8 – лекция:

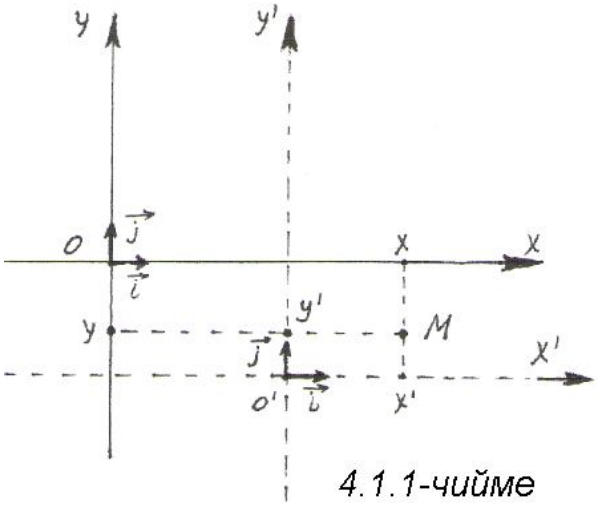
ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИЙРИЛЕР ЖАНА БЕТТЕР

§ 4.1 Тегиздиктеги координаталар системасын өзгөртүп түзүү

4.1.1 Параллель которуу жана буруу

Чөйрө таануу процессинде математикалык моделдерди түзүүдө, байкоочу адам турган жерди элестеткен О башталма чекитине негизги көңүл бурулуп, сан моделдерин жайгаштыруу, векторлорду куруу, түздөр менен тегиздиктердин теңдемелерин түзүү сыяктуу амал - аракеттер, ушул О чекитине салыштырылып ишке ашырылганын байкадык. Чөйрөдө реалдуу жайгашкан обьект кайсы О чекитинен карасаң да мурдагы реалдуу абалында кала берет. Бирок О чекити өзгөргөн сайын көз мерчеминде анын формасы кичирейип же чоңоюп көрүнүп, сүрөттөлүшү өзгөрөт. Демек, анын математикалык модели да ар бир чекитте ар башка көрүнүштө болот. Математикалык модели түзүлүп жаткан обьект өзгөрбөгөндүктөн, анын ар бир тандалган О башталуу чекитине карата түзүлгон моделдеринин арасында байланыш болууга тийиш.

Тегиздиктен каалагандай эркин тандалган О башталуу чекити жана ага карата эркин багыттарда түзүлгөн тик бурчтуу декарттык координаталар системалары, бир эле башталмада орнотулган тик бурчтуу декарттык координаталар системасын параллель которуу жана буруу менен ишке ашырыларын байкайбыз. Ошондуктан реалдуу обьектке байкоо жүргүзүү чекити жана көрүү талаасынын багыттары өзгөргөн кезде түзүлгөн математикалык моделдердин арасындагы байланыштар, ошол обьекттин координаталарын параллель которуу жана буруу учурундагы өзгөрүү байланыштарын орнотуу менен көрсөтүлөт.



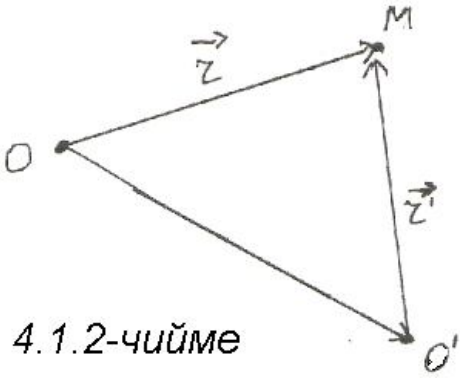
4.1.1-чийме

I. Параллель которуу

Айталы, тегиздикте Oxy жана $O'x'y'$ тик бурчтуу декарттык координаталар системалары берилип, координаттык октору өз ара параллель жайланышсын, б.а. $Ox // O'x'$, $Oy \parallel O'y'$ дейли. Бул учурда Oxy координаталар системасы $O'x'y'$ абалына параллель которулду (же тескерисинче) деп түшүнөбүз.

Мындай которууда Oxy, $O'x'y'$ координаттык системаларынын орттору тең болушуп ($\vec{i}=\vec{i}'$, $\vec{j}=\vec{j}'$), аларды бир эле $\vec{i}$, $\vec{j}$ орттору деп эсептөөгө болот.

Кайсы бир обьект катарында тегиздиктен эркин тандалган М чекити, бул координаталар системасына карата тиешелүү түрдө ($x;y$) жана ($x';y'$) координаталары менен даректештирилсин *(4.1.1-чийме).* Андай болсо М чекити Oxy системасында $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\vec{j}$, $O'x'y'$ системасында $\vec{r}'=x'\cdot\vec{i}+y'\cdot\vec{j}$, радиус векторлоруна ээ болот. Ал эми O' чекити Oxy системасына карата $O'(\alpha;\beta)$ координаталуу чекит болсун, анда O' чекитинин Oxy ке карата радиус – вектору $\vec{OO'}=\alpha\cdot\vec{i}+\beta\cdot\vec{j}$ болуп, $\vec{r}$, $\vec{r}'$, $\vec{OO'}$ векторлору $\vec{r}=\overrightarrow{OO'}+\vec{r}'$ байланышында болушат (4.1.2-чийме).



4.1.2-чийме

Бул байланышты

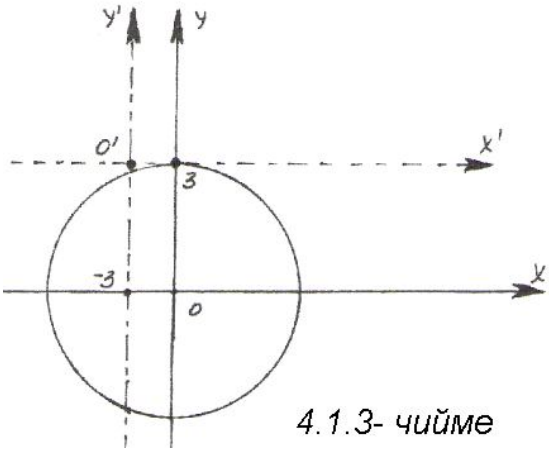
$$x\vec{i}+y\vec{j}=(\alpha\cdot\vec{i}+\beta\cdot\vec{j})+(x'\vec{i}+y'\vec{j})$$

көрүнүшүндө жазып, тиешелүү координаталарын теңдеп,

$$\begin{cases} x=x'+\alpha, \\ y=y'+\beta \end{cases} \qquad (1)$$

параллель которууда өзгөрүлгөн координаталарды байланыштыруучу (1) формуласына ээ болобуз.

Мисал катарында бир эле айлананын эки координаттык системалардагы теңдемелерин көрсөтөлү. Oxy координаттык системада $x^2+y^2=9$ теңдемеси менен берилген айлананын, башталмасы Oxy координаттык системасындагы O'(-2;3) чекитине которулган $O'x'y'$ координаттык системасындагы теңдемесин түзөбүз *(4.1.3 - чийме). Oxy* координаттык системасында берилген теңдеме борбору О чекити, радиусу R=3 болгон айлана болот. Ал эми (1) формуласынын негизинде $O'x'y'$ системасында $\alpha=-2$, $\beta=3$ болуп, теңдеме

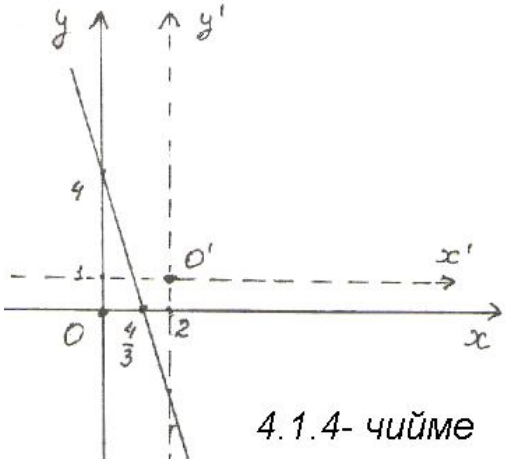


4.1.3- чийме

$(x'-2)^2+(y'+3)^2=9$ же

$(x')^2+(y')^2-4x'+6y'+4=0$

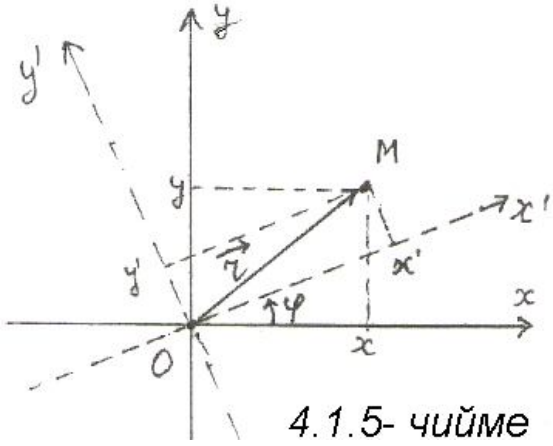
көрүнүшүнө өзгөрүп, берилген айлана өзгөрбөй калганы менен $O'x'y'$ координаттык системасында борбору O(-2; 3), радиусу R=3 болгон айлана сыяктуу көрүнөт.



4.1.4- чийме

Экинчи мисал Oxy координаттык системасында берилген түздүн $3x+y-4=0$ теңдемесин $O'x'y'$ координаттык системасындагы өзгөрүүсүн көрсөтүү болсун.

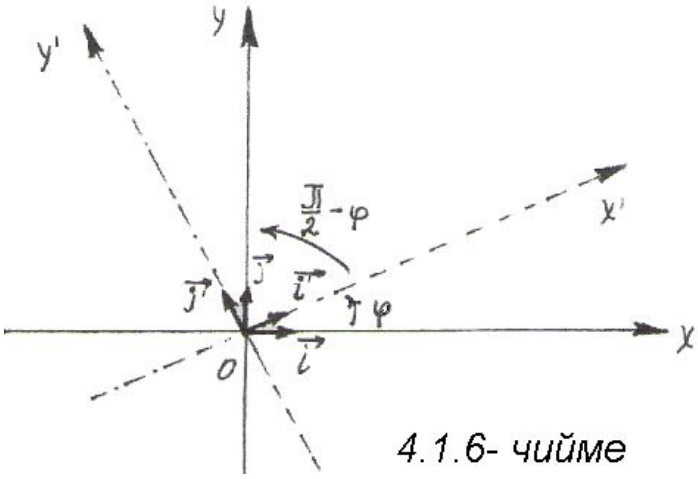
Oxy координаттык системада O' *чекити* $O'(2;1)$ координаталарына ээ десек, анда $\alpha=2$, $\beta=1$ болуп, (1) формуласы $x=x'+2$, $y=y'+1$ көрүнүшүндө жазылат. Бул маанилерди берилген түздүн теңдемесине коюп, $3(x'+2)+y'+1-4=0$ же $3x'+y'+3=0$, берилген түздүн жаңы $O'x'y'$ координаттык системасындагы теңдемесин алабыз *(4.1.4 - чийме).* Ошентип бир эле түз О чекитинен үстүнөн өтүүчү болуп көрүнсө, O' чекитинен төмөн жактан өтүүчү болуп көрүнүп, ар башка теңдемелер менен берилет.



4.1.5- чийме

II. Буруу

Oxy координаттык системасын О башталмасынын айланасында φ бурчуна бурганда жаңы $Ox'y'$ координаттык системасы келип чыгат. Ошентип, Oxy жана $Ox'y'$ координаталар системалары жалпы О башталуу чекитине ээ болуп, координаттык окторунун багыттары боюнча гана айырмаланышат *(4.1.5 - чийме).*



4.1.6- чийме

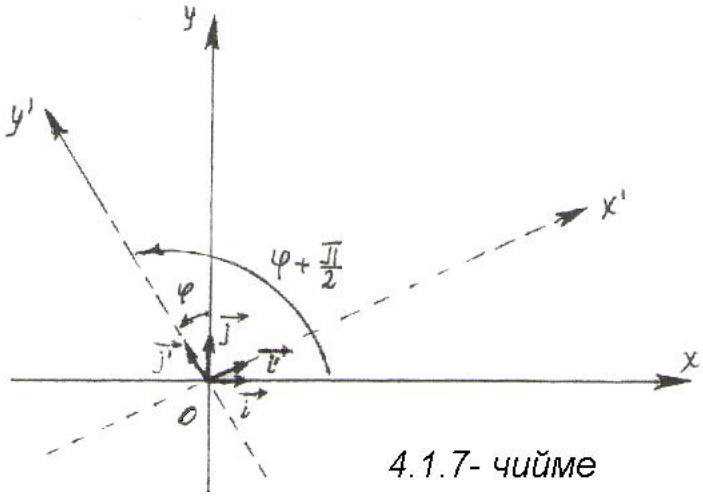
Тегиздикте эркин абалда жайгашкан М чекити Oxy координаталар системасында М($x;y$), ал эми $Ox'y'$ координаталар системасында М($x';y'$) координаталарга ээ болсун. Oxy координаталар системасынын ортторун $\vec{i},\vec{j}$; Ал эми $Ox'y'$ координаталар системасынын ортторун $\vec{i}',\vec{j}'$ дейли *(4.1.6 - чийме).*

$\vec{i}'$ орту Ox' огунда жайгашып, Ox огу менен φ; Oy огу менен $\frac{\pi}{2}-\varphi$ бурчун түзгөндүктөн, анын координаталары Oxy системасынын багыттоочу косинустары аркылуу

$$\vec{i}' = \{\cos\varphi;\ \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\ \} =$$

$$= \{\cos\varphi;\sin\varphi\} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

көрүнүшүндө жазылат. $\vec{j}'$ орту Oy' огунда жатып, Ox огу менен $\varphi+\frac{\pi}{2}$, Oy огу менен φ бурчун түзүп, Oxy координаталар системасында



4.1.7- чийме

$\vec{j}' = \left\{\cos(\varphi+\frac{\pi}{2});\cos\varphi\right\} = \{-\sin\varphi;\cos\varphi\} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$ координаталары аркылуу жазылат *(4.1.7 - чийме).* Эркин тандалган М чекити Oxy, $Ox'y'$ координаталар системасынын экөөндө тең О чекитинен бирдей узактыкта жайгашкандыктан, анын $\vec{r}$ жана $\vec{r}'$ радиус - векторлору барабар болушат. $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}'x' + \vec{j}'y' = \vec{r}'$ теңдештигиндеги $\vec{i}'$ жана $\vec{j}'$ ортторунун ордуна координаталары менен жазылыштарын коюп,

$\vec{i}x + \vec{j}y = (\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi)x' + (-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi)y'$ же

$\vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) + \vec{j}(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)$ же

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

М чекитинин Oxy системасындагы (x; y) координаталары менен $Ox'y'$ системасындагы ($x';y'$) координаталарын байланыштыруучу, (2) формуласын табабыз.

Мисалы, жогоруда караган $3x+y-4=0$ түзүнүн Oxy координаталар системасынын $\varphi=\frac{\pi}{6}$ бурчуна буруу менен курулган $Ox'y'$ координаталар системасындагы теңдемесин көрсөтөлү.

(2) формуласынан $\varphi=\frac{\pi}{6}=30^0$ болгондо $\begin{cases} x=x'\frac{\sqrt{3}}{2}-y'\frac{1}{2}, \\ y=x'\frac{1}{2}+y'\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

маанилерин аныктап, түздүн теңдемесине коёлу.

Мындан $3\,(x'\frac{\sqrt{3}}{2}-y'\frac{1}{2})+(x'\frac{1}{2}+y'\frac{\sqrt{3}}{2})-4=0$, же

$x'(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})+y'(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})-4=0$, же $\frac{x'}{2}(3\sqrt{3}+1)+\frac{y'}{2}(\sqrt{3}-1)-4=0$

ошол эле түздүн буруудан кийинки $Ox'y'$ координаталар системасындагы теңдемесине ээ болобуз. Берилген түз мурдагы эле абалында кала бергени менен, байкоо аппараты блгон декарттык координаталар системасы өзгөрүп, түздү мүнөздөгөн математикалык модели же теңдемеси башка көрүнүштө жазылат.

III. Күзгүдөй чагылтуу

Координаттык системаларды параллель которуу же буруу менен өзгөртүп түзүүлөрдөн башка, кээде күзгүдөй чагылтып өзгөртүүнү да колдонобуз. Ал үчүн О башталмасы жана Ox абсцисса огу ордунда калып, Oy координата огунун багытын карама– каршы багытка өзгөртөбүз. Бул өзгөртүүдөгү байланыш

$$\begin{cases} x=x', \\ y=-y' \end{cases} \qquad (3)$$

көрүнүшүндө орнотулат.

Күзгүдөй чагылтууда түздүн $3x+y-4=0$ теңдемеси (3) байланыш формуласынын негизинде $3x'-y'-4=0$ теңдемесине айланат.

Натыйжа.

1. Тегиздиктеги тик бурчтуу декарттык координаталар системаларынын чен масштабдары өзгөрбөгөндөй абалда өзгөртүп түзүүлөрдүн баары, параллель которуу жана буруу амалдары менен гана ишке ашырылат. Зарыл болгон учурда күзгүдөй чагылтуу амалы да колдонулат.

2. Декарттык координаталар системасын өзгөртүп түзүүдө байкоо жүргүзүлүүчү обьекттер мурдагы калыбында сакталып, алардын математикалык моделдери же теңдемелери гана өзгөрөт. Бул теңдемелерди байланыш формулалары аркылуу бир теңдемеге келтирүүгө болот. Ошондуктан декарттык координаталар системасынын О башталма чекитин каалагандай эркин алынган чекитке жайгаштыра берсе болот.

§ 4.2 Экинчи тартиптеги ийрилер

4.2.1 Экинчи тартиптеги көп мүчөлөрдү өзгөртүп түзүү

Тегиздикте берилген Oxy тик бурчтуу декарттык координаталар системасына карата түзүлгөн $Ax+By+C=0,\ A^2+B^2>0$ (коюлган шарт A, B коэффициенттери бир учурда нөл боло албайт дегенди түшүндүрөт) теңдемеси түз сызыкты мүнөздөп, өзгөрүлмө x, y чоңдуктары биринчи даражада катышкандыктан сызыктуу теңдеме деп аталат. Түздү болсо, биринчи тартиптеги ийри деп эсептөөгө болот.

Жалпы учурда тегиздикте жайгашкан бардык фигураларды эки ченемдүү жалпак фигуралар деп, P(x, y) =0 (4)
айкын эмес функция көрүнүшүндө же у ке карата чыгарылган у = f (x) айкын функция көрүнүшүндөгү теңдемелер менен мүнөздөөгө болот. Ошентип (4) жалпы теңдемесинде x, y өзгөрмөлөрү каалагандай даражада катыша алышат. Бул учурда (4) теңдемесинин сол жагы x, y эки өзгөрмөлөрүнө карата P(x, y) көп мүчөсүн түзөт. Өзгөрүлмөлөрдүн даражаларынын эң чоңу көп мүчөнүн тартиби деп аталат. Экинчи тартиптеги көп мүчөдөн турган (4) көрүнүштөгү теңдеме – функция сүрөттөгөн жалпак фигуралар экинчи тартиптеги ийрилер деп аталышат.

Экинчи тартиптеги көп мүчө жалпы учурда

$$P(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G \qquad (5)$$

көрүнүштө жазылып, экинчи тартиптеги ийри

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G=0 \qquad (4^A)$$

теңдемеси менен сүрөттөлөт ($A,B,C,D,E,G\in R$). Тегиздикте чексиз көп ийрилер жашап, алардын арасынан коэффициенттери чыныгы сандар болушкан, оң бүтүн даражалуу экинчи тартиптеги ийрилер гана (4^A) теңдемеси менен берилет. Аларга токтолуп өтөбүз.

Экинчи тартиптеги (5) көп мүчөнүн жазылышын Oxy координаталар системасын буруу жана параллель которуу менен өзгөртүп, колдонууга ыңгайлуу көрүнүшкө келтирүүгө болот.

1) Буруу

Oxy тик бурчтуу координаталар системасын О башталмасынын айланасында φ бурчуна буралы. Келип чыккан жаңы $Ox'y'$ тик бурчтуу координаталар системасы менен эски Oxy координаталар системасынын арасындагы байланыш (2) формуласына ылайык

$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{cases}$ болгондуктан, (5) көп мүчөгө x, y тин байланыш маанилерин коюп, топтоштурган соң, $x' \cdot y'$ көбөйтүндүсүнүн коэффициенти болгон $2B'$ санын нөлгө айлантуу шартын аткаруучу φ бурулуу бурчун табалы. Ордуна коюп эсептөөлөрдүн натыйжасында

$$P'(x', y') = \left(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi\right)\left(x'\right)^2 +$$
$$+\left(-2A\cos\varphi\sin\varphi + 2B\cos^2\varphi - 2B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi\right)x' \cdot y' +$$
$$+\left(A\sin^2\varphi - 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\cos^2\varphi\right)\left(y'\right)^2 + (2D\cos\varphi + 2E\sin\varphi)x' +$$
$$+\left(-2D\sin\varphi + 2E\cos\varphi\right)y' + G \qquad (6)$$

көп мүчөсүнө ээ болуп, мындан

$2B'$=2(-Asinφ cosφ + B(cos$^2\varphi$ - sin$^2\varphi$) + C sinφ cosφ) =

= (C - A)sin2φ +2Bcos2φ коэффициентин аныктап,

ctg2φ = $\frac{A-C}{2B}$ болсо, $2B'$=0 болорун көрөбүз. Демек, бурулуу бурчун $\varphi = \frac{1}{2} arcctg \frac{A-C}{2B}$ деп алсак, анда $2B'$=0 болуп, (6) көп мүчөсү

$$P'(x', y') = A'(x')^2 + C'(y')^2 + 2D'x' + 2E'y' + G' \qquad (5^A)$$

көрүнүшүнө өзгөрөт (A', B', D', E', G' коэффициенттери (6) да кашаанын ичтеринде көрсөтүлгөн). Жазуудагы ыңгайлуулук үчүн, бурулуунун натыйжасында пайда болгон $Ox'y'$ координаталар системасын кайра курулган Oxy деп эсептесек, (5^A) көп мүчөсүн

$$P(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G \qquad (5^B)$$

көрүнүшүндө жаза алабыз. Анткени $x', y', A' \ldots$ белгилөөлөрү жазууда ыңгайсыздыкты жаратат.

2) Параллель которуу

Кайра курулган Oxy тик бурчтуу координаталар системасын $\begin{cases} X = x + \alpha, \\ Y = y + \beta; \end{cases}$ параллель которуусу менен $O'XY$ тик бурчтуу координаталар системасына өзгөртөлү. Жаңы $O'XY$ координаталар системасынын октору, эски Oxy координаталар системасынын окторун ($-\alpha; -\beta$) чекитине которуу менен ишке ашырылат. α менен β га айрым

конкреттүү шарттарды коюу менен (5^B) көп мүчөсүн төмөндөгүдөй үч учурдагы көрүнүштөргө гана келтирүүгө болот:

1. A$\neq$0, C$\neq$0 болсо, $\alpha = \frac{D}{A}$, $\beta = \frac{E}{C}$ деп тандап, (5^B) көп мүчөсүн

(I) F(X,Y)=AX^2 + CY^2 + (Q - $\frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}$) көрүнүшүнө келтиребиз;

2. A =0, D$\neq$0 болсо, $\alpha = \frac{1}{2D}(G - \frac{E^2}{C}), \beta = \frac{E}{C}$ деп тандасак, анда (5^B) көп мүчөсү

(II) F(X,Y)=CY^2 + 2DX көрүнүшүндө болот;

3. A=D = 0 болсо, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{E}{C}$ деп тандап, (5^B) көп мүчөсүн

(III) F(X,Y)=CY^2 + (G - $\frac{E^2}{C}$) көрүнүшүнө келтире алабыз.

4.2.2 Экинчи тартиптеги ийрилердин каноникалык теңдемелери

Oxy тик бурчтуу декарттык координаталар системасын буруу, параллель которуу менен экинчи тартиптеги P(x, y) көп мүчөсүн, $O'XY$ координаталар системасындагы F(X,Y) экинчи тартиптеги көп мүчөсүнө өзгөртүп жаздык. Демек, тегиздикте берилген (4^A) көрүнүшүндөгү экинчи тартиптеги ийринин теңдемесин

P(x, y) =0 көрүнүшүнөн башка

F(X,Y) =0 (6)

көрүнүшүнө келтирүүгө болот. (6) көрүнүшүн үч учурга бөлдүк:

(6-I) F(X,Y)=0 $\Leftrightarrow$ AX^2 + CY^2 + K = 0.

Мында A$\neq$0, C$\neq$0, K= G - $\frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}$;

(6-II) F(X,Y)=0 $\Leftrightarrow$ CY^2 + 2DX=0.

Мында A=0, D$\neq$0;

(6-III) F(X,Y)=0 $\Leftrightarrow$ CY^2 + (G - $\frac{E^2}{C}$)=0. (Мында A=D = 0);

Тегиздикте берилген (4^A) экинчи тартиптеги ийрилеринин (6-I), (6-II), (6-III) түрлөрүнөн башка теңдемелери жок, ошондуктан алардын коэффициенттерин өзгөртүп (бөлүп, көбөйтүп), жаңы белгилөөлөрдү киргизүү менен X,Y өзгөрүлмөлөрүн өзүбүз көнгөн x, y өзгөрүлмөлөрү менен кайра алмаштырып, тегиздиктин бетинде жайгашкан экинчи тартиптеги жалпак ийрилердин төмөндөгүдөй тогуз каноникалык теңдемесин түзөбүз:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **- эллипс (**$a \neq$ **0, b**$\neq$ **0), (6-I) теңдемеден келип чыгат;**

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **- гипербола (**$a \neq$ **0, b**$\neq$ **0), (6-I) теңдемеден алынат;**

3) $y^2=2px$ **- парабола (p >0), (6-II) теңдемеден алынат;**

4) $a^2x^2-b^2y^2=0$ **– түз сызыктар (6-I) теңдемеден алынат; (же** $ax-by=0$ **жана** $ax+by=0$ **түздөрү болот);**

5) $y^2-a^2=0$ **– түз сызыктар,** $y=\pm\ a$ **(6-III) теңдемеден алынат;**

6) y^2 = 0 – түз сызык, (6-III) төн алынат;

7) $a^2x^2+b^2y^2=0$ **– бир гана 0(0;0) чекити, (6-I) теңдемеден алынат;**

8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ **- бош көптүк (жалган эллипс), (6-I)теңдемеден алынат;**

9) y^2 + a^2 **= 0 – бош көптүк (оң сандардын суммасы нөлдөн чоң), (6-III) теңдемеден алынат;**

Экинчи тартиптеги ийрилердин эң көп колдонулганы айлана, ал эллипстин теңдемесинен a = b болгондо, x^2 + y^2 = a^2 көрүнүшүндө келип чыгат.

Экинчи тартиптеги ийрилер боюнча асман телолору да кыймылдашат. Мисалы, планеталар күндүн айланасында эллипстик орбита сызыгы боюнча кыймылдашып, ал эми кометалар эллипс, гипербола же парабола сызыктары боюнча кыймылдап жүрүшөт.

Экинчи тартиптеги ийрилердин жалпы

Ax^2+2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0 теңдемесинен эле, анын жогоруда көрсөтүлгөн 1) – 9) жалпак фигураларынын кайсы бири болорун билүү үчүн атайын таблица түзөбүз. Ошондуктан экинчи тартиптеги ийрилердин жалпы теңдемесинин коэффициенттеринен

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix}$$

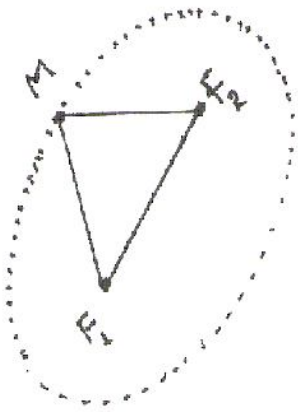
аныктагычтарын түзөбүз. δ - аныктагычын теңдеменин чоң коэффициенттеринин дискриминанты, Δ - аныктагычын теңдеменин өзүнүн дискриминанты деп атап, алардын сандык маанилерине карап ийринин атын биле алабыз:

	$\Delta \neq 0$	Δ=0
δ >0	Чыныгы же жалган эллипс	чекит

δ <0	Гипербола	өз ара кесилишүүчү түгөй түздөр
δ =0	Парабола	өз ара параллель чыныгы же жалган түгөй түздөр

1- таблица

Тегиздикте чексиз көп экинчи тартиптеги ийрилер жайгашкан, алардын баарынын эле теңдемеси (4^A) көрүнүшүндө боло бербейт. Мисалы, $x^2+3y^2+\sqrt{xy}+2\sqrt{x}+y-5=0$ экинчи тартиптеги ийринин теңдемеси (4^A) көрүнүшүндө эмес. Ошондуктан (4^A) көрүнүштөгү же бүтүн көрсөткүчтүү даражалуу, коэффициенттери чыныгы сандар болгон гана экинчи тартиптеги ийрилерди 1) – 9) каноникалык теңдемелерге келтире алабыз жана алар үчүн гана жогорудагы 1 – таблица туура болот.

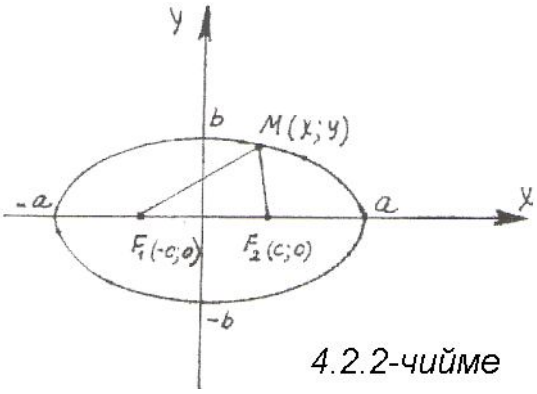


4.2.1-чийме

Тегиздиктеги *Oxy* тик бурчтуу координаталар системасын кандай өзгөртсөк да, (4) экинчи тартиптеги ийриси өз абалын өзгөртпөй мурдагы калыбында кала берет, бирок байкоо жүргүзүүчү О чекити жана көрүү бурчтарын аныктаган координаттык октор өзгөрүлөт, бул учурда ал ийрилер ар башка абалда көрүнүп, ага жараша математикалык моделдери (теңдемелери) ар башка жазылышта түзүлөт. Мисал катары жалпак фигураларды турган ордунан жылдырбай эле, алардын жайгашуу абалына ылайыкташкан О чекитин жана Оx, Оу окторун жылдырып тандоо менен эллипс, гипербола, парабола ийрилеринин каноникалык (колдонууга ыңгайлуу тандалган) теңдемелерин түзүп көрсөтөлү.

4.2.3 Эллипс

4.2.1 ***Аныктама.*** *Тегиздиктеги өзгөрүлмө М чекитинен берилген фокустар деп аталуучу F_1, F_2 чекиттерине чейинки аралыктардын суммасы дайыма бир турактуу санга тең болсо, анда мындай М чекиттеринин көптүгүнүн изин эллипс деп атайбыз. F_1 жана F_2 фокустарынын арасындагы $\rho(F_1, F_2) = |F_1 F_2|$ аралыгы фокалдык аралык деп аталып, ал М чекитинен F_1, F_2 фокустарына чейинки*



4.2.2-чийме

$\rho(F_1, M) = |F_1 M|$, $\rho(F_2, M) = |F_2 M|$ *аралыктарынын суммасынан кыска болот (4.2.1.-чийме), б.а.*

$$\rho(F_1, F_2) \le \rho(F_1, M) + \rho(F_2, M). \qquad (7)$$

Эллипстин каноникалык теңдемесин түзүү үчүн F_1 жана F_2 чекиттери аркылуу өтүүчү, $\overrightarrow{F_1F_2}$ векторуна багытташ түз жүргүзүп, аны Ox абсцисса огу катарында кабыл алабыз. F_1F_2 кесиндисинин дал ортосунда жайгашкан чекитти О башталма катарында тандап, О чекитинен Ox огуна Оу перпендикуляр түзүн жүргүзүп, аны ордината катары эсептейбиз. Ушундай шарттарда тандалган тик бурчтуу Oxy координаталар системасында $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $M(x;y)$ координаталуу чекиттер болушуп, фокалдык аралык $|F_1F_2| = 2c$ жана О башталмасынан фокустарга чейинки аралыктар $|OF_1| = |OF_2| = c$ белгилүү, ал эми $M(x;y)$ өзгөрүлмө чекит болот *(4.2.2-чийме).*

Эллипстин аныктамасы боюнча $\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a$ турактуу берилген сан болот. Бул теңдештикти координаталары менен туюнтуп, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ теңдештигине ээ болобуз. Радикалдан куткаруу максатында эки жагын тең квадратка көтөрүп ,
$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$ келип чыккан теңдештикти жөнөкөйлөтүп, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{cx}{a}$ көрүнүшүнө келтиребиз. Барабардыктын эки жагын тең дагы бир жолу квадратка көтөрүп, окшош мүчөлөрүн топтогон соң $\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ теңдештигине ээ болобуз. Эллипстин аныктамасы боюнча (7) ден $2c < 2a$ же $c < a$ же $a^2 - c^2$ оң сан болгондуктан, аны сандын квадраты катарында

$b^2 = a^2 - c^2$ деп белгилеп, $\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + y^2 = b^2$ же b^2 санына эки жагын тең бөлүп жиберип, эллипстин $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (8)

каноникалык теңдемесин келтирип чыгарабыз.

Ошентип эллипс О башталмасына жана Ox, Оу окторуна карата симметриялуу жайгашкан жалпак фигура болот (4.2.2 – чийме). Тегиздикте эркин жайгашкан каалагандай эле эллипсти (4.2.1 - чийме), атайын тандалган каноникалык Oxy тик бурчтуу координаталар системасында (параллель которуу, буруу менен тандалган) 4.2.2-чиймедеги абалда деп элестетип, (8) каноникалык теңдемеси менен

мүнөздөөгө болот. Эгерде $a =$ b болсо, (8) теңдемеси же айлананын каноникалык теңдемеси келип чыгат, $a \neq$ b болсо, айлана Ox огуна карата $\frac{b}{a}$ эсе кысылып эллипс кейпине келет.

Эллипстин эске тутуп калуучу айрым касиеттерин көрсөтөлү:

1⁰. Эгерде $M_0(x_0;y_0)$ чекити эллипске таандык болсо, анда $(-x_0;y_0)$, $(-x_0;-y_0)$ жана $(x_0;-y_0)$ чекиттери да эллипске таандык болушат. Анткени бул чекиттердин экөөсү M_0 чекитине координаттык окторго карата, бирөөсү О башталмасына карата симметриялуу жайгашкан.

2⁰. $(\pm a;\ 0)$, $(0;\ \pm b)$ чекиттери эллипстин чокулары деп аталышат.

Ал эми эллипске таандык $M(x;y)$ чекитинде $\frac{x^2}{a^2} \leq 1,\ \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ шарттары аткарылат.

3⁰. Эллипстин оң $F_2(c;o)$ жана сол $F_1(-c;o)$ эки фокусу болуп, $|F_1F_2| = 2c$ фокалдык аралык деп аталат.

4⁰. $e = \frac{c}{a}$ саны эллипстин эксцентриситети деп аталып, ал айлананы кысуу менен эллипске айлантуу деңгээлин аныктайт. $e = 0$ болсо, айлана кысылбай айлана бойдон калат. $e = 1$ болсо, айлана толук түз абалына чейин кысылган болот. Ошентип эллипсте $0 < e < 1$ болот.

5⁰. $x + \frac{a}{e} = 0$ жана $x - \frac{a}{e} = 0$ түздөрү эллипстин директрисалары деп аталышат. Эллипс оң жана сол болгон эки директриса түздөрүнө ээ болот.

6⁰. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ байланышын пайдаланып, эллипстин тик бурчтуу декарттык координаталар системасындагы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ каноникалык теңдемесин, полярдык координаталар системасында $\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ көрүнүшүндө жаза алабыз.

Эллипске таандык $M(x;y)$ чекитинин координаталары полярдык координаталарда $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$ болуп көрсөтүлөт. Чынында эле, бул маанилер эллипстин каноникалык теңдемесин канааттандырарын текшерип көрүүгө болот.

Мисалы, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсинде $a = 5$, b =3 болуп,

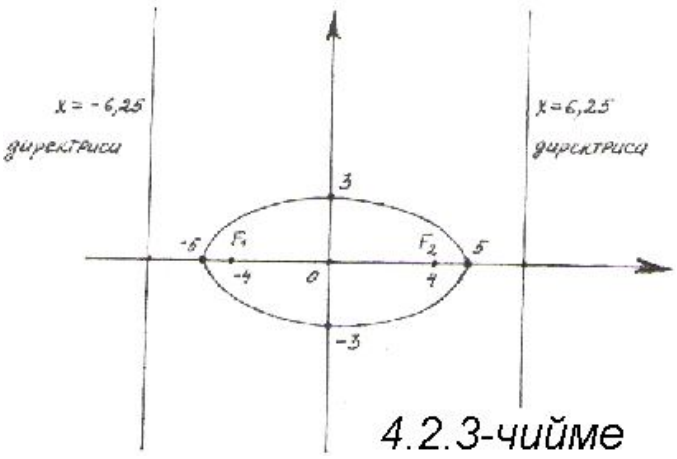
$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ же $c = 4$, фокалдык аралык $|F_1F_2| = 2c = 8$ келип чыгат *(4.2.3-чийме).*

$\begin{cases} x - 5\cos\varphi, \\ x - 3\sin\varphi \end{cases}$ маанилерин эллипстин теңдемесине койсок

$$\frac{(5\cos\varphi)^2}{25} + \frac{(3\sin\varphi)^2}{9} =$$

$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$ полярдык координаталарда жазылган эллипстин чекиттеринин каноникалык теңдемени канааттандырарын көрөбүз.

Эллипстин эксцентриситети $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$, директриса түздөрү $x + \frac{5}{0{,}8} = 0,\ x - \frac{5}{0{,}8} = 0$ же $x = -6{,}25$, $x = 6{,}25$ болушат.



4.2.3-чийме

Экинчи мисалда $x^2 + y^2 = 100$ айланасын Ox огуна карата канча эсе кысуу менен $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ эллипсин алууга болорун көрсөтөлү. Ал үчүн айлананын теңдемесин өзгөртүп $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = 1$ же $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} \cdot \frac{36}{100} = 1$ же $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} \cdot \frac{9}{25} = 1$ жазуу менен, айланадагы M_0 $(x_0; y_0)$ чекити эллипсте $M_1(x_0; y_1)$ = $M_1(x_0; \frac{y_0 \cdot 9}{25})$ чекитине өтүп, Ox ке карата $\frac{9}{25}$ эсе кысыларын көрөбүз.

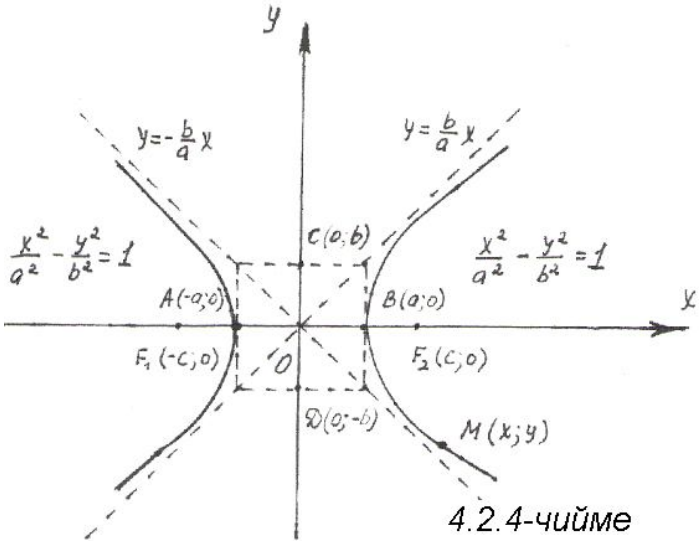
4.2.4 Гипербола

4.2.2 ***Аныктама.*** *Тегиздикте эркин өзгөргөн* $M(x; y)$ чекиттеринен *фокустар деп аталуучу эки F_1 жана F_2 чекиттерине чейинки аралыктардын айырмасынын модулу дайыма бир турактуу санга тең болсо, анда мындай абалда өзгөргөн* $M(x; y)$ *чекиттеринин көптүгүнүн изин гипербола дейбиз. F_1, F_2 чекиттеринин аралыгы фокалдык аралык деп аталып, фокустардан M чекитине чейинки аралыктардын айырмасынын модулунан узун болот:*

$$\rho(F_1, F_2) > |\rho(F_1, M) - \rho(F_2, M)|. \qquad (9)$$

Гиперболанын каноникалык теңдемесин түзүү үчүн Ox абсциссасы деп F_1 жана F_2 фокустары аркылуу өтүүчү түздү, O башталмасы деп F_1 F_2 кесиндисинин дал ортосунда жайгашкан чекитти,

Оу ордината огу деп О чекитинен Ox ке жүргүзүлгөн перпендикуляр түздү алабыз. Ушундай ыкмада курулган каноникалык Oxy тик бурчтуу декарттык координаталар системасында $F_1(-c;0)$, $F(c;0)$ координаталуу чекиттери берилип, $M(x;y)$ өзгөрүлмө чекит болсун*(4.2.4-чийме).*



4.2.4-чийме

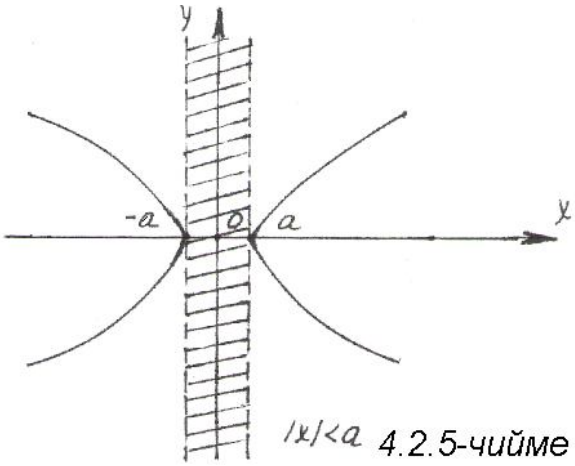
Гиперболанын аныктамасы боюнча

$$\left|\rho(F_1,M)-\rho(F_2,M)\right|=2a$$

белгилүү турактуу санына барабар болот. Фокалдык аралыгы да $\rho(F_1,F_2)=2c$ белгилүү болсо, анда жогорудагы теңдештик

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a,$$ же $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

көрүнүшүнө келип, сол жактагы айырма оң болгондо « + » белгиси, сол жактагы айырма терс болгондо « - » белгиси алынат. Акыркы теңдештиктеги тамырлардын бирин оң жагына өткөрүп, радикалдан куткаруу үчүн квадратка көтөрүп



4.2.5-чийме

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+$$
$$+(x-c)^2+y^2$$

жөнөкөйлөткөн соң,

$$\frac{cx}{a}-a=\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ ээ болобуз.

Дагы бир жолу квадратка көтөрүп топтоштургандан кийин $\frac{c^2-a^2}{a^2}\cdot x^2-y^2=c^2-a^2$ келип чыгат. Мындан (9) ду эске алып (a < c), c^2 - a^2 оң санына $b^2=c^2-a^2$ деген белгилөө киргизип, барабардыктын эки жагын тең b^2 ка бөлүп жиберип, гиперболанын

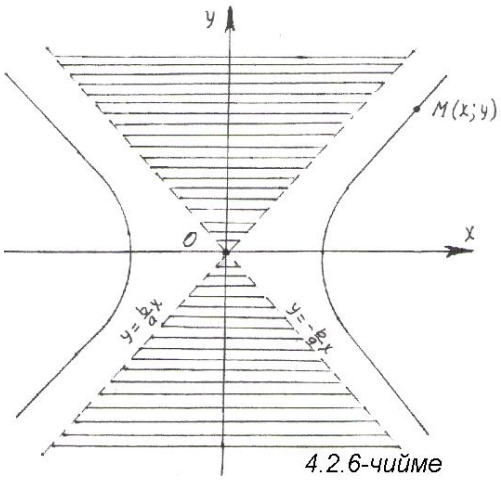
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (10)$$

каноникалык теңдемесин келтирип чыгарабыз.

Гиперболага мүнөздүү айрым касиеттерди көрсөтөлү:

1⁰. Гипербола $|x| < a$ тилкесинин сыртында жайгашып, A(-a;0), B(a;0) чекиттери гиперболанын чокусу болот. AB кесиндиси гиперболанын башкы огу деп аталат. Чынында эле M($x;y$) гиперболада жайгашкан өзгөрүлмө чекит болсо, $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ болуп,

$|x| \geq a$ келип чыгат *(4.2.5-чийме).*



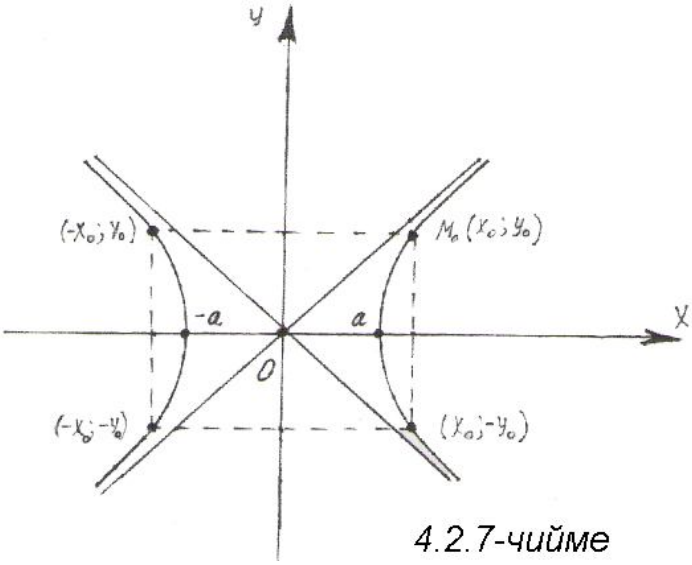
4.2.6-чийме

2⁰. Гипербола $y = \pm\frac{b}{a}x$ түздөрүнүн арасындагы Ox огунун чекиттери жайгашкан вертикалдык бурчтардын арасында жайгашат *(4.2.6-чийме).*

$y = -\frac{b}{a}x$ сол, $y = \frac{b}{a}x$ оң асимптоталары болуп, алар гиперболанын графигине $|x| \to \infty$ умтулганда чексиз жакындап барат. Чынында эле M($x;y$) чекити гиперболага таандык болсо, анда

$\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2}$ болгондуктан,

$y^2 < \frac{b^2}{a^2}x^2$ же $|y| < \frac{b}{a}|x|$ болуп, M($x;y$) чекити асимптота түздөрүнө жетпей, алардын арасында жайгашкан болот.

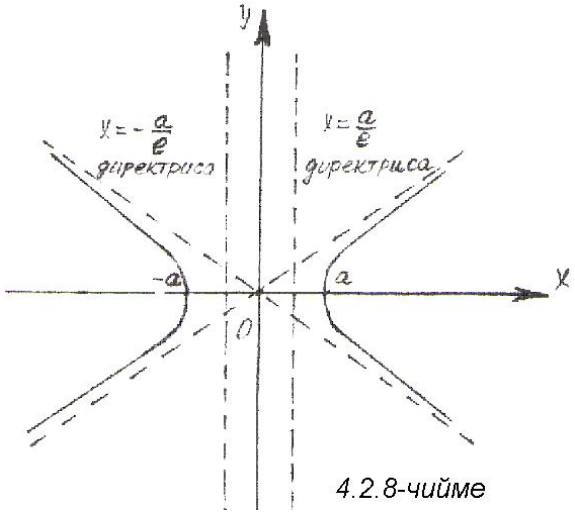


4.2.7-чийме

3⁰. Гиперболага Ox жана Oy координаттык октору симметрия борбору болот *(4.2.7-чийме).*

Чынында эле $M_0(x_0;y_0)$ чекити гиперболага таандык болсо, анда (-x_0;y_0), (-x_0;-y_0), (x_0;-y_0) чекиттери да гиперболага таандык болот.

4⁰. $e = \frac{c}{a}$ саны гиперболанын эксцентриситети деп аталып, e>1 болот. e саны гиперболанын кысылуу деңгээлин көрсөтүп, e чоңойгон сайын гиперболанын эки бутагы тең куушурулат, ал эми ал кичирейип бирге жакындаган сайын бутактары кеңейип, e = 1 болгондо эн чоң бутактуу гипербола болуп, $x = \pm a$



4.2.8-чийме

түздөрүнө айланат. a = b болгон учурда гипербола тең жактуу деп аталып,

$x^2 - y^2 = a^2$ көрүнүшүндөгү теңдемеге ээ болот. Асимптоталары $y = \pm x$ түздөрүнө айланат. Ал эми $x + \frac{a}{e} = 0$ жана $x - \frac{a}{e} = 0$ түздөрү гиперболанын директрисалары деп аталышат (4.2.8-чийме).

Мисалы, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ гиперболасында a=2, b=3, $b^2 = c^2 - a^2$ болгондуктан, $c^2 = b^2 + a^2 = 4 + 9,\ c = \sqrt{13}$;

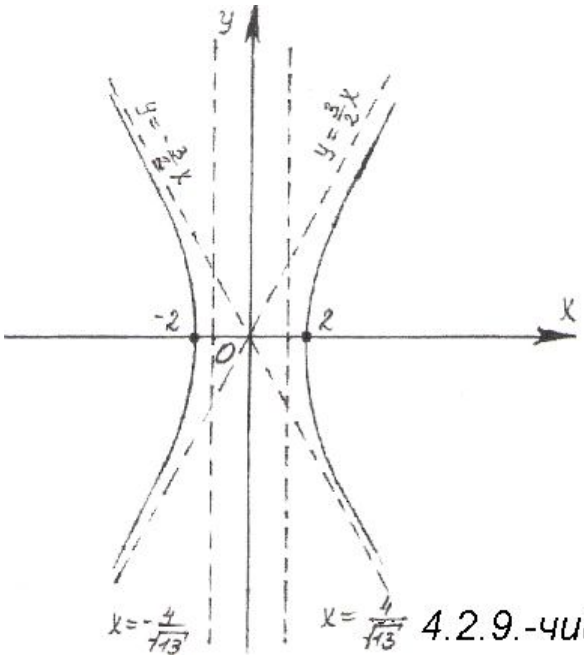
$|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{13}$ – фокалдык аралык; $F_1(-\sqrt{13};0)$, $F_2(+\sqrt{13};0)$ - фокустары; чокулары $A(-2;0), B(2;0)$; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ саны эксцентриситети жана

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = 0, \\ x - \dfrac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = 0 \end{cases} \text{ же } \begin{cases} x + \dfrac{4}{\sqrt{13}} = 0, \\ x - \dfrac{4}{\sqrt{13}} = 0 \end{cases}$$ түздөрү директрисалар болушат.

Асимптоталары $y = \frac{3}{2}x, y = -\frac{3}{2}x$ түздөрү болот *(4.2.9-чийме).*

5⁰. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (11)

гиперболасы (10) гиперболасына түйүндөш гипербола деп аталат *(4.2.10-чийме).*



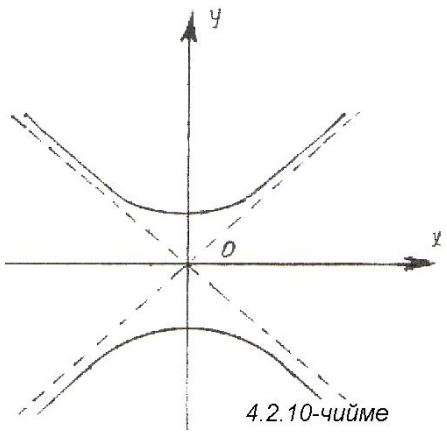
4.2.9.-чийме

6^0. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ байланышын пайдаланып, гиперболанын тик бурчтуу декарттык координаталар системасындагы каноникалык теңдемесинин

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \text{ же}$$

$$\rho^2(b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi)=a^2\cdot b^2 \text{ же}$$

$$\rho^2=\frac{a^2\cdot b^2}{b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi}$$ көрүнүшүндөгү полярдык координаталар системасындагы жазылышын табабыз. Акыркыны $b^2=c^2-a^2$ белгилөөсүн пайдаланып,



4.2.10-чийме

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{(c^2-a^2)\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi}=$$

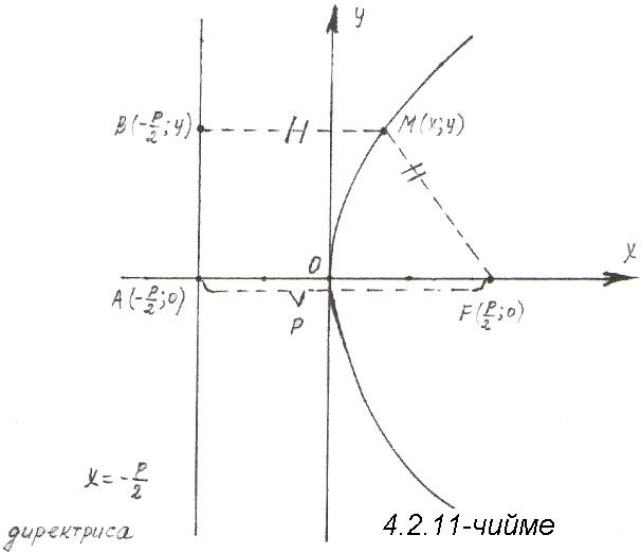
$$=\frac{a^2b^2}{c^2\cos^2\varphi-a^2}=\frac{b^2}{e^2\cos^2\varphi-1}$$

$$\rho^2=\frac{b^2}{e^2\cos^2\varphi-1}$$

$$arctg(-\frac{b}{a})\le\varphi\le arctg\frac{b}{a}$$ полярдык координаталардагы гиперболанын теңдемесин алабыз.

4.2.5 Парабола

4.2.3 Аныктама. *Тегиздикте берилген фокус деп аталуучу F чекитинен жана бул чекит аркылуу өтпөөчү директриса деп аталган түздөн бирдей узактыкта жайланышкан өзгөрүлмө M чекиттеринин көптүгүнүн изи парабола деп аталат (4.2.11-чийме).*



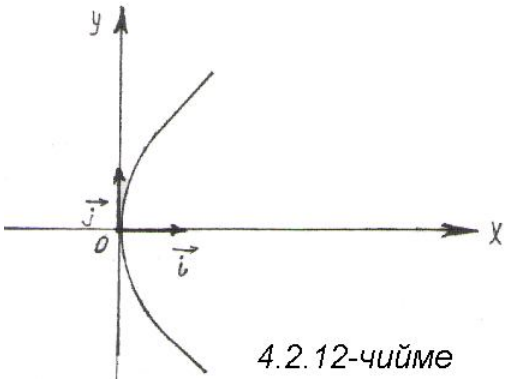
4.2.11-чийме

Фокустан директрисага чейинки аралыкты фокалдык параметр деп, p менен белгилейбиз. Параболанын каноникалык теңдемесин түзүү үчүн Oxy каноникалык координаттык системасын тандайбыз.

Ox огун F фокусу аркылуу өтүп, директриса деп аталган $x=-\frac{p}{2}$ түзүнө перпендикуляр болгондой алабыз. F фокусунан директрисага чейинки аралык p саны болсун. Бул аралыктын тең ортосунан Ox

огуна перпендикуляр түз жүргүзүп, аны Оу ордината огу катарында кабыл алабыз.

Ушундай ыкмада тандалган каноникалык Оxy координаталар системасында фокус $F(\frac{p}{2};0)$, директриса менен Оx огунун кесилишүү чекити $A(-\frac{p}{2};0)$, параболага таандык өзгөрүлмө чекит М($x;y$) координаталарына ээ болушсун. М чекитинен директрисага түшүрүлгөн перпендикулярдын директриса менен кесилишүү чекити $B(-\frac{p}{2};y)$ дейли. Параболанын аныктамасы боюнча $\rho(B,M)=\rho(M,F)$, аны координаталары менен жазуудан $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+y^2}$ теңдештиги келип чыгат. Эки жагын тең квадратка көтөрүп топтоштуруп



4.2.12-чийме

$$y^2=2px, \qquad (12)$$

параболанын каноникалык теңдемесин алабыз.

1^0. (12) параболасы Ox огунун оң жагында жайгашып, чокусу 0(0;0) чекити болот *(4.2.12- чийме).*

2^0. Каноникалык Oxy координаталар системасынын Ox абсциссасы – параболанын жалгыз гана симметрия огу болот.

3^0. $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$ байланышын пайдаланып, параболанын полярдык координаталар системасындагы $\rho=\frac{2\rho\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ $\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$ көрүнүшүндөгү теңдемесин жаза алабыз.

4.2.6 Эллипс, гипербола, парабола ийрилерине жүргүзүлгөн жаныма түздөр

Тегиздикте жайгашкан ийрилер $y=f(x)$ функциясы менен берилип, ийриге таандык $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен ийриге жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (13)$$

көрүнүшүндө болору белгилүү.

I. Эллипске жаныма түз

$M_0(x_0;y_0)$ чекити эллипсте жайгашкан чекит болсун, анда ал эллипстин (8) теңдемесин канааттандырып,

$$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1 \qquad (14)$$

барабардыгы аткарылат.

$M_0(x_0;y_0)$ чекити эллипстин I – чейректеги жаасында жайгашсын, б.а. $x_0>0,\ \ y_0>0$ деп болжолдосок, анда (8) теңдемесинен

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad (15)$$

келип чыгат. Анын туундусу

$$y'=\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)'=b\cdot\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)'}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=-\frac{bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

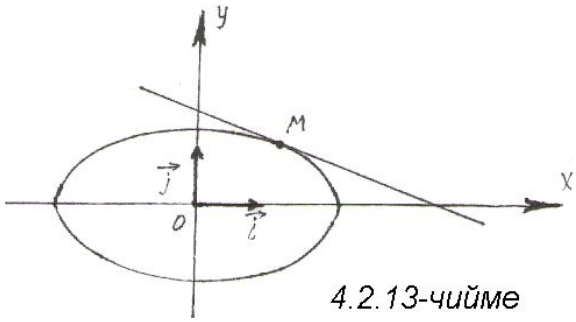
көрүнүшүндө эсептелет. Эллипске $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси (13) формуласына ылайык

$$y-y_0=-\frac{bx_0}{a^2\sqrt{1-\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}}}(x-x_0)$$

көрүнүшүндө жазылат. M_0 эллипске таандык болгондуктан, (15) боюнча $y_0=b\sqrt{1-\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}}$ маанисин ордуна коюп, жаныма түздүн теңдемесин $y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot(x-x_0)$ көрүнүшүнө келтиребиз. Кийинки өзгөртүүлөрдүн жардамы менен жаныма түздүн теңдемесин $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0,$ же (14) тү эске алып, жыйынтыгында

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (16)$$

көрүнүшүндө табабыз.



4.2.13-чийме

Ошентип (16) формуласына $M_0(x_0;y_0)$ чекити эллипстин *Oxy* координаталар системасынын бардык чейректеринде жайгашкан учурларында туура болуп, $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен эллипске жүргүзүлгөн жаныма түздүн жалпы теңдемеси болот *(4.2.13-чийме).*

Мисал катарында $M_0(-\sqrt{3};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ чекитинен $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипсине жүргүзүлгөн жаныныма түздүн теңдемесин түзүүнү көрсөтөлү. Берилген чекит эллипстин теңдемесин канааттандырып,

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{9}+\left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{4}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{8}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,$$

эллипстин экинчи чейректеги жаасында жатат. (16) формуласына ылайык, эллипске бул чекиттен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

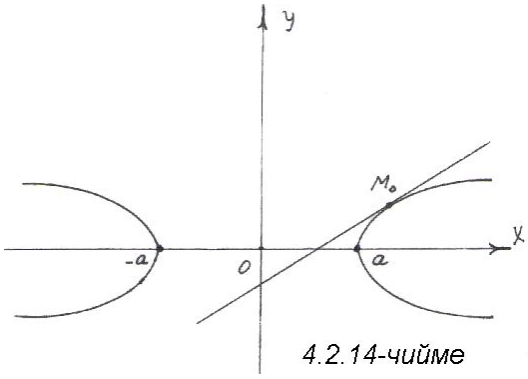
$\frac{x\cdot(-\sqrt{3})}{9}+\frac{y\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{4}=1,$ же $-\frac{\sqrt{3}}{9}x+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}y-1=0$ көрүнүшүндө жазылат.

II. Гиперболага жаныма түз

Гиперболага таандык болгон $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен гиперболага жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси да жогорудагы эле ыкмада келтирип чыгарылып, $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b}=1$ (17)

көрүнүшүндө болот *(4.2.14-чийме).*

III. Параболага жаныма түз



4.2.14-чийме

Тегиздиктеги ийри y ке карата чечилген $y = f(x)$ функциясы менен эмес, x ке карата чечилген $x = g(y)$ функциясы менен берилсин. Бул учурда ийриге таандык $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен ийриге жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$$x - x_0 = g'(y_0)\cdot(y-y_0)$$

көрүнүшүндө жазылат.

Парабола $y^2=2px$ же $x=\frac{1}{2p}y^2$ теңдемеси менен берилип, туундусу $x'=\frac{1}{2p}\cdot(y^2)'=\frac{1}{2p}\cdot 2y=\frac{y}{p}$ көрүнүшүндө эсептелгендиктен, параболага таандык болгон каалагандай $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз $x-x_0=\frac{y_0}{p}(y-y_0)$ же $y_0y-y_0^2+px_0-px=0$

же $y\cdot y_0=p(x+x_0)$ (18)

теңдемесине ээ болот. Акыркы өзгөртүүдө M_0 параболага таандык болгондуктан, $y_0^2=2p\,x_0$ теңдештиги эске алынды.

4.2.7 Эллипстин, гиперболанын, параболанын оптикалык касиеттери

Практикада кеңири колдонулуп жүргөн жарык берүүчү фонарлардан баштап, жарык берүү процессине байланышкан татаал техникалык приборлорду курууда эллипстин, гиперболанын, параболанын оптикалык касиеттери пайдаланылып келет. Ошондуктан аларга токтолуп өтөлү.

I. Эллипстин оптикалык касиети

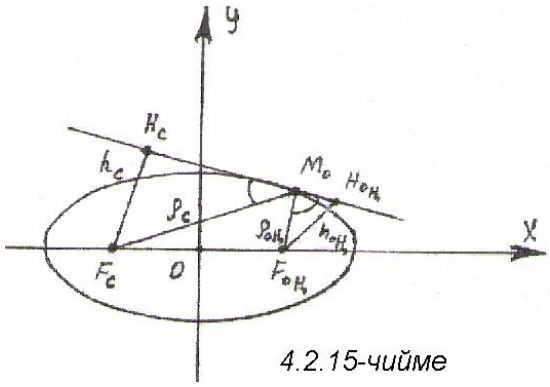
Берилген $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсинин сол фокусун $F_{сол}$ (-c; 0) чекити, оң фокусун $F_{он}$ (c; 0) чекити деп эсептейли. Эллипске таандык болгон эркин алынган $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен сол фокуска чейинки (фокалдык радиус) аралык $\rho_{сол}=\rho\,(F_{сол},M_0)$, оң фокуска чейинки (фокалдык радиус) аралык $\rho_{он}=\rho(F_{он},M_0)$ болсун дейли (4.2.15 - чийме).

Аралыктарды ченөө эрежеси боюнча

$$\rho_{сол}=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^{\,2}}=\sqrt{(x_0+c)^2+b^2(1-\frac{x_0^{\,2}}{a^2})}=\sqrt{x_0^{\,2}+2x_0c+c^2+b^2-\frac{b^2x_0^{\,2}}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{(1-\frac{b^2}{a^2})x_0^{\,2}+2x_0c+a^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_0^{\,2}+2x_0c+a^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^{\,2}+2x_0c+a^2}=\sqrt{(\frac{cx_0}{a}+a)^2}=$$

$=\left|\frac{cx_0}{a}+a\right|=|ex_0+a|$ көрүнүшүндө табылат. (Бул өзгөртүүдө $e=\frac{c}{a},\ c^2+b^2=a^2$ жана a^2-b^2=c^2 белгилөөлөрү колдонулду).



4.2.15-чийме

Ушундай эле ыкма менен оң фокалдык радиустун $\rho_{он}=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^{\,2}}=|\,ex_0-a\,|$ болорун көрсөтүү мүмкүн.

Берилген эллипске M_0 чекитинен L жаныма түзүн жүргүзөлү. Анын теңдемеси $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$ түзү болуп (Ax+By+C=0, A=$\frac{x_0}{a^2}$, B $=\frac{y_0}{b^2},C=-1$), бул түздөн $F_{сол}$ жана $F_{он}$ чекиттерге чейинки аралык

$\rho(M^*, L) = \dfrac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ формуласынын негизинде

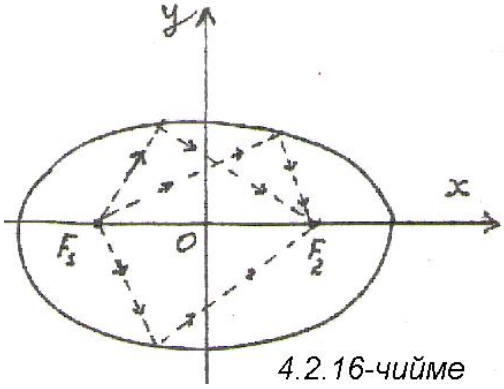
$$h_{сол} = \rho(F_{сол}, L) = \frac{\left|\dfrac{x_0}{a^2}(-c) - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}} = \mu \cdot \left|1 + \frac{x_0 c}{a^2}\right|,$$

$h_{он} = \rho(F_{он}, L) = \mu \cdot \left|1 - \dfrac{x_0 c}{a^2}\right|$ көрүнүштөрүндө табылат ($\mu = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ нормалдаштыруучу көбөйтүүчү).

Пайда болгон $\Delta F_{сол} H_{сол} M_0$ жана $\Delta F_{он} M_0 H_{он}$ тик бурчтуу үч бурчтуктары окшош экендигин байкайбыз (4.2.15 – чийме). Чынында эле алардын жактарынын катыштарын салыштыруудан кийин, алардын

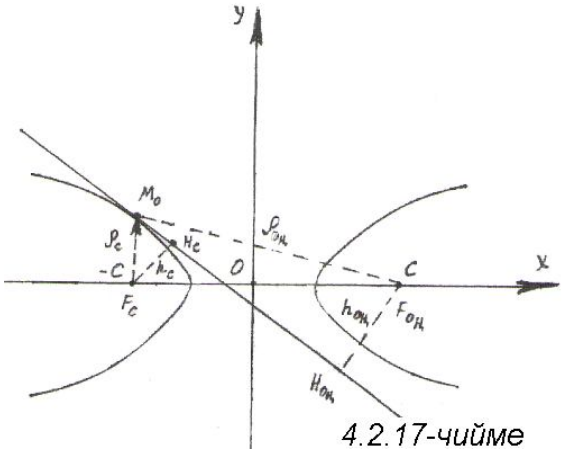
$$\frac{h_{сол}}{\rho_{сол}} = \frac{\mu\left|1 + \dfrac{x_0 c}{a^2}\right|}{|ex_0 + a|} = \frac{\mu\left|1 + \dfrac{x_0}{a} \cdot \dfrac{c}{a}\right|}{|ex_0 + a|} = \frac{\mu\left|1 + \dfrac{x_0 \cdot e}{a}\right|}{|ex_0 + a|} = \frac{\mu}{a}\frac{|a + x_0 e|}{|x_0 e + a|} = \frac{\mu}{a};$$

$$\frac{h_{он}}{\rho_{он}} = \frac{\mu\left|1 - \dfrac{x_0 c}{a^2}\right|}{|ex_0 - a|} = \frac{\mu}{a}$$ барабар экендигин көрөбүз. Демек, үч бурчтуктардын M_0 чекитиндеги бурчтарынын синустары бурчка карама – каршы тараптагы каттеттердин ($h_{сол}$ жана $h_{он}$), гипотенузаларга ($\rho_{сол}$ *жана* $\rho_{он}$) болгон катыштары катарында барабар болот. Мындан $\rho_{сол}$ жана $\rho_{он}$ фокалдык радиустары менен M_0 чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз сызыктын арасындагы бурчтар барабар болот деген тыянак чыгарабыз *(4.2.15-чийме).*



4.2.16-чийме

Бул өзгөчөлүк эллипстин оптикалык касиети катарында айтылып, эллипстин кайсы бир фокусуна жарык булагын орнотсок, анын шооласы эллипстин күзгүдөй жалтырак бетиндеги каалагандай M_0 чекитинен чагылып экинчи фокуска топтолот (4.2.16-чийме).



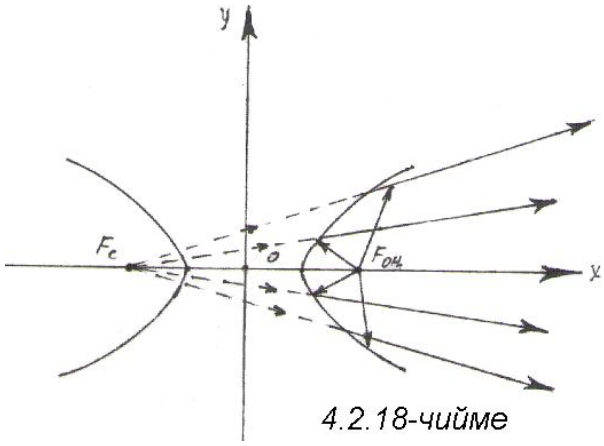
4.2.17-чийме

II. Гиперболанын оптикалык касиети

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасында эркин жайгашкан $M_0(x_0; y_0)$ чекитин алып, эллипстин оптикалык касиетин келтирип чыгаруудагы аракеттерди кайталап, $\Delta M_0F_{сол}H_{сол}$ жана $\Delta M_0H_{он}F_{он}$ тик бурчтуу үч бурчтуктары окшош болуп, M_0 чокусундагы бурчтардын барабар экендигине ишенебиз *(4.2.17-чийме).*

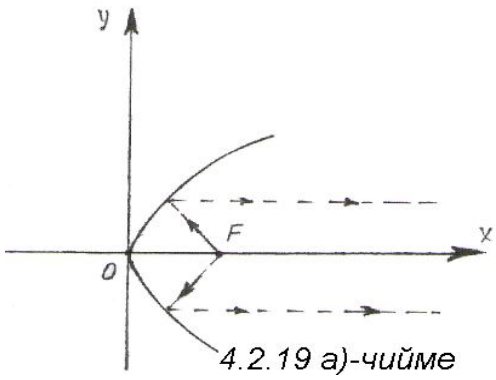
Демек, гиперболанын бир фокусуна орнотулган жарык булагынын шооласы гиперболанын күзгүдөй бетинен чагылып, экинчи фокусунан чыккан шооланын уландысы катарында көрүнүп тарайт (4.2.18-чийме).

III. Параболанын оптикалык касиети



4.2.18-чийме

Параболанын фокусуна орнотулган жарык булагынын шооласы параболанын күзгүдөй бетинен чагылып, параболанын огуна параллель шоолалар болуп тарашат (4.2.19 а), б) - чиймелер).



4.2.19 а)-чийме

Мисалдар

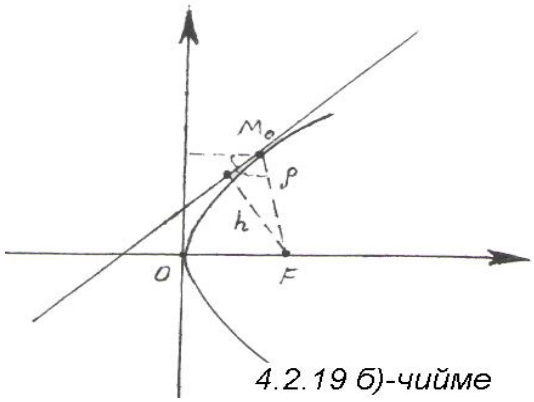
1. Фокалдык аралыгы 4 санына барабар болгон эллипске M (6;0) чекити таандык экендиги белгилүү болсо, анда эллипстин каноникалык теңдемесин түзүп, эксцентриситетин, директрисаларын, фокалдык радиустарын, жаныма түзүн жана аны менен фокалдык радиустардын түзгөн бурчун аныктагыла.

Чыгаруу: ▹ M (6;0) чекити эллипске таандык болгондуктан анын теңдемесин канааттандырып,

$\frac{6^2}{a^2}+\frac{o^2}{b^2}=1$ же $\frac{36}{a^2}=1$ же $a^2=36$, $a=6$ табылат. $b^2=a^2-c^2$ теңдештигинен

$b^2=6^2-(\frac{4}{2})^2=36-4=32$ же $b=\sqrt{32}$ ($a>0$, $b>0$ болгондуктан, «+» белгисин алабыз) келип чыгып, эллипстин каноникалык теңдемеси

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$ көрүнүшүндө жазылат.



4.2.19 б)-чийме

Бул эллипсте эксцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; оң директриса $x = \frac{a}{e} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18$;

сол директриса $x = -\frac{a}{e} = -\frac{6}{\frac{1}{3}} = -18$ түздөрү болушуп, эллипстеги M(6; 0) чекитинин фокалдык радиустары

$$\rho_{сол} = \rho(F_1, M) = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = |\sqrt{a} + e x_0| = \left|6 + \frac{1}{3} \cdot 6\right| = 8;$$

$$\rho_{он} = \rho(F_2, M) = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = |a - ex_0| = \left|6 - \frac{1}{3} \cdot 6\right| = 4$$ сандары, ал эми M(6;0) чекитинен жүргүзгөн жаныма түздүн теңдемеси $\frac{x}{36} \cdot 6 + \frac{y}{32} \cdot 0 = 1$ же $\frac{x}{6} - 1 = 0$ болот.

Жаныма түздүн фокалдык радиустар менен түзгөн бурчу

$$\sin\varphi = \frac{\mu}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6^2}}}}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$ же

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ келип чыгат.◁

2. $4x^2 + 5y^2 - 7 = 0$ теңдемесин эллипстин каноникалык теңдемесине келтиргиле.

Чыгаруу: ▷Берилген теңдемени $4x^2 + 5y^2 = 7$ деп, эки жагын тең 7ге бөлүп жиберсек $\frac{4x^2}{7} + \frac{5y^2}{7} = 1$, же $\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{7}{4}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{7}{5}})^2} = 1$ эллипстин каноникалык теңдемеси келип чыгат. Бул жерде $a = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$, $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{7}{20}$, $c = \sqrt{\frac{7}{20}}$ болот.◁

3. $2x^2 + 4y^2 - 6x - 2y - 1 = 0$ экинчи тартиптеги ийрисин эллипстин каноникалык теңдемесине өзгөртүп түзгүлө.

Чыгаруу: ▹ 1) Теңдеменин чоң коэффициентерин дискриминанты $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$ ал эми теңдеменин дискриминанты $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -46 \neq 0$ жана $\delta = 8 > 0$ болгондуктан, 1 - таблица боюнча эллипстин теңдемеси болот.

2) Берилген теңдеменин сол жагы ($5^{в}$) көп мүчөсүнө $A = 2 \neq 0,$ $C = 4 \neq 0$ окшош болуп, аны (6-I) көрүнүшүнө келтире алабыз. Ал үчүн Oxy координаталар системасын $X = x + 2,\ \ Y = y + \beta$ эрежеси боюнча параллель которуп, $O'XY$ координаталар системасын түзөбүз. $O'XY$ координаталар системасындагы теңдемени жазалы. $\alpha = \dfrac{D}{A} = -\dfrac{3}{2},$ $\beta = \dfrac{E}{C} = \dfrac{1}{4}$ тандоосуна жараша $x = X - \alpha = X + \dfrac{3}{2},\ \ y = Y - \beta = Y - \dfrac{1}{4}$ деп алып, бул маанилерди теңдемеге коèбуз.

Теңдеменин сол жагы

$$2(X + \frac{3}{2})^2 + 4(Y - \frac{1}{4})^2 - 6(X + \frac{3}{2}) + 2(Y - \frac{1}{4}) - 1 =$$

$$= 2X^2 + \underline{6X} + \frac{9}{2} + 4Y^2 - \underline{\underline{2Y}} + \frac{1}{4} - \underline{6X} - 9 + \underline{\underline{2Y}} - \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= 2X^2 + 4Y^2 - \frac{9}{2} + \frac{1}{4} - 9 - \frac{1}{2} - 1 = 2X^2 + 4Y^2 - \frac{23}{4}$$ көрүнүшүнө келип,

экинчи тартиптеги ийри $2X^2 + 4Y^2 - \dfrac{23}{4} = 0$ же $2X^2 + 4Y^2 = \dfrac{23}{4}$ теңдемесине ээ болот. Анын эки жагын тең $\dfrac{23}{4}$ санына бөлүп жиберип,

$$\frac{2X^2}{\frac{23}{4}} + \frac{4Y^2}{\frac{23}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{23}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{23}{16}} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{8}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{4}}\right)^2} = 1$$ ээ болобуз.

Өзгөрүлмөлөрдү көнүп калган x, y көрүнүшүндө жазып, параллель которулган жаңы координаталык системага карата түзүлгөн

$$\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{23}{8}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{23}{4}})^2} = 1$$ эллипстин каноникалык теңдемесин алабыз. ◃

4. Фокалдык аралыктары 20 болгон, $M(8\sqrt{5}; 12)$ чекити аркылуу өтүүчү гиперболанын теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: ▹ Фокалдык аралык $\rho(F_1, F_2) = 2c = 20$ болгондуктан,

с = 10 келип чыгат. М чекити гиперболага таандык, ошондуктан анын теңдемесин канааттандырат:

$$\frac{(8\sqrt{5})^2}{a^2}-\frac{(12)^2}{b^2}=1 \text{ же } \frac{320}{a^2}-\frac{144}{b^2}=1.$$

Экинчи жактан $b^2=c^2-a^2=100-a^2$ табылып, экөөнү бириктиргенде

$\begin{cases}\frac{320}{a^2}-\frac{144}{b^2}=1,\\ b^2=100-a^2\end{cases}$ теңдемелер системасы келип чыгат. Аны a^2 жана b^2 белгисиздерине карата чыгарып $a^2=64,\ \ b^2=36$ оң чечимдерине ээ болобуз. Демек, изделүүчү гипербола $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ каноникалык теңдемесине ээ. Бул гипербола $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{6}{8}x=\pm\frac{3}{4}x$ асимптота түздөрүнө, $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1{,}25$ эксцентриситетине, $x\pm\frac{a}{e}=0$ же $x\pm\frac{8}{1{,}25}=0 \Rightarrow x\pm\frac{32}{5}=0 \Rightarrow x\pm 6{,}4=0$ директриса түздөрүнө ээ.

Гиперболага М ($8\sqrt{5}$; 12) чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз $\frac{8\sqrt{5}}{64}x-\frac{12}{36}y=1$ же $\frac{\sqrt{5}}{8}x-\frac{1}{3}-y=0$ теңдемесине ээ болот.◁

5. Фокалдык аралыгы 2с =10, чокуларынын арасындагы аралык $2a$ = 8 болгон гиперболанын каноникалык теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу. ▷Берилгендер боюнча с = 5, a = 4 маанилерин таап,

$в^2=c^2-a^2=5^2-4^2=25-16=9$ же $в=3$ болорун көрөбүз. Демек, гипербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ каноникалык теңдемесине ээ болот.◁

6. $y^2=3x$ параболасына таандык болгон, фокустан 1 аралыгында узактыкта жайгашкан чекитти аныктагыла.

Чыгаруу. ▷ Параболанын каноникалык теңдемесиндеги 2р = 3 же р = $\frac{3}{2}$ болуп, параболанын фокусу F($\frac{p}{2}$;0) = F($\frac{3}{4}$;0) координаталуу чекит болору келип чыгат. Шарт боюнча гиперболага таандык М($x;y$) чекити менен F($\frac{3}{4}$;0) фокусунун аралыгы $\rho(F,M)=1$ болушу керек. Демек $\sqrt{(x-\frac{3}{4})^2+y^2}=1,$ экинчи жактан М($x;y$) гиперболанын теңдемесин канааттандырат, б.а. $y^2=3x$ болот. Эки шартты бириктирип,

$\begin{cases} \sqrt{(x-\frac{3}{4})^2+y^2}=1, \\ y^2=3x \end{cases}$ теңдемелер системасын түзөбүз. Аны радикалдан куткарып, $\begin{cases} (x-\frac{3}{4})^2+y^2=1, \\ y^2=3x \end{cases}$ көрүнүшүнө келтиребиз. $x,\ y$ белгисиздерге карата чыгарып $x=\frac{1}{4},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ чечимдерин же фокустан 1 аралыгында жайгашышкан эки $M_1\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ чекиттерин табабыз. ◁

7. $x^2+y^2-6x-8y+25=0$ тендемеси менен берилген ийринин геометриялык аталышын тактагыла.

Чыгаруу. ▷ Берилген теңдеменин чоң коэффициенттеринин дискриминанты $\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0,$ теңдеменин дискриминанты

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 25 \end{vmatrix}=0$$ маанилерине ээ.

Демек, бул теңдеме 1 – таблицага ылайык бир гана чекитти мүнөздөйт. ◁

Натыйжа. Экинчи тартиптеги чексиз көп ийрилердин арасынан (4^A)көрүнүшүндөгү теңдемелер менен берилген ийрилерди өзүнчө бөлүп карап, атайын тандалган (каноникалык) координаталар системасында ийрилерди бойлоп кыймылдоочу $M(x;y)$ өзгөрүлмө чекиттеринин ар бир абалдарын мүнөздөгөн математикалык моделдерин, же эстеп калууга жана жазууга ыңгайлуу каноникалык теңдемелерин түздүк. Ошондуктан (8) – эллипстин, (10) – гиперболанын, (12) – параболанын каноникалык теңдемелерин колдонууда, эркин абалдагы каалагандай координаталар системасын (байкоо аппараттарын) пайдалана албайбыз. Бул теңдемелердин ар бири өздөрү үчүн тандалган конкреттүү координаталар системасында гана туура болгондуктан, ал ийрилер менен байланышкан (жанымасын, нормалын, оптикалык касиеттерин ж.б.) таануу аракеттерин ошол тандалган координаталар системаларында гана жүргүзө алабыз.

Көнүгүүлөр

4.1. Айлананын борборун жана радиусун тапкыла.

а) $(x-2)^2+(y-4)^2=36;$ (Жообу: 0(2; 4), R=6)

б) $(x+5)^2+(y+\frac{3}{4})^2=17.$ (Жообу: 0(-5;-$\frac{3}{4}$), R=$\sqrt{17}$)

4.2. Төмөндөгү теңдемелер айлананы аныктай тургандыгын далилдегиле:

а) $x^2-2x+4y+y^2-20=0;$ б) $x^2-6x+10y+y^2+9=0.$

4.3. Төмөндөгү берилгендер боюнча эллипстин каноникалык теңдемесин түзгүлө (фокустары Ox огунда О башталмасына симметриялуу жайгашкан):

1) эллипстин жарым октору a =5 жана b =2 болсо;
2) эгерде чоң огу 10, фокалдык аралыгы 8 болсо;
3) кичине огу 24, фокалдык аралыгы 10 болсо;
4) фокалдык аралыгы 2с =6, эксцентриситети $e=\frac{3}{5}$ болсо;
5) чоң огу 20, эксцентриситети $e=\frac{3}{5}$ болсо;
6) кичине огу 10, эксцентриситети $e=\frac{12}{13}$ болсо;
7) директрисаларынын аралыгы 5, фокалдык аралыгы 2с = 4 болсо;
8) чоң огу 8, директрисаларынын аралыгы 16 болсо;
9) кичине огу 6, директрисаларынын аралыгы 13 болсо;
10) директрисаларынын аралыгы 32, эксцентриситети $e=\frac{1}{2}$ болсо.

(Жооптору: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1;$ 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;$ 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1;$ 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;$ 5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1;$ 6) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1;$ 7) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1;$ 8) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1;$ 9) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ же $\frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1;$ 10) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1.$)

4.4. Төмөндөгү берилгендер боюнча эллипстин каноникалык теңдемесин түзгүлө (Фокустары Оx огунда О башталмасына симметриялуу жайгашкан):

1) октору 2a =10, 2b = 8 болсо;
2) фокалдык аралыгы 2с =10, бир огу 2b = 8 болсо;
3) фокалдык аралыгы 2с = 6, эксцентриситети $e=\frac{3}{2}$ болсо;

4) бир огу $2a$ = 16 жана эксцентриситети $e=\frac{5}{4}$ болсо;

5) асимптоталары $y=\pm\frac{4}{3}x$, фокалдык аралыгы 2с = 20 болсо;

6) директрисаларынын аралыгы $22\frac{2}{13}$, фокалдык аралыгы 2с =26 болсо;

7) бир огу $2b$ = 6, директрисаларынын аралыгы $\frac{32}{5}$ болсо;

8) директрисаларынын аралыгы $\frac{8}{3}$, эксцентриситети $e=\frac{3}{2}$ болсо;

9) асимптоталары $y=\pm\frac{3}{4}x$, директрисаларынын аралыгы $12\frac{4}{5}$ болсо;

(Жооптор: 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 6) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 8) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 9) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.)

4.5. Чокусу О башталмасында жайгашкан төмөндөгү параболалардын каноникалык теңдемесин түзгүлө.

1) Ox огуна симметриялуу болуп, $x\geq o$ жарым тегиздигиндеги параболаны р =3 параметри боюнча;

2) Парабола Ox огуна симметриялуу болуп, $x\leq o$ жарым тегиздигинде жайгашып, параметри р = 0,5 болсо;

3) Парабола Оу огуна симметриялуу болуп, $y\geq o$ жарым тегиздигинде жайгашса, р $=\frac{1}{4}$ параметри боюнча;

4) Парабола Оу огуна симметриялуу болуп, $y\leq o$ жарым тегиздигинде жайгашса, р =3 параметри боюнча.

(Жооптору: 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$; 3) $x^2=\frac{1}{2}y$; 4) $x^2=-6y$.)

4.6. Төмөндөгү берилгендер боюнча чокулары координата башталмасында жайгашкан параболанын каноникалык теңдемелерин түзгүлө:

1) Парабола Ox огуна симметриялуу жайгашып, В(-1;3) чекити аркылуу өтсө;

2) Парабола Оу огуна симметриялуу жайгашып, С(1;1) чекити аркылуу өтсө;

3) Парабола Оу огуна симметриялуу жайгашып, D(4;-8) чекити аркылуу өтсө.
(Жооптору: 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -2y$.)

4.7. Төмөндөгү теңдемелер менен берилген ийрилердин түрүн аныктагыла.

а) $x^2 + 2y + 4x - 4y = 0$;

б) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

г) $xy + x + y = 0$;

д) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;

е) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$.

(Жооптору: а) эллипс $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{3} = 1$, борбору $O'(-2;1)$, $O'X$ чоң огу Ox огуна параллель; б) гипербола $\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{9} = 1$, борбору $O'(-1;2)$, $O'X$ чыныгы огунун бурчтук коэффициенти 3; в) парабола $Y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}X$, борбору $O'(3;2)$, $O'X$ огунун параболанын ийрейүү жагына багытталган вектору {-2;-1};
г) Борбору $O'(-1;1)$ болгон гипербола, асимптоталары координаттык окторго параллель;
д) эки x - y - 1=0, x - 4y + 2 =0 өз ара кесилишүүчү түздөр; е) Өз ара параллель
2x - 3y +1=0, 2x - 3y – 2 = 0 түгөй түздөр.)

§ 4.3 Экинчи тартиптеги беттер

4.3.1 Экинчи тартиптеги беттердин жалпы теңдемеси жана аны өзгөртүп түзүү

R^3 мейкиндигинде берилген тик бурчтуу $Oxyz$ декарттык координаталар системасында ар бир M($x;y;z$) чекити үч координаталары менен сүрөттөлгөндүктөн, бул мейкиндикте жайгашкан каалагандай обьект үч өлчөмдүү фигура болуп, өзгөрүлмө M чекиттеринен куралган деп түшүнөбүз. Ошондуктан каалагандай үч өлчөмдүү фигура, үч өзгөрүлмөлүү

F(x,y,z) = 0 (19)

көрүнүшүндөгү айкын эмес функция же z ке карата чыгарылган
z = $f(x,y)$ эки өзгөрүлмөлүү айкын функция түрүндөгү теңдеме менен мүнөздөлөт.

(19) теңдемесинин сол жагы коэффициенттери чыныгы сандар, өзгөрүлмөлөрү бүтүн даражалуу көп мүчө болгон учурду карайбыз. Көп мүчөдөгү x, y, z өзгөрмөлөрүнүн эң чоң даражасы, анын тартиби деп аталат. Экинчи тартиптеги, коэффициенттери чыныгы сандар болгон үч өзгөрмөлүү теңдемени жалпы учурда

$$F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (19^A)$$

көрүнүшүндө жазабыз. Бул жерде $\forall i, j: \quad a_{ij} \in R$; $i, j \in \mathrm{N}$ жана өзгөрмөлөрдүн эң чоң даражаларынын коэффициенттери бир учурда нөл болбойт деп алынат, же ал шарт

$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 > 0$ көрүнүшүндө жазылат.

(19^A) теңдемеси менен сүрөттөлгөн фигураны экинчи тартиптеги бет деп айтабыз.

R^3 мейкиндигинде чексиз көп экинчи тартиптеги беттер жашайт, бирок алардын баары үчүн эле (19^A) жалпы теңдеме боло албайт. Себеби экинчи тартиптеги ийрилердин (4^A) теңдемесиндей эле, (19^A) теңдемесине коэффициенттери чыныгы сандар, өзгөрүлмөлөрүнүн даражалары оң бүтүн сандар болсун деген шарттар коюлган.

R^3 мейкиндигинде жайгашкан экинчи тартиптеги ийрилерди, кайсы бир экинчи тартиптеги беттердин тегиздиктер менен кесилиш сызыктары деп эсептейбиз.

$Oxyz$ тик бурчтуу декарттык координаталар системасын параллель которуу, буруу менен өзгөртүп түзгөнүбүзгө карабай, экинчи тартиптеги беттер өзгөрбөгөн калыбында реалдуу сакталып кала беришет. Бирок алардын математикалык моделдери болгон теңдемелер, ар бир O башталмасы (байкоочу турган чекит) жана координаттык октор жана октанттар (көрүү талаасы) өзгөргөн сайын өзгөрүлүп, жаңы бурулган же которулган өзгөрмөлөргө карата ар башка жазылат.

$Oxyz$ координаталар системасын ыңгайлаштырып тандоо менен, экинчи тартиптеги беттердин (19^A) теңдемесин каноникалык теңдемелер деп аталуучу төмөндөгүдөй он жети көрүнүштөгү теңдемелерге келтирүүгө болот:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$; 6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

7) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ 8) $y^2=2px;$

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$ 10) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;$

11) $y^2-a^2=0;$ 12) $y^2=0;$ 13) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;$

14) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$ 15) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;$

16) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1;$ 17) $y^2+a^2=0.$

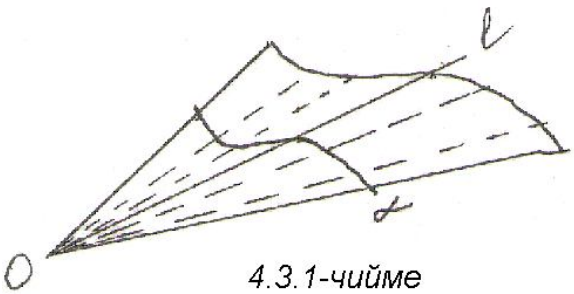
Мында a,b,с, р сандары нөлдөн айырмалуу оң чыныгы сандар деп алынат.

Бул каноникалык теңдемелер менен сүрөттөлгөн фигураларга токтололу. 15), 16), 17) теңдемелери R^3 мейкиндигиндеги бош көптүктү сүрөттөйт, анткени оң сандардын суммасы нөлгө же терс санга барабар болбойт. 14) – теңдеме мейкиндиктеги жалгыз бир 0(0;0;0) чекитин сүрөттөйт. 13) – теңдеме Oz координаттык огун сүрөттөйт, анткени Oz огунун каалагандай чекитинде x=0, у=0 шарты аткарылат. 12) – теңдеме xOz координаттык тегиздигинин чекиттерин сүрөттөсө, 11) – теңдеме xOz координаттык тегиздигине параллель у = a жана

у = - a эки тегиздиктерин сүрөттөйт. 10) – теңдеме менен $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$ же $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ жана $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ түздөрү сүрөттөлөт.

1) - 9) теңдемелери менен жаңы геометриялык обьекттер сүрөттөлүп, алардын ар бирине өз - өзүнчө токтолуп өтөбүз.

4.3.2 Конустук беттер



4.3.1-чийме

Экинчи тартиптеги 9) – каноникалык теңдеме менен аныкталган бет конустук бетти түзөрүн көрсөтөлү. Мейкиндикте эркин жайгашкан γ ийрисин жана андан обочо жайланышкан О чекитин алып, О чекитинен жана γ ийрисинин ар бир чекитинен өтүүчү чексиз көп ℓ түздөрүн жүргүзөлү. Мындай ℓ түздөрүнүн бардыгында жайгашкан чексиз сандагы өзгөрүлмө М чекиттеринин көптүгүнүн изи, конустук бет деп аталат *(4.3.1-чийме).*

γ - конустук беттин багыттоочу ийриси, О чокусу, ℓ түзүүчүсү деп аталат.

4.3.1 Аныктама. *Эгерде берилген $F(x,y,z)$ функциясы каалагандай $t>0$ санына карата*

$$F(tx,ty,tz)=t^q F(x,y,z)$$

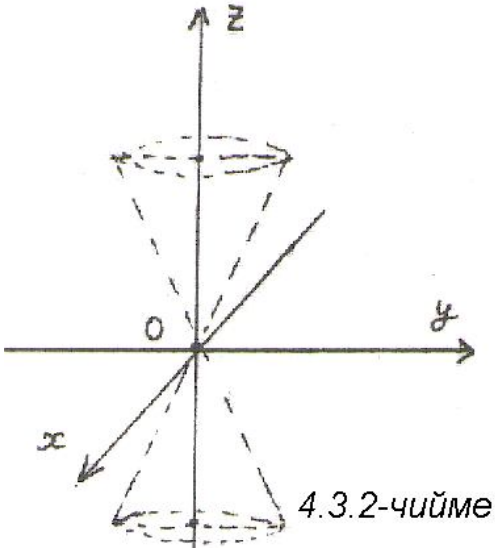
шартына баш ийсе, анда $F(x,y,z)$ функциясын q – даражадагы бирдей тектүү функция деп айтабыз.

(Эскертүү. Каалагандай эле функция «нөл» – даражадагы *бирдей тектүү* функция болот).

Эгерде F(x,y,z)=0 көрүнүшүндө жазылган экинчи тартиптеги беттин теңдемесинде, $F(x,y,z)$ бирден чоң даражалуу *бирдей тектүү* **функция болсо, анда ал теңдеме сүрөттөгөн бет конустук бет болот**.

▹ Айталы $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекити экинчи тартиптеги $F(x,y,z)=0$ бетинде жайгашып, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ болсун. $x_0^2+y_0^2+z_0^2>0$ же алар бир учурда нөлгө барабар болушпайт деп эсептейли. O(0;0;0) чекити жана $M_0(x_0;y_0;z_0)$ чекити аркылуу ℓ түзүн жүргүзөлү. O чекити да ушул бетте жайгашкандыктан, беттин F(0,0,0) = 0 теңдемесин канааттандырат. ℓ түз сызыгынын параметрдик теңдемесин жазалы

$$\begin{cases} x-0=t(x_0-0), \\ y-0=t(y_0-0), \\ z-0=t(z_0-0), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=tx_0, \\ y=ty_0, \\ z=tz_0. \end{cases}$$



4.3.2-чийме

Мындан $F(x,y,z)=F(tx_0,ty_0,tz_0)=$ $=t^q F(x_0,y_0,z_0)=t^q\cdot 0=0,\quad (q\ge 1)$ келип чыгып, $(x;y;z)$ өзгөрүлмө чекиттери ушул эле бетке таандык экендиги же $F(x,y,z)=0$ болору келип чыгат. Демек, $F(x,y,z)=0$ теңдемеси конустук бетти аныктайт.

Биздеги 9) – теңдеменин сол жагы да даражасы бирден чоң же экинчи даражадагы *бирдей тектүү* функция болот. Чынында эле $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$ десек,

$$F(tx,ty,tz)=\frac{(tx)^2}{a^2}+\frac{(ty)^2}{b^2}-\frac{(tz)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)=$$

$$=t^2F(x,y,z)$$

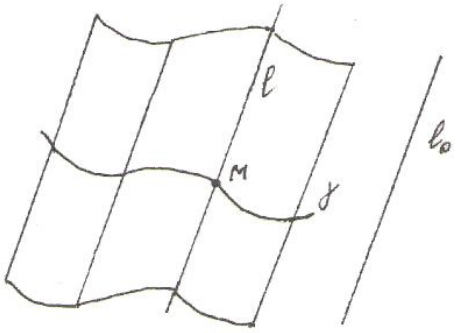
келип чыгат. Ошондуктан $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ теңдемеси конустук бетти сүрөттөйт *(4.3.2-чийме).*◁

4.3.3 Цилиндрдик беттер

Он жети каноникалык теңдемелери менен берилген экинчи тартиптеги беттердин

8) $cy^2=2px$; 7) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдемелери, мейкиндикте цилиндрдик беттерди сүрөттөшөт.

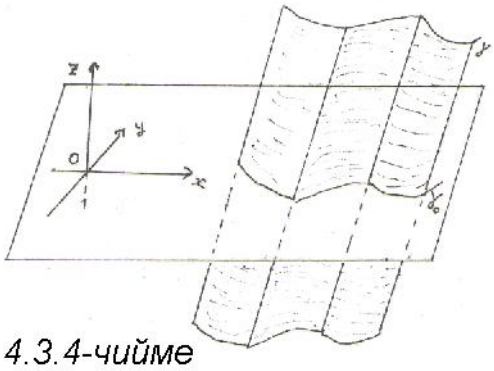
▷Цилиндрдик беттин кандай түзүлөрүн көрсөтөлү. *Мейкиндикте эркин жайгашкан γ ийриси жана ℓ_0 түзү берилсин. γ ийрисин ар бир M чекитинен ℓ_0 түзүнө параллель ℓ түздөрүн жүргүзөбүз. Мындай ℓ түздөрүнүн көптүгү мейкиндикте цилиндрдик бетти аныктайт (4.3.3- чийме).*



4.3.3- чийме

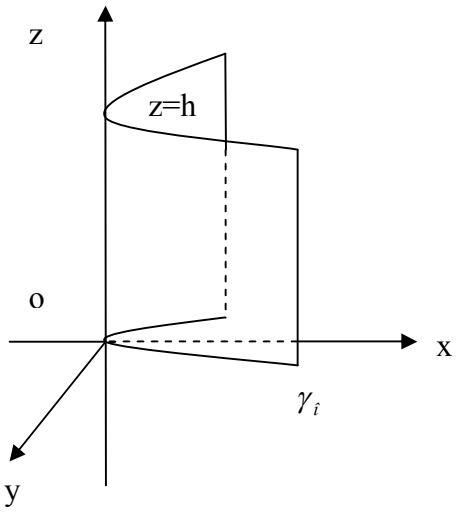
γ ийриси цилиндрдик беттин багыттоочусу, ℓ_0 түзү цилиндрдик беттин түзүүчүсү деп аталышат.

Oxyz тик бурчтуу декарттык координаталар системасынын *Oz* огун ℓ_0 түзү деп алып, γ ийрисинин ар бир чекитинен $\ell_0=Oz$ огуна параллель түздөрдү жүргүзүү менен, z =0 болгон *Oxy* координаттык тегиздигине перпендикуляр цилиндрдик бетти түзөбүз *(4.3.4-чийме).*

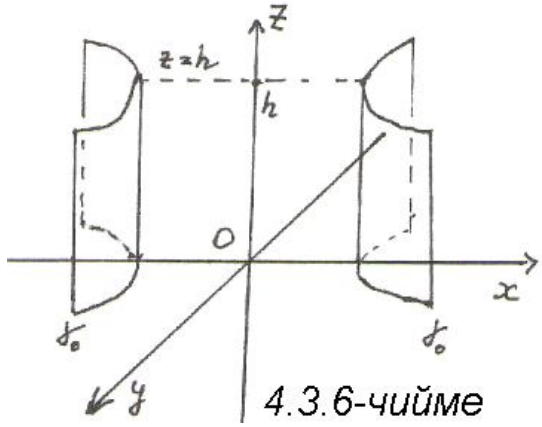


4.3.4-чийме

Бул цилиндрдик бет *Oxy* координаттык тегиздиги менен кесилишет, кесилишүү сызыгы γ_o болсун дейли. γ_o ийрисинин бардык чекиттери $M(x;y;o)$ координаталарына ээ болот, анткени *Oxy* тегиздигинде $z=0$ болот, б.а. цилиндрдик беттин теңдемеси $F(x,y,z)=0$ болсо, γ_o ийрисинин абалында бул теңдеме $F(x,y)=0$ көрүнүшүнө келет. Ошондуктан 8), 7), 6) теңдемелерде z = 0 болгон абалдагы цилиндрдик беттин теңдемеси жазылган деп түшүнөбүз. Демек, $y^2=2px$ каноникалык теңдемеси менен параболалык цилиндрдин бети *(4.3.5-чийме)* сүрөттөлгөн.

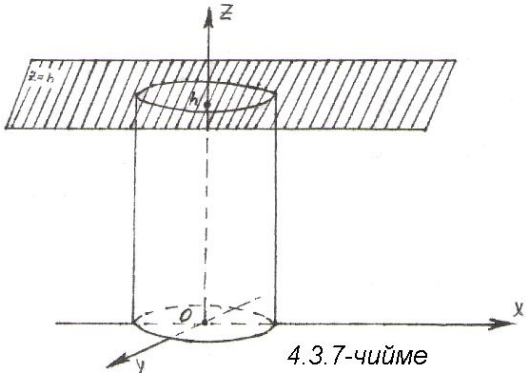


4.3.5-чийме



4.3.6-чийме

Ал эми $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ каноникалык теңдемеси менен гиперболалык цилиндр сүрөттөлгөн *(4.3.6 чийме).*



4.3.7-чийме

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ каноникалык теңдемеси менен эллиптикалык цилиндрдин бети сүрөттөлүп *(4.3.7-чийме)* , сөз кылынган үч теңдеме тең $z=h$ кандай маанилерди кабыл алганынан көз каранды болбойт, анткени $z=h$ тегиздиги цилиндрдик беттерди бийиктиктен кесүүчү тегиздик гана боло алат.◁

4.3.4 Айлануудан пайда болгон беттер

Жогоруда айтылган он жети каноникалык теңдемелер менен берилген экинчи тартиптеги беттердин алгачкы төртөөсү айлануудан пайда болгон беттерди түзүшөт. Алар төмөндөгүлөр:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ кош беттүү гиперболоид;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ бир беттүү гиперболоид;

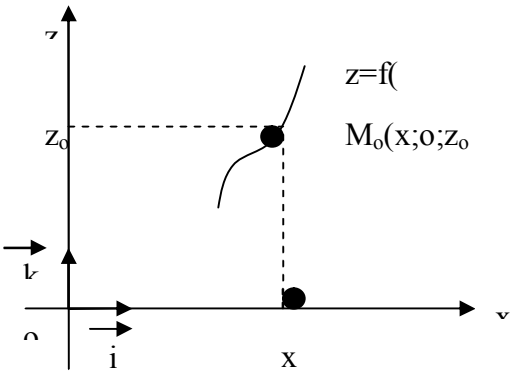
4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$ эллипстик параболоид

аталыштары менен белгилүү.

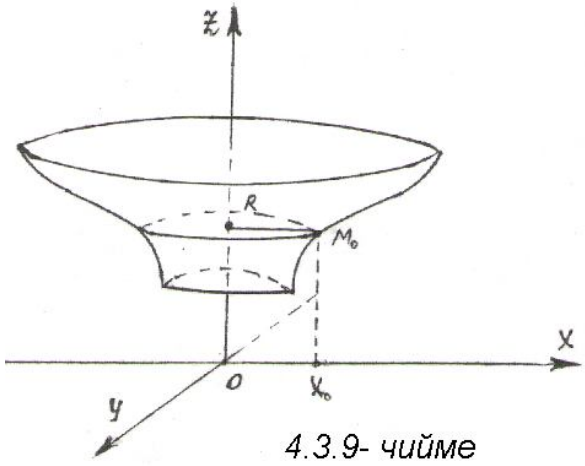
Башында айлануудан пайда болгон беттер жөнүндө жалпы түшүнүк берип, андан кийин 1) - 4) экинчи тартиптеги беттерге токтолойлу.

$Oxyz$ тик бурчтуу декарттык координаталар системасынын Oxz координаттык тегиздигинде $z = f(x),\ \ x \geq 0$ теңдемеси менен берилген γ ийрисин карайлы *(4.3.8-чийме).* Бул ийрини Oz огунун айланасында толук айлантып чыксак, анда мейкиндикте кандайдыр бир айлануудан пайда болгон бетти сызып өтөт *(4.3.9- чийме).*

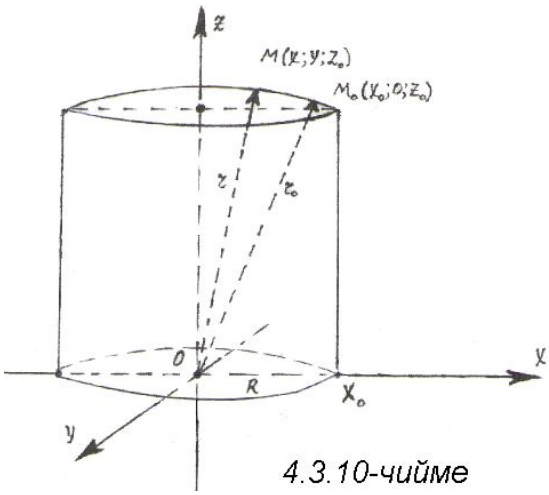
Айлануудан пайда болгон беттин теңдемесин түзүү үчүн γ ийрисинде эркин жайгашкан $M_o(x_o;o;z_o)$ чекитин алалы. γ ийрисин Oz огунун айланасында толук айлантканда M_o чекити радиусу $R = x_o$ болгон айлананы чийет.



4.3.8-чийме



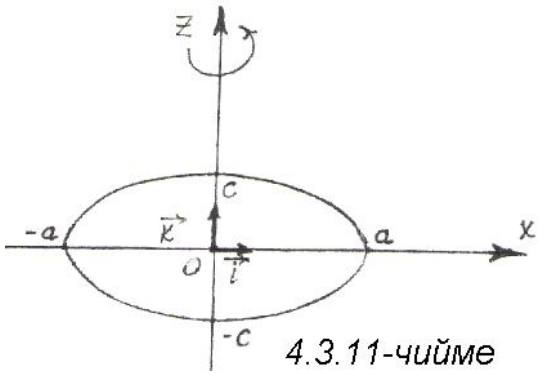
4.3.9- чийме



4.3.10-чийме

Бул айлананын Oxy же $z = o$ координаттык тегиздигиндеги проекциясы $x^2 + y^2 = x_o^2$ теңдемеси менен берилген айлана болот *(4.3.10-чийме).* Ошондуктан M_o чекитин айлантуудан пайда болгон айлананын теңдемеси, айланадагы $M(x;y;z_o)$ чекиттерине карата $\left|\overrightarrow{OM_o}\right| \equiv r_o = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ десек, $r_o^2 = x_o^2 + z_o^2$ же $z_o^2 = r_o^2 - x_o^2 = r_o^2 - (x^2 + y^2)$ эске алсак, $z_o^2 = r_o^2 - (x^2 + y^2)$ көрүнүшүнө келет.

$M_o(x_o;o;z_o)$ чекити γ ийрисинен эркин тандалгандыктан, акыркы теңдеме ийринин бардык $M(x;o;z)$ чекиттери үчүн туура болуп,



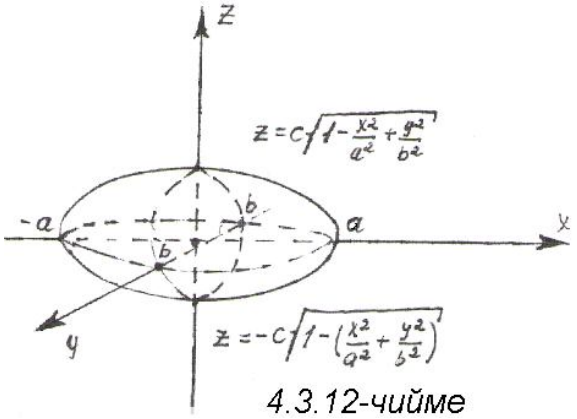
4.3.11-чийме

$z^2 = r^2 - (x^2 + y^2)$ же $z = \pm\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ көрүнүшүнө келет, же жалпы учурда айлануудан пайда болуп, $\sqrt{x^2 + y^2}$ өзгөрүлмө чоңдугуна карата $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ көрүнүшүндөгү функция катарында жазылган теңдеме болот.

I эллипсоид.

$Oxyz$ тик бурчтуу декарттык координаталар системасынын Oxz координаттык тегиздигинде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > o,\ c > o$ эллипси берилсин *(4.3.11-чийме).* Аны Oz огунун айланасында айлантуудан келип чыккан бетти эллипсоид деп атап,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (20)$$



4.3.12-чийме

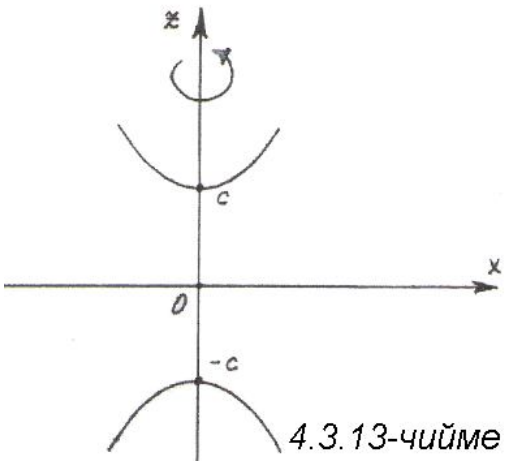
теңдемеси менен сүрөттөйбүз *(4.3.12-чийме).* Эгерде (20) теңдемеси менен берилген эллипсоидди Oy огун бойлото $k = \frac{b}{a} \le 1$ коэффициенти боюнча кыссак, же (20) теңдемесине y тин ордуна $\frac{a}{b} \cdot y$ өзгөрүлмөсүн койсок, жалпы көрүнүштөгү

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (21)$$

эллипсоиддин каноникалык теңдемесине ээ болобуз. $a = b = c$ болгон учурда $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ теңдемеси менен берилген, борбору $O(o;o;o)$, радиусу $R = a$ болгон шар (сфера) келип чыгып, бул сфераны Oz огун бойлото $k = \frac{c}{a} \le 1$ коэффиценти боюнча бир калыпта кысуу менен эллипсоид алынат деп түшүнөбүз.

(21) теңдемесин z ке карата чечип, эллипсоиддин $z = \pm\, c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$ функция көрүнүшүндөгү теңдемесин алабыз. «+» белгиси алынса, эллипсоиддин Oxy координаттык тегиздигинин үстүнкү бетиндеги бөлүгүн, ал эми «-» белгиси эллипсоиддин Oxy

координаттык тегиздигинин төмөнкү бетиндеги бөлүгүн сүрөттөгөн теңдемелер болушат. Эллипсоиддин тегиздиктер менен кесилишүү сызыгы мейкиндиктеги эллипстерди түзүшөт.



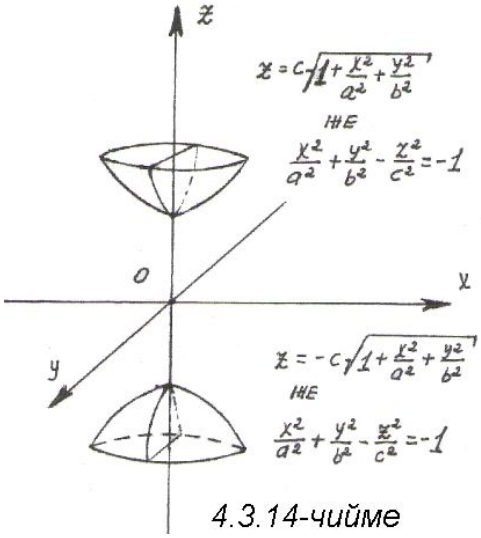
4.3.13-чийме

II Кош беттүү гиперболоид.

Oxyz тик бурчтуу декарттык координаталар системасынын *Oxz* координаттык тегиздигинде $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ түйүндөш гипербола берилсин *(4.3.13-чийме).* Аны *Oz* огунун айланасында толук айлантуу менен $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ же

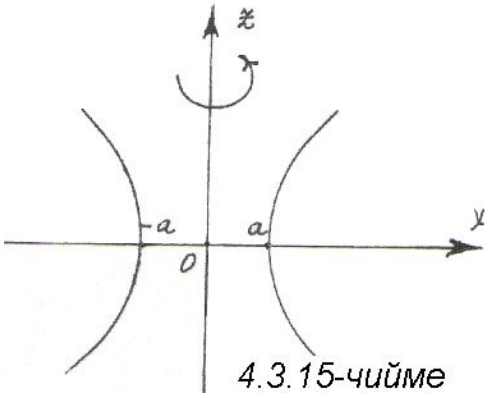
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (22)$$

теңдемеси менен берилген, айлануудан пайда болгон бетти алабыз. Бул бетти кош беттүү гиперболоид деп айтабыз *(4.3.14-чийме).*



4.3.14-чийме

Гиперболоид бири-биринен обочо, *Oxy* координаттык тегиздигинин эки жагында өз ара симметриялуу жайгашкан эки ар башка беттен турат. (22) теңдемени *z* ке карата чыгарсак, анда гиперболоиддин *Oxy* тегиздигинин жогору жагындагы бөлүгү $z=c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$, төмөн жагындагы бөлүгү $z=-c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ функциялары менен жазылышат.



4.3.15-чийме

Эгерде (22) гиперболоидин *Oy* огун бойлото $\kappa=\frac{b}{a}\le 1$ коэффициенти боюнча бир калыпта кыссак, же у ти $\frac{a}{b}y$ өзгөрүлмөсү менен алмаштырсак, анда жалпы көрүнүштөгү кош беттүү гиперболоиддин

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (22^A)$$

каноникалык теңдемесине ээ болобуз.

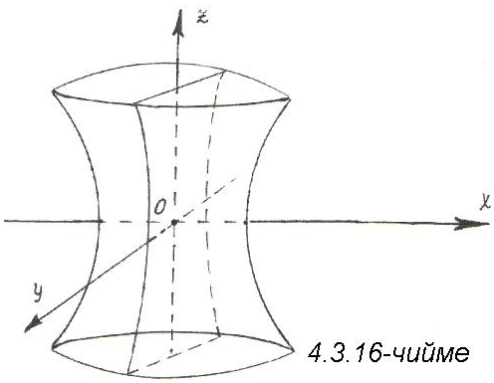
III. Бир беттүү гиперболоид.

Oxyz координаталар системасынын *Oxz* координаттык тегиздигиндеги $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболасын *Oz* огунун айланасында толук айлантуу менен *(4.3.15-чийме)*, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ же $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ бир беттүү гиперболоид деп аталуучу айлануудан пайда болгон беттин теңдемесин алабыз *(4.3.16-чийме).* Бул бетти *Oy* огун бойлото $\kappa=\frac{b}{a}\le 1$ коэффициенти боюнча бир калыпта кысуу менен, жалпы көрүнүштөгү бир беттүү гиперболоиддин каноникалык теңдемесине

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (23)$$

ээ болобуз.

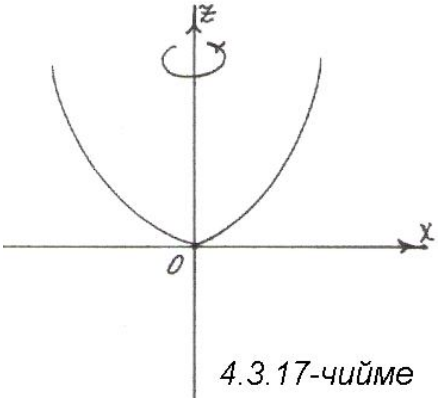
Бир беттүү гиперболоиддин O*xy* тегиздигинен төмөн жактагы бөлүгүн $z=-c\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}$, жогору жактагы бөлүгүн $z=c\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}$ айкын функция көрүнүштөрүндө да сүрөттөөгө болот.



4.3.16-чийме

IV. Эллиптикалык параболоид.

Oxyz декарттык координаталар системасынын *Oxz* координаттык тегиздигинде $z=\frac{x^2}{a^2}$ параболасы берилсин *(4.3.17-чийме).* Аны *Oz* огунун айланасында толук айланталы. Бул айлануда парабола эллиптикалык параболоид деген бетти сызып *(4.3.18-чийме),* ал бет $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$ теңдемеси менен сүрөттөлөт.



4.3.17-чийме

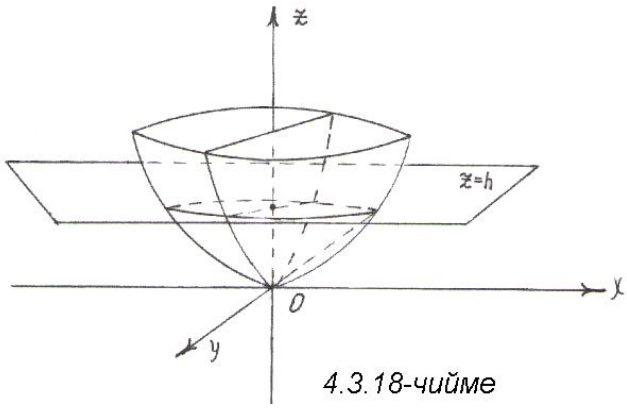
Эллиптикалык параболоидди Oy огун бойлото $k=\frac{b}{a}\le 1$ коэффициенти боюнча бир калыпта кыссак, же у ти $\frac{a}{b}y$ өзгөрүлмөсү менен алмаштырсак,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0 \text{ же } z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad (24)$$

жалпы көрүнүштөгү эллиптикалык параболоиддин каноникалык теңдемесине ээ болобуз.

Бул беттин эллиптикалык параболоид деп аталуусунун себеби, аны каалагандай $z=h$ тегиздиги менен кесилишүү сызыгы эллипсти түзгөндүгүндө. Ал эллипстин теңдемеси

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0,\\ z=h\end{cases}$$



4.3.18-чийме

же

$$\begin{cases}\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2}=1,\\ z=h\end{cases}$$

системалары менен берилет.

4.3.5 Гиперболалык параболоид

Каноникалык теңдемелери табылган он жети – экинчи тартиптеги беттердин арасында бешинчи орунда жазылган

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0 \qquad (25)$$

теңдеме, гиперболалык параболоиддин каноникалык теңдемеси деп аталат. Бул бет конустук, цилиндрдик, айлануудан пайда болгон беттерге караганда татаалыраак түзүлүштө болот. Ошондуктан анын түзүлүү структурасына мүнөздөмө берүү үчүн, беттин $z=\pm h$, $x=\pm h$, $y=\pm h$, $(h>0)$ тегиздиктери менен кесилүү сызыктарын изилдейбиз.

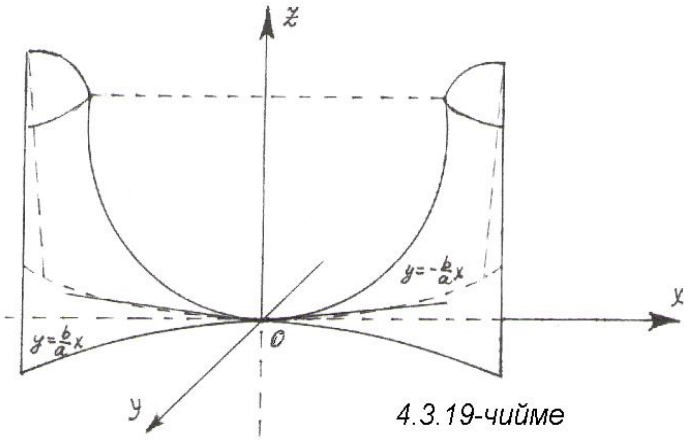
а) $z=h$ тегиздиги менен кесүүдө

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-h=0,\\ z=h\end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases}\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2}-\frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2}=1,\\ z=h\end{cases} \qquad (26)$$

теңдемелер системалары менен берилген гипербола сызыктары келип чыгат.

$z=-h$ тегиздиги менен кесүүдө,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a\sqrt{h})^2}-\dfrac{y^2}{(b\sqrt{h})^2}=1, \\ z=-h \end{cases} \qquad (27)$$



4.3.19-чийме

теңдемеси менен Oxy координаттык тегиздигинин төмөн жагында жайгашкан гипербола сызыктары пайда болот. $z=0$ болгондо Oxy координаттык тегиздигинде

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (28)$$

түздөрүн алабыз.

б) $x=\pm h$ жана $y=\pm h$ тегиздиктери менен кескенде, h тын белгисине карап,

$$\begin{cases} z=\dfrac{h^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}, \\ x=\pm h \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} z=-\dfrac{h^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}, \\ y=\pm h \end{cases} \qquad (29)$$

параболаларына ээ болобуз.

Аныкталган (26) - (29) кесилүү сызыктарына карап, гиперболалык параболоиддин *4.3.19 – чиймесин* сызабыз.

Мисалдар

1. Сферанын борборун жана радиусун тапкыла: $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=72$

Чыгаруу: ▹ Борбору $M_0(2;-4;1)$ чекити, радиусу $R=\sqrt{72}$ болгон шардын бети же сфера болот. ◃

2. $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-43=0$ теңдемесинин сферанын теңдемеси болорун көрсөткүлө.

Чыгаруу: ▹ Теңдеменин сол жагын өзгөртүп түзөлү

$x^2-2\cdot 4x+16+y^2+2\cdot 2y+4+z^2+2z+1-64=(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=64$,

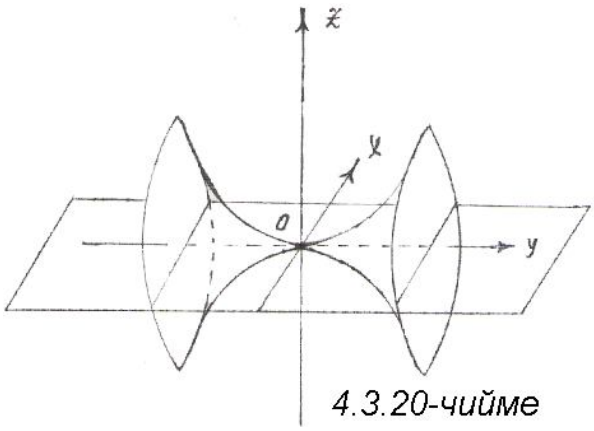
анда берилген теңдеме $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=8^2$ көрүнүшүнө келип, борбору $M_0(4;-2;-1)$, радиусу $R=8$ болгон сферанын теңдемеси болот. ◃

3. $x^2+y^2+z^2=1$ сферасын $y=2$ тегиздиги менен кескенде кандай ийри келип чыгат?

Чыгаруу: ▹ Берилген теңдемеге $y=2$ маанисин коюп $\begin{cases} x^2+z^2+4=1, \\ y=2 \end{cases}$ же $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\dfrac{z^2}{(\sqrt{3})^2}=-1, \\ y=2 \end{cases}$ жалган эллипс деп аталган бош көптүктү алабыз. ◃

4. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ эллипсин Oy огунун айланасында айлантуудан пайда болгон бетти тапкыла.

Чыгаруу: ▹ Берилген эллипс Oxy координаттык тегиздигинде жайгашып, Oy огунун айланасында толук айлануудан кийин $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1$ эллипсоид бетин сызат. ◃



4.3.20-чийме

5. $y^2=6z$ ийрисин (параболасын) Oy огунун айланасында айлантуудан келип чыккан бетти тапкыла.

Чыгаруу: ▹ Oyz тегиздигинде жайгашкан параболаны Oy огу боюнча толук айлантуудан $y^2=6z+6x$ теңдемеси менен берилген бет келип чыгат. Чынында эле, бул беттин Oyz координаттык тегиздиги $(x=0)$ менен кесилиши $y^2=6z$ параболасы, Oyz координаттык тегиздиги $(z=0)$ менен кесилиши $y^2=6x$ параболасы болуп, *4.3.20-чийменде* көрсөтүлгөн бетти табабыз. ◃

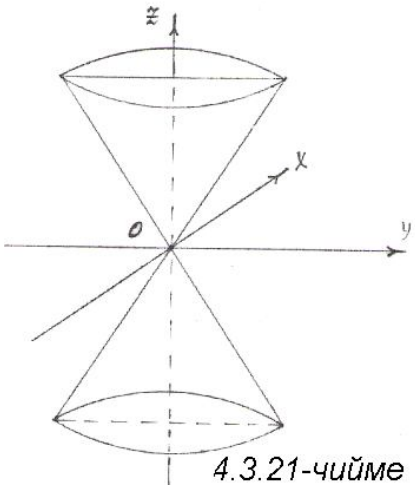
6. $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=0$ теңдемеси менен берилген өз ара кесилишүүчү түздөрдү Oz огунун айланасында айлантуудан келип чыккан бетти аныктагыла.

Чыгаруу: ▹ Берилген теңдеме $z^2=\dfrac{16}{9}y^2$ же $z=\pm\dfrac{4}{3}y$ түздөрүнөн турат *(4.3.21-чийме).* Аны Oz огунун айланасында толук айлантуу менен, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=0$ теңдемеси менен берилген конустук бетти алабыз. ◃

Көнүгүүлөр

4.8 $x^2+y^2+2y+z^2+z-1=0$ теңдемеси менен берилген бетти аныктагыла.

(Жообу: Сфера)



4.3.21-чийме

4.9 $x^2+(y-1)^2+z^2=4$ сферасынын

а) $y=1$; б) $y=\frac{1}{2}$; в) $x=0$; г) $z=-1$ тегиздиктери менен кесилүү ийрилерин тапкыла.

4.10 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболасын Oz огу боюнча толук айлантуудан келип чыккан бетти тапкыла.

4.11 а) $x^2+y^2=25$;

б) $x^2+y^2+z^2=25$;

в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; д) $y^2=7x$ теңдемелери менен мейкиндикте берилген беттерди аныктагыла.

4.12 Төмөндөгү теңдемелер менен кандай беттер сүрөттөлгөн:

а) $14x=y^2+z^2$; б) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{15}-\frac{z^2}{10}=1$

4.13 Берилген беттерди аныктап, алардын берилген тегиздиктер менен кесилишин тапкыла:

а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ жана $z+2=0$;

б) $x^2+y^2-4z=0$ жана $x-2=0$ тегиздиги.