9 – лекция:

Матрицалар жана алар менен болгон амалдар

5.2.1 Матрица түшүнүгү. Матрицаларды кошуу жана кемитүү

Берилген $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ тартипте иреттелип жазылган

сандарынан түзүлгөн, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (3)

көрүнүштөгү таблица 3×3 тартиптеги квадраттык матрица деп аталат. a_{ij} – сандары (i,j =1, 2, 3) матрицанын элементтери деп аталып, i – индекси элемент турган жолчону, j – индекси элемент турган мамычаны көрсөтөт. Жолчолорунун саны менен мамычаларынын саны барабар болгон матрицаны квадраттык матрица дейбиз. Ошентип, 3 – тартиптеги аныктагыч иреттелип жазылган 9 сандын катышуусу менен аныкталган Δ чыныгы саны болсо, матрица жөн гана 9 сандын катышуусу менен түзүлгөн (3) таблицасы болот.

Турмушта кездешүүчү таблицалардын баарын матрица деп эсептөөгө болот. Мисалы, 3 тайпадан турган студенттердин өздөштүрүү көрсөткүчүн 3x4 –тартиптеги матрица көрүнүшүндө (ар бир тайпада 25 студент бар)

$$\begin{array}{c} \\ I-\text{тайпада} \\ II-\text{тайпада} \\ III-\text{тайпада} \end{array} \begin{array}{c} \text{“5” “4” “3” “2” - } \textit{өздөштүрүү} \\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 & 3 \\ 4 & 10 & 11 & 0 \\ 2 & 8 & 12 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

жазууга болот. Мындай матрица студенттердин өздөштүрүү окуясын сандык жактан мүнөздөгөн математикалык аппарат катарында эсептелип, болгон окуяны толук баяндоочу кыска жана түшүнүктүү ыкма боло алат.

Жалпы учурда m жолчодон жана n мамычадан турган матрицаны $m\times n$-тартиптеги матрица деп,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1j}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2j}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{i1}a_{i2}...a_{ij}...a_{in} \\ ..... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mj}...a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \rightarrow i-жолчо \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (4)$$

$$\downarrow$$

j-мамыча

тик бурчтуу таблица көрүнүшүндө жазабыз. Матицанын a_{ij} - элементи (i =1,2,…,m; j =1,2,…,n) i - жолчо менен j - мамычанын кесилишинде жайгашат.

Матрицаларды ыңгайына жараша A, B, C,….чоң тамгалары менен, кээде (a_{ij}) деп жазуу кабыл алынган. Жолчолордун саны менен мамычалардын саны m = n барабар болгон n – тартиптеги квадраттык матрица, жалпы учурда

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

көрүнүшүндө болуп, $a_{11}, a_{12},..., a_{nn}$ элементтеринин тобу жайгашкан диагоналды - матрицанын башкы диагоналы дейбиз.

Эгерде (5) матрицасы бир гана жолчо менен түзүлсө, бир жолчолуу $1\times n$ - тартиптеги, ал эми бир гана мамычадан турса $m\times 1$ - тартиптеги, бир гана элементтен турса (a_{11}) - биринчи тартиптеги матрица деп айтабыз.

Матрицалар сандардан түзүлгөн таблицалар болуп, чексиз көп сандар жашагандыктан, ар кандай тартиптеги чексиз көп матрицаларды түзүү мүмкүн экенин байкайбыз. Матрицаларды чөйрө таануу процессинде математикалык аппарат катарында колдонуу үчүн, бардык матрицалардын көптүгүнө атайын ойлонулуп табылган амалдарды жана эрежелерди киргизүү менен, матрицалар көптүгүнүн алгебрасын түзөбүз. Түзүлгөн (алгебранын) кошуу жана санга көбөйтүү эрежелерине карата бардык m×n - тартиптеги матрицалардын көптүгүн сызыктуу $R_{m\times n}$ - мейкиндиги деп эсептейбиз.

$R_{3\times 3}$ мейкиндигинде тартиптери окшош матрицаларды кошуу жана кемитүүнү карайлы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

матрицалары берилсин. Аларды кошуу же кемитүү деп тиешелүү элементтерин кошуу же кемитүү менен түзүлгөн матрицаны түшүнөбүз:

$$A \pm B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Матрицаларды кошуу, кемитүү амалдары төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

1^0. Тартиптери бирдей болгон гана матрицаларды кошууга жана кемитүүгө болот.

2^0. A ± 0 =A болсо, анда 0 - «нөл» матрица деп аталып, $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ жалаң нөл элементтерден турган матрица көрүнүшүндө жазылат.

3^0. Матрицаларды кошуу, кемитүү амалдары A ± B = B ± A коммутативдүүлүк, (A±B) ± C = A ± (B ± C) ассоциативдүүлүк касиеттерине ээ (C $\in R_{3\times3}$ берилген матрица).

Бул касиеттердин тууралыгы матрицаларды кошуу, кемитүүнүн (6) эрежесинен келип чыгат.

5.2.2 Матрицаларды санга көбөйтүү жана жолчолордун сызыктуу мейкиндиги

$R_{3\times3}$ мейкиндигинде берилген $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасын λ чыныгы санына көбөйтүү деп, анын бардык элеметтерин λ санына көбөйтүп жазылган матрицаны түшүнөбүз:

$$\lambda\cdot A = A\cdot\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

$R_{m\times n}$ мейкиндигинде матрицаны санга көбөйтүү

$$A \cdot \lambda = \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ - & - & - & - \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

көрүнүшүндө ишке ашырылат.

Берилген m×n – тартиптеги матрицанын жолчолорунун ар бирин n элементтерден (компоненттерден) турган m сандагы жолчолордун көптүгү катарында, же ар бир жолчону $R_{1\times n}$ тартибиндеги матрица катарында кароого болот. Бул учурда ар бир жолчону n координаталуу вектор сыяктуу элестетип, a жолчосун $a = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, b жолчосун $b = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$, c жолчосун $c = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ көрүнүшүндө жазабыз, б.а. матрицаны n координаталуу m векторлордон түзүлгөн таблица деп эсептейбиз. Мында матрицанын a_{ij} элементтери ыңгайлуулук үчүн $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ деп белгиленип жазылды $(i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,m)$.

Жолчолордун мындай көптүгүнө кошуу жана санга көбөйтүү амалдарын 1×n- тартиптеги матрицалар сыяктуу киргизип:

$$a, b \in R_{1\times n} \Rightarrow a + b = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\}, \qquad (8)$$

$$a \in R_{1\times n} \Rightarrow \lambda a = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n\} \qquad (9)$$

жолчолордун көптүгүндөгү амалдарына ээ болобуз.

Жолчолордун көптүгүндө (8), (9) эрежелери менен аныкталган жолчолорду кошуу жана санга көбөйтүү амалдары:

1) Кошууда

$a + b = b + a;$

$(a + b) + c = a + (b + c);$

$a + 0 = 0 + a = 0, 0 - н\theta л \;\; жолчо;$

$a + x = 0, чечими \;\; жашайт;$

2) Санга көбөйтүүдө

$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b;$

$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$

$\lambda(\mu a) = (\lambda \cdot \mu)a;$

$1 \cdot a = a$

касиеттерине ээ болорун текшерип көрүүгө болот.

Ошентип матрицалардын жолчолорунун көптүгү (8), (9) амалдарына карата сызыктуулуктун 1) - 2) талаптарын канааттандырып, сызыктуу мейкиндикти түзөт (Матрицалардын $R_{3\times 3}$ мейкиндигинин да сызыктуулуктун 1) – 2) касиеттерине баш ийери, аларды кошуу жана санга көбөйтүү эрежелеринен келип чыгат).

Жолчолордун мейкиндигин n координаталуу векторлордун сызыктуу мейкиндиги катарында эсептеп, сызыктуу көз каранды эмес жана сызыктуу көз каранды жолчолор түшүнүгүн киргизебиз. Айталы $a_1, a_2, ..., a_n$ деп m×n тартиптеги A матрицасынын жолчолорун белгилейли

$$A=\begin{array}{c} a_1 - жолчо \rightarrow \\ a_2 - жолчо \rightarrow \\ -------- \\ a_m - жолчо \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$ Ал эми b деп ушул эле матрицанын же башка бир матрицанын каалагандай бир n компоненттүү жолчосун алалы.

Эгерде b жолчосун $a_1, a_2, ..., a_m$ жолчолору аркылуу

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m \qquad (10)$$

көрүнүшүндө туюнтуу мүмкүн болсо, анда b жолчосун $a_1, a_2, ..., a_m$ жолчолорунун $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ коэффициенттүү сызыктуу комбинацияларынан турат деп айтабыз $(\forall i : \lambda_i \in R, i = 1,2,...,m)$.

(10) сызыктуу комбинацияда жок дегенде бир $\lambda_i \neq 0$ болсо, анда аны тривиалдык эмес сызыктуу комбинация, ал эми $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$ болсо, тривиалдык сызыктуу комбинация дейбиз. Тривиалдык учурда b жолчосу жалаң нөлдөрдөн гана куралган болот. Мындай b жолчосу жалаң нөлдөрдөн куралган абал, тривиалдык учурда гана ($\forall i : \lambda_i \equiv 0$) аткарылса, анда $a_1, a_2, .., a_m$ жолчолорун сызыктуу көз каранды эмес системаны түзөт дейбиз. Эгерде $\exists i : \lambda_i \neq 0$ болсо деле b жолчосу жалаң нөлдөрдөн турган абал түзүлсө, анда $a_1, a_2, .., a_m$ жолчолорун сызыктуу көз каранды система дейбиз. Көз каранды системанын каалагандай a_i жолчолорунун бирөөсүн калгандарынын сызыктуу комбинациясы катарында туюнтууга болот.

Чынында эле $a_1, a_2, ..., a_m$ жолчолору сызыктуу көз каранды болсо, анда ага жараша $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ сандары табылып,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0 \qquad (11)$$

шарты кайсы бир $\lambda_i \neq 0$ болсо деле аткарыла берет. Аныктык үчүн $\lambda_m \neq 0$ десек, анда (11) ден

$a_m = -\frac{\lambda_i}{\lambda_m} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} a_m - ... - \frac{\lambda_{m-i}}{\lambda_m} a_{m-i}$ туюнтуусу келип чыгат. $\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_m}$, $i = 1,2,...,m-1$ белгилөөлөрүнүн жардамы менен аны

$$a_m = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_{m-1} a_{m-1} \qquad (12)$$

көрүнүшүнө келтирсек, a_m жолчосу калган жолчолордун сызыктуу комбинациясы менен туюнтулган болот. Ошондой эле, тескерисинче жолчолордун бирөөсү калгандары менен сызыктуу туюнтулса, анда ал

жолчолордун системасын сызыктуу көз каранды болот деп эсептейбиз. Мисалы, $a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m$ жолчолорун тривиалдык эмес сызыктуу комбинациясы катарында (12) барабардыгын $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_{m-1} a_{m-1} + (-1) a_m = 0$ көрүнүшүндө жазсак, анда $\lambda_m = -1 \neq 0$ болсо деле бул сызыктуу комбинация нөлгө тең болгонун көрөбүз.

Эскертүү: *$R_{m\times n}$ мейкиндигинде берилген матрицалардын ар бир мамычасын m компоненттерден турган бир элемент деп эсептеп, матрицаларды - саны n ге барабар мамычалардын көптүгү катарында кароого болот. Мамычалардын көптүгүндө кошуу, санга көбөйтүү амалдарын $R_{m\times 1}$ мейкиндигиндеги бир мамычалуу матрицаларды кошуу, санга көбөйтүү амалдары сыяктуу аныктап, матрицанын мамычаларынын көптүгүн ошол амалдарга карата сызыктуу мейкиндик деп эсептөөгө болот.*

5. 2. 3 Матрицаларды көбөйтүү

Матрицалардын көптүгүн практикада эсептөө, салыштыруу аппараты катарында колдонуу максатында, алардын алгебрасын түзөбүз. Берилген үчүнчү тартиптеги А жана В матрицаларынын көбөйтүндүсү деп, элементтери төмөндөгүдөй тартипте аныкталган С матрицасын түшүнөбүз:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = C \qquad (13)$$

Демек, С матрицасынын c_{ij} элементи $(i, j = 1,2,3)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \qquad (14)$$

көрүнүшүндө эсептелет. n - тартиптеги квадраттык матрицалар үчүн (14) формуласы

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (i, j = 1,2,...,n) \qquad (14^A)$$

көрүнүшүндө жазылат. Ошентип С матрицасынын c_{ij} – элементи А матрицасынын i – жолчосунун элементтерин, В матрицасынын j – мамычасынын тиешелүү элементтерине түгөйлөш көбөйтүп, суммалоо менен табылат:

$$\underset{A}{\left(\frac{i-жолчо}{}\right)}\cdot\underset{B}{\left(\Big|j-мамыча\right)}=\underset{C}{\left\langle\frac{i-жолчо}{}\middle|\frac{c_{ij}}{j-мамыча}\right\rangle}.$$

Матрицалардын көбөйтүүнүн (13) – (14^A) эрежелери, каалагандай эле тартиптеги матрицаларды көбөйтө берүүгө ылайыкташкан эместигин байкайбыз, б.а. А матрицасында канча мамыча болсо, В матрицасында ошончо жолчо болууга тийиш. Ушундай шартта гана элементтерин бири – бирине түгөйлөш көбөйтүп, суммалоо мүмкүнчүлүгү түзүлөт.

$$\begin{pmatrix} Тартиби \\ m\times n \\ A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Тартиби \\ n\times p \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Тартиби \\ m\times p \\ C \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Бул көбөйтүү эрежесинде В матрицасынын мамычаларынын p санына чек коюлбайт. Мисалы, 3×3 тартиптүү А матрицасына, 3×2 тартиптүү В матрицасын көбөйтүүгө болот:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot1+1\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1\\2\cdot2+1\cdot1+3\cdot0&2\cdot0+1\cdot1+3\cdot1\\1\cdot2+2\cdot1+1\cdot0&1\cdot0+2\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\\4&3\end{pmatrix}.$$

Бирок, тескерисинче $B\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}$ көбөйтүүсү аткарылбайт, анткени биринчи көбөйтүүчү В матрицасында 2 мамыча, ал эми экинчи көбөйтүүчү А матрицасында 3 жолчо болуп, аларды түгөйлөштүрүп көбөйтүү мүмкүн эмес.

Матрицалардын көбөйтүүнүн айрым касиеттери

1^0. Жалпы учурда матрицаларды көбөйтүү коммутативдүүлүк касиетине ээ эмес: $A\cdot B\neq B\cdot A.$ Бирок, айрым бир тандалган матрицалар үчүн коммутативдүүлүк касиети аткарылат.

2^0 Эгерде $A\cdot E=E\cdot A=A$ $(A,E\in R_{3\times3})$ болсо, анда Е бирдик матрица деп аталып,

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ көрүнүшүндө жазылат. Бирдик матрицанын башкы диагоналында жалаң гана 1 сандары болуп, калган элементтеринин баары нөлдөр болушат.

3^0 Бирдей тартиптеги А, В, С матрицалары берилсе, анда

а) $(A\cdot B)C = A\cdot(B\cdot C)$;

б) $A(B+C) = AB + AC$;

в) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A, \qquad \alpha,\beta \in R$;

г) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

д) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ орун алат.

4^0 $A\times A^{-1} = E$ болсо, анда A^{-1} матрицасы А матрицасына тескери матрица деп аталат.

§5.3 Матрицаларды өзгөртүп түзүү

5.3.1 Матрицаларды транспонирлөө

$A \in R_{3\times 3}$ болгон $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ матрицасы берилсин. Бул матрицанын бардык жолчолорун, ошол эле номердеги мамычалары менен орундарын которуштургандан кийин (б.а.1 - жолчону 1- мамыча менен, 2 - жолчону 2 - мамыча менен ж.б.у.с) түзүлгөн матрица, берилген матрицага карата транспонирленген матрица деп аталып, A^T деп белгиленет:

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Транспонирлөө учурунда квадраттык матрицанын башкы диагоналындагы элементтер өзгөрүүсүз каларын көрөбүз.

Матрицаларды транспонирлөө учурунда төмөндөгүдөй абалдар орун алса:

1) $B = B^T$ болсо, анда В матрицасын симметриялуу матрица;

2) $C^T = -C$ болсо, анда С матрицасын кыйгач симметриялуу матрица деп атайбыз.

Каалагандай эле А матрицасын, аны менен бирдей тартиптеги кандайдыр бир симметриялуу В матрицасы менен кыйгач симметриялуу

С матрицасынын суммасы катарында ажыратып жазууга болот. Мындай ажыратуу A=B + C бирөө гана болот. Мисалы, $R_{2\times 2}$ мейкиндигинен алынган экинчи тартиптеги $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ матрицасын симметриялуу B, кыйгач симметриялуу C матрицаларынын суммасы катарында жазалы: $B=\begin{pmatrix}x & a\\ a & y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$ көрүнүшүндө десек, $B^T = B$, $C^T = -C$ шарттары аткарылууда, андай болсо,

$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & a\\ a & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$ барабардыгы аткарылышы үчүн:

$\begin{cases}x+0=-1,\\ y+0=2,\\ a-b=0,\\ a+b=3\end{cases}$ тендиги орун алышы керек. Демек, x=-1, y=2, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ болсо, берилген матрица

$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}=B+C$ симметриялуу жана кыйгач симметриялуу матрицалардын суммасына бир маанилүү ажырайт. Жалпы m×n- тартиптеги матрицалар үчүн транспонирлөө

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ - & - & - & -\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ - & - & - & -\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ көрүнүшүндө жүргүзүлүп, n×m - тартиптеги матрица келип чыгат. Аны схемада $\begin{pmatrix}m\times n\\ A\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n\times m\\ A^T\end{pmatrix}$ көрсөтөбүз.

Ошентип транспонирлөө кезинде жолчолордун саны мамычалардын санына, мамычалардын саны жолчолордун санына айланат, б.а. A матрицасы m жолчолуу n мамычалуу болсо, A^T матрицасы n жолчолуу m мамычалуу болот. Мисалы, эки жолчолуу, төрт мамычалуу A матрицасын транспонирлөө менен

$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 2\\ 7 & 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 1 & 3\\ 5 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

төрт жолчолуу, эки мамычалуу A^T матрицасына ээ болобуз.

Матрицаларды транспонирлөө эрежеси төмөндөгүдөй

1^0. $(A^T)^T = A$;
2^0. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
3^0. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$;
4^0. $(AB)^T=B^TA^T$ касиеттерге ээ болорун текшерип көрүүгө болот.

Эскертүү: *Матрицаларды транспонирлөөдө алардын сызыктуу көз каранды эмес жолчолорунун (мамычаларынын) саны өзгөрбөйт.*

5.3.2 Матрицаларды элементардык өзгөртүү.

$R_{m\times n}$ мейкиндигинде $m\times n$- тартибиндеги эки А жана $\tilde{A}$ матрицаларын алалы. А матрицасынын жолчолорун (мамычаларын) элементардык өзгөртүүлөр менен $\tilde{A}$ матрицасына окшош өзгөртүү деп, төмөндөгү үч өзгөртүүлөрдүн натыйжасында түзүлгөн $\tilde{A}$ матрицасын айтабыз:

I. А матрицасынын каалагандай эки жолчосунун (мамычасынын) орундарын бири – бири менен алмаштырып, $\tilde{A}$ матрицасын түзүүнү;

II. А матрицасынын каалагандай бир жолчосуна (мамычасына) нөлдөн айырмалуу β санын көбөйтүп жазуу менен $\tilde{A}$ матрицасын түзүүнү;

III. А матрицасынын бир жолчосуна (мамычасына) экинчи бир жолчосун (мамычасын) γ санына көбөйтүп, кошуу менен $\tilde{A}$ матрицасын түзүүнү.

Мындай өзгөртүүдө А матрицасы окшош $\tilde{A}$ матрицасына айланып, окшоштук байланыш $A\sim\tilde{A}$ көрүнүшүндө белгиленет. Өз учурунда $\tilde{A}$ матрицасын элементардык өзгөртүү менен кайра А матрицасына калыбына келтирүү мүмкүн, б.а. $\tilde{A}\sim A$.

I, II, III өзгөртүүлөрүндө матрицанын сызыктуу көз каранды эмес жолчолорунун (мамычаларынын) сызыктуу көз каранды эместиги сакталат. Матрицаларды элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүүнүн негизги максаты, А матрицасына окшош бирок жолчолорундагы нөл болгон элементтери тепкичтүү абалда жайгашкан $\tilde{A}$ матрицасын түзүү болот. Бул процесстин жүрүү схемасын 3×5 - тартиптеги матрицанын мисалында түшүндүрүп көрөлү. Берилген матрицаны тепкичтүү абалдагы окшош матрицага элементардык өзгөртүү, анын жолчолорунун, мамычаларынын элементтерин нөлгө айлантуу максатын көздөйт. Ошондуктан тепкичтүү абалга келтирүүнү

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

бир нече кадамдарга бөлөбүз.

1 - Кадам: $a_{11}\neq 0$ болсун дейли. Эгерде $a_{11}=0$ болсо, анда a_{21} же a_{31} нөлдөн айырмалуу болушу мүмкүн. Биринчи жолчону алар турган жолчо менен алмаштырып, $\widetilde{a}_{11}\neq 0$ абалын түзөбүз, б.а. биринчи жолчонун биринчи элементи нөлдөн айырмалуу болгондой жолчолорду же мамычаларды (I - өзгөртүү) алмаштырып өзгөртөбүз.

Биринчи жолчону a_{11} санына бөлүп жиберип же $\frac{1}{a_{11}}$ санына көбөйтүп (II- өзгөртүүнүн негизинде) , аны

$$A_1=\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} & \widetilde{a}_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$ көрүнүшүнө келтиребиз.

$$\left(\widetilde{a}_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}}, \qquad j=2,\ 3,\ 4,\ 5\right)$$

A_1 матрицасынын биринчи жолчосун өзүндөй калтырып, экинчи жолчого «$-a_{11}$» санына көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп, ал эми үчүнчү жолчого «$-a_{31}$» санына көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып,

$$A_2=\widetilde{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} & \widetilde{a}_{15} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{24} & \widetilde{a}_{25} \\ 0 & \widetilde{a}_{32} & \widetilde{a}_{33} & \widetilde{a}_{34} & \widetilde{a}_{35} \end{pmatrix}$$ матрицасын алабыз. Мында

$$\widetilde{a}_{2j}=a_{2j}-a_{21}\widetilde{a}_{1j}, \qquad \widetilde{a}_{3j}=a_{3j}-a_{31}\widetilde{a}_{1j}, \quad j=2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

2 - Кадам: A_2 матрицасынын 1- жолчосу өзүндөй калып, $\widetilde{a}_{22}\neq 0$ болсун ($\widetilde{a}_{22}=0$ болсо, анда жолчолорду же мамычаларды алмаштырып бул абалдагы элементти нөл эмес көрүнүшкө келтиребиз).

A_2 матрицасынын экинчи жолчосун $\widetilde{a}_{22}$ ге бөлүп жиберип же $\frac{1}{\widetilde{a}_{22}}$ санына көбөйтүп, $A_3=\widetilde{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} & \widetilde{a}_{15} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ 0 & \widetilde{a}_{32} & \widetilde{a}_{33} & \widetilde{a}_{34} & \widetilde{a}_{35} \end{pmatrix}$,

$\alpha_{2j} = \dfrac{\widetilde{a}_{2j}}{\widetilde{a}_{22}} \quad \left(j = 3,\ 4,\ 5 \right)$ матрицасын алабыз. A_3 матрицасынын биринчи жана экинчи жолчолорун өзүндөй калтырып, үчүнчү жолчосуна «$-\widetilde{a}_{32}$» кө көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуп жазабыз. Натыйжада

$$A_4 = \widetilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} & \widetilde{a}_{15} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

$\alpha_{3j} = \widetilde{a}_{3j} - \widetilde{a}_{32}\alpha_{2j} \qquad (i = 3,4,5)$ жолчолорундагы нөл элементтери тепкич абалын элестеткен матрицага ээ болобуз.

Ошентип (17) матрицасына окшош (18) тепкичтүү абалдагы матрицаны түздүк, ал процесс I, II, III өзгөртүүлөрү аркылуу $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$ кадамдары менен жүргүзүлдү.

Мындай окшош өзгөртүүлөрдүн 1- кадамында эле айрым жолчолордун көпчүлүк же бардык элементтери толугу менен нөлгө айланып калса, матрицаны тепкич абалына келтирүү кийинки кадамдарсыз эле бүтүп калышы мүмкүн.

Жолчолорду (мамычаларды) I, II, III элементардык өзгөртүүлөр менен нөл сандарынан турган жолчолорго (мамычаларга) айлантуу процесси жолчолордун (мамычалардын) сызыктуу көз каранды эмес системаларды түзүүсүнө байланышкан болот, б.а. бири – бири менен сызыктуу көз каранды болгон жолчолор (мамычалар) жоюшуп, толук нөл элементтерден турган жолчолорго айланышат.

Жалпы учурда $m \times n$ – тартиптеги ($m<n$) матрицаны тепкичтүү абалга келтирүүдө m-1 чейинки кадамдар болуп, анын натыйжасында

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\dots & \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23}\dots & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0\dots & \alpha_{mm} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

берилген матрицаны өзүнө окшош тепкичтүү матрицага өзгөртө алабыз.

Мисалы: $\triangleright \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4×3 - тартибиндеги матрицаны тепкичтүү матрицага өзгөртүп түзөлү. Анын биринчи жана үчүнчү

жолчолорун алмаштырып жазабыз $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Андан кийин биринчи жолчосун өзүндөй калтырып, экинчи жолчосуна «-2» ге көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп, үчүнчү жолчого биринчи жолчону кошуп, төртүнчү жолчого 3 кө көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып,

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасына ээ болобуз. Кийинки кадамда биринчи, экинчи жолчолорду өзүндөй калтырып, үчүнчү жолчону «-1» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуу менен, төртүнчү жолчону 2 ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуу менен

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ матрицасын алабыз. Бул матрицанын үчүнчү жолчосу калган жолчолордун сызыктуу тривиалдык эмес комбинациясы катарында туюнтулуп, б.а. сызыктуу көз каранды системаны түзүп, бардык элементтери нөлдөр болот. Акырында 3 - жолчо менен 4 - жолчолордун орундарын алмаштырып,

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ тепкичтүү формага өзгөрүлгөн матрицаны табабыз. ◁

Жогоруда айтылгандардын жыйынтыгын теорема катарында корутундулайбыз:

5.1 - Теорема. *Каалагандай матрицанын жолчолорун (мамычаларын) I, II, III – түрүндөгү элементардык өзгөртүүлөрүн пайдаланып, тепкичтүү матрицага өзгөртүп түзүүгө болот.*

Эскертүү:

Квадраттык матрицаларда элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүү үчүн, өзгөртүүлөрдүн матрицалары деп аталган квадраттык матрицаларды колдонууга да болот. Өзгөртүүлөрдүн матрицаларынын үч түрү бар:

1-түрү. Е бирдик матрицасынын каалагандай i - жана к - жолчолорун алмаштыруу менен түзүлгөн P_{ik} - матрицасы.

Мисалы, 3-тартиптеги Е бирдик матрицасында 3 – жолчо менен 2 – жолчосу алмаштырылган $P_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ көрүнүшүндө болот.

2 - түрү. Е бирдик матрицасынын диагоналында турган 1 элементтеринин бирөөсүн (i - жолчо, i - мамычанын кесилишинде) нөлдөн айырмалуу β саны менен алмаштыруу менен түзүлгөн D_i матрицасы.

Мисалы, 4-тартиптеги квадраттык матрицада D_2 матрицасы

$$D_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\beta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow 2\text{-жолчо}$$

$\downarrow$

2-мамыча

көрүнүшүндө болот.

3-түрү. Е бирдик матрицасынын диагоналындагы «1» элементтеринен башка i-жолчо менен j-мамычада турган бир нөл эмес γ элементи менен айырмаланган L_{ij} матрицасы көрүнүшүндө болот.

Мисалы, $L_{24}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\gamma\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ көрүнүштө жазылат.

А квадраттык матрицасын элементардык өзгөртүп түзүү үчүн, аны P_{ik}, D_i, L_{ij} матрицаларына зарылдыкка жараша көбөйтүшөт. Натыйжада I,II,III өзгөртүүлөрү ишке ашып, А матрицасына окшош $\tilde{A}$ матрицасы келип чыгат. Аларды А матрицасына сол жагынан көбөйткөндө жолчолордо, оң жагынан көбөйткөндө мамычаларда элементардык өзгөртүүлөр ишке ашат.

Мисалдар.

1. Матрицаларды көбөйткүлө.

Чыгаруу:

а) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\5&4&3\\0&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot1+1\cdot2+0\cdot3\\5\cdot1+4\cdot2+3\cdot3\\0\cdot1+1\cdot2+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\22\\5\end{pmatrix}.;$

б) $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}$ матрицаларын көбөйтүү коммутативдүү болобу?

Чыгаруу:

$$\triangleright\ A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 1\\ (-1)\cdot 1+2\cdot 3 & (-1)\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}=C;$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 3\cdot 3+1\cdot(-1) & 3\cdot(-1)+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}=D. \qquad C\neq D$$

болгондуктан, коммутативдүүлүк орун албайт. $\triangleleft$

2. а) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ матрицалары берилсе, A+2B матрицасын тапкыла.

Чыгаруу:

$$\triangleright\ A+2B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 6 & 10 & 0\\ 4 & 8 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2 & 1-2 & 4+0\\ -1+6 & 2+10 & 1+0\\ 3+4 & 5+8 & 7+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 5 & 12 & 1\\ 7 & 13 & 19\end{pmatrix}.\ \triangleleft$$

б) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ матрицасын $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ матрицасына көбөйткүлө.

Чыгаруу: $\triangleright$ Бул матрицаларды көбөйтө албайбыз, анткени A матрицасында n=3 мамыча, B матрицасында m=2 жолчо болуп, аларды түгөйлөш суммалоо мүмкүн эмес. $\triangleleft$

3. $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ матрицасын A^T матрицасына көбөйткүлө.

Чыгаруу: $\triangleright$ Берилген матрицанын транспонирленген матрицасы $A^T=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ көрүнүшүндө болуп, $AA^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 10 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$ матрицасын алабыз. $\triangleleft$

4. Берилген $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ матрицасына көбөйткөндө коммутативдүүлүк шарты аткарыла тургандай B матрицасын түзгүлө.

Чыгаруу: $\triangleright$ AB = BA шарты аткарылсын деген талапты канааттандыруучу $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ элементтери белгисиз матрица болсун дейли. Анда

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ теңдештиги аткарылууга тийиш. Барабардыктын эки жагындагы матрицаларды көбөйтүп,

$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$ теңдештигинин тиешелүү элементтерин теңдештирсек,

$\begin{cases} x+2z = x+3y, \\ 3x+4z = z+3t, \\ y+2t = 2x+4y, \\ 3y+4z = 2z+4t \end{cases}$ төрт белгисиздүү төрт теңдемелер системасы келип чыгат. Мындай x, y өзгөрүлмөлөрүн эркин тандаган кезде $z = \frac{3}{2}y,$ $t = x + \frac{3}{2}y$ болсо гана, көбөйтүү коммутативдүү боло тургандай $B = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x+\frac{3}{2}y \end{pmatrix}$ матрицасын түзүүгө боло тургандыгын көрөбүз. ◁

5. $\begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасынын жолчолору сызыктуу көз каранды системаны түзөрүн көрсөтүп, анын бир жолчосун калгандарынын сызыктуу комбинациясы катарында туюнткула.

Чыгаруу: ▷ Берилген матрицанын жолчолорун

$a_1 = \{1,9,-13,7\},$ $a_2 = \{2,-3,4,5\},$ $a_3 = \{1,2,-3,4\},$ $a_4 = \{3,4,-5,7\}$

деп белгилеп, алардын $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ коэффициенттүү сызыктуу комбинациясы нөл элементтерден турган $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$ 0={0,0,0,0} жолчону түзөт дейли. Жолчолорду компоненттери боюнча кошуп,

$\lambda_1 \cdot \{1,\ 9, -13,\ 7\} + \lambda_2 \cdot \{2, -3,\ 4,\ 5\} + \lambda_3 \cdot \{1,\ 2, -3, 4\} + \lambda_4 \cdot \{3,\ 4,\ -5,\ 7\} = \{0, 0, 0, 0\}$

теңдештигине ээ болобуз. Аны компоненттери боюнча теңдештирип,

$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot 3 = 0, \\ \lambda_1 \cdot 9 + \lambda_2 \cdot (-3) + \lambda_3 \cdot 2 + \lambda_4 \cdot 4 = 0, \\ \lambda_1 \cdot (-13) + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot (-3) + \lambda_4 (-5) = 0, \\ \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 4 + \lambda_4 \cdot 7 = 0 \end{cases}$ теңдештиктерине ээ болобуз.

Аны теңдеме катары коэффициенттерге карата чыгарып, λ_1=1, λ_2=1, λ_3=-3, λ_4=0 көрүнүшүндөгү чечимдерди табабыз. Демек, a_1, a_2, a_3, a_4 жолчолору сызыктуу көз каранды системаны түзүшөт, анткени

$\lambda a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$ *же* $1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 0$ шарты тривиалдык эмес же $\exists i : \lambda_i \neq 0$ болсо деле аткарылат. Мисалы: $\lambda_1 = 1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 1 \neq 0, \quad \lambda_3 = -3 \neq 0.$

Жолчолордун сызыктуу көз каранды системаны түзөрүн көрдүк. Алардын бирөөсүн калгандарынын сызыктуу комбинациясы катарында туюнталы. Мисалы, үчүнчү a_3 жолчосун $a_3 = \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + 0 \cdot a_4$ көрүнүшүндө туюнтабыз. Бул туюнтууну жолчолордун компоненттери боюнча мамыча көрүнүшүндө жазып көрсөтөлү:

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 9 \\ \frac{1}{3} \cdot (-13) \\ \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{3} \cdot (-3) \\ \frac{1}{3} \cdot 4 \\ \frac{1}{3} \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ 3 - 1 \\ \frac{-13}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = a_3 . \triangleleft$$

$$a_3 \qquad \frac{1}{3} a_1 \qquad \frac{1}{3} a_2 \qquad 0 \cdot a_4$$

6. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 20 \\ -1 & 2 & -3 & -11 \end{pmatrix}$ матрицасын элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен тепкичтүү абалга келтиргиле.

Чыгаруу: $\triangleright$ Үчүнчү жолчо менен биринчи жолчону алмаштырып жазалы

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 2 & -2 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & -3 & -11 \end{pmatrix}$. Биринчи, экинчи жолчону өзүндөй калтырып, үчүнчү жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн биринчи жолчону, төртүнчү жолчого биринчи жолчону кошуп жазсак,

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ келип чыгат. 1, 2, 3 - жолчолорду өзүндөй калтырып, 4 - жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуп жазалы. Анда, берилген матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ тепкичтүү абалга келет. ◁

7. A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасын өзгөртүүлөрдүн

$P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаларына көбөйтүп көргүлө. Көбөйтүүнүн натыйжасында А матрицасында кандай элементардык өзгөрүүлөр болгонун түшүндүргүлө.

Чыгаруу: ▹ 1) А матрицасына өзгөртүүлөрдүн P_{32}, матрицасын сол жагынан көбөйтүп көрөлү:

$P_{32} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, анда А матрицасын экинчи жолчосу менен үчүнчү жолчосу алмашып, I элементардык өзгөртүү аткарылган болот. D_2 ни оң жагынан көбөйтөлү

$A \times D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 4 \\ 0 & 2\beta & 1 \\ 1 & 2\beta & 0 \end{pmatrix}$, экинчи мамыча β санына көбөйтүлүп II элементардык өзгөртүү ишке ашырылды.

L_{21} ди оң жагынан көбөйтөлү

$A \times L_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\gamma & 1 & 4 \\ 2\gamma & 2 & 1 \\ 1+2\gamma & 2 & 0 \end{pmatrix}$, анда биринчи мамычага γ га көбөйтүлгөн экинчи мамыча кошулуп жазылып, III элементардык өзгөрүү ишке ашырылган. Ошентип А матрицасына өзгөртүүлөрдүн матрицасын сол жагынан көбөйткөндө, анын жолчолорунда, ал эми оң жагынан көбөйткөндө, анын мамычаларында элементардык I, II, III - өзгөртүүлөрү жүргүзүлөт. ◁

§5.4 Матрицаларды сандарга чагылтып салыштыруу жана аларды колдонуу

5.4.1 Матрицанын аныктагычы

Матрица таблица болуп эсептелгендиктен анын сандык мааниси болбойт, бирок квадраттык А матрицасынан detA деп белгиленип, А матрицасынын детерминанты деп айтылган аныктагыч түзүп, А матрицасына detA чыныгы санын тиешелеш коюу мүмкүн. Мисалы, экинчи тартиптеги квадраттык матрицага

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftrightarrow \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\Delta_2 \ , \qquad (19)$$

Δ_2- саны тиешелеш коюлат. Үчүнчү тартиптеги квадраттык матрицасына

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \leftrightarrow \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}- \qquad (20)$$

$$-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}=\Delta_3$$

Δ_3- саны тиешелеш коюлат. Ал эми биринчи тартиптеги бир элементтүү квадраттык матрицага $(a_{11}) \leftrightarrow \det(a_{11})=a_{11}$ санын тиешелеш коёбуз.

Жалпы учурда n - тартиптеги квадраттык матрицага, аныктагычтын 1-мамычасынын минорлору боюнча ажыратылып эсептелген

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}= \qquad (21)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}=\Delta_n$$

бир гана Δ_n саны тиешелеш коюлат (каалагандай жолчо же мамычанын минорлору менен ажыратсак да Δ_n өзгөрбөйт). Мында аныктагычтын сандык мааниси биринчи мамычанын элементтеринин минорлору боюнча эсептелип, M_{i1} берилген матрицанын аныктагычынын (n-1) - тартиптеги минорлору болушат.

Ошентип квадраттык матрица таблица болгону менен, анын аныктагычы сан болуп, алардын арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орун алат. Бул өз ара бир маанилүү тиешелештикти пайдаланып, ар бир матрицанын жеке өзүнө гана сандык жактан мүнөздөмө бере ала тургандай аныктагычын түзөбүз. Матрицаларга сандык мүнөздөмө берүү менен алардын турмушта чөйрө таануу каражаты катарында колдонуу мүмкүнчүлүгүн кеңейтебиз.

Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүүдө анын аныктагычы кандай өзгөрөрүн изилдейли. Ал үчүн аныктагычтардын сандык маанилерин табуу эрежелерине таянып (§1.5), элементардык өзгөртүүдөн кийинки жана баштапкы матрицалардын аныктагычтарынын сандык маанилерин салыштырып көрөбүз:

1^0. Матрицанын аныктагычынын сызыктуулугу.

Айталы үчүнчү тартиптеги квадраттык $\Delta_3^{'}$ матрицасын аныктагычынын экинчи жолчосунун элементтери, кайсы бир $\alpha_{2j},\ \beta_{2j}\ \ (j=1,2,3)$ сандарынын сызыктуу комбинациясы болсун, анда аныктагычтардын касиети боюнча

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda\alpha_{21}+\mu\beta_{21} & \lambda\alpha_{22}+\mu\beta_{22} & \lambda\alpha_{23}+\mu\beta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu\beta_{21} & \mu\beta_{22} & \mu\beta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\lambda\ \Delta_3^{'}+\mu\ \Delta_3^{''} \qquad (22)$$

келип чыгат.

Мында $\Delta_3^{'}$ деп биринчи, $\Delta_3^{''}$ деп экинчи кошулуучу аныктагычтарды белгиледик. (22) теңдештигинин туура экендигине Δ_3, $\Delta_3^{'},\Delta_3^{''}$ аныктагычтарынын 1- жолчосу боюнча ажыратып көрүп ишенүүгө болот. Демек, аныктагычтын жолчосу кайсы бир сандардын сызыктуу комбинациясы болсо, аныктагычтын өзү да $\Delta_3^{'}$, $\Delta_3^{''}$ аныктагычтарынын сызыктуу $\Delta_3=\lambda\Delta_3^{'}+\mu\Delta_3^{''}$ комбинациясынан турат. Аны аныктагычтардын сызыктуулук касиети дейбиз, ал n - тартиптеги аныктагычтар үчүн да туура болот. Аныктагычтын мамычалары үчүн да ушундай сызыктуулук касиети орун алат.

2^0. Антисимметриялуулугу.

Матрицанын эки жолчосунун (мамычасынын) орундарын алмаштырып жазсак, анда анын баштапкы аныктагычы Δ, кийинки $\overline{\Delta}$ аныктагычынан белгиси менен гана айырмаланат. б.а. $\Delta=-\overline{\Delta}$.

Чынында эле $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ *болсо* $\overline{\Delta}_3=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

болорун, Δ_3 аныктагычын 1- жолчо, $\overline{\Delta}_3$ аныктагычын 2 - жолчо боюнча эсептеп чыгып, $\Delta_3=-\Delta_3$ теңдештиги аткарыларын көрөбүз.

3^0. А матрицасын аныктагычы менен транспорнирленген A^T матрицасын аныктагычы дал келишет б.а. $\det A = |A| = |A^T| = \det A^T$ **.**

▹ Чынында эле

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$ *матрицаларынын аныктагычтары*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

болушуп, $|A|$ - ны биринчи жолчо, ал эми $|A^T|$- ны биринчи мамыча менен ачып чыксак, алардын

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31};$$

$$|A^T| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

барабар сандык маанилерге ээ болорун көрөбүз. ◃

4^0. Бирдей тартиптеги квадраттык А, В матрицаларынын көбөйтүндүсүнүн аныктагычы, алардын аныктагычтарынын көбөйтүндүсүнө барабар

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Аныктагычтын §1.5 те көрсөтүлгөн касиеттерин жана азыркы 1^0 - 4^0 касиеттерин топтоштуруп, матрицанын аныктагычын практикалык эсептөөлөрдө колдонууга ылайыктуу айрым эрежелерин санап өтөбүз:

1. **Эки бирдей жолчосу (мамычасы) болгон матрицанын аныктагычы нөлгө барабар болот.**

Чынында эле матрицанын эки бирдей жолчосунун (мамычасынын) орундарын алмаштырып жазсак, анын аныктагычынын белгиси өзгөрүшү $\Delta = -\Delta$ керек. Бирок эки жолчодо тең бирдей элементтер болгондуктан, иш жүзүндө жолчолор алмашканы менен аныктагыч өзгөргөн жок. Ошондуктан $\Delta = -\Delta$ теңдештиги $\Delta = 0$ болсо гана аткарылат.

2. Матрицанын жолчосуна (мамычасына) бир санды көбөйтүү, анын аныктагычына ошол санды көбөйткөнгө тең болгон өзгөртүү болот.

Бул жогорудагы **2⁰** касиетинде $\mu = 0$ деп алганга барабар.

3. Жолчосу (мамычасы) жалаң нөлдөр болгон матрицанын аныктагычы нөлгө барабар.

Чынында эле аныктагычты ошол нөл жолчо боюнча ажыратып эсептесек, сандык мааниси нөл болот.

4. Матрицанын кайсы бир жолчосу (мамычасы) экинчи бир жолчону (мамычаны) бир санга көбөйтүү менен алынса, б.а. тиешелүү элементтери пропорционалдуу болушса, анда аныктагычы нөлгө барабар болот.

Чынында эле жалпы көбөйтүүчү санды аныктагычтын сыртына чыгарсак, анда берилген аныктагыч эки бирдей жолчого (мамычага) ээ болуп, сандык мааниси нөлгө тең болот.

5. Эгерде аныктагычтын бир жолчосуна (мамычасына) кайсы бир жолчосун (мамычасын) бир санга көбөйтүп кошуп жазсак, анда аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөйт.

Чынында эле аныктагычтын сызыктуулук касиети боюнча экинчи жолчосуна λ санына көбөйтүлгөн биринчи жолчосун кошуп чыксак

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

баштапкы аныктагычты кайра алабыз (λ санына көбөйтүлгөн аныктагыч эки жолчосу бирдей болуп 0 гө тең).

Натыйжа: Аныктагычтын каалаган жолчосуна калган жолчолорунун сызыктуу комбинацияларын кошуп жазуудан анын сандык мааниси өзгөрбөйт.

5.4.2 Тескери матрицаны табуу ыкмалары.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (24)$$

n - тартиптеги квадраттык матрицасына көбөйткөндө Е бирдик матрицасы келип чыга тургандай A^{-1} матрицасы, А матрицасына карата тескери матрица деп аталганын (5.2.3., 4^0) билебиз

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E . \qquad (25)$$

Берилген (24) матрицасына тескери матрица дайыма эле жашай бербейт, б.а. ал берилген матрицанын аныктагычынын сандык маанисинен көз каранды болот.

5.4.1 Аныктама. *Эгерде берилген А матрицасынын (24) аныктагычы detA=$|A| \neq 0$ болсо, анда аны кубулбаган матрица, ал эми* $\det A = |A| = 0$ *болсо, кубулган матрица деп айтабыз.*

Ошентип А матрицасы кубулбаган болсо, анда ага тескери болгон A^{-1} матрицасын бир маанилүү түрдө табууга болот, б.а. ар бир кубулбаган матрицанын (25) шартын канааттандырган бир гана тескери матрицасы жашайт.

Тескери матрицаны табуунун эки ыкмасына токтолобуз (n=3):

1. Кийиштирилген матрицалар усулу.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (26)$$

3 - тартиптеги кубулбаган матрицасы берилсин. Демек, анын аныктагычы $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ нөлдөрдөн айырмалуу сандык маниге ээ болот.

Берилген (26) матрицасынын аныктагычынын элементтеринин A_{ij} (i,j =1,2,3) алгебралык толуктоочторунан түзүлгөн

$$A^K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

матрицасы, А матрицасынын кийиштирилген матрицасы деп аталат. Мында A_{ij} элементи деп $|A|$ аныктагычын a_{ij} элементинин алгебралык толуктоочун түшүнөбүз. Мисалы, A_{11} дин сандык мааниси M_{11} минору аркылуу

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

саны болорун билебиз. Ошондой эле

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22},$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33},$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{31}a_{12}-a_{11}a_{32},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13},$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{21}a_{13}-a_{11}a_{23},$$

$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ сандары (27) матрицасынын элементтери болушат. Ошентип A_{ij} матрицасынын элементтери, А матрицасынын элементтери болушкан конкреттүү a_{ij} сандарын көбөйтүп, кошуп табылгандыктан, бир маанилүү болот, б.а. ар бир А матрицасына карата бир гана A^{K} кийиштирилген матрицасын түзө алабыз жана тескерисинче.

Кийиштирилген A^{K} матрицасын транспонирлейли

$$(A^{K})^{T}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Бул $(A^{K})^{T}$ матрицасы өзгөчө касиетке ээ:

$$(A^{K})^{T}A=A(A^{K})^{T}=|A|\,E. \qquad (29)$$

Мында $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ бирдик матрица.

(29) касиетинин тууралыгын текшерип көрүү үчүн А матрицасына $(A^{K})^{T}$ матрицасын сол жагынан көбөйтүп,

$$A(A^{K})^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}= \qquad (30)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{31} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

ээ болбуз. Бул (30) матрицасынын башкы диагоналында турган $\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33}$ элементтери, А матрицасынын аныктагычы $\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}=|A|$ санына барабар болот. Чынында эле башкы диагоналда

$\gamma_{ii}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}, \quad (i=1,\ 2,\ 3)$ элементтери жайгашып,

алардын ар бири $|A|$ аныктагычынын i – жолчосунун A_{ij} алгебралык толуктоочтору боюнча ачып эсептегенге барабар болот. Башкы диагоналдан башка орундарда жайгашкан бардык элементтер $\gamma_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0$ болору оңой эле текшерилет $(i\neq j, \quad i,j=1,\ 2,\ 3)$.

Мисалы,

$$\gamma_{21}=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=a_{21}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})+a_{22}(a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33})+a_{23}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$
$$=a_{21}a_{22}a_{33}-a_{21}a_{32}a_{23}+a_{22}a_{31}a_{23}-a_{22}a_{21}a_{33}+a_{23}a_{21}a_{32}-a_{23}a_{31}a_{22}=0$$

болот (калганын өз алдыңарча текшерип көргүлө). Андай болсо (30) матрицасы

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot E$$ көрүнүшүндө жазылат.

Демек $A(A^{к})^{T}=|A|\cdot E$ теңдештиги орун алып, (29) туура болот. Ушундай эле жол менен А матрицасына $(A^{к})^{T}$ матрицасын оң жагынан көбөйтүп, $(A^{K})^{T}\cdot A=|A|\cdot E$ болорун көрсөтүү мүмкүн. Ошентип (29) касиети каалагандай тартиптеги кубулбаган матрицалар үчүн туура болуп, анын эки жагын тең $|A|$ санына бөлүп жибергенде $\frac{1}{|A|}\cdot(A^{K})^{T}\cdot A=E$ *же* $A\cdot\frac{1}{|A|}\cdot(A^{K})^{T}=E$ теңдештигине айланат. Мындан А

матрицасына эки жагынан көбөйтсөк да, бирдик Е матрицасы келип чыгуучу бир гана A^{-1} тескери матрицасы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^K\right)^T \qquad (31)$$

көрүнүшүндө табыларын көрөбүз. Тескери матрицаны мындайча табуу усулу кийиштирилген матрицалар ыкмасы деп аталат.

Берилген үчүнчү тартиптеги А квадраттык (26) матрицасынын тескерисин жана (28), (31) барабардыктарын пайдаланып,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} \text{ же } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (32)$$

көрүнүштөрүндө жазабыз.

Ушундай эле талкуулоолор менен n-тартиптеги каалагандай кубулбаган матрицанын тескери матрицасын төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^K)^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \text{ же } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (32^A)$$

II. Элементардык өзгөртүп түзүүлөр же Жордандын ыкмасы.

Үчүнчү тартиптеги квадраттык $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасы кубулбаган болсун, анда анын кеңейтилген матрицасы деп

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (33)$$

матрицасын айтабыз.

Кенейтилген матрицанын эки бөлүгүндө тең эки бирдей элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөбүз, б.а биринчи бөлүгүнүн бир жолчосун (мамычасын) бир санга көбөйтүп башка бир жолчосуна

(мамычасына) кошсок, экинчи бөлүгүндө да ошол эле жолчосун (мамычасын), ошол эле санга көбөйтүп кошобуз. Кайсы бир жолчолорун (мамычаларын) орундарын алмаштырсак, экинчи бөлүгүндө да ошол эле жолчолорун (мамычаларын) орундарын алмаштырабыз. Ошентип олтуруп кеңейтилген $(A\,|E)$ матрицасынын биринчи бөлүгүндөгү А матрицасынын баштапкы, тепкичтүү, диагоналдык көрүнүштөргө өзгөртүп олтуруп, бирдик матрица көрүнүшүнө келгенге чейин элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзө беребиз. Натыйжада кеңейтилген (33) матрицасы өзүнө окшош $(E\,|A^{-1})$ кеңейтилген матрицасына өзгөрүп

$$(A/E)\ \sim (E\,|A^{-1}), \qquad (34)$$

анын экинчи бөлүгүндө A^{-1} тескери матрицасы түзүлгөн болот. Мындай элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен тескери матрицаны табуу Жордандын ыкмасы деп аталат.

А матрицасына тескери болгон A^{-1} матрицасын (32) , (34) көрүнүштөрүндө табуу менен, матрицалык АХ=В же ХА=В тендемелерин чыгаруу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

Мисалы, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $(|A| \neq 0)$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix},$$

бирдей тартиптеги квадраттык матрицалар болушуп, АХ=В тендемеси берилсин. Теңдемени чыгаруу үчүн эки жагын тең A^{-1} ге көбөйтүп,
$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B^{1} \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ матрицалык теңдеменин чечими болгон Х матрицасын табабыз. Матрицалык теңдеменин эки жагындагы матрицалардын элементтерин теңдештирип, белгисиз x_{ij} элементтерин таба алабыз.

Мисалы, $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

матрицалык теңдемесин Жордандын ыкмасы боюнча чыгаралы. А матрицасынын кеңейтилген матрицасын түзүп, ага элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү:

$$\left(A\ |E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

Биринчи жолчону өзүндөй калтырып, экинчи жана үчүнчү жолчолордон биринчисин кемитип жаздык.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)\sim$$

Экинчи мамыча менен үчүнчү мамычаларды орундарын алмаштырып, андан кийин экинчи,үчүнчү жолчолорду «- 2» ге бөлүп жибердик.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right).$$

Экинчи, үчүнчү жолчолорун өзүндөй калтырып, биринчи жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону, андан кийин «-1» ге көбөйтүлгөн үчүнчү жолчону кошуп жаздык.

Акыркы кеңейтилген матрицанын экинчи бөлүгүнөн

$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ тескери матрицасын табабыз. Берилген теңдеменин эки жагына тең A^{-1} матрицасын сол жагынан көбөйтүп:

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}$$

матрицалардын теңдештигине ээ болуп, матрица чечимди табабыз. Мындан

$$x_{11}=\frac{1}{2},\ x_{12}=\frac{1}{2},\ x_{13}=1,\ x_{21}=0,\ x_{22}=-\frac{1}{2},\ x_{23}=-1,\ x_{31}=\frac{1}{2},\ x_{32}=0,\ x_{33}=-1,$$

белгисиз болгон X матрицасынын элементтерин аныктоого болот.

5.4.3 Матрицанын рангы

Матрицалардын R_{mxn} мейкиндигинен алынган каалагандай mxn – тартиптеги нөлдүк эмес

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & q_{1k} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \dots & a_{кn} \\ - & - & - & - - - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (35)$$

матрицасын алалы. Анын $к$ жолчодон жана $к$ мамычадан турган квадраттык бөлүгүнүн аныктагычын

$$M_к=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1к} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2к} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{к1} & a_{к2} & \dots & a_{кк} \end{vmatrix}, \qquad (36)$$

берилген A матрицасынын $к$- тартиптеги минору деп, (36) көрүнүшүндө белгилейбиз. Мында $к$ =1, 2, …, min{m, n} маанилери алынып, A матрицасынын 1, 2 , …, min{m, n} - тартиптеги минорлору болору келип чыгат. Ыңгайлуулук үчүн (36) минорун (35) матрицасынын жогорку сол бурчунда жайгашкан деп тандап алалы. Жалпы учурда M_k минорун, A матрицасынын элементтеринин белгилүү бир абалын сактап (берилген абалын же өзгөрткөндөн кийинки абалын), кааалаган бөлүгүнөн $к\times к$ - тартипте түзүүгө болот.

Мисалы, $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3x4 – тартиптеги матрицанын 1-тартиптеги 12 минору, 2 - тартиптеги 6 минору, 3 - тартиптеги 2 минору бар. Бирок мындан чоң тартиптеги минору жок, анткени

$к$ = min{3, 4}=3.

5.4.1 Аныктама. *Берилген А матрицасынын нөлдөн айырмалуу минорлорунун арасынан тартиптеринин эң чоңу, матрицанын рангы деп аталат. Матрицанын рангы* $r = rang\ A$ *деп белгиленет.*

Ошентип матрицанын рангы $0 \le rangA \le \min\{m, n\}$ аралыгында жайгашкан натуралдык сан болот. Эгерде $r = 0$ болсо, анда (35) матрицасынын бардык минорлору нөлгө барабар; $r = 1$ болсо, бир гана элементтерден турган M_1 минорлорунун жок дегенде бирөөсү нөлдөн айырмалуу болуп, калган 1 ден чоң тартиптеги бардык минорлору нөлгө барабар; $r = 2$ болсо, экинчи тартиптеги минорлорунун жок дегенде бирөөсү нөл болбойт, ал эми 2 ден чоң тартиптеги бардык минорлору нөлгө барабар болушат; $r = k$ болсо, анда жок дегенде бир k - тартиптеги M_k минорлорунун бирөөсү нөлдөн айырмалуу, ал эми андан чоң $\kappa+1, \kappa+2, \ldots, min\{m, n\}$ тартиптеги минорлорунун баары нөлгө барабар деп түшүнөбүз.

Жогорудагы мисалда көрсөтүлгөн матрицанын рангы $r = 3$ саны болот. Анткени $k = 1$ болгондо, M_1^i бир элементтүү $(i = 1,..,12)$ 12 минорлорунун арасында нөлгө барабар эмес минорлору 8. $\kappa = 2$ десек, анын экинчи тартиптеги 6 минорунун ичинен нөлдөн айырмалуу жок дегенде бир

$M_2^i = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \ne 0$ минору табылат.

$\kappa = 3$ десек, эки минорунун жок дегенде бири (бул жерде экөөсү тең)

$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \ne 0,\ \ M_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \ne 0$ нөлдөн айырмалуу болушат. Андай болсо, мисалда берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу минорлорун тартиптеринин эң чоңу

$r = \max\left\{k : M_k \ne 0,\ \ 0 \le k \le 3\right\} = 3\ = min\left\{4,\ \ 3\right\}$ саны болот.

5.4.2 Аныктама*. Нөлдөн айырмалуу* M_r *минорунун тартиби А матрицасынын рангы менен дал келсе, анда* M_r*- минорун базистик минор деп айтабыз.* M_r *базистик минорунун элементтери жайгашкан А матрицасындагы жолчолорду жана мамычаларды матрицанын базистик жолчолору жана мамычалары дейбиз.*

5.4.1 Теорема.

1. *А матрицасынын базистик жолчолору (мамычалары) сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшөт.*

2. *А матрицасынын каалагандай жолчосун (мамычасын) базистик жолчолордун (мамычалардын) сызыктуу комбинациясы катарында жазууга болот.*

1.–далилдөө: ▹Далилдөөнү жолчолор үчүн жүргүзөлү. Ыңгайлуу болсун үчүн базистик $M_r \neq 0$ минорун А матрицасынын жогорку сол бурчунда жайгашкан деп ойлойлу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (38)$$

Анда $a_1, a_2, \dots, a_r$ жолчолору базистик системаны түзүшөт. Бул жолчолордун ар бири n компоненттен турушат

$$\begin{aligned} a_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}, \dots a_{1n}\} \\ a_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}, \dots a_{2n}\} \\ &- - - - - - - - - - - - - - \\ a_r &= \{a_{r1}, a_{r2}, \dots a_{rr}, \dots a_{2n}\}\ . \end{aligned} \qquad (39)$$

Жолчолордун λ_1, λ_2,…, λ_r коэффициенттүү сызыктуу комбинациясын түзөлү $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_r\lambda_r = 0.$ (40)

Тескерисинче, (39) жолчолорун сызыктуу көз каранды деп болжолдойлу, анда кандайдыр бир $\lambda_i \neq 0$ болсо деле (40) барабардыгы орун ала берет $(i = 1,2,\dots,r)$. Айталы $\lambda_2 \neq 0$ болсо деле (40) орун алсын, анда экинчи жолчо $a_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}a_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_2}a_r$ калган жолчолордун сызыктуу комбинациясы катарында жазылып, M_r аныктагычынын экинчи жолчосу жалаң гана нөл элементтерден турат. Бул учурда анын сандык мааниси $M_r = 0$ болушу керек. Анда M_r базистик минор боло албайт. Демек, (39) жолчолорун сызыктуу көз каранды болсун деген болжолубуз туура эмес, анткени шарт боюнча алар сызыктуу көз каранды эмес жолчолордун системасын түзүшкөн базистик жолчолор болушат.

Теореманын экинчи бүтүмүн далилдейли.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rn} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасынын каалагандай бир i-жолчосун алалы. Бул жолчо $a_i=\{a_{i1},a_{i2},...,a_{ir},...,a_{ij},..a_{in}\}$ көрүнүшүндөгү n компоненттерден турат.

Эгерде тескерисинче a_i- жолчосун базистик жолчолордун (39) сызыктуу комбинациясы катарында жазуу мүмкүн болбосо, анда a_i жолчосу (39) жолчолор менен чогуу сызыктуу көз каранды эмес системаны түзөт. Демек, A матрицасындагы базистик жолчолордун саны бирге чоңоюп $r+1$ болот, же $M_r \neq 0$ минорунан чоң болгон $M_{r+1} \neq 0$ минору табылып, M_r минору базистик минор болбой калат. Бул карама - каршылык a_i жолчосун, базистик (39) жолчолордун сызыктуу комбинациясы катарында жазуу мүмкүн эмес деген тескери оюбуздун туура эместигин көрсөтөт, б. а.

$a_i=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+....+\lambda_r a_r$ – көрүнүшүндө туюнтулат.

Ошентип m×n - тартиптеги квадраттык эмес матрицаларга анын базистик минору деп аталган M_r аныктагычынын мааниси аркылуу сандык мүнөздөмө берүүгө болот.

Натыйжа. Матрицада элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүү, анын рангын өзгөртө албайт. Ошондуктан матрицанын рангын оңой табуу үчүн, аны элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен диагоналдык, тепкичтик абалдарга келтирүү керек.

9 - мисал. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицасына тескери болгон матрицаны тапкыла.

Чыгаруу:▹ Матрицанын аныктагычын эсептейли:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0+16+6-0+4-30=-4\neq 0.$$

Демек, берилген матрица кубулбаган матрица болуп, анын бир гана A^{-1} тескери

матрицасы табылат. Тескери матрицаны кийиштирилген матрицалар ыкмасы менен табалы.

$A^k = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ болгондуктан, анын элементтери

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4;$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6;$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9;$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4;$ $\qquad A_{32} = (-1)^{2+3} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$ сандары болушат.

Кийиштирилген матрица $A^K = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ көрүнүшүндө болуп, аны транспонирлеп

$$\left(A^K\right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix},$$

A^{-1} тескери матрицасын

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^K\right)^T = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$ көрүнүшүндө

табабыз. ◁

10 - мисал. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасына тескери A^{-1} матрицасын Жордандын ыкмасы боюнча тапкыла.

Чыгаруу: $\triangleright \det|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 8 + 4 - 10 - 6 - 32 = 24 \neq 0.$

Берилген матрица кубулбаган матрица болгондуктан, анын бир гана тескери матрицасы жашайт. А матрицасынын кенейтилген матрицасын түзүп, ага элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү:

$$A\,|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Биринчи жолчону 3 кө бөлүп жибердик.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Биринчи жолчону өзүндөй калтырып, 2 – жолчого «- 4» кө көбөйтүлгөн биринчи жолчону, 3 – жолчого «-2» санына көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жаздык. Андан кийин экинчи жолчону $\frac{7}{3}$ кө бөлүп жибердик.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array}\right) \sim$$

Экинчи жолчону өзүндөй калтырып, биринчи жолчого «$-\frac{2}{3}$» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону, үчүнчү жолчого $\frac{1}{3}$ ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуп жаздык. Андан кийин үчүнчү жолчону $\frac{27}{4}$ кө бөлүп жибердик. Кийинки кадамда

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array}\right)$$

3 - чү жолчону өзүндөй калтырып, экинчи жолчого «$-\frac{2}{7}$» ге көбөйтүлгөн үчүнчү жолчону, биринчи жолчого «$-\frac{1}{7}$» ге көбөйтүлгөн үчүнчү жолчону кошуп жазып, $\left(E \mid A^{-1}\right)$ көрүнүшүндөгү акыркы кенейтилген матрицаны түздүк. Анын сол жагынан

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$ тескери матрицаны табабыз.◁

11-мисал. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ матрицасынын рангын тапкыла.

Чыгаруу.▷ Бул матрицанын тартиби (3×4) болуп, минорлорунун эң чоңу $к = \min\{3, 4\} = 3$ - тартипте болушу мүмкүн. 3 - тартиптеги минорлору экөө, алардын бири эле нөлдөн айырмалуу болсо, матрицанын рангы
$r = \text{rang}A = 3$ болот.

$$M^1_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20, \quad M^2_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -116$$ болуп, үчүнчү тартиптеги эки минору нөлдөн айырмалуу экен. Андай болсо, берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу минорлорунун тартиптеринин эң чоңу 3 санына барабар, же $rang\ A = 3$.◁

12-мисал. Берилген 4×5-тартиптеги $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

матрицасынын рангын аныктагыла жана базистик жолчолор менен калган жолчолорун туюнткула.

Чыгаруу: ▷A матрицасынын 2, 3 - мамычаларынын жогору бөлүгүнөн $M_2=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq0$ минорун алсак, сандык мааниси нөлгө

барабар эмес болду. Калган 2- тартиптеги минорлорун текшерүүнүн зарылдыгы жок.

Үчүнчү тартиптеги минорлорун текшеребиз. Матрицанын жогорку сол бурчундагы элементтерден түзүлгөн

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 4 = 1 \neq 0$$ минорунун сандык маниси нөлгө

барабар эмес. Калган 3 - тартиптеги минорлорун карабайбыз, анткени жок деген бирөөсүнүн нөлдөн айырмалуу болушу жетиштүү.

Төртүнчү тартиптеги эки минору бар, аларды биринчи жолчолору боюнча эсептеп:

$$M^1_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+3\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 48 + 27 - 1 = 0,$$

$$M^2_4 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-0\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 132 - 132 + 0 - 0 = 0$$

экөөнүн тең нөлгө барабар болорун көрөбүз.

Демек, берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу сандык маниге ээ болгон минорлорунун тартиптеринин эн чоңу $r = 3$ саны, матрицанын рангы болот.

Берилген матрицанын $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ минорун базистик минор

деп (анын тартиби ранг менен тең), a_1, a_2, a_3 жолчолорун базистик жолчолор катарында эсептейбиз. Базистик жолчолор

$a_1 = \{2, -4, 3, 1, 0\}$, $a_2 = \{1, -2, 1, -4, 2\}$, $a_3 = \{0, 1, -1, 3, 1\}$

компоненттерден турушат. Теоремага ылыйык калган бир

$a_4 = \{4,\ -7,\ 4,\ -4,\ 5\}$ жолчосун - базистик жолчолордун сызыктуу комбинациясы катарында жазууга болот $a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$. Чынында эле бул сызыктуу комбинацияны компоненттери боюнча

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

көрүнүшүндө жазып, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$ болгондо алардын тендештикке айланарын көрөбүз. ◁

13-мисал. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ көрүнүшүндөгү 5×3 - тартиптеги матрицанын рангын аныктап, базистик мамычалары менен калган мамычаларын сызыктуу туюнткула.

Чыгаруу: ▷ Берилген матрицада элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзгөндө, анын рангы өзгөрбөйт. Ошондуктан аны окшош матрицаларга өзгөртүп түзөлү.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Мында биринчи жолчону экинчи жолчо менен алмаштырып, андан кийинки жаңы 2 - жолчону 5 - си менен алмаштырдык;

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 - \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону, 3 - жолчого «-3» кө көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп жазып, 4 - жана 5 - жолчолорду өзүндөй калтырдык. Кийинки кадамда 2 - жолчону «-5» ке, 3 - жолчону «-11» ге, 4 - жолчону 5 ке, 5 - жолчону 2 ге бөлүп жибердик. Акыркы кадамда 1 - жана 2 - жолчолорду өзүндөй калтырып, калган жолчолордон 2 - жолчону кемитип жаздык. Ошентип берилген матрицаны элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен ага окшош

матрицага айлантып, анын рангы r = 2 болорун аныктадык. Анткени акыркы матрицада $M_2^{\,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \neq 0,\ M_2^{\,2} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, экинчи тартиптеги эки минорлору гана нөлдөн айырмалуу.

Биринчи жана экинчи мамычаларды базистик деп эсептеп, үчүнчү мамычаны алардын сызыктуу комбинациясы катары туюнтуп жазалы. Мамычаларды b_1, b_2, b_3 десек, анда бул туюнтуу $b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ же компоненттери боюнча $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ көрүнүшүндө жазылат. Чынында эле $\lambda_1 = 3,\quad \lambda_2 = -2$ сандары табылып, бул сызыктуу комбинация аткарыларын көрүүгө болот. ◁

лаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3. - С. 80-81.
15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3. - С. 161-163.
16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1. - С. 74-77.
17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшТУ», 2008. - С. 188-192.
18. Аттокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008. - 94 б.