10 – лекция:

Сызыктуу теңдемелер системасы

5.5.1 Теңдемелер системасы түшүнүгү

Матрицаларды элементардык өзгөртүп түзүү, аныктагычынын рангы, тескерисин табуу сыяктуу амалдардын баары сызыктуу тендемелер системасын чыгаруу максатында окуп үйрөнүлдү. Анткени чөйрөдөгү көптөгөн турмуштук окуялар, кубулуштар математикада сызыктуу тендемелер системасы катарында моделдештирилет.

Мисалы, картошканын жаңы өнүм - уругун өндүрүп тараткан Европадагы илимий тажрыйба чарбасынан Кыргызстанга ташып келип өндүрүлгөн картошканын базар баасынын түзүлүү наркын моделдештирели:

Айталы, тажрыйба чарбасынын x_1 - сырьего кеткен чыгымы, x_2 - жеке ишкердин чыгымы, x_3 - салык чыгымдары, x_4 - болжогон пайдасы, b_i - сатуу наркы болсун (i = 1, 2, 3, 4). Анда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_1 & - \text{(Европадагы)тажрыйба чарбасынын сатуу баасы,} \\ 0 \cdot x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 + \frac{1}{3}x_4 = b_2 & - \text{таратуучу фирманын баасы,} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = b_3 & - \text{Кыргызстанда картошканы кайра эккендеги баа,} \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_4 & - \text{Кыргызстандын базарында сатуу баасы} \end{cases}$$

болуп, түзүлгөн теңдеме төрт белгисиздүү төрт теңдемелер системасын түзөт. Аны матрицалык көрүнүштө төмөндөгүдөй

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$ жазууга болот.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$ белгилөөлөрүн киргизип, акыркы теңдемени A X = B көрүнүшүндө жаза алабыз.

Албетте, Кыргызстандын базарындагы картошканын баасы менен Европадагы тажрыйба чарбасы өндүргөн картошканын өнүм - уругунун баасынын арасындагы байланыштарды башкача моделдештирүүгө да болот. Бирок, аны теңдемелер системасы көрүнүшүндө моделдештирүү толук жана ачык түшүнүүгө мүмкүнчүлүк берет. Анткени, теңдемелер системасында баштапкы өндүрүүчүнүн чыгымдары менен ортомчулардын ар бир этаптагы чыгымдары салыштырылып, картошканын баасынын бардык этаптардагы сатуу наркынын калыптанышынан маалымат алабыз.

Жалпы учурда n белгисиздүү сызыктуу m теңдемелер системасы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (41)$$

көрүнүшүндө жазылат. Аны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$ белгилөөрүн киргизүү менен

$$A \times X = B \qquad (41^A)$$

матрицалык теңдеме көрүнүшүндө жазууга болот. Мында b_j - бош мүчөлөр (j =1,2,…,m), x_i – белгисиздер $(i = 1,2,...,n)$, A матрицасынын элементтери болгон a_{ij} сандары теңдемелер системасынын коэффциенттери болушат. X матрицасы белгисиздер мамычасы, B матрицасы бош мүчөлөрдүн мамычасы, A матрицасы теңдемелер системасынын матрицасы деп аталышат.

5.5.1 Аныктама. *Эгерде $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын тобу табылып, (41) теңдемелер системасына койгон кезде, анын ар бир теңдемесин теңдештикке айландырса, анда бул сандардын тобун (41) системасынын чечимдери деп атап, (41) теңдемелер системасын чыгарылуучу же биргелешкен система дейбиз. Эгерде мындай шартты канааттандырган $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарын тобу табылбаса, анда (41) теңдемелер системасын карама - каршылыктуу чечилбөөчү же биргелешпеген теңдемелер системасы деп айтабыз (Белгисиздер биринчи даражада катышкандыктан сызыктуу деп аталат).*

(41) теңдемелер системасынын кенейтилген матрицасы деп

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (42)$$

матрицасын түшүнөбүз.

5.5.1 Теорема. *Каалагандай (41) теңдемелер системасынын биргелешкен болушу үчүн, бош мүчөлөрдүн B мамычасынын элементтери, A матрицасынын тиешелүү жолчолорунун сызыктуу комбинациялары катарында туюнтулушу зарыл жана жетиштүү.*

Далилдөө. ▹ **1) Зарылдыгы**: Айталы $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын тобу табылып, (41) теңдемесине койгондо аны теңдештикке

айландырсын, башкача айтканда анын чечимдери болушсун. Анда (41) системасындагы каалагандай $i-$ теңдемеси

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \qquad (i = 1,2,...,m) \qquad (43)$$

көрүнүшүндөгү теңдештик болот. Мындан b_i бош мүчөсү A матрицасынын $i-$ жолчосунун $x_1, x_2, ..., x_n$ коэффициенттүү сызыктуу комбинациясы экендигин көрөбүз.

2) Жетиштүүлүгү: Айталы (41) теңдемесинин бош мүчөлөрүнүн мамычасындагы b_i элементтери, A матрицасынын тиешелүү жолчосунун сызыктуу комбинациясы катарында туюнтулсун. Анда $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ сандары табылып, b_i санын А матрицасынын i - жолчосунун элементтери менен $b_i = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + ... + \lambda_n a_{in}$ көрүнүшүндө туюнта алабыз. Мындан $x_1 = \lambda_1$, $x_1 = \lambda_2, ..., x_n = \lambda_n$ сандарынын тобу табылып, (41) теңдемелер системасынын чечимдери болорун көрөбүз. Демек, (41) системасы биргелешкен болот. ◁

(41) системасы биргелешкен учурда (43) сызыктуу комбинациясын: В бош мүчөлөрдүн мамычасын А матрицасынын мамычаларынын сызыктуу комбинациясы катары түшүнүп, компоненттери менен төмөндөгүдөй жазабыз:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (44)$$

5.5.2 Кронекер – Капеллинин теоремасы.

Каалагандай сызыктуу теңдемелер системасынын биргелешкен болушу үчүн, анын матрицасынын рангы менен кеңейтилген матрицасынын рангынын барабар болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө.

▹ **1) Зарылдыгы:** Айталы теңдемелер системасы биргелешкен болсун. Анын матрицасы менен кеңейтилген матрицасынын рангдары барабар болушун көрсөтөлү. (41) системасы биргелешкен болсо, анда 5.5.1 теоремасы боюнча кеңейтилген (42) матрицасынын акыркы B мамычасы, A матрицасынын мамычалары менен (44) көрүнүшүндө сызыктуу туюнтулат же болбосо, B мамычасы (A|B) кеңейтилген матрицасынын калган мамычаларынан сызыктуу көз каранды болот, анда ал мамычанын элементтерин элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүү менен нөлдөргө айланта алабыз, же (A|B) матрицасын окшош ($\tilde{A}$ | $\overline{B}$) кеңейтилген матрицасына өзгөртүүгө болот. Өзгөргөн матрицанын акыркы мамычасы нөл элементтерден тургандыктан, ($\tilde{A}|\overline{B}$)матрицасынын рангына таасирин тийгизе албайт. Демек,

$$r = \text{rang}(A|B) = \text{rang}(\tilde{A}|\overline{B}) = \text{rang}\,\tilde{A} = \text{rang}A \qquad (45)$$

болот (элементардык өзгөртүүдө матрицаны рангы өзгөрбөйт).

2) Жетиштүүлүгү: Айталы (41) системасынын матрицасы менен кеңейтилген матрицасынын рангдары барабар болсун

rangA = rang(A|B), (41) системасынын биргелешкен болушун көрсөтөлү.

(45) теңдештиги орун алса, анда (A|B) матрицасынын акыркы B мамычасын сызыктуу көз каранды деп, калган мамычалары менен (44) көрүнүшүндө сызыктуу туюнтууга болот. Анткени, тескерисинче B мамычасын сызыктуу көз каранды эмес деп ойлосок, анда (A|B) матрицасынын рангы r болбостон r +1 болуп, (45) теңдештиги орун албай калмак. Демек, (44) көрүнүшүндөгү туюнтуу аткарылып, 5.5.1.-теоремасы боюнча (41) биргелешкен система болот.◃

5.5.2 n ≠ m учурдагы теңдемелер системасынын чечимдери. Жордан –Гаусстун ыкмасы

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу деп:

1) Теңдемелер системасынын биргелешкен же биргелешкен эмес экендигин аныктоону;

2) Эгерде система биргелешкен болсо, анда анын чечимдерин табууну түшүнөбүз.

n ≠ m болгон учурда белгисиздердин саны n менен теңдемелердин саны m барабар эмес болот. Айталы (41) сызыктуу теңдемелер системасы биргелешкен болуп, $r = rangA = rang(A/B)$ шарты аткарылсын. M_r базистик минорун А матрицасынын жогорку сол бурчунан алалы. Теңдемелер системасынын А матрицасынын рангы r болгондуктан, анын r жолчодон турган базистик жолчолору болот. Ал эми калган жолчолорунун баары бул базистик жолчолордун сызыктуу комбинациясы катарында туюнтулат. Же болбосо алгачкы r жолчолордон башка жолчолорду, ошол эле r жолчолордун кайра кайталанышы катарында жазууга боло тургандай өзгөртө алабыз. Андай болсо, (41) теңдемелер системасынын m теңдемелеринин алгачкы r теңдемесинин арасындагы кайсы бирлери, кийинки

r +1, r +2, …, m теңдемелеринде кайра кайталанып жазылган болот. Бул кайталанма теңдемелердин бирөөсүн гана калтырып, калган m - r сандагы кайталангандарын таштап жиберсек, n белгисиздүү кыскарган r теңдемелер системасына ээ болобуз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------- \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (46)$$

Бул теңдеменин $x_1, x_2, \ldots, x_r$ базистик белгисиздерин сол жагында калтырып, калгандарын оң жагына өткөрүп жазсак,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ ---------- \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (47)$$

r белгисиздүү r теңдемелер системасына ээ болобуз.

(41) теңдемелер системасынын $x_1, x_2, ..., x_r, ..., x_n$ чечимдеринин тобу (46), (47) системаларын да канааттандыргандыктан, үчөөнү эквиваленттүү теңдемелер системалары дейбиз. Ал эми алардын чечимдеринин тобун экиге бөлөбүз:

1) $x_1, x_2, ..., x_r$ **- базистик чечимдер;**

2) $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ **- эркин тандалуучу чечимдер.**

Ошентип белгисиздердин саны n менен теңдемелердин саны m бири - бирине барабар эмес (m ≠ n) болгон учурда, (41) теңдемелер системасы биргелешкен болсо, б.а. чыгарууга мүмкүн болсо, анда чечимдердин x_1, x_2, . . . , x_n сыяктуу тобун чексиз көп ыкмалар менен түзүүгө болот, б.а. системанын чексиз көп чечимдери жашайт. Анткени

$x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, ..., $x_n = c_{n-r}$ сыяктуу эркин тандалуучу c_i сандарын (i = 1, 2, …, n-r) каалагандай ала берүүгө болот. Ал эми $x_1, x_2, . . ., x_r$ базистик чечимдери ар бир тандалган c_i сандары үчүн ар башка болуп табылат. Жалпы учурда n≠m болгондо, биргелешкен (41) системасынын чечиминин мамыча матрица

$$X = X(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ x_2(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} \quad (48)$$

көрүнүшүндө табабыз. Ал c_i эркин тандалган (i = 1, 2, …, n-r) сандардан көз каранды болгон $x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n$ сыяктуу чексиз көп топтордон турат.

n≠m болсо да белгисиздердин саны n менен A матрицасынын рангы n = rangA барабар болсо, анда (41) теңдемелер системасы бир гана $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ тобунан турган чечимдерге ээ болот.

(48) көрүнүштөгү чечимдерди табуу үчүн, (41) теңдемелер системасынын (A/B) - кеңейтилген матрицасын элементардык өзгөрүүлөрдү жүргүзүү менен ага окшош $(\tilde{A}/\tilde{B})$ тепкичтүү абалга келтиребиз. rang (A/B) = rang $(\tilde{A}/\tilde{B})$ = rang $A = r$ болгондуктан, бир канча кадамдардан турган элементардык өзгөртүүлөрдөн кийин

$$(A/B) \sim (\tilde{A}/\tilde{B}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & ... & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & ... & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & ... & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & ... & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & ... & \tilde{a}_{rr} & \tilde{a}_{rr+1} & ... & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & ... & \tilde{a}_{1r} & \tilde{b}_1 & -\tilde{a}_{1r+1} & ... & -\tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & ... & \tilde{a}_{2r} & \tilde{b}_2 & -a_{2r+1} & ... & -\tilde{a}_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & ... & \tilde{a}_{rr} & \tilde{b}_r & -\tilde{a}_{rr+1} & ... & -\tilde{a}_{rn} \end{array}\right) \qquad (47^A)$$

тепкичтүү көрүнүшүнө келтиребиз. Акыркы жолчону X матрица мамычасына көбөйтүп теңдештирип,

$$\tilde{a}_{rr} \cdot x_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{rr+1}\, x_{r+1} - ... - \tilde{a}_{rn} x_n \text{ же}$$

$x_r = \dfrac{\widetilde{b}_r}{\widetilde{a}_{rr}} - \dfrac{\widetilde{a}_{rr+1}}{\widetilde{a}_{rr}} x_{r+1} - \ldots - \dfrac{\widetilde{a}_{rn}}{\widetilde{a}_{rr}} x_n$ туюнтулушуна ээ болобуз. Ага

$x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, ..., $x_n = c_{n-r}$ эркин маанилерди берүү менен x_r ди табабыз. Табылган x_r мааниси $(r-1)$ - жолчого койсок, x_{r-1} аныкталат. Ушундай процессти улантуу менен калган $x_{r-2}, \ldots, x_2, x_1$ белгисиздерин табабыз. Натыйжада (48) көрүнүштөгү чечимди тапкан болобуз. Чечимдердин тобун табууда матрицалардагы элементардык өзгөртүүлөрдү пайдалануу Жордан - Гаусстун ыкмасы деп аталат.

Эгерде элементардык өзгөртүүлөрдүн жүрүшүндө (A/B) кеңейтилген матрицасы

$$\left(\widetilde{A}/\widetilde{B}\right) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1r+1} & \ldots & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \ldots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2r+1} & \ldots & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ \widetilde{a}_{r1} & \widetilde{a}_{r2} & \ldots & \widetilde{a}_{rr} & \widetilde{a}_{rr+1} & \ldots & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{b}_{r+1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

көрүнүшүнө өзгөрсө, анда система биргелешпеген болот. Анткени $\widetilde{A}$ матрицасынын $r+1$ - жолчосу жалаң нөлдөрдөн турганы менен, $\widetilde{B}$ мамыча матрицасынын $r+1-$жолчосунда нөлдөн айырмалуу $\widetilde{b}_{r+1}$- саны туруп, аны нөлдөрдүн сызыктуу комбинациясы катарында жазуу мүмкүн эмес.

5.5.3 $n = m$ болгон учур. Крамердин эрежеси

Бул учурда (41) сызыктуу теңдемелер

системасында $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------- \\ a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ (49)

белгисиздер менен теңдемелердин саны тең n болуп, анын матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (50)$$

квадраттык $(n \times n)$- тартиптеги матрица болот.

Эгерде (50) матрицасы кубулбаган $\det A = |A| \neq 0$ же $rangA = n$ болгон матрица болсо, (49) теңдемелер системасы биргелешкен болуп, бир гана $x_1, x_2, ..., x_n$ тобунан турган чечимге ээ.

Чынында эле (49) системасын $A \cdot X = B$ матрицалык көрүнүштө жазсак, $\det A = |A| \neq 0$ болгондуктан, А матрицасына карата тескери A^{-1} матрицасы табылып, матрицалык көрүнүштөгү теңдеменин эки жагын тең A^{-1} ге көбөйтсөк: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B$ же $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ же $X = A^{-1} \cdot B$ же

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^K\right)^T \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (51)$$

чечимдерин табуу эрежесине ээ болобуз.

(51) Крамердин эрежеси деп аталып, анын оң жагындагы амалдарды аткарган соң, конкреттүү бир x_j белгисизи

$x_j = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$ (j=1, 2, …, n) көрүнүшүндө табылат.

j – *мамыча* ↓

Аны $$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta} \qquad (52)$$

көрүнүшүндө эске тутуу ыңгайлуу.

Мында $\Delta = |A|$, ал эми Δ_{x_j} деп $|A|$ аныктагычынын j - мамычасынын элементтерин, бош мүчөлөрдүн В мамычасы менен алмаштыруудан алынган аныктагычты белгилейбиз.

Аныктагычтарды эсептөө убарагерчиликтүү болгондуктан Крамердин эрежеси эки, үч белгисиздүү теңдемелер системаларын чыгарууда ыңгайлуу. Белгисиздердин саны 4 төн көп болгон теңдемелер системаларын чыгарууда элементардык өзгөртүп түзүүлөргө негизделген Жордан – Гаусстун ыкмасын колдонуу ынгайлуу болот. Ал үчүн:

1) (49) теңдемелер системасынын матрицасы А кубулбаган болушу ($rangA = n$ *же* $(|A| \neq 0)$ **керек.**

2) $$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$ **кеңейтилген матрицасы**

түзүлөт.

3) Бир канча кадамдардан турган элементардык өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин $(A|B)$ матрицасы

$$\left(\tilde{A}\middle|\tilde{B}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1\\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2\\ - & - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n\end{array}\right) \text{ же } \left(\tilde{A}\middle|\tilde{B}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_2\\ - & - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n\end{array}\right)$$

көрүнүштөрүнө келтирилип, X мамычасына көбөйтүлүп, теңдештирүү менен $x_1, x_2, \dots, x_n$ белгисиздери табылат.

Эскертүү. *Эгерде n = m болгон учурда, (detA = 0) A матрицасы кубулган матрица болсо да r рангы табылып, rangA = r = rang$(A|B)$ шарты аткарылса, анда анын бир маанилүү чечимдери жашабаганы менен, чексиз көп топтордон турган (48) сыяктуу көп маанилүү чечимдери жашашы мүмкүн.*

14-мисал. $$\begin{cases}2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2,\\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3,\\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1,\\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3\end{cases}$$

теңдемер системасынын бир маанилүү чечимдери жашайбы?

Чгаруу: ▹ Анын матрицасын жана кеңейтилген матрицасын түзөлү.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -3\\ 4 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -4 & -2\end{pmatrix},\quad (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -1 & -3 & 2\\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3\\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3\end{array}\right),$$ теңдеменин аныктагычы

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & -3\\ 4 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -4 & -2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & -7\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -4 & -2\end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix}4 & 1 & -7\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -4 & -2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4 & 0 & -7\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}-$$

$$-3\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=2\cdot 0-0-0+3\cdot 0=0$$

болгондуктан, теңдемелер системасынын матрицасы кубулган болуп, берилген теңдемелер системасы биргелешпеген болот. Демек, бир маанилүү бир гана x_1, x_2, x_3, x_4 тобунан турган чечимге ээ боло албайт. ◁

15-мисал. $\begin{cases}2x_1+ & 5x_2- & 8x_3 & =8,\\ 4x_1+ & 3x_2- & 9x_3 & =9,\\ 2x_1+ & 3x_2- & 5x_3 & =7,\\ x_1+ & 8x_2- & 7x_3 & =12\end{cases}$ үч белгисиздүү төрт теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу: ▷ n≠m болгондуктан анын кеңейтилген матрицасын түзүп, $(A|B)$ жана А матрицаларынын рангдарын аныктайлы.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 5 & -8 & 8\\ 4 & 3 & -9 & 9\\ 2 & 3 & -5 & 7\\ 1 & 8 & -7 & 12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 8 & -7 & 12\\ 4 & 3 & -9 & 9\\ 2 & 3 & -5 & 7\\ 2 & 5 & -8 & 8\end{array}\right)\sim$$

Биринчи жолчо менен төртүнчү жолчону алмаштырып жаздык.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 8 & -7 & 12\\ 0 & -29 & 19 & -39\\ 0 & -13 & 9 & -17\\ 0 & -11 & 6 & -16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 8 & -7 & 12\\ 0 & -3 & 1 & -5\\ 0 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -11 & 6 & -16\end{array}\right)\sim$$

1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «- 4» кө көбөйтүлгөн 1 - жолчону коштук. 3 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп, 4 - жолчого да «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп жаздык. Экинчи кадамда 1, 4 - жолчолорду өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 3 - жолчону, ал эми 3 - жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн 4 - жолчону коштук.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim$$

Бул жердеги кадамдардын башында 1, 3, 4 – жолчолорду өзүндөй калтырып, 2 - жолчону 3- жолчодон кемитип жаздык, андан кийинки кадамда 1- чи, 2 - жолчону өзүндөй калтырып, 3 - жолчону 2 – жолчого «-2» ни көбөйтүп, кошуп жазганбыз, 4 - сүнө «-11» ге көбөйтүлгөн 2 - син коштук. Акыркысында 3 - жолчону 7 ге, 4 - жолчону 29 га бөлүп жибердик. Төртүнчү жолчодон үчүнчүсүн кемитип,

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$$ тепкичтүү көрүнүшүндөгү матрицага ээ болбуз. Мындан $\widetilde{A}$ матрицасында жок дегенде бир

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$ нөлдөн айырмалуу үчүнчү тартиптеги минору табылып, rangA= rang $\widetilde{A}$ =3 болорун билебиз. Ошондой эле кеңейтилген $\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$ матрицасында да

$$M_3=\begin{vmatrix} +8 & -7 & 12 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=20-23=-3\neq 0$$

нөлдөн айырмалуу үчүнчү тартиптеги минору бар. Демек, rang$(A|B)$=rang $(\tilde{A}|\tilde{B})$=3 болуп, Кронекер - Капеллинин теоремасынын rangA = rang$(A|B)$ =3 шарты аткарылат.

Белгисиздердин саны А матрицасынын рангы менен барабар болгондуктан, берилген теңдеменин бир гана x_1, x_2, x_3 тобунан турган чечими жашайт.

Элементардык өзгөртүүнүн жардамы менен берилген теңдемеге эквиваленттүү теңдеме түзсөк,

$$\begin{cases} x_1 + \quad 8x_2 - 7x_3 = \quad 12, \\ -x_2 \quad - \quad 2x_3 = \quad -4, \\ \qquad\qquad x_3 = \quad 1 \end{cases}$$ келип чыгып, $x_3 = 1, \ x_2 = 2, \ x_1 = 1$ чечимдеринин жалгыз тобун табабыз.◁

16-мисал. $$\begin{cases} x_1 + \ 3x_2 + \ 5x_3 + \ 7x_4 + \ 9x_5 = \ 1, \\ x_1 - \ 2x_2 + \ 3x_3 - \ 4x_4 + \ 5x_5 = \ 2, \\ 2x_1 + \ 11x_2 + \ 12x_3 - \ 25x_4 + \ 22x_5 = \ 4 \end{cases}$$ беш белгисиздүү үч теңдемелер системасын чыгаргыла .

Чыгаруу:▷ m = 3, n = 5 же m ≠ n учурдагы теңдеменин

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$ кеңейтилген матрицасынын рангын аныктоодо Жордандын элементардык өзгөртүп түзүүлөр ыкмасын пайдаланып, $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = (\tilde{A}|\tilde{B})$$ ээ болобуз. Бул өзгөртүүлөрдүн биринчи кадамында 1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп, 3 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп жаздык. Экинчи кадамда 1, 2 -

жолчолорду өзүндөй калтырып, 3 - жолчого 2 - син кошуп жибердик. $\widetilde{A}$ матрицасында 3 - тартиптеги минорлордун баары нөлгө барабар, анткени алардын үчүнчү жолчосу жалаң нөлдөрдөн турат. Ал эми 2 - тартиптеги нөлдөн айырмалуу бир канча минорлору бар, мисалы $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$ Ошондуктан rangA = rang $\widetilde{A}$=2 болот.

$\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$ матрицасында нөлдөн айырмалуу 3 - тартиптеги жок дегенде бир минору бар, мисалы $M_3 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = 213 \neq 0.$ Анда

$\operatorname{rang}(A|B) = \operatorname{rang}\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right) = 3$ болуп, rangA $\neq \operatorname{rang}(A|B)$ болгондуктан, берилген теңдеме биргелешпеген же чыгарылышы жок деген жыйынтыкка келебиз.◁

17-мисал. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ төрт белгисиздүү үч теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу: Берилген теңдеменин кеңейтилген

$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$ матрицасын жана теңдемелер системасынын А матрицасынын рангдарын Жордандын ыкмасы боюнча аныктайлы.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim$$

Бул өзгөртүүдө 1- жолчо өзүндөй калып, 2 - жолчодон 2 ге көбөйтүлгөн 1- жолчо кемитилди. 3 - жолчодон 3 кө көбөйтүлгөн 1- жолчо кемитилип жазылды.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$$ Акыркы өзгөртүү кадамында 1, 2 - жолчолору өзүндөй калып, 3 - жолчодон 2 ге көбөйтүлгөн экинчи жолчо кемитилип жазылды.

Ошентип $(A|B)$ матрицасын элементардык өзгөртүүлөрдүн натыйжасында, ага окшош $\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$ матрицасын алдык. $\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$ матрицасынын үчүнчү жолчосу жалаң нөлдөрдөн тургандыктан, анын экинчи тартиптеги минорлору гана нөлдөн айырмалуу боло алат.

Мисалы, $M_2^1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad M_2^2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, ошондуктан

rang $(A|B)$ = rang $\left(\widetilde{A}\middle|\widetilde{B}\right)$ = 2, ал эми $M_2^1 \neq 0$ минору А матрицасына да минор болгондуктан, rangA =rang $\widetilde{A}$ =2 болуп, Кронекер - Капеллинин теоремасынын шарттары аткарылат же берилген система биргелешкен болот. Бирок анын эки белгисиздери гана базистик болуп, калган экөөсү эркин тандалуучу чечимдер болушат. Биз $M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$ миноруна таянып, базистик деп x_2, x_3 базистик белгисиздерине карата берилген теңдемени

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 = 2 - 3x_1 - 4x_2, \\ -6x_3 = -1 + 5x_4 \end{cases}$$ көрүнүшүндөгү эквиваленттүү теңдеме менен алмаштырабыз.

Эркин таңдалуучу чечимдерге $x_1 = c_1$, $x_4 = c_2$ каалагандай сандык маанилерин берип, $x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5c_2)$,

$$x_2 = \frac{1}{2}\left\{-2 + 3c_1 + 4c_2 + 5\left[\frac{1}{6}(1 - 5c_2)\right]\right\} = \frac{1}{12}(-7 + 18c_1 - c_2)$$

чечимдерин табабыз.

Жалпы чечимдер $x_1 = c_1,\ x_2 = \frac{1}{12}(18c_1 - 7 - c_2),\ x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5c_2),\ x_4 = c_2$ сандарынын тобунан куралып, c_1, c_2 сандарынан көз каранды болгон чексиз көп топтордон турат. Ошондуктан чечимди мамыча көрүнүшүндө

$$X = X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} x_1(c_1) \\ x_2(c_1, c_2) \\ x_3(c_2) \\ x_4(c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{1}{12}(18c_1 - 7 - c_2) \\ \frac{1}{6}(1 - 5c_2) \\ c_2 \end{pmatrix}$$ жазууга болот. ◁

18-мисал. $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ -x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу: ▷ Берилген теңдемелер системасынын матрицасынын аныктагычы $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ - 4 – 4 + 4 + 1 + 4 – 16 = -15 $\neq$ 0 болуп, матрицасы кубулбаган болот. Анда анын жалпы чечими x, y, z чечимдеринин тобунан турган бир гана топ болот. Чынында эле Крамердин (52) эрежеси боюнча, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ чечимдерди табууга болот.

Биринчи мамычаны бош мүчөлөрдүн мамычасы менен

алмаштырып, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ = -16 +12 +2 – 3 + 16 – 8 = 3 ээ болобуз.

Экинчи мамычаны бош мүчөлөрдүн мамычасы менен алмаштырып, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ = - 4 + 8 + 6 + 1 + 6 + 32 = 49, үчүнчү мамычаны бош мүчөлөрдүн мамычасы менен алмаштырып,

$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 3 + 16 +2+ 4 – 2 + 12 = 35 сандарын $y = \frac{49}{-15} = -3\frac{4}{15}$, аныктайбыз. Анда $x = \frac{3}{-15} = -\frac{1}{5}$,

$z = -\frac{35}{15} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$ үчтүгү чечимдердин жалгыз гана тобу болот.

§5.6 Бир тектүү сзыктуу теңдемелер системасы

5.6.1 Бир тектүү теңдемелер системасын чечимдери

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & ...+ & a_{1n}x_n = & 0, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & ....+ & a_{2n}x_n = & 0, \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & ...+ & a_{mn}x_n = & 0, \end{cases} \qquad (53)$$

көрүнүшүндщгү n белгисиздүү m теңдемлер системасы бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы деп аталат. (41) теңдемелер системасынан өзгөчөлөнүп, В бош мүчөлөрдүн мамычасы «нөл» мамычадан турат. (53) системасын $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ - теңдемелер

системасынын матрицасы жана X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ белгисиздердин мамыча матрицасы аркылуу матрица көрүнүшүндө AX=0 (53*)

жазып, чечимдерин табуу ыкмаларын карайбыз.

I. Бир тектүү сызыктуу теңдемелердин (53) системасы белгисиздердин саны n жана теңдемелердин саны m кандай болгонуна карабастан биргелешкен болуп, жок дегенде бир тривиалдык (нөлдүк) X= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ чечимге ээ болорун байкайбыз. Чынында эле, бардык $x_i = 0, \ (i = 1,2,...,n)$ маанилерин (53) кө койсок аны теңдештикке айландырат.

Ошентип, (53) бир тектүү системасынын ар качан нөлдүк чечимдери бар экенин билсек да, анын нөлдүк эмес чечимдерин табуу жолдорун издейбиз.

II. Теңдемелердин саны m белгисиздердин саны n ден кичине (m<n) болгон учурда, (53) системасынын A матрицасынын рангы $r = rangA < n, \quad r \neq 0$ санын аныктоо мүмкүн болсо, анда A матрицасынын M_r базистик минору жашайт.

$M_r \neq 0$ базистик минорун A матрицасынынын жогорку сол бурчунда жайгашат деп ойлоп, (53) системасын ага эквиваленттүү болгон кыскартылган

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ ---------- \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (54)$$

бир тектүү эмес теңдемелер системасына өзгөртүп түзөбүз. (54) теңдемелер системасында r сандагы базистик, n - r сандагы эркин чечимдер болгондуктан, (53) системасынын чечимдери да экиге бөлүнүшөт:

1) $x_1, x_2, ..., x_r$ - базистик чечимдер;

2) $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ - эркин тандалуучу чечимдер болушат.

Эркин тандалуучу чечимдерге $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, ..., $x_n = c_{n-r}$ каалагандай сандык маанилерди берсек, анда (53) системасынын нөлдүк эмес чечими $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ сандарынан көз каранды болгон (48) чечимдери сыяктуу,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ x_2(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ ---------- \\ x_r(c_1, c_2, ..., c_{n-1}) \\ c_1 \\ c_2 \\ ---------- \\ c_{n-r} \end{pmatrix}, \qquad (55)$$

мамыча - матрица көрүнүшүндө көрсөтүлгөн чексиз көп n компоненттүү топтордон турат. Бул чечимдердин ар бирин

r + (n – r) = n координаталуу $\vec{X} = \{x_1, x_2, ..., x_r, c_1, c_2, ..., c_{n-r}\}$ вектор - чечим деп түшүнүүгө да болот.

Бир тектүү (53) теңдемелер системасынын (55) көрүнүшүндөгү чексиз көп нөлдөн айырмалуу чечимдери эки касиетке ээ:

1°. Эгерде X^1 жана X^2 чечимдеринин тобу (53) системасынын нөлдүк эмес чечимдери болушса, анда алардын суммасы $X^1 + X^2$ да нөлдүк эмес чечим болот.

▹ Чынында эле (53) системасы (53 *) матрицалык теңдеме көрүнүшүндө $A \cdot X^1 = 0$ жана $A \cdot X^2 = 0$ болсо, анда матрицаларды

көбөйтүүнүн касиети боюнча $A\left(X^1+X^2\right)=AX^1+AX^2=0+0=0$ теңдештигине ээ болуп, X^1+X^2 да чечим болорун көрөбүз. ◁

Бул касиет санактык сандагы чечимдердин суммасы үчүн да туура болот.

2⁰. Эгерде X чечимдеринин тобу (53) системасынын нөлдүк эмес чечими болсо, анда $\forall\lambda\in R$ саны үчүн $\lambda\cdot X=\left\{\lambda x_1,\lambda x_2,\ ...,\lambda x_n\right\}$ чечимдеринин тобу да ага чечим болот.

Матрицаларды λ санына көбөйтүү эрежесин эстесек, (53) төн бул $A(\lambda\cdot X)=\lambda\cdot AX=\lambda\cdot 0=0$ касиеттин туура экендигин көрсөткөн болобуз.

5.6.2 Бир текчүү теңдемелер системасынын чечимдеринин сызыктуу мейкиндиги

Бир текчүү (53) сызыктуу теңдемелер системасы, $r<n$ учурда n координаталуу чексиз көп (55) көрүнүшүндөгү мамыча – матрица же n координаталуу чексиз көп вектор - чечимдерге ээ болушу мүмкүн экенин көрдүк. Чексиз көп вектор - чечимдеринин (мамыча - матрица чечимдерин) көптүгүн V тамгасы менен белгилейли.

Чечимдердин суммасы да, λ чыныгы санына көбөйтүндүсү да чечимдер болушкандыктан, V көптүгүндө кошуу жана λ чыныгы санына көбөйтүү амалдары аткарылып, ушул амалдарга карата сызыктуу мейкиндиктин бардык шарттарын канааттандырышат.

Чынында эле X,X^1,X^2,X^3 каалагандай вектор - чечимдер, ал эми λ,μ каалагандай чыныгы сандар болушса, чечимдердин жогорудагы эки $1^0,2^0$ касиеттери боюнча

$X^1,X^2\in V\Rightarrow X^1+X^2\in V;\ X\in V\Rightarrow\lambda X\in V$ болуп, төмөндөгү

сызыктуулук шарттары да аткарылат:

1) $\left(X^1+X^2\right)+X^3=X^1+\left(X^2+X^3\right)$- ассоциативдүү;

2) $X^1 + X^2 = X^2 + X^1$ – коммутативдүү;

3) V көптүгүндө нөл элементи болгон тривиалдык $0 = \{0,0,...,0\}$

$(n$ компоненттүү) чечими жашап, каалагандай чечимге кошсок $X + 0 = X$ шартын канааттандырат;

4) V көптүгүндөгү каалагандай X чечимине карама - каршы « $-X$ » элементи же чечими табылып, $X - X = 0$ болот;

5) $\lambda(X^1 + X^2) = \lambda X^1 + \lambda X^2$; 7) $\lambda(\mu X) = (\lambda \mu)X$;

6) $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$; 8) $E \cdot X = X$ боло тургандай «бирдик» $E = 1 = \left\{1,\ 1,\ ...\ ,1\right\}$ $(n$ компоненттүү) элементи жашайт.

Ошондуктан $r = rangA < n,\ r \neq 0$ болгон учурда, (53) теңдемелер системасынын бардык нөлдүк жана нөлдүк эмес чечимдеринин көптүгүн V сызыктуу мейкиндиги деп белгилейбиз. Эгерде V мейкиндигинин элементи болгон ар бир X чечимин n координаталуу вектор деп ойлосок, V ны $(n-r)-$ ченемдүү вектордук мейкиндик катары түшүнсө болот. Анткени $n-r$ сандагы эркин тандалган $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, ..., x_n = c_{n-r}$ чечимдери аркылуу r сандагы базистик $x_1, x_2, ..., x_r$ чечимдеринин ар бири сызыктуу туюнтулат же каалагандай $X = \{x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ...x_n\}$ чечими

$$x_1 = \lambda_{11}c_1 + \lambda_{12}c_2 + ... + \lambda_{1(n-r)}c_{n-r},$$

$$x_2 = \lambda_{21}c_1 + \lambda_{22}c_2 + ... + \lambda_{2(n-r)}c_{n-r}, \qquad (56)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_r = \lambda_{r1}c_1 + \lambda_{r2}c_2 + ... + \lambda_{r(n-r)}c_{n-r},$$

$$x_{r+1} = c_1,$$

$$x_{r+2} = c_2, \quad \left(\lambda_{ij} \in R,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ r;\quad j = 1,\ 2,\ ...,\ n-r\right)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = c_{n-r}$$

көрүнүшүндө табылып, жалпы учурда $n-r$ сандагы эркин тандалган сандардан гана көз каранды деп эсептейбиз $X = X\left(c_1, c_2, ..., c_{n-r}\right)$.

$\left(n-r\right)$ ченемдүү V сызыктуу мейкиндигинин каноникалык базиси деп $n-r$ сандагы

$$E_1 = \left\{1,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 0\right\}$$
$$E_2 = \left\{0,\ \ 1,\ \ ...,\ \ 0\right\} \qquad (57)$$
$$E_{n-r} = \left\{0,\ \ 0\ \ ,...,\ \ 1\right\}$$

ар бири $\left(n-r\right)$ компоненттерден куралган, вектор - чечимдерин алабыз.

(57) каноникалык базисинен эркин тандалган $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ чечимдерин, кезеги менен бирөөсүн 1, калгандары баары нөл деп алуу менен түздүк.

V мейкиндигин каноникалык базисин түзгөн (57) чечимдеринин жардамы менен, (56) чечимдеринин арасынан n-r сандагы төмөндөгүдөй $X^1, X^2, ..., X^{n-r}$ чечимдерин бөлүп алууга болот:

$$X^1 = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X^{n-r} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,n-r} \\ \lambda_{2,n-r} \\ \vdots \\ \lambda_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (58)$$

Бөлүп алынган (58) чечимдери эки касиетке ээ:

1^0. $X^1, X^2, ..., X^{n-r}$ **сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшөт.**

2^0. (53) бир тектүү теңдемелер системасынын каалагандай X чечими, чечимдердин (58) сызыктуу комбинациясы катарында туюнтулат же каалагандай X чечимин (58) чечимдери боюнча ажыратып жазууга болот.

Чынында эле, чечимдердин (58) сызыктуу комбинациясы деп, (56) каалагандай X чечимин алууга болот. Анда $X = 0$ тривиалдык чечими $c_1 = c_2 = ... = c_{n-r} = 0$ болгондо гана табылары келип чыгып, (58) сызыктуу көз каранды эмес системаны түзөрү белгилүү болот.

Ошондой эле (53) бир тектүү теңдемелер системасынын каалагандай X чечими деп, (56) көрүнүштү эсептесек, анда бул чечимди (58) чечимдеринин $X = c_1 X^1 + c_2 X^2 + ... + c_{n-r} X^{n-r}$ (59)

сызыктуу комбинациясы катарында жазууга болот.

5.6.1 Аныктама. *Бир тектүү (53) теңдемелер системасынын* 1^0 *жана* 2^0 *шарттарын канааттандырган, каалагандай саны* $n-r$ *болгон* X^1, X^2, ..., X^{n-r} *топтордон турган чечимдердин тобу, бир тектүү (53) теңдемелер системасынын чечимдеринин фундаменталдык системасы деп аталышат.*

Ошентип $r = rangA < n,\ r \neq 0$ болгон учурда чечимдердин фундаменталдык системасы табылып, бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чечими фундаменталдык система аркылуу (59) көрүнүшүндө туюнтулат. (59) туюнтуусун векторлорду базистик система боюнча ажыратып жазууга салыштырса болот.

19-мисал.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

теңдемелер системасынын чечимдеринин фундаменталдык системасын аныктап, жалпы чечимин тапкыла.

Чыгаруу: ▹ Берилген $n = 5$ белгисиздүү $m = 4$ теңдемелер системасынын матрицасынын рангын аныктайлы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Биринчи жолчо менен 4 - жолчону алмаштырып жаздык. Кийинки кадамда 1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчодон 2 ге көбөйтүлгөн 1 - жолчону кемитип, 3- жолчодон 1 - жолчону кемитип, 4 – жолчодон «- 4» кө көбөйтүлгөн 1- жолчону кемитип жазабыз. Натыйжада

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix}$ матрицасына ээ болобуз. Анын 3, 4 - жолчолорун экиге бөлүп жиберген соң, алардан экинчи жолчону кемитсек, анда

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ келип чыгып, $r = rangA = rang\widetilde{A} = 2 < n = 5$ болот.

Демек, базистик минор деп $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ алсак, берилген тендеменин x_1, x_2 базистик чечимдери жана x_3, x_4, x_5 эркин тандалуучу чечимдери болот. Тендемени базистик чечимдерге карата кыскартып жазганда

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 \end{cases}$ келип чыгып, эркин чечимдерге

$x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_2$ каалагандай сандык маанилерди берсек, x_1, x_2 белгисиздери табылат. Ал үчүн 1- тендемени 2 ге көбөйтүп экинчисине кошуп,

$$8x_1 = 19c_1 + 3c_2 - 4c_3, \quad \textit{же}$$
$$x_1 = \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3$$

ээ болобуз. Аны биринчи тендемеге коюп,

$$x_2 = -3\left(\frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right) + 8c_1 - 2c_2 - c_3 = \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3$$

жалпы чечимди табабыз. Аны

$X = \begin{pmatrix} \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ мамыча көрүнүшүндө жазып, c_1, c_2, c_3 эркин тандалган сандарына кезеги менен чечимдердин үч ченемдүү сызыктуу мейкиндигинин каноникалык базисинин

$E_1 = \{1, 0, 0\}$, $E_2 = \{0, 1, 0\}$, $E_3 = \{0, 0, 1\}$ компоненттеринин маанилерин берип, жалпы чечимден

$$X^1 = \begin{pmatrix} 19 \\ \frac{19}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

чечимдердин фундаменталдык системасын бөлүп алабыз. Жалпы чечим бул чечимдердин фундаменталдык системасы боюнча $X = c_1 X^1 + c_2 X^2 + c_3 X^3$ көрүнүшүндө сызыктуу комбинация болуп туюнтулат, б.а. чечимдердин фундаменталдык системасы боюнча ушундай көрүнүштө ажырайт. Мындай ажыроо, векторлордун мейкиндигиндеги каалагандай векторду мейкиндиктин базиси боюнча ажыратып жазууга окшош көрүнүш экендигин дагы бир жолу эскертип кетебиз.

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999. - 88 с.

2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.

3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1- 2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.

4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп»,1971. - 120 б.

5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989. - 9,75 п.л.

6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007. - 230 б.

7. Усубакунов Р. Дифференциальдык жана интегралдык эсептөөлөр курсу (1,2 – бөлүктөр). – Фрунзе: «Мектеп»

8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для втузов. – Москва: «Наука», 1981. - 464 с.

9. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих. – Москва: «Наука», 1970. - 560 с.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968. - 497 с.

11. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1. – Москва: «УРСС», 2002. - 328 б.

12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука», 1974. - 450 с.

13. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990. - 100 с.

14. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым та