан, анын радиус - вектору түздүн өзгөрүлмө $\vec{r}$ радиус - вектору деп аталат. Ошентип, тегиздиктеги (2) шартын канааттандырган бардык $M(x;y)$ чекиттеринин геометриялык изи L түзү болот же L түзүнүн О чекитине салыштырмалуу математикалык модели (теңдемеси) (2) көрүнүшүндө болот.

$\overrightarrow{n_0}=\{\cos\varphi;\sin\varphi\ \}$, $\vec{r}=\{x;y\ \}$ координаталары менен берилгендиктен, скалярдык көбөйтүүнү аткарып, (2) ден түздүн координаттык формадагы

$$x\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi-\rho=0 \qquad (3)$$

көрүнүшүндөгү нормалдашкан теңдемесин түзөбүз.

Жалпы учурда түздүн (3) теңдемеси x, y өзгөрүлмөлөрүнө карата биринчи тартиптеги сызыктуу теңдеме болот. Экинчи жактан, каалагандай эле x, y өзгөрүлмөлөрүнө карата түзүлгөн биринчи тартиптеги сызыктуу

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0, \qquad (4)$$

(мында $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2>0$ же «А, В бир учурда нөл болбойт» деп түшүн) теңдемени тегиздикте берилген түздүн жалпы теңдемеси катарында кабыл алса болот.

(4) теңдемесинин чын эле түздүн математикалык модели же жалпы теңдемеси экенин көрсөтүү үчүн, аны (3) нормалдык көрүнүшүнө келтирүү керек. Ал үчүн (4) тү турактуу $\mu\neq 0$ санына көбөйтөбүз:

$$\mu Ax+\mu By+\mu C=0. \qquad (5)$$

(5) менен (3) тү салыштырып, нормалдаштыруу үчүн

$$\mu\,\mathrm{A}=\cos\varphi,\quad \mu\,\mathrm{B}=\sin\varphi,\ \ \mu C=-\mathrm{P} \qquad (6)$$

деп алуу жетиштүү болорун байкайбыз. (6) барабардыктарын биринчи экөөсүн квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошуудан $\mu^2\mathrm{A}^2+\mu^2\mathrm{B}^2\equiv\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$ же $\mu^2\left(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2\right)=1$, андан кийин

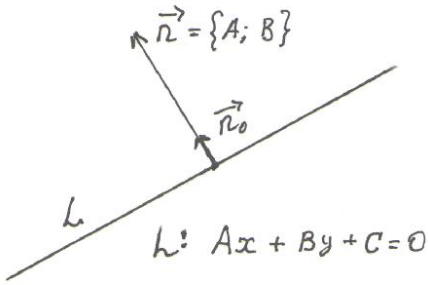
$$\mu\ =\pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} \qquad (7)$$

келип чыгат. $\mu C=-P$ белгилөөсүн эске алып (7) деги μ нун белгисин, С бош мүчөсүнүн белгисине карама - каршы тандоо керектигин көрөбүз.

Ушундай ыкма менен (7) ден табылган нормалдаштыруучу көбөйтүүчү деп аталган μ санын (6) га коюп,

$$\cos\varphi = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\varphi = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ P = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (8)$$

маанилерин туюнтуу менен, түздүн жалпы (4) теңдемесин (3) көрүнүшүндө нормалдаштырган абалда жазууга болоруна ишенебиз.



3.1.2-чийме

(4) теңдемесинин нормалдашкан абалдагы вектордук теңдемеси

$$\left(\vec{r}, \vec{n}\right) + \mu\ C = 0 \qquad (4^A)$$

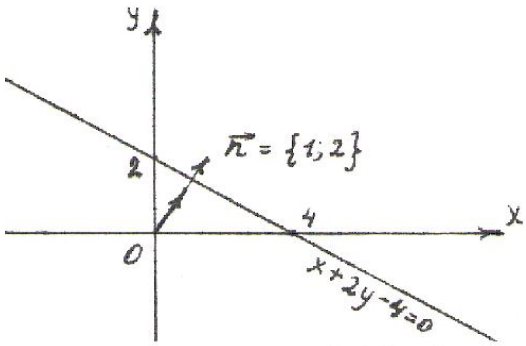
көрүнүшүндө жазылат.

Ошентип, Oxy координаттык тегиздигинде (4) теңдемесин канааттандыруучу каалагандай $M(x;y)$ чекиттеринин көптүгүнүн изи L түзүн түзөт. L түзүнө перпендикуляр $\vec{n} = \{A; B\}$ вектору түздүн нормалы деп аталат. Бул $\vec{n}$ нормаль векторунун орту бирдик $\vec{n}_0$ вектору координаталары менен

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} = \{\cos\varphi; \sin\varphi\} = \left\{\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\} \qquad (9)$$

көрүнүшүндө жазылып, “±” белгиси С бош мүчөсүнүн белгисине карама - каршы тандалган μ нун белгисине жараша түзгө түшүрүлгөн $\vec{n}_0$ бирдик нормалдын багытын аныктайт *(3.1.2-чийме).*

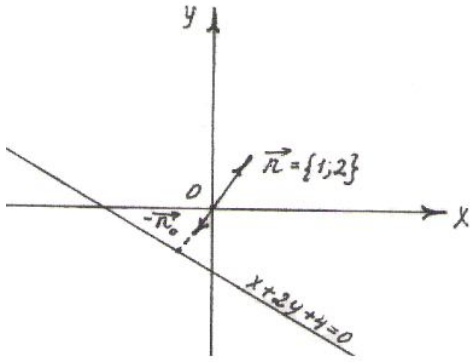
Демек, түздүн (4) жалпы теңдемесиндеги А, В коэффициенттери L түзүнүн $\vec{n}$ нормалдык векторунун координаталары болуп, түздүн калган бардык нормалдык векторлору, аны кайсы бир нөлдөн айырмалуу санга көбөйтүү менен табылат.



3.1.3-чийме

Мисалы, x + 2y - 4=0 түзүнө $\vec{n} = \{1;\ 2\}$ нормалдык вектор болот *(3.1.3-чийме).*

Ушул эле $\vec{n} = \{1;\ 2\}$ вектору x+2y+4=0 түзүнө да нормалдык вектор болуп, С бош мүчөсүнүн белгиси өзгөргөндүктөн, $\vec{n}_0$ бирдик нормаль векторунун багыты өзгөрөт *(3.1.4-чийме).*



3.1.4 -чийме

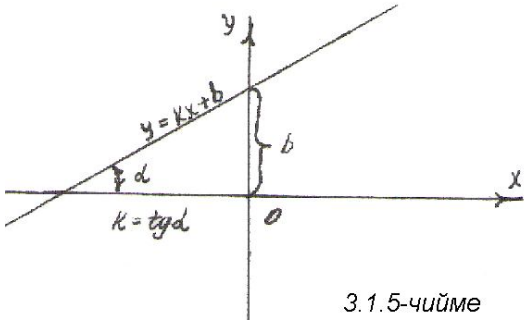
Практикалык эсептөөлөрдө түздүн (4) жалпы теңдемесин төмөндөгүдөй эки көрүнүштө жазып жүрүшөт:

1) $y = \kappa x + b$ (10)

түздүн κ бурчтук коэффиценти боюнча теңдемеси болот. Чынында эле $B \neq 0$ болгон учурда (4) түү B га бөлүп жиберип,

$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ жана $\kappa = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ деп белгилөө менен (10) көрүнүшүнө келтиребиз. κ-түздүн бурчтук коэффициенти деп аталып, Ox огу менен L түзүнүн арасындагы α бурчунун тангенсине барабар болот *(3.1.5-чийме):* k = tgα;

2) Эгерде A, B коэффициенттери жана C бош мүчөсү бир учурда нөлгө барабар болбосо, б.а $A \cdot B \cdot C \neq 0$, анда $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ белгилөөлөрүнүн жардамы менен түздүн (4) жалпы теңдемесин



3.1.5-чийме

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (10^A)$$

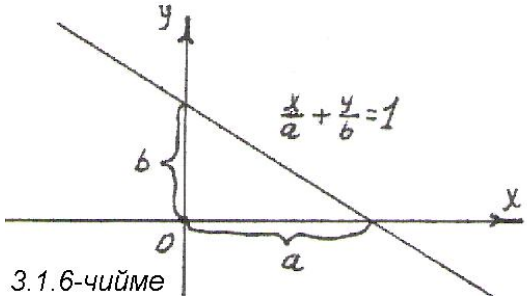
көрүнүшкө келтиребиз. (10^A) түздүн кесиндилердеги теңдемеси деп аталат *(3.1.6-чийме).*

Айтылган түздүн теңдемелери

а) $\vec{n}$ нормалдык вектору жана C бош мүчөсү (же p саны) белгилүү болгон;

б) κ бурчтук коэффициенти жана b саны белгилүү болгон;

в) түздүн координаттык окторду кесүүчү (a;0), (0; b) чекиттери белгилүү болгон, учурларынын ар биринде гана бир маанилүү түзүлөрүн көрдүк.

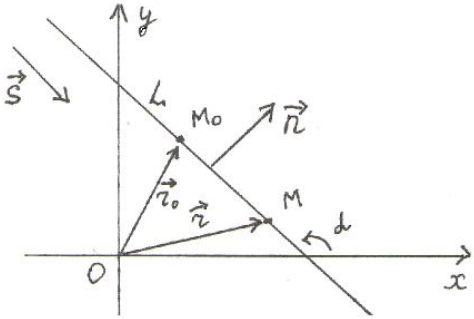


3.1.6-чийме

3.1.2 Тегиздикте берилген чекит аркылуу өтүүчү түздүн, берилген багытка карата теңдемеси

1. Oxy координаттык тегиздигинде берилген $M_0(x_0; y_0)$ чекити аркылуу өтүп, берилген $\vec{n} = \{A; B\}$ векторуна перпендикуляр болгон L түзүнүн теңдемесин түзүү талап кылынсын.

L түзү өтүүчү $M_0(x_0; y_0)$ чекитинин радиус - вектору $\vec{r_0}$ болсун, ал эми түздө



3.1.7-чийме

эркин өзгөрүүчү $M(x;y)$ чекитинин радиус - векторун $\vec{r}$ дейли *(3.1.7-чийме).*

Анда $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = \{x - x_0; y - y_0\}$ координаталуу вектору да $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр болот. Перпендикулярдуулук шарты боюнча $\vec{n}$, $\vec{r} - \vec{r_0}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү нөл санына барабар:

$\left(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}\right) = 0$. Бул шартты координаталары боюнча жазсак

$$\mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) = 0 \qquad (11)$$

изделүүчү теңдемеге ээ болобуз. (11) теңдемесин $\kappa = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ бурчтук коэффициенти менен $y - y_0 = \kappa(x - x_0)$ түрүнө келтирип, түздүн берилген бир чекит аркылуу өтүүчү теңдемесин табабыз.

2. Берилген $M_0(x_0; y_0)$ чекити аркылуу өтүп, берилген $\vec{S} = \{a;b\}$ векторуна параллель болгон L түзүнүн теңдемесин түзөлү (3.1.7-чийме).

L түзүндө эркин кыймылда өзгөрүүчү M чекитин алсак, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ вектору менен $\vec{S}$ вектору коллинеардуу болушат, б.а. кандайдыр бир t саны (параметри) табылып, $\vec{r} - \vec{r_0} = t \cdot \vec{S}$ же $\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{S}$ теңдештиги орун алат. Бул теңдештик изделүүчү түздүн вектордук формадагы теңдемеси деп аталып, координаталары менен

$\begin{cases} x - x_0 = ta, \\ y - y_0 = tb \end{cases}$ же $\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ көрүнүштөрүндө жазылып, түздүн параметрдик теңдемеси деп аталат. Аны t параметрине карата теңдеп (t параметрин таштап), $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ - түздүн каноникалык теңдемесин алабыз. Каноникалык теңдемеден $k = \dfrac{a}{b} = tg\alpha$ бурчтук коэффициенти менен түздүн теңдемесин

$$y - y_0 = \frac{a}{b}(x - x_0) \text{ жана } b \cdot (y - y_0) - a \cdot (x - x_0) = 0 \qquad (*)$$

көрүнүштөрүндө жазууга болот.

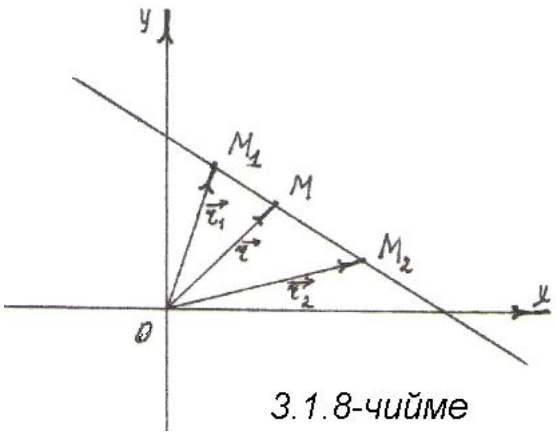
$\vec{S} = \{a;b\}$ вектору L түзүнүн багыттоочу вектору деп аталып, түздүн жалпы $Ax + By + C = 0$ теңдемесиндеги коэффициенттерге карата $\vec{S} = \{-B; A\}$ координаталарына ээ болот. Ошентип түздүн жалпы

теңдемеси берилсе, анын нормалдык вектору $\vec{n}=\{A;B\}$, багыттоочу вектору $\vec{S}=\{-B;A\}$ көрүнүштөрүндө аныкталат.

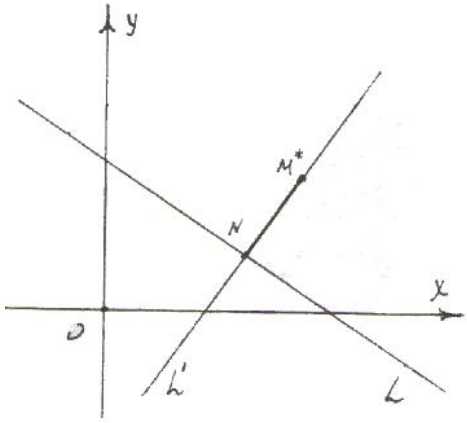
Түздө эркин өзгөрүүчү $M(x;y)$ чекити x, y - координаталарынан башка үчүнчү бир t чоңдугунан көз каранды болгон учурда түздүн параметрдик теңдемеси колдонулат. Мисалы, түз боюнча кыймыл t убактысынан көз каранды десек, түз $x=x(t)$, $y=y(t)$ параметрдик теңдемеси менен жазылып, убакыттын ар бир t моментиндеги x, y өзгөрүлмөлөрүнүн маанилерин көрсөтөт.

3. Тегиздикте берилген эки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ чекиттери аркылуу бир гана L түз сызыгы өтөт. Бул түздүн теңдемесин түзөлү (3.1.8-чийме).

L түзүнөн эркин алынган $M(x;y)$ чекитин алсак, $\overrightarrow{M_1M}=\vec{r}-\vec{r}_1$ жана



3.1.8-чийме



3.1.9-чийме

$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$ векторлору коллинеардуу болушат, б.а λ саны табылып, $\vec{r}-\vec{r_1}=\lambda\left(\vec{r_2}-\vec{r_1}\right)$ теңдештиги орун алат. Бул теңдештикти координаталары менен туюнтуп,

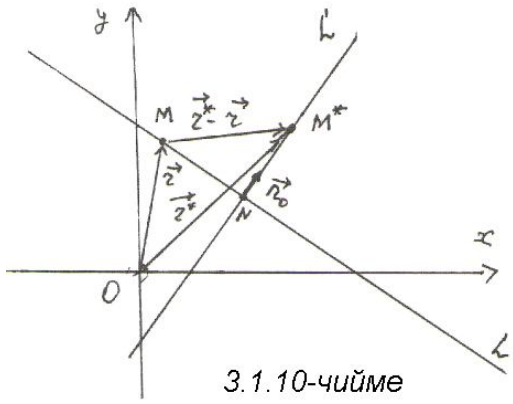
$$\begin{aligned} x-x_1&=\lambda(x_2-x_1),\\ y-y_1&=\lambda(y_2-y_1)\end{aligned}$$

ээ болобуз. Аларды λ га карата теңдесек,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (12)$$

эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси келип чыгат. Бул учурда пропорционалдуулук коэффициенти болгон $\lambda=\kappa$ саны түзгө бурчтук коэффициент болот.

3.1.3 Тегиздикте берилген түздөн чекитке чейинки аралык



3.1.10-чийме

Бир тегиздикте жайгашкан L түзү жана $M^*(x^*;y^*)$ чекити берилсин *(3.1.9-чийме).* M* чекити L түзүнө таандык болбосун. M* чекитинен L түзүнө чейинки аралык деп M* чекити аркылуу өтүп, L түзүнө перпендикуляр L^1 түзүнүн M*N кесиндисин узундугу болгон $d = \rho(M^*, L)$ санын айтабыз.

Айталы L түзү

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

нормалдык теңдемеси менен белгилүү болсун, анда $d = \rho(M^*, L)$ аралыгы

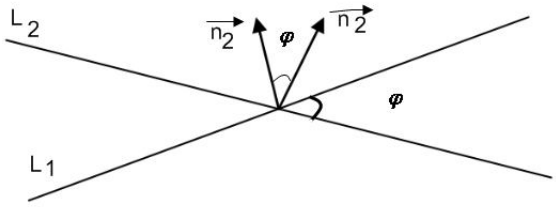
$$\rho(M^*, L) = \left|x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - P\right|$$

көрүнүшүндө табылат.

▹ Чынында эле L түзүнүн каалаган жеринен эркин тандалган $M(x;y)$ чекитинин радиус - векторун $\vec{r}$, ал эми $M^*(x^*;y^*)$ чекитинин радиус - векторун $\vec{r}^{\,*}$ десек, анда $\overrightarrow{MM^*} = \vec{r}^{\,*} - \vec{r}$ векторунун $\vec{n}_0$ бирдик вектору менен багытталган L^1 огундагы проекциясы $\Pi_{P_{L^1}}\left(\vec{r}^{\,*} - \vec{r}\right) = d = \rho\left(M^*, L\right)$ аралыгына барабар болот. Аны скалярдык көбөйтүү түрүндө жазуудан кийин

$$d = \left(\vec{r}^{\,*} - \vec{r}, \vec{n}_0\right) = \left(\vec{r}^{\,*}, \vec{n}_0\right) - \left(\vec{r}, \vec{n}_0\right) \qquad (13)$$

келип чыгат. L түзүнүн нормалдык (3) теңдемеси берилгендиктен, (2) вектордук теңдемесиндеги $\left(\vec{r}, \vec{n}_0\right) = p$ теңдештигин эске алып, (13) түү $d = \left(\vec{r}^{\,*}, \vec{n}_0\right) - p$ көрүнүшүнө келтиребиз. Аны координаталары менен туюнтуудан кийин



3.1.11-чийме

$$d = \rho\left(M^*, L\right) = x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - P$$

санына ээ болобуз, аралык оң сан болгондуктан, анын абсолюттук чоңдугун

$$\rho\left(M^*, L\right) = \left|x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - P\right|, \qquad (14)$$

M^* чекитинен L түзүнө чейинки аралык деп эсептейбиз. ◃

Эгерде L түзү жалпы $Ax + By + C = 0$ теңдемеси менен берилсе, (14) формуласын нормалдаштырып,

$$d = \rho\left(M^*, L\right) = \frac{\left|Ax^* + By^* + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (15)$$

көрүнүшүнө келтиребиз.

3.1.4 Эки түздүн арасындагы бурч

Бир тегиздикте жайгашкан эки

L_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_1^2 + B_1^2 > 0$,

L_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad A_2^2 + B_2^2 > 0$

түздөрү берилсин *(3.1.11-чийме).*

L_1 түзүнүн нормалдык вектору $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ менен L_2 түзүнүн нормалдык $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ векторунун арасындагы бурч, L_1 менен L_2 түздөрүнүн арасындагы бурчка барабар болуп, эки түздүн арсындагы бурч деп аталат. Бул бурчтун косинусу

$$\cos\left(L_1 \hat{}, L_2\right) = \cos\varphi = \cos\left(\vec{n_1}, \hat{} \vec{n_2}\right) = \frac{\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right)}{|n_1| \cdot |n_2|} \text{ же}$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (16)$$

формуласы менен эсептелет.

Эгерде L_1 жана L_2 түздөрү өз ара перпендикуляр болушса $\varphi = \frac{\pi}{2}$, анда $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ нормалдык векторлору да өз ара перпендикуляр болуп, скалярдык көбөйтүндүсү нөл санына $\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right) = 0$ тең болот. Бул перпендикулярдык шартын координаталары аркылуу туюнтуп,

$$A_1B_2 + B_1B_2 = 0 \text{ же } \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1 \text{ же } \kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1 \qquad (17)$$

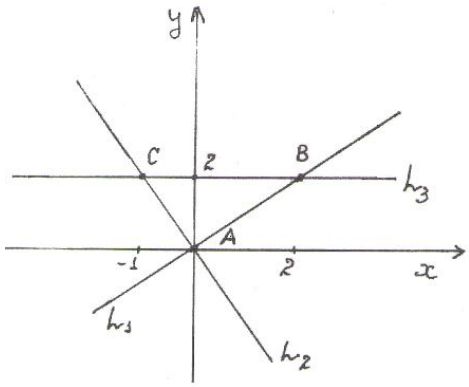
көрүнүштөрдө жазабыз (κ_1, κ_2 тиешелүү түздөрдүн бурчтук коэффициенттери).

Эгерде L_1, L_2 түздөрү өз ара параллель болушса, анда $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ векторлору коллинеардуу болушуп, бири - бири менен $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$ байланышында болушат. Бул байланышты координаталары аркылуу туюнтуудан кийин

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda A_2 \text{ же } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ же } \kappa_1 = \kappa_2 \qquad (18)$$

эки түздүн параллелдүүлүк шарттары келип чыгат.

Мисалдар



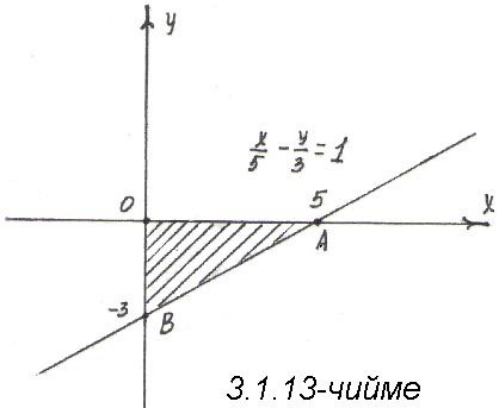
3.1.12-чийме

1.Чокулары A(0; 0), B(2; 2), C(-1; 2) чекиттери болгон үч бурчтуктун жактарынын теңдемелерин түзгүлө.

Чыгаруу: ▷ ΔABC үч бурчтугунун жактары эки чекит аркылуу өтүүчү түздөрдүн кесиндилери болушат *(3.1.12-чийме).*

A, B чекиттери аркылуу өтүүчү L_1 түзүнүн теңдемеси (12) формуласына ылайык

$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0}$ же $y=x$ болот.



3.1.13-чийме

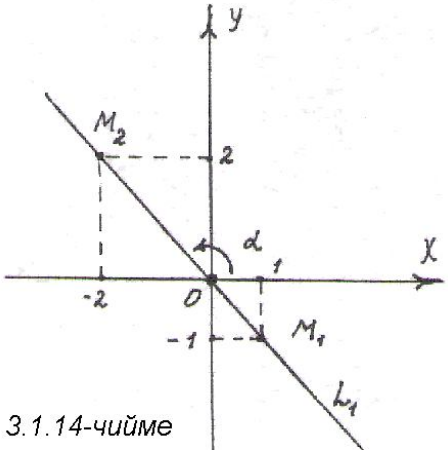
A, C чекиттери аркылуу өтүүчү L_2 түзү

$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-0}{2-0}$ же $y=-2x$

теңдемесине ээ. B, C чекиттери аркылуу өтүүчү L_3 түзүнүн теңдемесинде $\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-0}{2-2}$ же $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-2}{0}$ болуп, өзгөчө абал пайда болот (бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланды). Бул учурда (12) формуласын бурчтук коэффициенти менен

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$ жазып

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0}{-3}=0,$ L_3 түзүнүн Ox огуна параллель y = y_1 же y = 2 теңдемесин алабыз.◁



3.1.14-чийме

2. $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$ түзү менен координаттык октордун кесилишинен пайда болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла*(3.1.13-чийме).*

Чыгаруу:▷ Түздүн кесиндилердеги (10) теңдемеси боюнча a =5, b = -3 болгондо түз менен координаттык октордун кесилишинен ΔOAB үч бурчтугу пайда болот. ΔOAB тик бурчтуу үч бурчтук болуп a = 5, b = -3 катеттерине ээ, ошондуктан анын аянты $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=\frac{1}{2}|5|\cdot|-3|=\frac{1}{2}5\cdot 3=\frac{15}{2}=7{,}5$ аянт бирдигине барабар.◁

3. $M_1(1;\ -1)$ жана $M_2(-2;\ 2)$ чекиттери аркылуу өткөн L түзүнүн Ox огуна карата жантаюу бурчун тапкыла*(3.1.14-чийме).*

Чыгаруу: ▹Эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн (10) теңдемесин пайдаланып

$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)}$ же $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{3}$ же $y=-x$ теңдемесине ээ болобуз. Анын бурчтук коэффициенти κ=-1 болгондуктан, түздүн Ox огу менен түзгөн бурчунун тангенси $k=tg\alpha=-1$ же $\alpha=arctg(-1)=135^{\circ}$ келип чыгат.◃

4. $M_0(-1;\ 3)$ чекити аркылуу өтүп, Ox огу менен 45^0 тук жантаюу бурчун түзгөн L түзүнүн теңдемесин тапкыла.

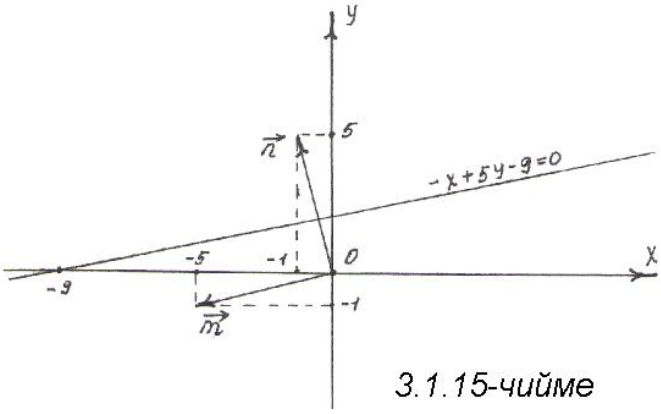
Чыгаруу: ▹ $\alpha=45°$ болгондуктан, $k=tg\alpha=tg45°=1$ бурчтук коэффициенти белгилүү. Бул учурда берилген бир чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси $y-y_0=k(x-x_0)$ болуп, изделүүчү түз $y-3=1\cdot(x-(-1))$ же $y=x+4$ теңдемесине ээ.◃

5. Багыттоочу вектору $\vec{m}=\{1;\ 2\}$ болуп, $M_0(-1;\ 3)$ чекити аркылуу өтүүчү түздүн теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: ▹Багыттоочу вектору берилип, M_0 чекити аркылуу өтүүчү түздүн (*) теңдемелерине ылайык, изделүүчү түздүн теңдемеси

$\frac{x-(-1)}{1}=\frac{y-3}{2}$ же $x+1=\frac{y-3}{2}$ же $y=2x-5$ көрүнүштөрүндө болот.◃

6. $M_0(2;\ 3)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{S}=(0;\ 4)$ векторуна параллель түздүн теңдемесин жазгыла жана анын $\vec{n}_0$ бирдик нормалын тапкыла.



3.1.15-чийме

Чыгаруу: ▹Изделүүчү түздүн багыттоочу вектору берилгендиктен, (*) теңдемелерин пайдалансак $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{4}$ өзгөчө абалы келип чыгат. Ошондуктан анын $(x-x_0)b-a(y-y_0)=0,\quad \vec{m}(0;\ 4)=\vec{m}(a;\ b)$ көрүнүшүн алып, түздүн $(x-2)\cdot4-0\cdot(y-3)=0$ же $x-2=0$ теңдемесин алабыз. $Ax+By+C=0$ түзүндө нормаль вектор $\vec{n}=\{A;B\}$ координаталарына ээ. Биздин учурда A=1, B=0, C=-2 болуп, $\vec{n}=\{1;\ 0\}$ координаталарына ээ жана ал бирдик нормаль

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{\vec{n}}{1} = \vec{n}$$

векторуна дал келет. ◁

7. $M_0(1;\ 2)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{n} = \{-1;\ 5\}$ векторуна перпендикуляр түздүн теңдемесин жана $\overrightarrow{m}$ багыттоочу векторун тапкыла.

Чыгаруу: ▷ Берилген M_0 чекитинен өтүп, $\vec{n} = \{A; B\}$ нормаль векторуна ээ болгон түздүн теңдемеси (11) формуласына ылайык

$(x-1)\cdot(-1) + (y-2)5 = 0,$ *же* $-x + 5y - 9 = 0$ көрүнүшүндө жазылат. Бул түздүн багыттоочу вектору $\vec{m} = \{-B; A\}$ координаталарына ээ болгондуктан, $\vec{m} = [-5;-1\}$ багыттоочу вектору табылат *(3.1.15-чийме).* ◁

8. $M_0(-1;\ 2)$ чекити аркылуу өтүп, Ох огуна перпендикуляр түздүн теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу: Түз Ох огуна перпендикуляр жайгашкандыктан, бул октогу векторду түздүн $\vec{n}$ нормалдык вектору катары алууга болот. Нормаль деп Оу огунун $\vec{n} = \{0;\ 1\}$ ортун алалы. (11) формуласы боюнча изделүүчү түздүн $(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$ же $(x+1)\cdot 0 + (y-2)\cdot 1 = 0$ же у = 2 көрүнүшүндөгү теңдемесине ээ болобуз. ◁

9. 7x+8у-5=0 түзүнүн бирдик $\vec{n}_0$ нормаль векторун, бирдик $\overrightarrow{S_0}$ багыттоочу векторун тапкыла.

Чыгаруу: А =7, В = 8, С = -5 болгондуктан түздүн нормалдык вектору $\vec{n} = \{A; B\} = \{7;\ 8\}$ координаталарына ээ. Ал эми анын ортун же бирдик нормаль векторун

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{49 + 64}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{113}} \cdot \vec{n}$$

теңдештигинен $\vec{n}_0 = \{\frac{7}{\sqrt{113}}; \frac{8}{\sqrt{113}}\}$ табабыз.

Багыттоочу $\vec{S}=\{-B;A\}=\{-8;7\}$ векторунун орту $\overrightarrow{S_0}=\frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}=\frac{1}{\sqrt{113}}\cdot\vec{S}$ вектору болуп, координаталары менен $\overrightarrow{S_0}=\left\{-\frac{8}{\sqrt{113}};\frac{7}{\sqrt{113}}\right\}$ көрүнүшүндө жазылат.◁

10. $2x+y-7=0$ жана $x-y+10=0$ түздөрү берилсе:

а) алардын арасындагы бурчтарды тапкыла;

б) алардын кесилүү чекитинен өтүп, $3x+2y+7=0$ түзүнө перпендикуляр түздүн теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу: ▹а) Эки түздүн арасындагы бурч алардын нормалдык $\overrightarrow{n_1}=\{A_1;B_1\}=\{2;1\}$ жана $\overrightarrow{n_2}=\{A_2;B_2\}=\{1;-1\}$ векторлорунун арасындагы бурчка барабар. Ошондуктан

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{2\cdot1+1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

болуп, $\varphi=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ келип чыгат.

б) Берилген түздөрдүн кесилүү чекити $M_0(x_0;y_0)$ эки түзгө тең таандык болуп, алардын теңдемелерин канааттандырып,

$\begin{cases}2x+y=7,\\x-y+10=0\end{cases}$ теңдемелер системасынын чечими болот. Теңдемелер системасын чыгарып $x_0=-1$, $y_0=9$ чечимдерине ээ болобуз. Изделүүчү түз $M_0(-1;\ 9)$ чекити аркылуу өтүп, $3x+2y+7=0$ түзүнө перпендикуляр болгондуктан, берилген түздүн $\overrightarrow{S_3}=\{-B_3;A_3\}=\{-2;\ 3\}$ багыттоочу вектору, изделүүчү түзгө нормаль вектор $\vec{n}=\{-2;\ 3\}$ болот. Демек, изделүүчү түз (11) формуласынын негизинде $(x-x_0)(-B_3)+(y-y_0)A_3=0$ же

$(x-(-1))\cdot(-2)+(y-9)\cdot3=0,$ *же*

$-2x+3y-29=0$ *тендемесине* ээ.◁

11. $x-2y+1=0$ жана $2x+y-3=0$ түздөрүнүн арасындагы бурчту аныктагыла.

Чыгаруу: ▹Биринчи түздө $A_1=1$, $B_1=-2$, экинчи түздө $A_2=2$, $B_2=1$ болгондуктан, түздөр тиешелүү түрдө $\overrightarrow{n_1}=\{1;-2\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{2;\ 1\}$ нормалдык векторлоруна ээ болуп, алардын арсындагы бурч

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1\cdot 2 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{1+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{0}{\sqrt{25}} = \frac{0}{5} = 0,$$

$\Rightarrow \quad \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = 90°$ болот.◁

12. $5x - 7y$-4=0 жана $3x + 2y$-13=0 түздөрүнүн өз ара жайланышуу абалдарын изилдегиле.

Чыгаруу: Биринчи түздө A_1=5, B_1= -7, экинчисинде A_2=3, B_2=2 болгондуктан $\overrightarrow{n_1} = \{5; -7\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{3; 2\}$ нормалдык векторлоруна байкоо жүргүзөбүз:

а) перпендикулярдуулук $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ шартын текшерели.

$5\cdot 3 + (-7)\cdot 2 = 15 - 14 = 1 \neq 0$ болгондуктан $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ өз ара перпендикуляр болушпайт.

б) параллелдүүлүк шартын

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ текшерели: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3}$, $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{7}{2}$ болуп, параллелдүүлүк шарты аткарылбайт.

в) Берилген түздөр өз ара перпендикуляр да, параллель да эмес, анда алар өз ара кесилишүүчү түздөр болушат.

$\begin{cases} 5x - 7y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 13 = 0 \end{cases}$ сызыктуу теңдемелер системасын чыгарып, түздөрдүн кесилишүү чекити $M_0\left(\frac{98}{31}; \frac{53}{31}\right)$ болорун көрөбүз. Бул кесилишүүчү түздөрдүн арасындагы бурч

$$\cos\varphi = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{5\cdot 3 + (-7)2}{\sqrt{5^2 + (-7)^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{74}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{962}}$$

же $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{962}}$ болот.◁

13. $y = -x - 13$ жана $y = x - 29$ түздөрүнүн кесилише тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө:

▷Берилген түздөрдүн бурчтук коэффициенттери k_1=-1, k_2=1 болгондуктан $k_1 \neq k_2$ болуп, алар өз ара параллель эмес. $k_1\cdot k_2 = -1$ болгондуктан алар өз ара перпендикуляр болушат. Демек, алар кесилишүүчү жана арасындагы бурч $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$ болот.◁

14. O(o;o) чекитинен $6x + 8y + 10 = 0$ түзүнө чейинки аралыкты тапкыла.

Чыгаруу: ▹ (15) формуласына ылайык изделүүчү аралык

$d = \rho(0, L) = \dfrac{|6\cdot 0 + 8\cdot 0 + 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{100}} = 1$ санына барабар. ◃

15. Чокулары A(1; 0), B(2; 3) жана C(3; 1) чекиттери болгон ΔABC үч бурчтугунун B чокусунан AC жагына түшүрүлгөн BD перпендикулярынын узундугун жана AD кесиндисинин узундугун тапкыла*(3.1.16-чийме).*

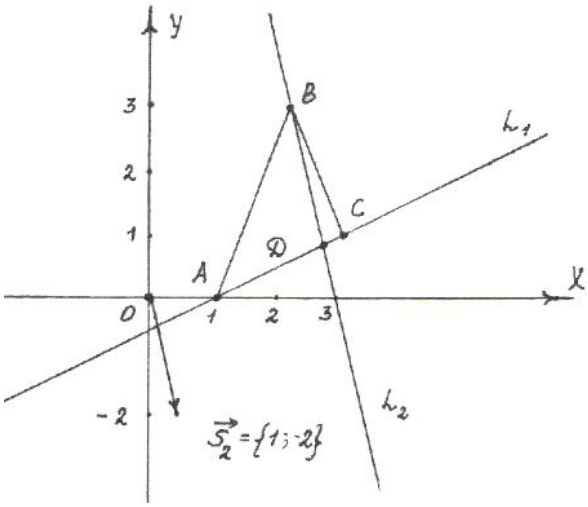
Чыгаруу: ▹ A(1; 0) жана C(3; 1) чекиттери аркылуу өткөн L_1 түзүнүн теңдемеси $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-0}{1-0}$ же $x - 2y - 1 = 0$ болот. Анын нормалы $\vec{n_1} = \{1; -2\}$ вектору, BD кесиндиси жайгашкан L_2 түзүнө багытточу вектор болот. Андай болсо, берилген B(2; 3) чекити аркылуу өтүүчү L_2 түзүнүн теңдемесин $\vec{S_2} = \{1; -2\}$ багыттоочу векторунун жардамы менен,

$$(x - x_0)\, b - a\,(y - y_0) = 0, \quad \vec{S} = \{a; b\}$$

формуласына таянып,

$(x-2)(-2) - 1(y-3) = 0$ же

$-2x - y + 7 = 0$ көрүнүшүндө жазабыз. BD кесиндисинин узундугу B чекитинен L_1 түзүнө чейинки аралык катарында



3.1.16-чийме

$$\rho(M^*, L_1) = \frac{|A_1 x^* + B_1 y * + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

формуласы менен,

$\rho(B, L_1) = \dfrac{|2 - 2\cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ көрүнүшүндө эсептелет.

AD кесиндисинин узундугу A чекитинен L_2 түзүнө чейинки аралык катары $\rho\,(A, L_2) = \dfrac{|-2\cdot 1 - 0 + 7|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ санына барабар болот. ◃

16. Берилген L_1: $x + 2y - 1 = 0$, L_2: $x + 2y + 2 = 0$ түздөрүнүн арасындагы аралыктын тең ортосунан өтүүчү, эки түзгө тең параллель L_3 түзүнүн теңдемесин түзгүлө.

Чыгарууну эки ыкмада жүргүзөлү:

▹ **I.** Берилген эки түз бир $\vec{n}=\{1;\,2\}$ нормаль векторуна ээ болгондуктан, өз ара параллель болушат. Алардын арсындагы аралыктын тең ортосунда $M_0(x_0;y_0)$ чекити жайланышкан деп ойлосок, $\rho(M_0,L_1)=\rho(M_0,L_2)$ келип чыгат.

Демек, $\dfrac{|x_0+2y_0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|x_0+2y_0+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$ болуп, нормалдаштыруучу көбөйтүүчүнүн $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}$ белгиси С бош мүчөсүнүн белгисине карама - каршы тандалгандыктан, $\dfrac{x_0+2y_0-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{x_0+2y_0+2}{\sqrt{5}}$ келип чыгат. Мындан $x_0+2y_0-1=-x_0-2y_0-2$ же $2x_0+4y_0+1=0$ алынат. M_0 чекити L_1 жана L_2 түздөрүнүн арасындагы аралыктын тең ортосунан эркин тандалгандыктан, M_0 сыяктуу $M(x,y)$ чекиттеринин көптүгү изделүүчү L_3 түзүн түзүп, $2x+4y+1=0$ теңдемеси менен жазылат.

II. Берилген L_1, L_2 түздөрү жана изделүүчү L_3 түзү өз ара параллель болгондуктан, $\vec{n}=\{1;\,2\}$ үчөөсүнө тең нормалдык вектор болот. Демек, L_3 түзү өтүүчү бир $M_0(x_0;y_0)$ чекитин таба алсак, анын теңдемесин жаза алабыз. Бул M_0 чекити L_1 жана L_2 түздөрүнөн бирдей аралыкта жайгашкан. Эгерде L_1 түзүнөн $M_1(1;\,0)$ чекитин жана L_2 түзүнөн $M_2(-2;\,0)$ чекиттерин эркин тандасак (бул чекиттер алардын теңдемелерин канааттандыраарын текшерип көрүүгө болот), M_0 чекити $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторунун тең ортосунда жайгашкан болот, б.а.

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Бул теңдештикти координаталары менен туюнтуп,

$$\begin{cases} x_0-x_1=\dfrac{1}{2}(x_2-x_1), \\ y_0-y_1=\dfrac{1}{2}(y_2-y_1) \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{matrix} x_0=x_1+\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)=1+\dfrac{1}{2}(-2-1)=-\dfrac{1}{2}, \\ y_0=y_1+\dfrac{1}{2}(y_2-y_1)=0+\dfrac{1}{2}(0-0)=0, \end{matrix} \Rightarrow$$

$M_0\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$ чекитин табабыз. (11) формуласы боюнча L_3 түзүнүн теңдемеси

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 1+(y-0)2=0$ же $2x+4y+1=0$ болот. ◃

17. Чокулары $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Чыгаруу: ▷ ΔABC үч бурчтугунун А чокусунан ВС жагына h бийиктигин түшүрөлү. Анда h бийиктиги А чекитинен ВС жагы аркылуу өтүүчү түзгө чейинки аралыкка барабар $h = \rho\left(A,(BC)\right)$. (ВС) түзүнүн теңдемесин эки В, С чекиттери аркылуу өтүүчү түз катарында $\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{y-y_2}{y_3-y_2}$ же

$(x-x_2)(y_3-y_2)-(y-y_2)(x_3-x_2)=0$ көрүнүшүндө жазып, (11) теңдемесине салыштырып, акыркы түзгө $\vec{n} = \{y_3-y_2,\ -(x_3-x_2)\}$ нормаль вектор болорун көрөбүз. Демек,

$h = \rho\left(A,(BC)\right) = \frac{\left|(x_1-x_2)(y_3-y_2)-(y_1-y_2)(x_3-x_2)\right|}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$ болуп,

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|(x_1-x_2)(y_3-y_2)-(y_1-y_2)(x_3-x_2)\right|$ үч бурчтуктун аянтын табабыз. ◁

3.1.5 Полярдык координаталар системасындагы түздүн теңдемеси

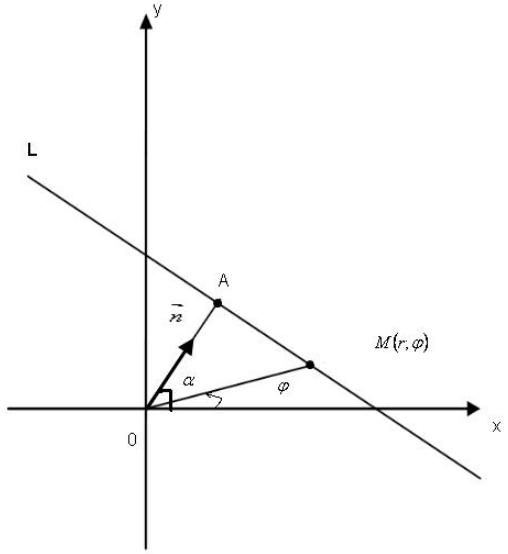
L түзүнүн полярдык координаталар системасындагы математикалык моделин түзүүдө эки учурга токтолобуз:

а) Түз координата башталмасы O(0;0) чекити аркылуу өтүп, Ox огу менен φ оң бурчун түзсүн. Бул учурда изделүүчү түздүн бурчтук коэффициенти $k = tg\varphi$, полярдык координаталар системасындагы түздүн теңдемеси болот.

б) Түз координаталар башталмасы аркылуу өтпөсүн дейли, анда анын нормалдашкан $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ теңдемесине полярдык $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ маанилерин коюп, $r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0$ же $r\cdot\cos(\varphi-\alpha) = p$ же $r = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$ көрүнүшүндөгү түздүн полярдык координаталар ситемасындагы теңдемесине ээ болобуз.

Түздүн полярдык координаталар системасында жазылган теңдемесин башка усул менен да табууга болот. Ал үчүн түздөн О башталмасына

чейинки $p = |OA|$ аралыгы жана Ox огу менен OA кесиндисинин түзгөн оң α бурчу белгилүү болушу керек *(3.1.17-чийме).*



3.1.17.-чийме

Бул учурда түздө эркин кыймылда өзгөргөн $M(r;\varphi)$ чекитине карата $Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p$ жана

$$Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos(\alpha - \varphi) = r\cos(\varphi - \alpha)$$

маанилерин табабыз. $Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM}$ дин жогоруда табылган эки маанилерин теңдештирип, r ди аныктап түздүн полярдык координаталардагы

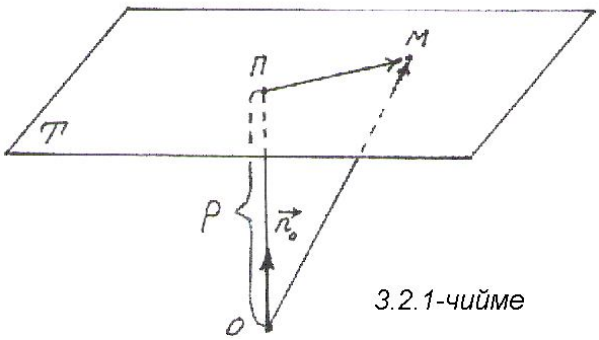
$r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$ теңдемесине ээ болобуз.

§3.2 Тегиздик

3.2.1 Тегиздиктин нормалдык жана жалпы теңдемеси

R^3 мейкиндигинде жайгашкан Т тегиздигинин теңдемеси байкоочу турган О чекитине салыштырмалуу түзүлөт. Ал үчүн О чекитинен тегиздикке чейинки аралык, б.а. О чекитинен тегиздикке түшүрүлгөн перпендикуляр ОП кесиндисин узундугу р саны жана О чекитинен Т тегиздигине карата багытталган $\overrightarrow{n_0}$ бирдик нормаль вектору белгилүү болушу керек *(3.2.1-чийме).*

Т тегиздигинде эркин кыймылдаган М($x;y;z$) чекитин алалы. $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \{x;y;z\}$ анын радиус-вектору болсун. М чекити Т тегиздигинин кайсы жеринде жайгашкандыгына карабай, $\vec{r}$ радиус – векторунун $\overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ нормалына түшүрүлгөн проекциясы р санына барабар болорун байкайбыз $Пр_{\vec{n}_0}\vec{r} = p$.



3.2.1-чийме

Бул теңдештик Т тегиздигиндеги бардык чекиттер үчүн туура болгондуктан, аны скалярдык көбөйтүүнүн жардамы менен

$$\left(\vec{r},\ \vec{n_0}\right) - p = 0 \qquad (19)$$

көрүнүшүндөгү жазылышы, Т тегиздигинин вектордук формадагы нормалдык теңдемеси деп аталат. Аны координаталары боюнча

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (20)$$

жазып, тегиздиктин координаталык формада жазылган (20) нормалдык теңдемесин алабыз. Бул (20) теңдемесинин негизги өзгөчөлүгү катарында:

1. $x,\ y,\ z$ *кыймылдуу өзгөрүлмөлөрүнүн коэффициенттеринин квадраттарынын суммасы* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ *болорун;*
2. *Бош мүчөсү (-р) оң сан болбосун,*

эсептейбиз.

Тегиздиктин (20) нормалдык теңдемеси $x,\ y,\ z$ өзгөрүлмөлөрүнө карата биринчи тартиптеги алгебралык теңдеме болот. Ошондуктан жалпы учурда, каалагандай эле

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right) \qquad (21)$$

($A^2 + B^2 + C^2 > 0$ шартын A,B,C коэффициенттери бир учурда нөл болбойт деп түшүнөбүз) сызыктуу алгебралык теңдемесин, кайсы бир тегиздиктин теңдемеси деп алууга болот. Тегиздиктин жалпы теңдемеси (21) көрүнүшүндө болорун далилдөө үчүн, аны (20) көрүнүшүнө келтирүү мүмкүнчүлүгүн көрсөтүү жетиштүү.

▹ (21) теңдемесин нормалдаштыруучу көбөйтүүчү деп аталган μ санына $(\mu \neq 0)$ көбөйтүп, $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$ ээ болобуз. Аны (20) теңдемеси менен салыштырып,

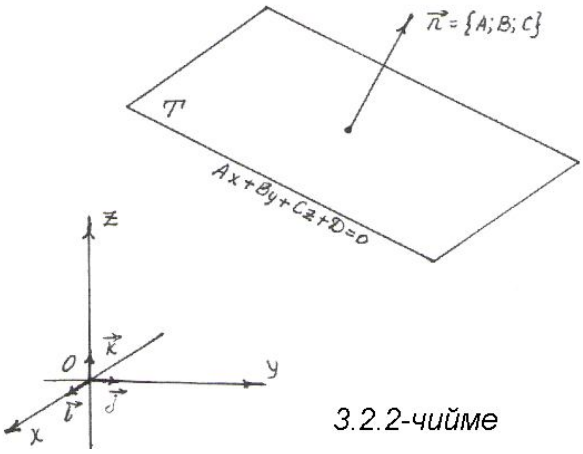
$$\mu A = \cos\alpha,\ \ \mu B = \cos\beta,\ \ \mu C = \cos\gamma,\ \ \mu D = -p \qquad (22)$$

теңдештиктерин түзөбүз. (22) барабардыктарынын алгачкы үчөөсүн квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошуп,

$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ же $\mu^2\left(A^2 + B^2 + C^2\right) = 1$ же

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (23)$$

нормалдаштыруучу көбөйтүүчү болгон μ санын табабыз. $\mu \cdot D = -p \leq 0$ болгондуктан, μ нун белгисин, D бош мүчөсүн белгисине карама – каршы тандайбыз.



3.2.2-чийме

Табылган μ ну (22) ге коюп, $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\ p$ сандарынын аныкталган маанилерин (20) га койсок, тегиздиктин жалпы көрүнүштөгү (21) теңдемеси нормалдашкан көрүнүшкө келет. ◁

Ошентип, жалпы көрүнүштөгү тегиздиктин (21) теңдемесинин вектордук формадагы нормалдашкан теңдемеси

$$\left(\vec{r},\ \vec{n}\ \right)+\ \mu D\ =\ 0$$

көрүнүшүндө жазылып, $\vec{n}=\{A;B;C\}$ вектору тегиздикке нормалдык вектор болот, анын орту

$$\overrightarrow{n_0}=\{\mu A;\mu B;\mu C\}=\left\{\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\}=$$
$$=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$$

көрүнүштөрүндө жазылат. Мындагы “±” белгисин бири алынып, ал D бош мүчөсүнүн белгисине карама – каршы белги катарында тандалып, бирдик $\overrightarrow{n_0}$ нормаль – векторунун багытын көрсөтөт. Демек,

$Ax+By+Cz+$D $=$ 0, $A^2+B^2+C^2>0$ тегиздиктин жалпы учурдагы теңдемеси, ал эми $\vec{n}=\{A;B;C\}$ анын нормаль – вектору болуп *(3.2.2-чийме),* калган бардык нормаль – векторлор аны кайсы бир нөлдөн айырмалуу санга көбөйтүү менен алынат.

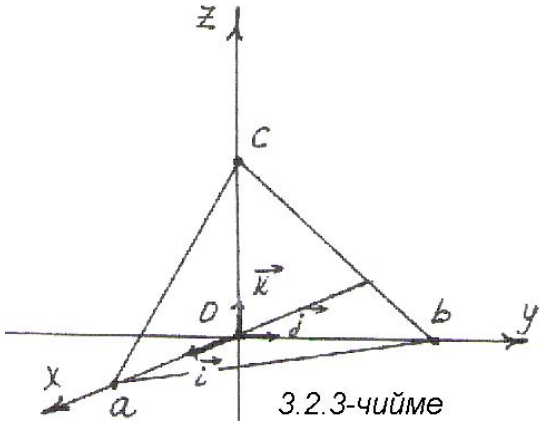
Эгерде $A\cdot B\cdot C\cdot D\neq 0$ же A, B, C, D сандарынын баары нөлдөн айырмалуу болсо,

$$a=-\frac{D}{A},\ \ b=-\frac{D}{B},\ \ c=-\frac{D}{C}$$

белгилөөлөрүн киргизип, тегиздиктин кесиндилердеги

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (24)$$

теңдемесин алабыз *(3.2.3-чийме).*

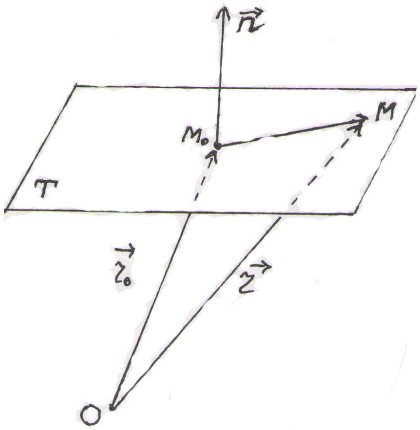


3.2.3-чийме

3.2.2 Берилген чекит аркылуу өтүүчү тегиздиктин, берилген багыттарга карата теңдемесин түзүү

1. Берилген $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{n}=\{A;B;C\}$ векторуна перпендикуляр болуучу Т тегиздигинин теңдемесин түзүү талап кылынсын.

Т тегиздигинде өзгөрүп жүрүүчү каалагандай бир $M(x;y;z)$ чекитин алалы.



3.2.4-чийме

$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r_0}=\{x_0,y_0,z_0\}$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\{x;y;z\}$ радиус - векторлору десек, анда $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}$ вектору $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр болуп, экөөнүн скалярдык көбөйтүндүсү $\left(\vec{r}-\vec{r_0},\vec{n}\right)=0$ нөл саны болот *(3.2.4-чийме).* Бул перпендикулярдуулук шартын координаталары менен жазып, берилген $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекити аркылуу өткөн, $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр Т тегиздигинин

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (25)$$

теңдемесине ээ болобуз.

2. Мейкиндикте берилген

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ чекиттери эки - экиден бир түзгө таандык болсо да, үчөө тең бир учурда бир түзгө таандык болбогон чекиттер болушсун дейли. Ушундай шарттарда тандалган каалагандай үч чекит аркылуу бир гана тегиздик түзүүгө болот.

Бул үч чекит аркылуу өтүүчү Т тегиздигинин теңдемесин келтирип чыгаруу үчүн, Т тегиздигинде жайгашкан эркин кыймылда өзгөрүүчү $M(x;y;z)$ чекитин алабыз. Ошентип Т тегиздигине M_1, M_2, M_3 , М чекиттеринин төртөөсү тең таандык деп эсептейбиз. Бул учурда $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ векторлору бир тегиздикте жайгашып, компланардуу векторлор тобун түзүшөт. Компланардуу векторлордун аралаш көбөйтүндүсү нөл санына барабар

$$\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}\right)=0. \qquad (26)$$

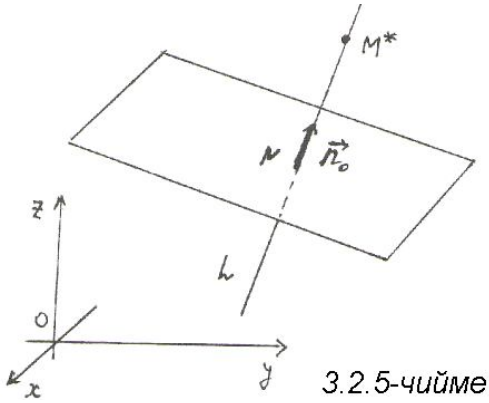
Векторлордун координаталары менен жазып,

$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$, $\quad M_1\vec{M}_2=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$

(26) аралаш көбөйтүүнү аткарсак,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (27)$$



3.2.5-чийме

көрүнүшүндөгү берилген үч чекит аркылуу түзүлгөн Т тегиздигинин теңдемесин алабыз. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты эсептөө эрежесин колдонуп, тегиздиктин (27) теңдемесин (21) көрүнүштөгү жалпы жазылууга келтирүүгө болот.

3.2.3 Чекиттен тегиздикке чейинки аралык

Т тегиздиги жана андан обочо жайланышкан $M^*(x^*;y^*;z^*)$ чекити берилсин *(3.2.5-чийме).*

3.2.1 Аныктама. *M^* чекитинен Т тегиздигине чейинки аралык деп, M^* чекитинен Т тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр L түзүнүн M^*N кесиндисинин узундугу болгон $d = \rho\,(M^*,T)$ санын айтабыз.*

Эгерде Т тегиздиги $x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\gamma - p = 0$ нормалдык теңдемеси менен жана $M^*(x^*;y^*;z^*)$ чекити координаталары менен берилсе, анда M^* чекитинен Т га чейинки аралык

$$d = \rho(M^*,T) = |\,x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p\,| \qquad (28)$$

санына барабар болот.

▷ (28) ди далилдөө үчүн Т тегиздигинде эркин кыймылда өзгөрүүчү $M(x;y;z)$ чекитин алабыз. $\vec{r} = \vec{OM}$, $\vec{r}^* = \overrightarrow{OM}^*$ радиус векторлорунун айырмасы болгон $\vec{r}^* - \vec{r} = \vec{MM}^*$ векторунун, $\vec{n}_0 = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ вектору менен багытталган L түзүндөгү проекциясы: $d = \rho(M^*,T)$ узундугуна барабар, б.а.

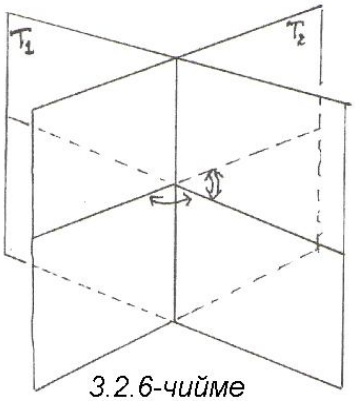
$$\rho(M^*,T) = \Pi p_L(\vec{r}^* - \vec{r}).$$

Проекцияны скалярдык көбөйтүүнүн жардамы менен жазып, $\rho(M^*,T) = (\vec{r}^* - \vec{r},\vec{n}_0) = (\vec{r}^*,\vec{n}_0) - (\vec{r},\vec{n}_0)$ ээ болобуз. (19) боюнча $(\vec{r},\vec{n}_0) = p$ маанисин коюп, аралык оң сан болгондуктан абсолюттук чоңдугу менен алынган $\rho(M^*,T) = \left|(\vec{r}^*,\vec{n}_0) - p\right|$ узундукту табабыз. Аны координаталары менен жазсак (28) келип чыгат.

Жалпы учурда (21) теңдемеси менен берилген $Ax + By + Cz + D = 0,\ (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ тегиздигинен M^* чекитине чейики аралык, анын нормалдаштырылган теңдемеси боюнча

$$d = \rho(M^*T) = \frac{\left|Ax^* + By^* + Cz^* + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (29)$$

формуласы менен эсептелет. ◁



3.2.6-чийме

3.2.4 Тегиздиктердин арасындагы бурч

Берилген

$T_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \;\; A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$

жана

$T_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \;\; A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$

тегиздиктеринин арасындагы бурч

катарында T_1, T_2 экөөсүнүн кесилишинен пайда болгон эки грандуу жандаш бурчтардын экөөсүнүн каалаган бирин алабыз $(3.2.6 - \textit{чийме})$.

T_1 жана T_2 тегиздиктери параллель болуп калса, анда алардын арасындагы бурч 0^0 ка тең болот. Бул эки грандуу жандаш бурчтардын бири тегиздиктердин $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ нормаль – векторлорунун арасындагы $\varphi = \vec{n}_1 \wedge, \vec{n}_2$ бурчуна барабар. Ошондуктан эки тегиздиктин арасындагы бурч катарында алардын нормалдык векторлорунун арасындагы бурчту кабыл алып,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (30)$$

формуласы менен эсептейбиз.

(30) формуласынан эки тегиздиктин перпендикулярдуулук шарты $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ же $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (31)

келип чыгат.

Эки тегиздиктин параллелдүүлүк шарты $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторлорунун коллинеардуу экендигинен же $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ шартынын аткарылышынан келип чыгат. Акыркы теңдештикти координаталары боюнча жазып,

$$A_1 = \lambda A_2, \;\; B_1 = \lambda B_2, \;\; C_1 = \lambda C_2 \;\; \textit{же} \;\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (32)$$

көрүнүшүндөгү эки тегиздиктин параллелдүүлүгүнүн (32) шартына ээ болобуз.

§3.3 Мейкиндиктеги түздөр

3.3.1 Түздүн жалпы теңдемеси

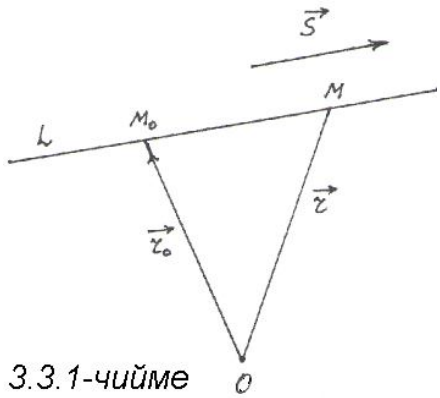
R^3 мейкиндигинде жайгашкан каалагандай L түзүн кандайдыр бир T тегиздигине таандык деп түшүнөбүз. Ошондуктан L түзүндө жайгашкан каалагандай $M(x;y;z)$ чекити T тегиздигинин (21) көрүнүштөгү $Ax+By+Cz+D=0$ жалпы теңдемесин канааттандырат, б.а. мындай чекиттердин көптүгүнүн изинен куралган L түзү да, ушул эле (21) теңдемеси менен берилет. Бирок, T тегиздигинде L сыяктуу чексиз көп түздөр жайгашып, аларга таандык чекиттер да тегиздиктин (21) теңдемесин канааттандырышат. Ошондуктан T тегиздигинин (21) жалпы теңдемесин чексиз көп түздөрдүн теңдемеси катарында эсептеп, T тегиздиги ошол чексиз көп түздөрдөн куралган деп түшүнөбүз.

R^3 мейкиндигинде конкреттүү бир L түзүнүн теңдемеси да x, y, z өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болуп, тегиздиктин теңдемесине окшош сызыктуу теңдеме менен берилет. Мейкиндикте берилген каалагандай L түзүн эки T_1, T_2 тегиздиктеринин кесилишүү сызыгы деп эсептейбиз. Ошентип мейкиндиктеги өз ара параллель болушпаган каалагандай T_1, T_2 эки тегиздиги кесилишип, бир L түзүн аныктайт. Түздүн жалпы теңдемеси эки тегиздиктин теңдемесинен турган

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+O_1=0, & (T_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+O_2=0 & (T_2) \end{cases} \qquad (33)$$

система көрүнүшүндө жазылат. Мейкиндикте түз менен тегиздиктин теңдемелерин айырмалоо максатында, көбүнчө түздүн каноникалык теңдемесин колдонобуз.

3.3.2 Мейкиндикте берилген чекитке жана багытка карата түздүн теңдемелерин түзүү



3.3.1-чийме

1. Мейкиндикте берилген $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекити аркылуу өтүп, берилген $\vec{s}=\{a;в;c\}$ векторуна параллель L түзүнүн теңдемесин түзүү үчүн, L түзүнөн M_0 чекитинен башка экинчи бир эркин кыймылда өзгөргөн $M(x;y;z)$ чекитин алалы. $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ вектору L түзүндө жайгашкан вектор катарында $\vec{s}$ векторуна коллинеардуу болот (3.3.1 – *чийме*).

Демек, коллинеардуулук шарты боюнча кандайдыр бир t саны (параметри) табылып, $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$ *же* $\vec{r} - \vec{r_0} = t \cdot \vec{s}$ теңдештиги аткарылат.

Бул теңдештикти $\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{s}$ көрүнүшүндө жазып, аны L түзүнүн вектордук формадагы теңдемеси деп эсептейбиз. Аны координаталары менен туюнтуп, L түзүнүн t параметрине карата түзүлгөн

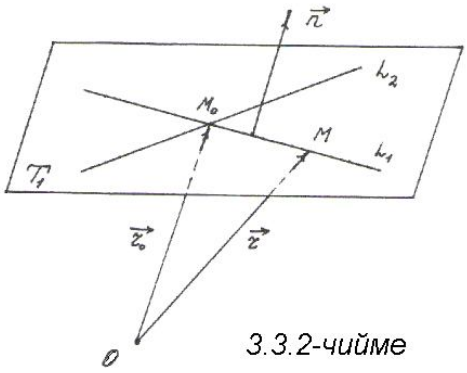
$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tв, \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases} \qquad (34)$$

параметрдик теңдемесин алабыз. L түзү боюнча эркин кыймылдаган $M(x;y;z)$ чекитинин x, y, z өзгөрүлмө координаталары төртүнчү бир t чоңдугунан көз каранды болгон учурда (мисалы, t убактысынан), түздүн теңдемеси параметр деп аталган төртүнчү чоңдукка карата

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (34^A)$$

түзүлөт. (34) теңдемелерин t га карата чыгарып, теңдештирип (t параметрин жоюштуруп),

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y = y_0}{в} = \frac{z = z_0}{c} \qquad (35)$$



3.3.2-чийме

L түзүнүн каноникалык (35) теңдемесине ээ болобуз. Ошентип мейкиндикте бир M_0 чекити аркылуу өтүп, $\vec{s} = \{a; в; c\}$, $a^2 + в^2 + c^2 > 0$ (же $a, в, c$, коэффиценттери бир мезгилде нөл болбойт) багыттоочусуна ээ болгон L түзүнүн бир маанилүү, бир гана теңдемеси түзүлөт.

2. Берилген $M_0(x_0; y_0; z_0)$ чекитинен өтүүчү, берилген $\vec{n} = \{A; B; C\}$ векторуна перпендикуляр L_1 түзүнүн бир маанилүү теңдемесин түзүүгө болобу? - деген суроо туулат (3.3.2 – *чийме*).

Мейкиндикте жайгашкан L_1 түзү аркылуу чексиз көп тегиздиктер өткөндүктөн, алардын бирөөсү болгон T_1 тегиздиги табылып, $T_1 \perp \vec{n}$ шарты аткарылат, T_1 тегиздигиндеги $L_1, L_2, \ldots$ сыяктуу бардык чексиз көп түздөргө $\vec{n}$ вектору перпендикуляр болот. Демек M_0 чекитинен

өткөн, $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр чексиз көп түздөр бар, бул түздөрдүн теңдемеси перпендикулярдуулуктун $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$ шартынан келип чыгып,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (36)$$

көрүнүшүндө болот. Бирок, (36) бир гана L_1 түзүнүн теңдемеси болбостон, чексиз көп $L_1, L_2, \ldots$ сыяктуу түздөргө да теңдеме боло алат. Андай болсо, (36) теңдемеси бир чекит аркылуу өтүүчү чексиз көп түздөрдүн теңдемеси катарында эсептелип, түздү бир маанилүү аныктай албайт, аны түздүн теңдемеси дебестен, T_1 тегиздигинин теңдемеси деп эсептейбиз.

3.3.3 Түздүн теңдемелерин каноникалык көрүнүшкө келтирүү

1. R^3 мейкиндигинде L түзү (33) жалпы теңдемеси менен берилсин дейли. Бул теңдемени (35) каноникалык түргө келтирүү үчүн, L түзүндө жайгашкан бир $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекитин жана багыттоочу $\vec{s}\{a;в;c\}$ векторун билүү жетиштүү.

T_1, T_2 тегиздиктеринин кесилишинде жайгашкан жана берилген $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекити аркылуу өтүүчү L түзүнүн жалпы теңдемеси

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (T_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (T_2) \end{cases} \qquad (33)$$

көрүнүшүндө жазылат. (33) теңдемеден $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекитинин координаталарын аныктайбыз. Ал үчүн өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүн эркин тандап, калган экөөсүн эки белгисиздүү эки теңдемелер системасынын чечимдери катарында аныктайбыз. Натыйжада $x_0;y_0;z_0$ өзгөрүлмөлөрүнүн бирөөсү каалагандай эркин алынган сан, калган экөөсү ушул алынган санга жараша табылган (33) теңдемелер системасынын чечимдери болушат.

T_1 жана T_2 тегиздиктеринин кесилишүү сызыгы катарында аныкталган L түзүнүн багыттоочу $\vec{s}$ вектору, L түзү менен кошо T_1 жана T_2 тегиздиктерине да параллель болуп, алардын $\vec{n_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\vec{n_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$ нормалдык векторлоруна перпендикуляр болот. Ошондуктан багыттоочу $\vec{s}$ вектору катарында $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсү болгон $\vec{s}=\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right]$ векторун алууга болот.

Ошентип, түздүн (33) жалпы теңдемесинен M_0 чекитин жана багыттоочу $\vec{s}$ векторлорун аныктап, (33) теңдемесин (35) каноникалык көрүнүшкө келтире алабыз. Мисалы, 1. $\begin{cases} x-y+z-3=0, \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$ жалпы теңдемеси менен берилген түздүн теңдемесин каноникалык көрүнүшкө келтирели. z өзгөрүлмөсүн эркин тандап $z_0=0$ дейли, анда $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y-1 \end{cases}$ теңдемелер системасына ээ болуп $x_0=1$, $y_0=-2$ чечимдерин табабыз. Демек, берилген түз $M_0(1;-2;\ 0)$ чекити аркылуу өтөт. Түздүн теңдемесин аныктоочу тегиздиктердин нормалдык векторлору $\vec{n}_1=\{1;-1;\ 1\}$, $\vec{n}_2=\{1;\ 1;-2\}$ болгондуктан, аларды вектордук көбөйтүп,

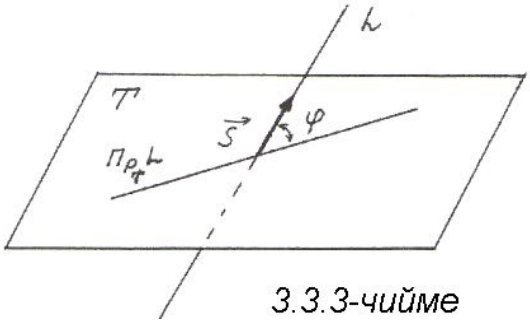
$$\vec{s}=\left[\vec{n}_1,\vec{n}_2\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}=\{1;\ 3;\ 2\}$$

түздүн багыттоочу $\vec{s}$ векторун табабыз.

Түздүн теңдемесинин (35) каноникалык көрүнүшүн пайдаланып, түздүн система көрүнүшүндө берилген теңдемесин $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$ каноникалык көрүнүшүнө келтиребиз.

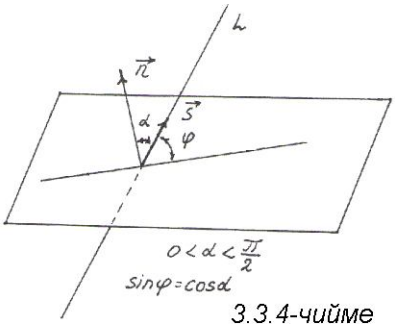
2. Эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн каноникалык теңдемесин түзөлү.

Мейкиндикте берилген $M_1(x_1;y_1;z_1)$ жана $M_2(x_2;y_2;z_2)$ чекиттери аркылуу өтүүчү бир гана L түзүн жүргүзүү мүмкүн.



3.3.3-чийме

Чынында эле L түзүнөн үчүнчү бир эркин кыймылда өзгөргөн $M(x;y;z)$ чекитин алсак, $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлору бир түздө жатышкан векторлор катары коллинеардуу болушат. Коллинеардуулук шарты боюнча λ саны табылып, $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{M_1M_2}$ теңдештиги аткарылат.



3.3.4-чийме

Бул теңдештикти координаталары боюнча жазалы

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1). \end{cases}$$

Аны λ санына карата теңдеп,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (38)$$

көрүнүшүндөгү L түзүнүн каноникалык теңдемесин алабыз.

(38) теңдемеси $M_1(x_1; y_1; z_1)$ чекити аркылуу өткөн, $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ багыттоочу векторуна карата түздүн каноникалык теңдемеси болот.

3.3.4 Мейкиндикте түз менен тегиздиктин жайгашуу абалдары

1. Түз менен тегиздиктин бурчу

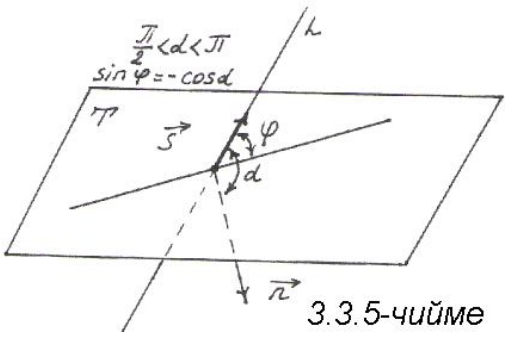
Айталы L түзү

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (37)$$

каноникалык теңдемеси менен, ал эми T тегиздиги

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (38)$$

жалпы теңдемеси менен берилсин. L түзү менен T тегиздигинин арасындагы φ бурчу деп, L түзү менен анын T тегиздигиндеги проекциясынын арасындагы бурчтардын кичинесин айтабыз (3.3.3 – *чийме*).



3.3.5-чийме

Берилген тегиздиктин $\vec{n} = \{A; B; C\}$ нормаль - вектору менен түздүн (37) же анын багыттоочу $\vec{s} = \{a; b; c\}$ векторунун арасындагы бурч α болсо (3.3.4-*чийме*), анда ал бурчтун косинусу $\cos\alpha = \frac{(\vec{n}, \vec{s})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$ формуласы менен аныкталары белгилүү. $\vec{n}$ вектору T тегиздигине перпендикуляр болгондуктан, $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$ болуп, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ келип чыгат. Мындан

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \begin{cases} \sin\varphi, & \text{эгерде} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (3.3.4. - \text{чийме}), \\ -\sin\varphi, & \text{эгерде} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi (3.3.5. - \text{чийме}) \end{cases} \quad \text{же} \ \sin\varphi = |\cos\alpha|$$

теңдештигине ээ болобуз. Демек

$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{n},\vec{s})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{|A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (38)$$

формуласы, L түзү менен T тегиздигинин арасындагы φ бурчунун синусун табуу эрежеси болот (3.3.5-*чийме*).

(38) формуласынан L түзүнүн T тегиздигине параллель болуу шартын табабыз: $L \parallel T \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Rightarrow (\vec{s},\vec{n}) = 0$. Аны координаталары менен жазып $A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c = 0$, (39) түз менен тегиздиктин параллелдүүлүк шартына ээ болобуз.

Ошондой эле L түзү T тегиздигине перпендикуляр болсо, анда L түзүнүн $\vec{s}$ багыттоочу вектору, T тегиздигинин $\vec{n}$ нормалдык векторуна параллель же коллинеардуу болуп, $\vec{n} = \lambda\cdot\vec{s}$ шарты аткарылат. Аны координаталары менен туюнтсак: $A = \lambda a,\ B = \lambda b,\ C = \lambda c$ келип чыгат. Аларды λ га карата теңдеп, түз менен тегиздиктин

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \qquad (40)$$

перпендикулярдуулук шартына ээ болобуз.

2. Түз менен тегиздиктин кесилиши

Эгерде L түзү $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ (41)

каноникалык теңдемеси менен, ал эми T тегиздиги

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (42)$$

теңдемеси менен берилишсе, анда алардын кесилишүү чекитин табуу үчүн, бул теңдемелердин экөөсүн тең канааттандыруучу $M(x,y,z)$ чекитин табуу керек. (41), (42) теңдемелер системасы катарында карап, анын x, y, z өзгөрүлмөлөрүнө карата чечимдерин табабыз. Бирок, белгисиз өзгөрүлмөлөрдүн саны үчөө болуп, системага кирген теңдемелер экөө гана болгондуктан, өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүн сыноо жолу менен эркин тандап, калган экөөсүн эки белгисиздүү эки (41) жана (42) теңдемелеринен турган системанын чечими катарында аныктайбыз.

Түз менен тегиздиктин кесилишүү чекитин табуунун дагы бир усулун көрсөтөлү.

Айталы (41) теңдемеси менен берилген L түзүнүн параметрдик

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (43)$$

теңдемеси белгилүү болсун, анда түз менен тегиздик кесилишүүчү

$M(x,y,z)$ чекитинин координаталарынын (43) маанилери, (42) теңдемесин канааттандырууга тийиш, б.а.

$A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0$ же

$Ax_0+By_0+Cz_0+D+t(Aa+Bb+Cc)=0$ шарты аткарылат. Бул шартты t параметринин табылган t_0 мааниси

$$t_0=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Aa+Bb+Cc}, \qquad (44)$$

($Aa+Bb+Cc\neq 0$) канааттандырары келип чыгат. Андай болсо, табылган t_0 дүн (44) маанисин (43) кө коюп, $M(x,y,z)$ кесилишүү чекитинин координаталарын бир маанилүү аныктай алабыз. Мисал катарында $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$ түзү менен $2x+y+7z-3=0$ тегиздигинин кесилишүү чекитин табалы.

Чыгаруу: ▹Берилген түз $M_0(7;\,3;-1)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{s}=\{3;\,1;-2\}$-багыттоочу векторуна ээ болуп, $\begin{cases} x=7+3t, \\ y=3+t, \\ z=-1-2t \end{cases}$ параметрдик теңдемеси менен жазылат. Бул маанилерди тегиздиктин тендемесине коюп, $2(7+3t)+3+t+7(-1-2t)-3=0$ же $-7t+7=0$ теңдемесинен параметрдин $t_0=1$ маанисин табабыз. Мындан $\begin{cases} x=7+3\cdot 1=10, \\ y=3+1=4, \\ z=-1-2\cdot(1)=-3 \end{cases}$ маанилерин таап, түз менен тегиздиктин кесилишүү чекити $M(10;\,4;-3)$ болорун көрөбүз.◃

Мисалдар

1. $M_1(1;\,2;\,3)$, $M_2(-1;\,2;\,1)$ жана $M_3(3;-1;\,1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү тегиздиктин нормалдык теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу: ▹Үч чекит аркылуу бир гана тегиздик жүргүзүү мүмкүн. Ал тегиздик (27) формуласы боюнча аныкталган теңдеме менен берилет.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 2-2 & 1-3 \\ 3-1 & -1-2 & 1-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=3x+4y-3z-2$$ болгондуктан,

изделүүчү тегиздик $3x+4y-3z-2=0$ жалпы теңдемесине ээ болот.

Анын нормаль-вектору $\vec{n}=\{3;\ 4;-3\}$ болуп, нормалдаштыруучу көбөйтүүчүнү

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{34}},$$

$\left(C=-2<0, ошондуктан\ \ "+"белгисин алабыз\right)$ аныктайбыз. Демек, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{34}}$, $\cos\gamma=\frac{-3}{\sqrt{34}}$, $p=\frac{2}{\sqrt{34}}$ сандары табылып, тегиздик $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\frac{2}{\sqrt{34}}=0$ нормалдашкан теңдемеси менен берилет. ◁

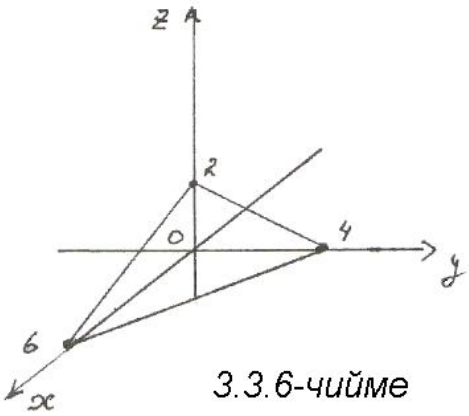
2. $\sqrt{41}x+2y-2z+3=0$ жалпы теңдемеси менен берилген тегиздиктин бирдик нормаль - векторун (ортун) аныктагыла.

Чыгаруу: ▷ Нормалдык вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}=\left\{\sqrt{41};\ 2;-2\right\}$ болгондуктан, анын орту

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{41}\ \vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{41+4+4}}=\frac{\sqrt{41}}{7}\vec{i}+\frac{2}{7}\vec{j}-\frac{2}{7}\vec{k}=\left\{\frac{\sqrt{41}}{7};\frac{2}{7};-\frac{2}{7}\right\}$$

бирдик вектору болот. ◁

3. $M_0(1;0;0)$ чекити аркылуу өтүп, $x+y+z=0$ тегиздигине параллель болгон тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.



3.3.6-чийме

Чыгаруу: ▷ Берилген $x+y+z=0$ тегиздигинин нормалдык вектору $\vec{n}=\{1;\ 1;\ 1\}$, изделүүчү тегиздикке да нормаль - вектор болот, анткени изделүүчү тегиздик берилген тегиздикке параллель жайгашкан. Ошентип $M_0(1;\ 0;\ 0)$ чекити аркылуу өткөн, $\vec{n}=\{1;\ 1;\ 1\}$ векторуна перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемеси (25) формуласы боюнча $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+1\cdot(z-0)=0$ же $x+y+z-1=0$ табылып, изделүүчү тегиздикке теңдеме болот. ◁

4. $2x+3y+6z-12=0$ тегиздигин кургула.

Чыгаруу: ▷ Үч чекит аркылуу бир гана тегиздикти куруу мүмкүн болгондуктан, берилген тегиздикке таандык үч чекитти табабыз. Ал

чекиттерди координаттык октор менен берилген тегиздиктин кесилишүү чекиттери катарында издеп көрөлү:

Ox огу менен кесилишүү чекитинде $x = y = 0$ болгондуктан берилген теңдемеден $z = 2$ келип чыгып, кесилишүү чекити $M_1(0;\ 0;\ 2)$ болот.

Oy огунда $x = z = 0$ болуп, $y = 4$ табылат же кесилишүү чекити $M_2(0;\ 4;\ 0)$ болот. Ox огунда $y = z = 0,$ анда $x = 6$ же $M_3(6;\ 0;\ 0)$ кесилишүү чекитине ээ болобуз*(3.3.6-чийме).*

Табылган M_1, M_2, M_3 чекиттерин туташтырып үч бурчтук түзөбүз, анын бети берилген тегиздиктин бөлүгү болуп, улантып сызуу менен тегиздик курулат. ◁

5. $A\ (5;\ 4;\ 3)$ чекити аркылуу өтүп, координаттык окторду барабар кесиндилерге бөлүүчү тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: ▷Айталы изделүүчү тегиздик координаттык октордун үчөөсүн тең О башталмасынан a узактыгында кесип өтсүн. Анда бул тегиздиктин кесиндилердеги (24) теңдемеси

$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ көрүнүшүндө болот. A чекити тегиздикте таандык болгондуктан, анын теңдемесин канааттандырат $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$, же $a = 12$ ге ээ болобуз. Табылган $a = 12$ маанисин теңдемеге коюп, $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1$ же $x + y + z - 12 = 0$ изделүүчү теңдемени түзөбүз.◁

6. $M_1(-2;\ 1;\ 5)$ жана $M_2(4;\ 3;-1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түздүн жана ал жаткан тегиздиктин теңдемелерин жазгыла.

Чыгаруу: ▷(38) формуласы боюнча эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн $\vec{s} = \{6;\ 2;-6\}$ багыттоочу векторуна карата

$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-5}{-1-5}$, же $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-6}$ каноникалык көрүнүштөгү теңдемесин түзө алабыз.

Каноникалык теңдемени 6 га көбөйтүп, $x + 2 = 3y - 3 = -z + 5$, аларды эки - экиден теңдеп,

$\begin{cases} x + 2 = 3y - 3, \\ -z + 5 = 3y - 3, \end{cases}$ системасына, аларды мүчөлөп кошуп жиберип, $x - 6y - z + 13 = 0$ теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеме M_1, M_2 чекиттери аркылуу өтүүчү түз жайгашкан тегиздиктин жалпы теңдемеси болот. Ошентип түздүн каноникалык теңдемесинен, ал жайгашкан тегиздиктердин бирөөсүнүн жалпы теңдемесин келтирип чыгарууга болот.◁

7. $M_0(-2;\,2;\,5)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{s}=\{3;\,1;-1\}$ векторуна параллель түздүн теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: ▹ (35) формуласынан пайдаланып, изделүүчү түздү $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-1}$ каноникалык теңдемеси менен жазабыз. Түз жайгашкан тегиздиктин жалпы теңдемеси $2x-4y+2z+2=0$ болот. ◃

8. $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$ жалпы теңдемеси менен берилген түздүн каноникалык теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу: ▹ Берилген түз эки $2x-y+3z-1=0$ жана $5x+4y-z-7=0$ тегиздиктеринин кесилишүү сызыгы болот. Бул тегиздиктердин $\vec{n}_1=\{2;-1;\,3\}$ жана $\vec{n}_2=\{5;\,4;-1\}$ нормалдык векторлору, берилген түзгө жана анын багыттоочу $\vec{s}=\{a;b;c\}$ векторуна перпендикуляр болушат. Демек, түздүн $\vec{s}$ багыттоочу вектору катарында $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн алууга болот

$$\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-11\vec{i}+17\vec{j}+13\vec{k}=\{-11;\,17;\,13\}.$$

Берилген түз өтүүчү бир $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекитин табалы. Ал үчүн түздүн жалпы теңдемесинде $z=1$ десек, (x,y,z, өзгөрүлмөлөрүнүн бирин эркин тандайбыз), анда $\begin{cases}2x-y=-2,\\5x+4y=8\end{cases}$ тендемелер системасынан $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$ чечимдери табылып, түз өтүүчү бир $M_0(0;\,2;\,1)$ чекити аныкталат. Демек, түз өтүүчү чекит жана багыттоочу $\vec{s}$ вектору белгилүү болгондуктан, (35) формуласы боюнча $\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}$ түздүн каноникалык теңдемесин түзө алабыз. ◃

9. $7x-2y+3z-1=0$ тегиздиги менен $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-5}$ түзүнүн өз ара жайланышуу абалын аныктагыла.

Чыгаруу: ▹ Берилген тегиздиктин нормалдык вектору $\vec{n}=\{7;-2;\,3\}$, ал эми түздүн багыттоочу вектору $\vec{s}=\{3;\,2;-5\}$ белгилүү. Түз өткөн чекиттердин бирин жогорудагыдай ыкмада аныктап, $M_0(1;-2;\,0)$ чекитин табалы. Түз менен тегиздикти салыштырабыз:

а) Бул $\vec{n},\ \vec{s}$ эки вектору өз ара коллинеардуу болбойт, анткени координаталары өз ара пропорционалдуу эмес же берилген түз тегиздикке перпендикуляр жайгашкан эмес.

б) Скалярдык көбөйтүүдөн $(\vec{n},\vec{s}) = 7\cdot 3 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot(-5) = 2 \neq 0$ алып, алардын өз ара перпендикуляр эместигин, же берилген түздүн тегиздикке параллель болбосун көрөбүз.

Салыштыруулардын натыйжасында берилген түз тегиздикти жантаюу бурчу $\frac{\pi}{2}$ ден кичине болгондой абалда кесип өтөрүн байкайбыз.

Кесилишүү чекитин табалы: Берилген түз $M_0(1;-2;\,0)$ чекити аркылуу өткөндүктөн, параметрдик теңдемесиндеги

$$\begin{cases} x = x_0 + 3t = 1 + 3t, \\ y = y_0 + 2t = -2 + 2t, \\ z = z_0 - 5t = -5t \end{cases}$$

маанилерин тегиздиктин теңдемесине коюп, $7(1+3t) - 2(-2+2t) + 3(0-5t) - 1 = 0$ теңдештигине ээ болобуз. Бул теңдештиктен табылган $t = 5$ маанисин параметрдик теңдемеге коюп, $x = 1 + 3(-5) = -14,\ \ y = -2 + 2(-5) = -12,\ \ z = -5(-5) = 25$ кесилишүү чекитинин $M\ (-14;-12;\,25)$ координаталарын табабыз.

Берилген түз менен тегиздиктин арасындагы бурч (38) формуласына ылайык,

$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{n},\vec{s})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{|7\cdot 3 + (-2)2 + 3(-5)|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{2}{\sqrt{62}\sqrt{38}} = \frac{2}{2\sqrt{589}} = \frac{1}{\sqrt{589}},$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{589}}\right)$ болот. ◁

10. Берилген $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ жана $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$ түздөрүнө параллель болуп, $M_0(4;-3;\,4)$ чекити аркылуу өтүүчү тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: ▷ Берилген түздөрдүн багыттоочу векторлорун тиешелүү түрдө $\vec{s}_1 = \{6;\,2;-3\},\ \ \vec{s}_2 = \{5;\,4;\,2\}$ деп белгилейли. $\vec{s}_1,\ \vec{s}_2$ векторлору да изделүүчү тегиздикке параллель болушуп, анын $\vec{n} = \{A;B;C\}$ нормаль – векторуна перпендикуляр жайгашат. Ошондуктан изделүүчү тегиздиктин нормаль - вектору катарында $\vec{s}_1,\ \vec{s}_2$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн алууга болот

$$\vec{n}=[\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & -3\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=16\vec{i}-27\vec{j}+14\vec{k}=\{16;-27;\,14\}.$$

Берилген $M_0(4;-3;\,4)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{n}\{16;-27;\,14\}$ векторуна перпендикуляр тегиздиктин теңдемеси (25) формуласына ылайык
$16(x-4)-27(y+3)+11(z-4)=0$ же
$16x-27y+14z-159=0$ болот.◁

11. $\begin{cases} y=3x-1,\\ 2z=-3x+2\end{cases}$ түзү менен $2x+y+z-4=0$ тегиздигинин арасындагы бурчту тапкыла.

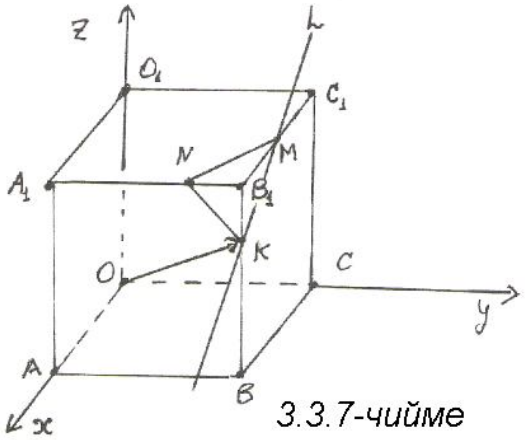
Чыгаруу: ▷Берилген түздүн жалпы теңдемесин каноникалык абалга келтиребиз. Түздү $y=3x-1$ жана $2z=-3x+2$ тегиздиктеринин кесилишүү сызыгы катарында карап, түз өтүүчү бир чекитти жана багыттоочу векторун аныктаган соң, түздүн теңдемесин каноникалык абалга келтире алабыз.

Алгебралык теңдеш өзгөртүп түзүү усулун колдонуу менен берилген тегиздиктердин теңдемелерин x ке карата теңдештирип,
$x=\dfrac{y+1}{3}$, $x=\dfrac{2(z-1)}{-3}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{2(z-1)}{-3}$ аларды 2 ге бөлүп,
$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-1}{-3}$
түздүн кононикалык теңдемесин табабыз. Демек, түздүн багытточу вектору $\vec{s}=\{2;\,6;-3\}$ болуп, (38) формуласы боюнча анын берилген тегиздиктин $\vec{n}=\{2;\,1;\,1\}$ нормаль - вектору менен түзгөн бурчунун косинусу $\cos\alpha$, же түз менен тегиздиктин арасындагы φ бурчунун синусу ($\sin\varphi=|\cos\alpha|$ теңдештиги эске алындат)

$$\sin\varphi=\frac{|(\vec{n},\vec{s})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|2\cdot 2+6\cdot 1+(-3)\cdot 1|}{\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{7}{7\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$$

көрүнүшүндө табылат.◁

12. $OABCO_1A_1B_1C_1$ кубунун кыры a узундук бирдигине барабар. B_1 чокусунан $\dfrac{a}{7}$ бирдик узактыкта жайгашкан B_1B кырындагы K чекитинен өтүп, (OK) түзүнө перпендикуляр тегиздик менен кубдун кесилишинин аянтын эсептегиле (3.3.7 – *чийме*).



3.3.7-чийме

Чыгаруу: ▹Берилген кубду координаттык мейкиндикте *3.3.7-чиймеде* көрсөтүлгөндөй жайгашкан дейли. Анда K чекитинин координаталары $K\left(a;a;\frac{6a}{7}\right)$ болуп, $\overrightarrow{OK}=\left\{a;a;\frac{6a}{7}\right\}$ радиус – вектору кесилиш жаткан тегиздиктин $\vec{n}$ нормаль-вектору боло алат. Ошентип $K\left(a;a;\frac{6a}{7}\right)$ чекитинен өтүп, $\vec{n}=\left(a;a;\frac{6a}{7}\right)$ векторуна перпендикуляр тегиздиктин $a(x-a)+a(y-a)+\frac{6a}{7}\left(z-\frac{6a}{7}\right)=0$ көрүнүшүндөгү теңдемесине ээ болобуз. Бул тегиздиктин куб менен кесилүү чекиттеринин бирөөсү $K\left(a;a;\frac{6a}{7}\right)$, калган экөөсүн табалы. Ал чекиттер кубдун жогорку бетиндеги кырларда жайгашкан M, N, чекиттери болуп, M чекитинин $y=a$, $z=a$ координаталары, N чекитинин $x=a$, $z=a$ координаталары белгилүү. M,N, чекиттери тегиздикке таандык болуп, анын теңдемелерин канааттандыргандыктан. M чекитине карата $a(x-a)+a(a-a)+\frac{6a}{7}\left(a-\frac{6a}{7}\right)=0$ теңдештигинен

$x=\frac{43a}{49}$ координатасын, N чекитине карата $a(a-a)+a(y-a)+\frac{6a}{7}\left(a-\frac{6a}{7}\right)=0$

теңдештигинен $y=\frac{43a}{49}$ координатасын табабыз.

Ошентип жүргүзүлгөн тегиздик $K\left(a;a;\frac{6a}{7}\right)$, $M\left(\frac{43a}{49};a;a\right)$, $N\left(a;\frac{43a}{49};a\right)$ үч чекиттер аркылуу өтөт. Чокулары ушул эле чекиттер болгон үч бурчтуктун аянты, тегиздиктин куб менен кесилишкен бөлүгүнүн аянты болот.

$\overrightarrow{KM}=\left\{-\frac{6a}{49};\ 0;\ \frac{a}{7}\right\}$, $\overrightarrow{KN}=\left\{0;\ -\frac{6a}{49};\ \frac{a}{7}\right\}$ болгондуктан, үч бурчтуктун аянты $S_{\Delta аянт}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KN}\right]\right|$ көрүнүшүндө эсептелет. Вектордук көбөйтүүдөн кийин

$$\left[\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KN}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{6a}{49} & 0 & \frac{a}{7}\\ 0 & -\frac{6a}{49} & \frac{a}{7}\end{vmatrix}=\vec{i}\,\frac{6a^2}{343}+\vec{j}\,\frac{6a^2}{343}+\frac{36a^2}{2401}\vec{k}=\left\{\frac{6a^2}{7^3};\frac{6a^2}{7^3};\frac{(6a)^2}{7^4}\right\}$$

вектору келип чыгат. Анын узундугунун жарымы изделүүчү аянт бирдигине барабар $S_{\Delta аянт}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6^2a^4}{7^6}+\frac{6^2a^4}{7^6}+\frac{(6a)^4}{7^8}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6a^2}{7^3}\sqrt{1+1+\frac{6^2}{7^2}}=\frac{3a^2\sqrt{134}}{7^4}$. ◁

13. $\begin{cases}2x+3y+3z-9=0,\\ 4x+2y+z-8=0\end{cases}$ жалпы теңдемеси менен берилген түздүн чиймесин сызгыла.

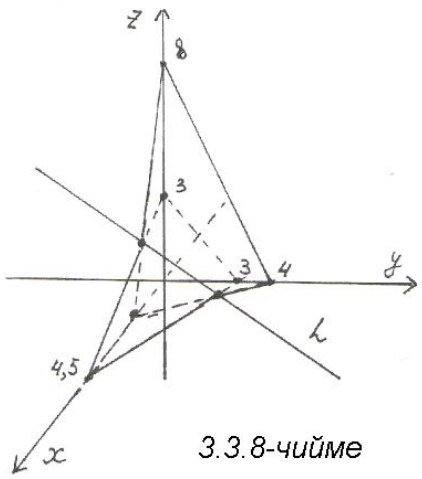
Чыгаруу: ▷ Берилген түз $2x+3y+3z-9=0$ жана $4x+2y+z-8=0$ тегиздиктеринин кесилиш сызыгы болот. Системада берилген теңдемелерди тегиздиктин кесиндилердеги (24) теңдемелерине өзгөртүп түзөлү :

$$а)\quad 2x+3y+3z-9=0\Rightarrow\frac{2x}{9}+\frac{3y}{9}+\frac{3z}{9}=1\quad же\quad \frac{x}{4{,}5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1;$$

$$б)\quad 4x+2y+z-8=0\Rightarrow\frac{4x}{8}+\frac{2y}{8}+\frac{z}{8}=1\quad же\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1.$$

Алардын графиктерин тургузуп, эки үч бурчтуктун кесилишүү сызыгы L түзү болорун көрөбүз (3.3.8 – чийме). ◁

Көнүгүүлөр



3.3.8-чийме

3.1.Төмөндөгү берилгендер боюнча тегиздиктин теңдемесин түзгүлө:

а) Oxz тегиздигине параллель болуп, $M\ (2;-5;\ 3)$ чекити аркылуу өткөн;

б) Oz огу жана $M\ (-3;\ 1;-2)$ чекити аркылуу өткөн.

($жообу$ $а)$ $y+5=0$; $б)$ $x+3y=0$.)

3.2. $A\ (1;\ 3;-2)$ жана $B(7;-4,\ 4)$ чекиттери берилген. B чекитинен өтүүчү жана AB

кесиндисине перпендикуляр тегиздиктин теңдемесин түзгүлө. $(жообу \quad 6x-7y+6z-94=0)$

3.3. Тегиздиктердин теңдемесин түзгүлө:

а) $M\ (-2;\ 7;\ 3)$ чекитинен өтүп, $x-4y+5z-1=0$ тегиздигине параллель;

б) O координаты башталмасы аркылуу өтүп, $2x-y+5z+3=0$ *жана* $x+3y-z-7=0$ эки тегиздиктерине перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$(жообу \quad а) \quad x-4y+5z+15=0; \quad б) \quad 2x-y-z=0.)$

3.4. Эгерде O чекитинен T тегиздигине түшүрүлгөн перпендикулярдын негизи, T тегиздигинде жайгашкан $P(3;-6;\ 2)$ чекити болсо, анда T тегиздигинин теңдемесин жазгыла. $(жообу \quad 3x-6y+2z-49=0)$

3.5. Координата башталмасы $O(0;\ 0;\ 0)$ жана $A(3;-2;\ 1),\ B(1;\ 4;\ 0)$ чекиттери аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$(жообу \quad 4x-y-14z=0)$

3.6. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ *жана* $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$ түздөрүнүн арасындагы бурчту аныктагыла.

$\left(жообу \quad \cos\varphi=\frac{72}{77}\right)$

3.7. $\begin{cases}2x-3y-3z+9=0,\\ x-2y+z+3=0\end{cases}$ түзүнүн жалпы теңдемесин каноникалык түргө келтиргиле.

$\left(жообу \quad \frac{x}{9}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{-1}\right)$

3.8. $M\,(2;\,-5;\,3)$ чекити аркылуу төмөндөгүдөй шарттарда жүргүзүлгөн түздөрдүн теңдемесин түзгүлө:

а) Oz огуна параллель түздүн;

б) $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\ 5x+4y-z-7=0\end{cases}$ түзүнө параллель түздүн.

$\left(жообу \quad а) \quad \frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-3}{1} \quad же \quad \begin{cases}x-2=0,\\ y+5=0;\end{cases} \quad б)\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9};\right)$

$в)\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$

3.9. $2x-3y+5z-7=0$ тегиздигине перпендикуляр болуп, $A\,(1;\,-1;\,0)$ чекити аркылуу өтүүчү түздүн теңдемесин жазгыла.

$\left(жообу \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{3}\right)$

3.10. Кесилишүү чекитин тапкыла:

а) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ түзү менен $3x-y+2z-5=0$ тегиздигинин;

б) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ түзү менен $3x-3y+2z-5=0$ тегиздигинин.

$(Жообу\ \ а)\ (2;3;1);\ б)\ кесилишпейт,\ анткени\ тегиздикке\ параллель\ жайгашкан)$

3.11. $O(0;0;0)$ координата башталмасынан $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$ түзүнө перпендикуляр болуп курулган тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$(Жообу\ \ 4x+5y-2z=0)$

3.12. $A(4;-3;1)$ чекитинин $x+2y-z-3=0$ тегиздигиндеги проекциясын тапкыла.

$(Жообу\ \ (5;-1;0))$

3.13. Берилген $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ жана $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$ түздөрүнүн экөөсүнө тең параллель болуп, $M(4;-3;1)$ чекити аркылуу өтүүчү тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$(Жообу\ \ 16x-27y+14z-159=0)$

3.14. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{2}$ түзү аркылуу өтүп, $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ түзүнө параллель тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$(Жообу\ \ 23x-16y+10z-153=0)$

3.15. Берилген чекиттен берилген тегиздикке чейинки аралыкты тапкыла:

а) $M(1;2;4)$ чекитинен $2x+2y-z-11=0$ тегиздигине чейин;

б) $M(7;0;-7)$ чекитинен $18x-6y+9z+14=0$ тегиздигине чейин;

в) $M(\sqrt{5};\sqrt{12};2)$ чекитинен $y\sqrt{3}+z+20=0$ тегиздигине чейин.

$\left(жообу\ \ а)\ 3;\ \ б)\frac{27}{21};в)\ 14\right)$

3.16.Төмөндөгү өз ара параллель тегиздиктердин арасындагы аралыктарды тапкыла:

а) $3x-6y+2z+35=0$ менен $6x-12y+4z+5=0;$

б) $5x+2y-3z-5=0$ менен $10x+4y-6z+5=0;$

в) $7x-y+\sqrt{2}\cdot z-3\sqrt{2}=0$ менен $7\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}\cdot y+2z+6=0.$

$\left(Жообу\,а)\frac{65}{14};\ \ б)\frac{15}{\sqrt{252}};\ \ в)\frac{12}{\sqrt{104}};\right)$

3.17. Пирамиданын чокулары

$A(2;1;-1),\ B(3;0;1),\ C(2;-1;3)$ *жана* $D(0;-7;0)$ чекиттеринде жайгашкан. Пирамиданын D чокусунан түшүрүлгөн бийиктикти тапкыла .

$\left(Жообу\ \ H=\frac{15}{\sqrt{5}};\right)$