11 – лекция:

ФУНКЦИЯЛАР

Функцияларды аныктоо

6.1.1 Чагылтуу аппараттарын түзүү

I. Чагылтуу түшүнүгү. Чөйрөдө болуп жаткан анча тааныш эмес кубулуштарды жана окуяларды, өзүбүзгө тааныш көптүктөрдүн элементтерине тиешелеш коюп, салыштырып үйрөнүү мүмкүнчүлүгүн түзгөн мыйзам - эрежелер, математикада чагылтуу аппараты же амалы катарында түшүндүрүлүп келет. Чагылтуу аппараттарынын жардамы менен кубулуштарды үйрөнүүдө чоң катачылыктарга жол бербөө үчүн, чагылтуу эрежесине **негизги шарт** коюлат. Айталы F чагылтуу эрежеси X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтсын дейли, анда F чагылтуусуна *“ X көптүгүнүн ар бир x элементине, Y көптүгүнөн бирден гана y элементин тиешелеш коёт ”* – деген **негизги шарт** коюлат.

Чынында эле X көптүгүндөгү бир x кубулушуна (элементине), Y көптүгүндөгү $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ сыяктуу ар түрдүү көп маанидеги элестер (элементтер) тиешелеш коюлса, анда x кубулушун

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ элестеринин кайсы бирине салыштырып үйрөнөрүбүз белгисиз болуп калат. Бул учурда чагылтуу аппаратын таанып билүү каражаты катарында колдонуу мүмкүн эмес. Ошондуктан **негизги шартты** канааттандырган чагылтууларга гана токтолуп, аларды салыштырууга таянган таануу процессинде аз ката кетирүүчү математикалык таануу каражаты деп эсептейбиз. Мындан ары чагылтуу деп, **негизги шартты** канааттандырган чагылтууларды гана түшүнөбүз.

Мындай чагылтуулар эки түргө бөлүнүшөт:

1. Өз ара бир маанилүү чагылтуулар. Бул чагылтууда X көптүгүнүн ар бир x элементинин жалгыз өзүнө гана тиешелеш коюлган, Y көптүгүнөн бирден гана y элементи табылат жана тескерисинче Y көптүгүндөгү ар бир y элементинин жалгыз өзүнө гана тиешелеш коюлган, X көптүгүндө да бирден гана x элементи болот. Бул учурда эки көптүктөрдүн элементтеринин арасында өз ара бир

маанилүү тиешелештик орнотулуп, Y көптүгүн X көптүгүнө тескери чагылтуу да орун алып, ал да **негизги шартты канааттандырат.** F чагылтуусуна тескери чагылтууну F^{-1} деп белгилеп, символикалык көрүнүштөрдө

$F: X \to Y$, $F^{-1}: Y \to X$ же $X \overset{F}{\leftrightarrow} Y$ жазып түшүндүрөбүз.

2. Бир тараптуу бир маанилүү чагылтуулар. Чагылтылган тараптан гана бир маанилүү болгон чагылтуулар да **негизги шартты** канааттандырышып, таанып билүү практикасында колдонууга жарамдуу болушат. Анткени мындай чагылтууда X көптүгүндөгү ар түрдүү $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (элементтерине) кубулуштарына, Y көптүгүнөн бирден гана y_k элементи тиешелеш коюлуп, бир x_i кубулушу $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, бир гана y_k ке чагылып же салыштырылып, **негизги шарт** бузулбайт. Бул учурда X теги айрым $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ кубулуштары Y көптүгүндөгү бир эле y_k элементине чагылып калышы мүмкүн. Анда аларды элестери окшош же теңдеш кубулуштар катары баалоого болот. Бирок, бул учурда тескери F^{-1} чагылтуусу **негизги шартты** канааттандырбайт, анткени тескери чагылтууда бир эле y_k кубулушунун бир канча x_i сыяктуу элестери болуп, алардын кайсынысын y_k кубулушун мүнөздөө үчүн аларыбызды билбейбиз. Демек, бир тараптуу бир маанилүү чагылтуулардын тескериси каралбайт же жашабайт деп айтылат.

Математикада чагылтууга катышып жаткан көптүктөрдүн түзүлүү структурасына (табыятына) карап, чагылтууларга өз – өзүнчө аттар берилет.

▪ Сан көптүктөрүн сан көптүктөрүнө чагылтуучу эреже - мыйзамдар **функция** деп аталышат.

▪ Сандардан башка ар кандай элементтерден турган көптүктөрдү, сан көптүктөрүнө чагылтуучу эреже – мыйзамдар **функционал** деп аталышат.

▪ Сандардан башка ар кандай элементтүү көптүктөрдү, өз ара бири – бирине чагылтуучу эреже – мыйзамдарды **оператор** деп коюшат.

Жалпы учурда, чагылтууну кеңири мааниде оператор деп атоого да болот, анткени жалпы учурда сан көптүктөрү деле ар кандай

элементтүү көптүктөрдүн бири болот. Бирок көбүнчө чөйрө тааануу процесси сандарга салыштырылып таанылгандыктан, алардагы чагылтууларды функционал менен оператордон айырмалап функция деп атайбыз.

Мисалдар

1. Токтогул ГЭСинин суу көлмөсүндө топтолгон суунун көлөмүн аныктоо үчүн, атайын ченөө эрежеси киргизилген. Ал үчүн көлмөнүн түбүнөн жогору карай, R чыныгы сандарынын көптүгүнөн алынган 0 санынан баштап, 19,7 миллиард санына чейинки сандар жазылган сызыктар менен белгиленген ченегич орнотулган. Суунун ченегичтеги сан жазылган сызыкка тийүүсүнө карап, суунун көлөмү аныкталат.

Ошентип көлмөдөгү тааныуга татаал болгон суунун көлөмдөрүнүн көптүгүн, атайын курулган ченегич эреже – мыйзамынын жардамы менен R сандарынын $[0\ ,\ 19{,}7$ млрд.$]$ сегментине чагылтып, суунун көлөмдөрүнүн көптүгү сан көптүгүнө чагылтылгандыктан, ченегич эрежесин функционал деп эсептөөгө болот. Ал өз ара бир маанилүү функционал болуп, тескериси жашайт. Анткени ченегичтеги ар бир санга бир гана суу көлөмү туура келет (жана тескерисинче).

2. Векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежесине таянып, каалагандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ эки түгөй векторлордон турган көптүктү, R чыныгы сандарына чагылтууну ишке ашырууга болот.

Чынында эле, скалярдык көбөйтүү эрежеси боюнча

$\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})$ болгондуктан, векторлордун ар бир түгөйүнө $\{\vec{a}, \vec{b}\} \to \alpha$, бир гана α чыныгы саны ($\alpha \in$ R) туура келип, эки өзгөрүлмө векторлордун түгөйүн сан көптүгүнө чагылдырган функционал келип чыгат. Бул эреже менен ишке ашырылган функционалдын тескериси жашабайт же тескериси колдонууга жараксыз болот, анткени скалярдык көбөйтүндүлөрү барабар болгон түгөй векторлор көп кездешет. Ошондуктан скалярдык көбөйтүү эки өзгөрүлмө векторлордун түгөйүн бир чыныгы санга чагылтуучу, бир тараптуу бир маанилүү функционал гана боло алат.

3. Адамдын колу менен жасалган таразаны эреже – мыйзам катарында кабыл алып, өндүрүлгөн түшүмдөрдүн өлчөмдөрүнүн көптүгүн чыныгы сандарга салыштырып, үйрөнүүгө болот.

Чынында эле, айдоо аянттарынан жыйналган ар түрдүү өсүмдүктөрдүн түшүмдөрү жөнүндө жеткиликтүү маалымат алуу үчүн, аларды таразага тартып, чыныгы сандарга чагылтып салыштырып көрөбүз. Таразанын таблосуна чыккан санга карап, өсүмдүктөрдүн түрүнө жараша, кайсы талаадан кандай түшүм алганыбызды аныктап тааныйбыз. Натыйжада “тараза” эрежеси түшүмдөрдүн көптүгүн чыныгы сандарга чагылтуучу функционал экендигин баамдайбыз. Бул бир тараптуу бир маанилүү функционал болот, анткени анын тескерисин тааныу процессинде бир мааниде түшүнүү мүмкүн эмес. Себеби ар кандай айдоо талааларынан алынган, ар түрдүү өсүмдүктөрдүн түшүмдөрү бирдей болуп калган учурда, алардын баары бир чыныгы санга туура келгендиктен, ал чыныгы сан боюнча кайсы айдоо талаасындагы, кандай өсүмдүктөрдүн түшүмү жөнүндө сөз болуп жаткандыгын толук биле албайбыз.

4. Вектордук көбөйтүү эрежеси боюнча, каалагандай түгөй $\vec{a}, \vec{b}$ векторлорунун көптүгүн, кандайдыр бир $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ векторлорунун көптүгүнө чагылтууга болот $\{\vec{a}, \vec{b}\} \rightarrow \{\vec{c}\}$.

Чынында эле, вектордук көбөйтүүнүн эрежесине ылайык, бир тегиздикте жатышкан каалагандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ түгөй векторлору менен оң үчтүктү түзүп, аларга перпендикуляр жайгашкан $\vec{c}$ векторунун арасында бир тараптуу гана бир маанилүү тиешелештикти орнотуу мүмкүн, анткени вектордук көбөйтүндүлөрү барабар болгон көптөгөн түгөй векторлор болгондуктан, тескери чагылтуу **негизги шартты** канааттандырбайт. Мындай чагылтуу: түгөй векторлордун көптүгүн, векторлордун көптүгүнө чагылткан, бир тараптуу бир маанилүү оператор болуп эсептелет.

5. $F(x) = \int f(x)dx + C$ анык эмес интегралын эсептөө эрежесинин жардамы менен, ар кандай үзгүлтүксүз $f(x)$ функцияларын туракту санга чейинки тактыкта $F(x) - C$ функцияларына чагылтууга болот. Мында

С $-$ $constanta$ (каалагандай туракту сан). Ошентип, бул чагылтуу функцияларды функцияларга $\{f(x)\} \leftrightarrow \{F(x) - C\}$ туракту санга чейинки тактыкта, өз ара бир маанилүү чагылтуучу оператор болот.

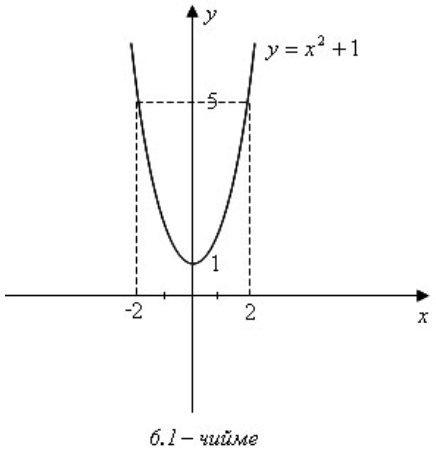
Ошентип керектөөгө жараша таанып билүү процессинде колдонулган айла – амалдардын бири катарында, математикалык чагылтуу аппаратын аныктаган эреже – мыйзамдарын түзүү, ойлоп табуу изденүүчүлүгү улам өнүгүп кете бермекчи.

6.1.2 Функция жана аны түзүү жолдору

Функция кыргызча көз карандылык байланышы деген маанини түшүндүрүп, эки сан көптүктөрүнүн арасындагы чагылтуунун жардамы менен орнотулган көз карандылык байланышын аныктаган эреже – мыйзам катарында кабыл алынат. Негизги шартты канааттандырган чагылтуу аппаратынын, сандык көптүктөрдү бири – бирине чагылтуучу учуру катарында каралуучу функция түшүнүгү, чөйрө тааныу процессинде кеңири колдонушка ээ болгондуктан, ага өзүнчө аныктама бере кетели.

- **Функциянын аныктамасы:**

Айталы X жана Y сан көптүктөрү берилсин дейли. Эгерде кандайдыр бир f эреже – мыйзамы жашап, анын жардамы менен X көптүгүнүн ар бир x элементине (санына) Y көптүгүнөн бирден гана y элементин (санын) тиешелеш коюучу байланышты орнотуу мүмкүн болсо, анда бул f эреже – мыйзамын X көптүгүндө аныкталган функция деп айтабыз.



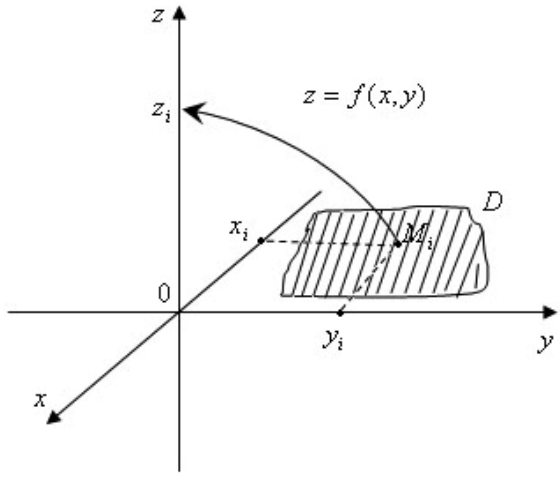
6.1 – чийме

Функцияны $y = f(x)$ символу менен белгилеп: “ игрэк барабар эф икстен ” – деп окуйбуз (орусчасы эф от икс). Бул жазылыш “эф икстен көз каранды” – деген сөздүн кыскача белгилениши катарында кабыл алынган. Анткени эркин алынган x ке карата, ага

тиешелеш коюлган y элеси аныкталгандыктан, x ти көз карандысыз чоңдук же функциянын аргументи, ал эми y ти көз каранды чоңдук же функциянын мааниси деп атайбыз. Ошентип X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтуучу $y = f(x)$ функциясы, бул эки көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланышын орнотуучу эреже – мыйзам болуп эсептелет. X көптүгү функциянын аныкталуу области, Y көптүгү функциянын өзгөрүү области деп аталышат. Функцияны f тамгасынан башка каалагандай чоң же кичине латын, орус, кыргыз тамгалары менен белгилей берүүгө болот. Бирок анын аргументин жана маанисин кичине тамгалар менен белгилеп келебиз. Мисалы $y = \ell(x)$, $y = \mathrm{g}(z)$, $y = \mathrm{a}(l)$, $u = F(t, \mathrm{a}, \mathrm{c})$ ж.б.у.с.

Мисалы “Берилген санды квадратка көтөрүп, бирди кош” эреже – мыйзамы менен $y = x^2 + 1$ көрүнүшүндө жазылган квадраттык функция $X = R \equiv]-\infty, +\infty[$ чыныгы сандарынын көптүгүн

Y= $R_1 \equiv [1\ , +\infty[$ сандарынын көптүгүнө бир тараптуу бир маанилүү чагылтат. Анткени анын тескери чагылтуусу $x = \pm\sqrt{y-1}$ эрежеси менен жүргөндүктөн, бир y санына эки $\pm x$ тер тиешелеш коюлуп, чагылтуунун негизги шарты аткарылбайт. Чынында эле X көптүгү деп Ox огун, Y көптүгү деп Oy огун алып, берилген функцияны декарттык координаталар системасында графикте көрсөтсөк (6.1 - чийме), анда бүтүндөй Ox огундагы чекиттер, Oy огунун оң бөлүгүндөгү $[1\ , +\infty[$ жарым сегменттин чекиттерине бир маанилүү чагылганын көрөбүз. Мында $x_1 = -2$ саны бир гана $y_1 = 5$ санына , $x_2 = 2$ саны да бир гана (жалгыз) $y_2 = 5$ санына чагылып, **негизги шарт** же бир маанилүүлүк сакталат. Бирок тескери Y ›X чагылтуусу аткарылбайт, анткени Y көптүгүндөгү бир $y = 5$ саны, X көптүгүндөгү эки $x_1 = -2,\ x_2 = 2$ сандарына чагылып, 5 санын чагылгандан кийинки элеси катарында “-2, 2” сандарынын



6.2 – чийме

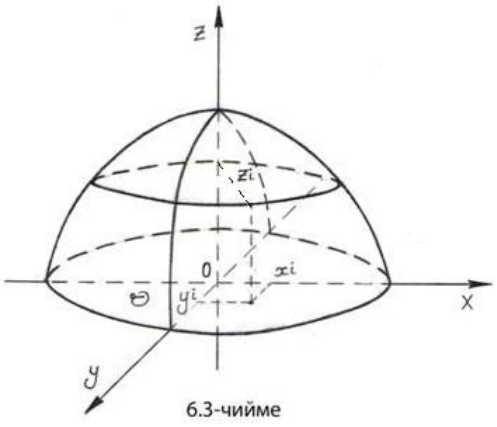
кимисин алуу керек экендиги белгисиз кала берет. Ошондой болсо да мындай эки маанилүүлүктү, X= $]-\infty, +\infty[$ аралыгын $X_1 =]-\infty, 0]$ жана $X_2 = [0, +\infty[$ эки аралыктарына бөлүү менен жоюуга болот. Ал үчүн $y = x^2 + 1$ функциясын

$X_1 \leftrightarrow Y$ жана $X_2 \leftrightarrow Y$ өз ара бир маанилүү чагылтууларын, өз өзүнчө ишке ашыруучу эки башка функциялар катарында түшүнүү керек. Бул эки башка функциялар өздөрүнчө ар бир белгиге карата $x = -\sqrt{y+1}$ жана $x = +\sqrt{y+1}$ эки тескери функцияларына ээ болушат.

Эгерде X, Y көптүктөрү бир өлчөмдүү (сызыктуу) R мейкиндигинде жайгашышса (X,Y $\subset R$), анда $y = f(x)$ бир өзгөрүлмөлүү функция деп аталат. Ал эми Y сызыктуу R мейкиндигинде жайгашканы менен:

1. X көптүгү (области) эки өлчөмдүү R^2 тегиздигинде болсо (X $\subset R^2$), эки өзгөрүлмөлүү функция (1 – бөл., §1.2 ни кара);
2. X области үч өлчөмдүү R^3 мейкиндигинде жайгашса (X$\subset R^3$), үч өзгөрүлмөлүү функция;
3. Жалпы учурда X$\subset R^n$ болсо, анда n өзгөрүлмөлүү функция

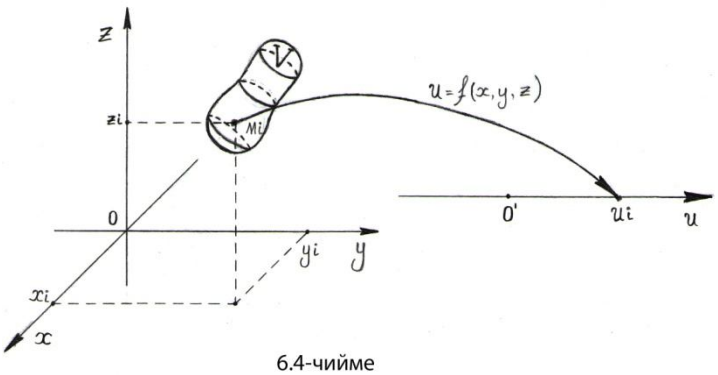
деп аталышат. Жогорудагы мисалда бир өзгөрүлмөлүү $y = x^2 + 1$ функциясы каралды.



6.3-чийме

Эки өзгөрүлмөлүү функциянын чагылтуу механизмин, үч өлчөмдүү декарттык координаталар системасында көрсөтөлү (6.2 – чийме). Чагылуучу көптүк (область) катарында Oxy тегиздигинде жайгашкан D областын, ал эми D областынын чагылткандан кийинки элеси деп Oz аппликата огундагы чекиттерди (R сандарын) алалы. $D \subset R^2$ болгондуктан, анын ар бир M чекити $(x; y)$ координаталарына ээ, ошондуктан бул областта аныкталган функция же чагылтуу эреже – мыйзамы $z = f(M) = f(x, y)$ көрүнүшүндө жазылат. Чагылтуу механизми D областындагы ар бир $M_i(x_i; y_i)$ чекитине, Oz огунан бир

гана z_i чекитин тиешелеш коюу аркылуу ишке ашырылат. Мейкиндиктеги координаталары $(x_i; y_i; z_i)$ болгон чекиттердин көптүгү, $z = f(x, y)$ функциясына график болгон бетти түзөт. Мисалы



6.4-чийме

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы, Oxy тегиздигиндеги борбору О чекити, радиусу r =1 болгон тегеректин ичин элестеткен

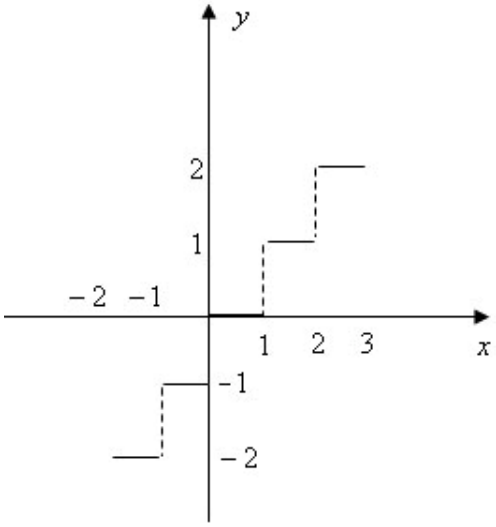
D = $\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1, (x, y) \in R^2 \}$ областын, Oz огунда жайгашкан $[0, 1]$ сегментиндеги чыныгы сандарга чагылтып, 6.3 - чиймедей элестетилип сүрөттөлөт.

Үч өзгөрүлмөлүү функция R^3 мейкиндигинде жайгашкан обьекттерди (областтарды), R чыныгы сандарына чагылдырат. Чагылуучу область V десек, анын чекиттери $M(x; y; z)$ үч координаталарына ээ болгондуктан, чагылтуу эреже – мыйзамы болгон үч өзгөрүлмөлүү функцияны $u = f(M) = f(x, y, z)$ көрүнүшүндө жазууга болот. $Oxyz$ үч өлчөмдүү декарттык координаталар системасында жайгашкан V областынын чагылтылгандан кийинки элеси – чыныгы сандар болгондуктан, аларды башка бир $O'u$ чыныгы сандарынын огунда сүрөттөп, үч өзгөрүлмөлүү функцияны V областынын ар бир $M_i(x_i; y_i; z_i)$ чекитин, $O'u$ сан огундагы бирден гана u_i чекитине тиешелеш коюучу механизм катарында түшүнөбүз (6.4 – чийме). Жалпы учурда R^n мейкиндигинде жайгашкан V областындагы ар бир М чекитинин n сандагы координаталары $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ десек, анда n өзгөрүлмөлүү функцияны

$u = f(M) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ көрүнүшүндө жаза алабыз. Бул чагылтуу эреже – мыйзамы болгон n өзгөрүлмөлүү функция, V областын R чыныгы сандарынын көптүгүнө тиешелеш коюучу көз карандылык байланышын орнотот. Кээде жазылуу ыңгайына карап, V областынын чекиттерин n координаталуу $x = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$

көрүнүштө деп ойлоп, n өзгөрүлмөлүү функцияны $y = f(x)$ түрүндө жаза беребиз. n =2 болсо $y = f(x)$ же $y = f(x_1, x_2)$; $n = 3$ болсо $y = f(x)$) же $y = f(x_1, x_2, x_3)$ ж.б.у.с. Ошентип канча өзгөрүлмөлүү функция болсо да, аныкталуу областы (чагылуучу область) көп өлчөмдүү болгону менен, өзгөрүү областы (чагылтылгандан кийинки элеси) бир өлчөмдүү R мейкиндигиндеги сандар болушуп ($y \epsilon$R), көп ченемдүү мейкиндиктеги абалдарды кадимки чыныгы сандарга салыштырып үйрөнүүчү математикалык аппарат болуп эсептелишет.

Функцияларды төмөндөгүдөй ыкмаларда түзүүгө болот:

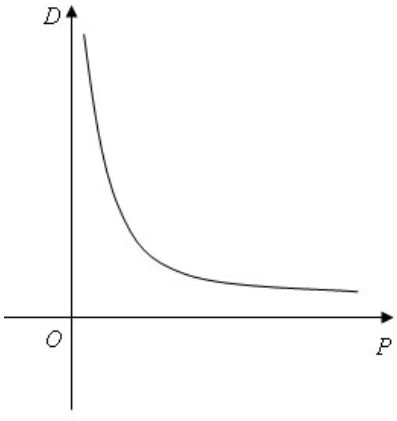


6.5 – чийме

- **Аналитикалык ыкма.** Бул ыкмада X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы көз карандылык байланыштар, эреже – мыйзам катарында эсептелген формулалар аркылуу ишке ашырылат.

Мисалы $y = sinx,\ u = (yz)^3 + \frac{\sqrt{x}}{y^2 - x}$.

- **Кара сөз жүзүндөгү ыкма.** Айрым учурларда функцияны формула менен берүүгө мүмкүн болбой, ага кошумча кара сөз менен түшүндүрмө берүүгө туура келет. Айрыкча жаңы формулаларга сөзсүз кара сөздүү баяндамалар жазылат. Мисалы x санына, анын бүтүн бөлүгүн тиешелеш коюучу көз карандылык байланышын формула менен жазып көрсөтө албайбыз. Ошондуктан ага



6.6 – чийме

$y = [x\,] = \mathrm{E}(x)$ (“x тин бүтүн бөлүгү” – деп окулат), көрүнүшүндөгү түшүндүрмө кара сөздү коштоп жазабыз. Бул функциянын графиги тепкичтүү көрүнүштө болот (6.5 – чийме).

- **Графиктик ыкма.** Эки көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык эреже – мыйзамдарын чийилген графиктер аркылуу

орнотууга да болот. Мисалы адамдын жүрөгүн иштөө ыргагы кардиограмма сызыгы менен аныкталып, врач ошол сызыкка карап жүрөктүн абалын баалайт. Иш жүзүндө жүрөктүн иштөө абалдарынын көптүгү менен, кардиограмма сызыгында көрсөтүлгөн өлчөм сандардын арасында тиешелештик же көз карандылык байланышын аныктоочу функция орнотулган болот. Ошондой эле экономикалык көрсөткүчтөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарын (функцияны) графикте көрсөтүү ыңгайлуу. Мисалы D – керектөөлөрдүн көптүгү менен, P өндүрүлгөн товарлардын көптүгүнүн арасындагы көз карандылык байланыштарын 6.6 – чиймедеги графикте көрсөтүү менен, товарлардын саны көбөйгөн сайын, аны керектөө азайарын дароо байкайбыз.

- **Таблицалык ыкма.** Бул ыкма менен чектүү сандагы элементтери бар көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарын орноткон функцияларды берүү ыңгайлуу. Мындай учурда функцияны эч бир универсалдуу формулада, кара сөздө,

Жыл / Товар	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Сүт(тонна)	57	56,8	56,9	62	63	74
Эт(тонна)	20	15	18	21	22	23,8

графикте берүү мүмкүнчүлүктөрү болбой калат же ыңгайсыз болушу мүмкүн. Мисалы беш жылдык ичинде фермада өндүрүлгөн товарлардын түрлөрүнүн көлөмдөрүн формула менен көрсөтүү мүмкүн эмес, же графикте көрсөтүү ыңгайсыз. Ошондуктан аны таблицада гана көрсөтө алабыз:

Бул таблицада $(жылдар) = f(товар) = f(сүт, эт)$ көрүнүшүндөгү эки өзгөрүлмөлүү функция көрсөтүлгөн.

- **Айкын эмес көрүнүштө жазуу ыкмасы.** Функцияларды аналитикалык ыкмалар менен жазууда x, y өзгөрүлмөлөрүн бири – бири менен айкын туюнтуу татаал болгон учурлар кездешет. Мисалы $x^3 \cdot siny = e^{xy} - 1$ теңдештигинен x ти же y ти табуу, же бири – бири менен айкын туюнтуу кыйын. Мындай туюнтма көрүнүшүндөгү эреже –

мыйзамдары менен берилген эки өзгөрүлмөлөрдүн көз карандылыгын, $F(x,y)=0$ көрүнүшүндө жазып, айкын эмес көрүнүшүндө берилген функция деп айтабыз. Айкын берилген бир өзгөрүлмөлүү функцияны да $y=f(x) \Leftrightarrow f(x)-y=0 \Leftrightarrow F(x,y)=0$ айкын эмес көрүнүштө жазууга болот. Мисалы, жогорудагы теңдештик менен берилген эки x,y өзгөрүлмөлөрүнүн арасындагы көз карандылык байланышын

$F(x,y) \equiv x^3 \cdot siny - e^{xy} + 1 = 0$, көрүнүшүндөгү айкын эмес функция деп эсептейбиз. Ошондой эле айкын көрүнүштө берилген бир өзгөрүлмөлүү $y=x^4-7$ функциясын да, $F(x,y) \equiv y - x^4 - 7 = 0$ көрүнүшүндөгү айкын эмес формада жаза алабыз. Ошентип эки өзгөрүлмөлүү функцияны $F(x,y,z)=0$, үч өзгөрүлмөлүү функцияны $F(x,y,z,t)=0$, ж.б. у. с. n өзгөрүлмөлүү функцияны $F(u,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=0$ көрүнүштөрүндөгү айкын эмес функциялар катарында жазууга болот.

- **Параметрдик ыкма менен берүү.** Функцияны аналитикалык ыкмада берүүнүн дагы бир көрүнүшү катарында, параметрдик жол менен берилген функцияларды айтууга болот. Бул учурда $y=f(x)$ функциясындагы өзгөрүлмөлөрдүн $x \in X,\ y \in Y$ экөөсү тең, үчүнчү бир башка өзгөрүлмөдөн көз каранды болушат. Мисалы R^2 тегиздигинде кыймылдап бара жаткан $(x;y)$ координаталуу чекит, t убактысынын ар бир ирмемимде өзгөрүп, t убактысынан көз каранды $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t \in$ T болот. Ошентип убакыттын кайсы бир T аралыгында кыймылда болгон чекит координаталары менен гана мүнөздөлбөстөн, параметр (бул жерде убакыт) деп аталган t өзгөрүлмөсүнө да байланыштуу болот. Мында t параметри T аралыгында өзгөргөн кезде, x,y өзгөрүлмөлөрү тиешелүү түрдө $X,\ Y$ көптүктөрүнүн чегинен чыгып кетпейт деп эсептелет. Мисалы,

$x^2+y^2=16$ айланасында жаткан ар бир $(x;y)$ чекити, t параметри менен $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ көз карандылык байланышында болот жана t көрсөтүлгөн аралыкта өзгөргөн учурда: $x \in X=[-4,+4\,],\ y \in Y=[-4,+4\,]$ көптүктөрүнүн чегинен чыгып кетпейт.

Эскертүү: Жогоруда функцияларды декарттык координаталар системасында түзүү ыкмалары каралды. Ал эми функцияны полярдык

же башка координаталар системасында түзүү талап кылынса, анда §1.3 , 1 – бөлүктө көрсөтүлгөн байланыштар эске алынат.

Мисалдар

1. $y = arcsin\sqrt{x-1}$ функциясынын аныкталуу жана өзгөрүү областын тапкыла.

Чыгаруу: ►$siny = \sqrt{x-1}$ болгондуктан, $|siny| \leq 1$ шартын ага тең болгон $\left|\sqrt{x-1}\right| \leq 1$ барабарсыздыгы менен алмаштырабыз. Экинчи жактан, оң сандан гана квадраттык тамыр чыккандыктан, $x-1 \geq 0$ болушу керек. Бул эки талапты бириктирсек: $\begin{cases} x-1 \leq 1, \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ болуп, $1 \leq x \leq 2$ келип чыгат. Ал эми y болсо $Y =]-\infty, +\infty[$ аралыгындагы маанилерди кабыл алат. Демек берилген функциянын аныкталуу области $\mathrm{X} = [1, 2]$, өзгөрүү области

$Y =]-\infty, +\infty[$ аралыктары болушат. ◄

2. ▪ Туруктуу температура кезинде, поршендүү идиште кысылган идеалдык газдын P басымы менен V көлөмүнүн арасында Бойль – Мариоттун законуна ылайык, $\mathrm{P} \cdot V = \mathrm{C} - conctanta$ көз карандылык байланышы орун алат. Аны

$$P = \frac{C}{V} = \mathrm{P}(V) \quad \text{жана} \quad V = \frac{C}{P} = V(P) \quad (6.1)$$

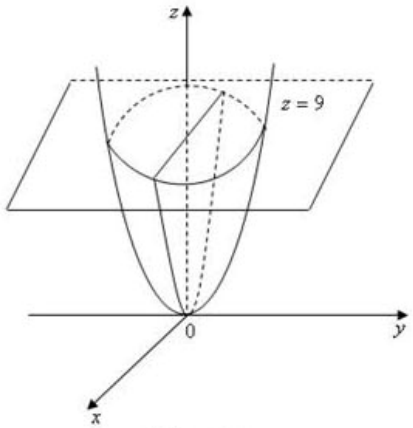
көрүнүштөрүндө жазып, басымдардын көптүгүн көлөмдөрдүн көптүгүнө жана тескерисинче эки тараптан тең өз ара бир маанилүү чагылтуучу (6.1) эреже – мыйзамдарын алабыз. Басымдар менен көлөмдөрдүн сандык чендери чагылтылып жаткандыктан, (6.1) ди оператор дебей, бир өзгөрүлмөлүү функция деп атайбыз. ▪

3. ▪ Поршенде кысылган газдын массасынын температурасы туруктуу эмес болгон учурда, анын көлөмү V менен P басымынын, T – абсалюттук температурасынын арасындагы байланыш Клапейрондун формуласы боюнча $\mathrm{P} \cdot V = R\mathrm{T}$ $(R = conct.)$ көрүнүшүндө жазылат. Эгерде V менен T ны көз карандысыз чоңдуктар деп ойлосок, анда басымды $\mathrm{P} = \frac{R\mathrm{T}}{V} = \mathrm{P}(V, \mathrm{T})$ эки өзгөрүлмөлүү функция деп түшүнүүгө болот. ▪

4. ▪ Кесилген конустун V көлөмүн, анын эки негиздеринин радиустары R, r жана бийиктиги H өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды деп,

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = V(R, r, H)$ үч өзгөрүлмөлүү функция катарында кароого болот. ▪

5. ▪ Кайсы бир телонун R^3 мейкиндигиндеги физикалык абалына байкоо жүргүзүп жатып, алардын бир чекиттен экинчи чекитке которулуп жатканда касиеттеринин өзгөрүлөрүн байкайбыз (Мисалы тыгыздыгы, температурасы, электр талаасынын потенциалы ж.б.у.с.). Ошондуктан бул физикалык абалдарды ошол чекиттердин x, y, z координаталарына карата үч өзгөрүлмөлүү функция деп түшүнүүгө болот. Кээде физикалык абалдар төртүнчү бир t убакыт чоңдугунан да көз каранды болгондуктан, жалпы учурда аларды x, y, z, t төрт өзгөрүлмөлөрдөн функция деп эсептөөгө болот. ▪



6.7 – чийме

6. $z = x^2 + y^2$ функциясынын аныкталуу жана өзгөрүү областтарын аныктап, z = 9 деңгээл сызыгын көрсөткүлө.

Чыгаруу: ► Каалагандай эле чыныгы сандарды квадратка көтөрүп кошууга болгондуктан, функциянын аныкталуу области бүтүндөй R^2 тегиздиги болот. Ал эми өзгөрүү области Z = $[0, +\infty[$ аралыгындагы чыныгы сандар болушат. $z = 9$ маанисине туура келген деңгээл сызыгы $9 = x^2 + y^2$ теңдемеси менен берилген, радиусу $r = 3$, борбору Oz огунун $z = 9$ чекитинде жайгашкан айлана болот. Ал айлана $z = x^2 + y^2$ теңдемеси менен берилген гиперболалык параболоиддин, $z = 9$ тегиздиги менен кесилишүүсүнөн келип чыгат (6.7 - чийме). ◄

7. $u = \frac{z+1}{x^2-y^2}$ үч өзгөрүлмөлүү функциянын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу: ► Бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтма $x^2 - y^2 \neq 0$ болгондуктан, $x - y \neq 0$ жана $x + y \neq 0$ шарттары коюлат. Бөлчөктүн алымындагы z өзгөрүлмөсүнө эч кандай шарт коюлбагандыктан, аныкталуу области болуп, R^3 мейкиндигиндеги $x \neq \pm y$ шартын канааттандырган бардык чекиттердин көптүгү ($x = \pm y$ түзүндө жатпаган чекиттер) эсептелет.◄

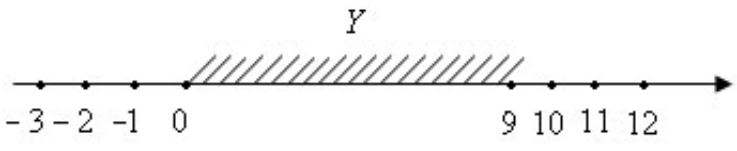
8. Эгерде металл стержень $T = 0^0$ температурада l_0 узундугуна ээ болуп, аны $T = \theta^0$ градуска ысыткан кезде, l узундугуна ээ болсо, анда стержендин узаруу процессин мүнөздөгөн сандардын $\{l\}$ көптүгү менен, $[0^0,\ \theta^0]$ сегментиндеги температураны мүнөздөгөн сандардын арасындагы өз ара бир маанилүү көз карандылык байланышын

$l = l_0(1 + \beta\theta) = l(\theta)$ бир өзгөрүлмөлүү функция катарында көрсөтүүгө болот.

9. Үч бурчтуктун бир чокусунан чыккан a жана b жактары туракту болуп, алардын арасындагы φ бурчу өзгөрүлмө мүнөзгө ээ болсо, анда үч бурчтуктун үчүнчү с жагы, φ өзгөрүлмөсүнөн көз каранды же функция болот. Чынында эле косинустар теоремасы боюнча

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\varphi$ болгондуктан, аралыкты оң деп

с = $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\varphi}$ = с (φ) – бир өзгөрүлмөлүү функциясына ээ болобуз.



6.8-чийме

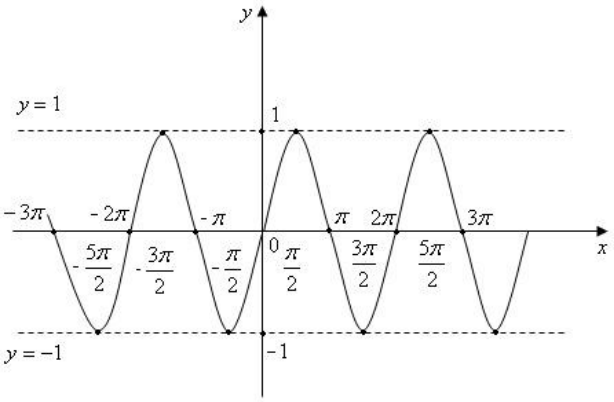
Ошентип, жогоруда каралган мисалдарда көрүнгөндөй, сандык көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарын үйрөнүү, практикалык муктаждыктардан же зарылчылыктардан улам келип чыгат. Ошондой эле, көз карандылык байланышында болгон өзгөрүлмөлөрдүн биринчиси эркин көз каранды эмес чоңдуктар (сандар), экинчиси көз каранды чоңдуктар (сандар) болорун байкайбыз.

6.1.3 Функцияларды өзгөчөлүктөрүнө жараша бөлүштүрүү

1. Чектелген функциялар. Функциялардын баары эле көптүктөрдү бири – бирине чагылтуу аркылуу байланыштыруу милдетин аткарышып, чөйрө кубулуштарын сандарга салыштырып таануу мүмкүнчүлүгүн түзгөн математикалык модел – каражаттары болушкандыктан, кубулуштар сыяктуу эле алардын да жеке өздөрүнө гана тиешелүү өзгөчөлүктөрү болот.

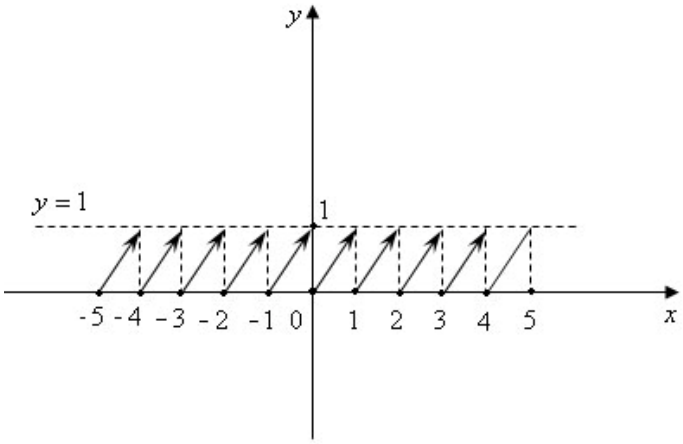
6.1. Аныктама. *Кандайдыр бир чектүү* m, M *сандары табылып,* X *көптүгүнүн бардык* x $(\forall x \in X)$ *чекиттеринде (сандарында)* $y = f(x)$ *функциясынын* y *маанилери үчүн* $(y \in Y)$, $m \leq y \leq M$ *же*

$m \leq f(x) \leq M$ *шарты аткарылса, анда* f(x) *функциясын* X *көптүгүндө чектелген функция деп айтабыз.* m *саны функциянын накта төмөнкү чеги,* M *саны функциянын накта жогорку чеги деп аталышып, тиешелүү түрдө* $m = inf\ \{f(x)\}$,



6.9-чийме

$M = sup\{f(x)\}$ *символдору менен белгиленишет. Эгерде* m, M *сандарынын бирөөсү эле табылбаса, анда функцияны чектелбеген деп айтабыз.*



6.10 – *чийме*

Чектелген көптүктөрдүн бир канча, кээде чексиз көп төмөнкү жана жогорку чектери боло бергендиктен, “накта” сөзүн кошуп айтууга туура келет. Мисалы

$Y = \{\, y : y \in R,\ 0 \leq y \leq 9 \,\}$ көптүгүнүн төмөнкү жана жогорку чектери чексиз көп, төмөнкү чектери деп бардык терс сандарды $m_i = \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$, ал эми жогорку чектери деп 9 дан чоң болгон бардык оң сандарды $M_i = \{9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots\}$ ала берүүгө болот. Анткени y саны 9 дан кичине же барабар болгон оң

сандар болушат (6.8 - чийме). Мисалдан көрүнгөндөй, бардык чексиз көп төмөнкү чектердин **эң чоңу накта төмөнкү,** ал эми бардык чексиз көп жогорку чектердин **эң кичинеси накта жогорку** чектер болушу*п,*

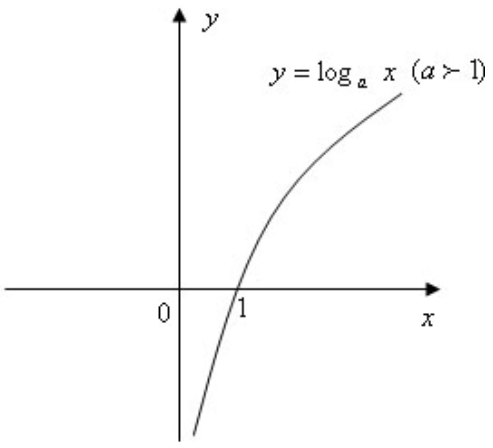
$inf\ \{y\} = max\{m_i\} = 0$, $sup\{y\} = \min\{M_i\} = 9$

(i = 1, 2, 3, …) көрүнүштөрүндө жазылышат.

Чектелген функцияга мисал катары $y = \sin x$ функциясын алалы. Чынында эле $\forall x \in$ R: $|\sin x| \leq 1$ болгондуктан, - 1≤ $\sin x \leq 1$ келип чыгып $m = -1,\ M = 1$ сандары табылгандыктан, жогорудагы 6.1 – аныктамасы аткарылат (6.9 - чийме). Экинчи б мисал катары "x санын бөлчөк бөлүгү" – деп аталган $y = x - [x] = \{\ x\ \}$ функциясын көрсөтөлү (Мында $[x]$ – "x тин бүтүн бөлүгү"). Кандай гана сан болбосун, анын бөлчөк бөлүгү 1 санынан ашып кетпеген оң сан болгондуктан,

$0 \leq \{\ x\ \} \leq 1 \Rightarrow m = 0,\ M = 1$ сандары табылып, берилген функция чектелген болот (6.10 – чийме). Ал эми 6.3 – чиймеде көрсөтүлгөн $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы,

D = $\{\ (x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ (x, y)\ \in\ R^2\ \}$ областында $m = 0,$ M = 1 сандарынын арасында өзгөргөн, чектелген функция болот ($0 \leq z \leq 1$).



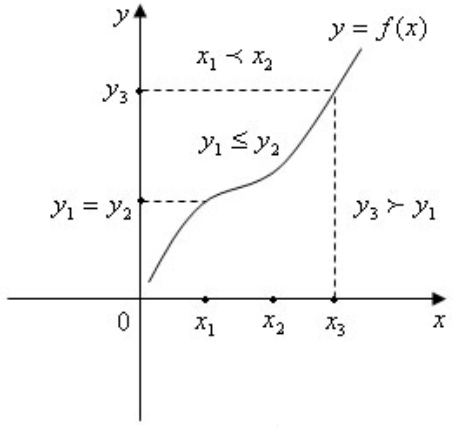
6.11 – *чийме*

Эки жагынан тең чектелбеген же бир жагынан эле чектелбеген функциялар, чектелбеген деп аталышат. Мисалы 6.1 – чиймеде көрсөтүлгөн $y = x^2 + 1$ функциясы, $m = 1$ накта төмөнкү чегине ээ болуп, төмөн жагынан чектелгенине карабастан, $x\ \in X \equiv R$ аныкталуу областында жогору жагынан чектелген эмес же $y \in [1\ , +\infty[$. Ошондой эле, 6.7 – чиймеде көрсөтүлгөн $z = x^2 + y^2,\ (x;\ y) \in R^2,\ z \in [0\ , +\infty[$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы $m = 0$ накта төмөнкү чегине ээ болуп, жогору жагынан чектелген эмес. Ал эми эки жагынан тең чектелбеген функцияларга $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1,\ x \in\ ]0\ , +\infty[\ ,\ \ y \in\ ]-\infty\ , +\infty[\ )$ бир өзгөрүлмөлүү функциясын (6.11 - чийме),

$u = x^3 + y^3 + z^3$, $(x;\ y;\ z) \in R^3$, $u \in R =]-\infty, +\infty[$ үч өзгөрүлмөлүү функциясын мисал келтирүүгө болот.

2. Монотондуу өзгөрүүчү функциялар.

6.2. Аныктама. *$y = f(x)$ функциясы $(x \in X, y \in Y)$ берилип, X көптүгүндөгү аргументтердин кичине маанилерине функциянын Y көптүгүндөгү кичине (чоң) маанилери же болбосо, аргументтердин чоң маанилерине функциянын чоң (кичине) маанилери туура келсе, анда функцияны X көптүгүндө монотондуу өсүүчү (кемүүчү) деп айтабыз.*

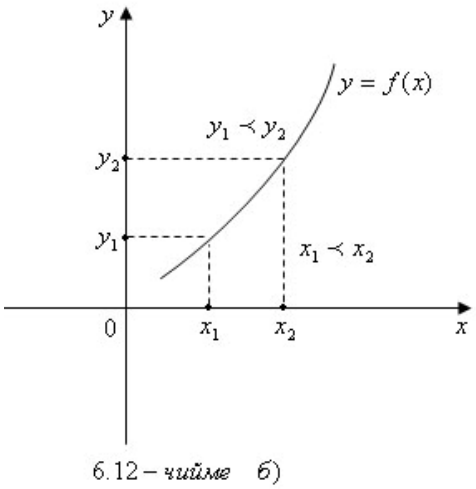


6.12 – *чийме а)*

Монотондуу кыргызча ырааттуу деген маанини түшүндүрүп, монотондуу өсүүчү (кемүүчү) жана шыдыр монотондуу өсүүчү (кемүүчү) деген эки түрлөргө бөлүнөт. Аларды символдор аркылуу көрсөтөлү:

$$1).\ \forall\, x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \le f(x_2) \text{ жай монотондуу өсүүчү,} \\ f(x_1) \ge f(x_2) \text{ жай монотондуу кемүүчү.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Демек бул учурда аргументтер барабар эмес болгонуна карабай, функциялардын айрым чекиттердеги (аргументтердеги) маанилери тең болуп калышы мүмкүн.



6.12 – *чийме б)*

$$2).\ \forall\, x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow$$

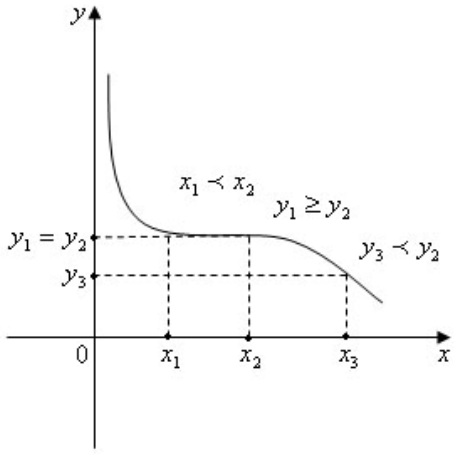
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ шыдыр өсүүчү,} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ шыдыр кемүүчү.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Шыдыр монотондуулукта аргументтер барабар эмес болгон учурда, функциялардын маанилери да эч качан тең болбойт.

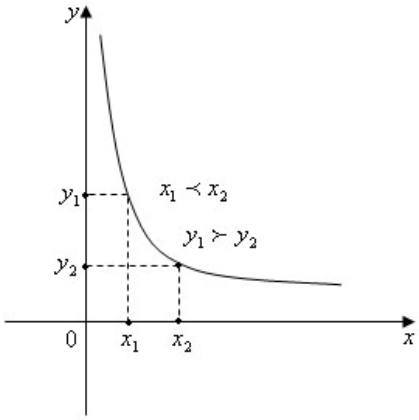
Аргументтердин $x_1,\ x_2$ маанилерине тиешелеш болгон функциянын

$y_1 = f(x_1),\ \ y_2 = f(x_2)$ маанилерине карап, жай монотондуу өсүүчү (6.12 *а.*- чийме) жана шыдыр монотондуу өсүүчү (6.12 б. – чийме) бир

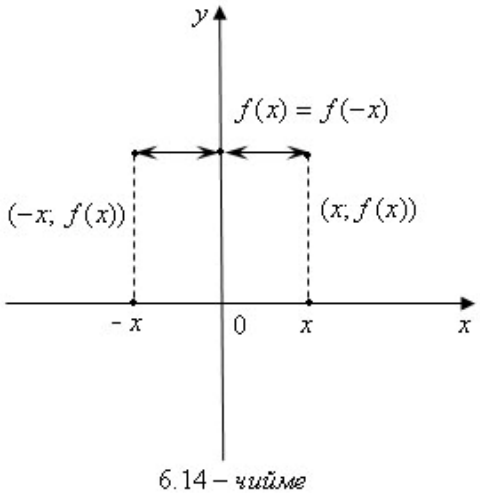
өзгөрүлмөлүү функцияларды графикте көрсөтөбүз. Ошондой эле жай монотондуу кемүүчү (6.13 $а.-$чийме), шыдыр монотондуу кемүүчү (6.13б. – чийме) функциялар графикте сүрөттөлүшкөн. Ал эми



6.13 – *чийме а)*



6,13 – *чийме б)*



6.14 – *чийме*

тепкичтүү $y = [x]$ –“ x тин бүтүн бөлүгү”

(кээде $y = E(x)$ деп да белгилешет) функциясы ырааттуу өспөй секирик мүнөзүнө ээ болгондуктан, жалпы X аралыгында монотондуу өсүүчү деп айта албайбыз (6.5 – чийме).

$\forall x \in$X чекиттеринде функция туруктуу бир гана $y = f(x) = a$ маанисине ээ болсо, анда аны X көптүгүндө $y = a$ - constanta “ туруктуу сан “ деп эсептейбиз.

3. Жуп жана так функциялар.

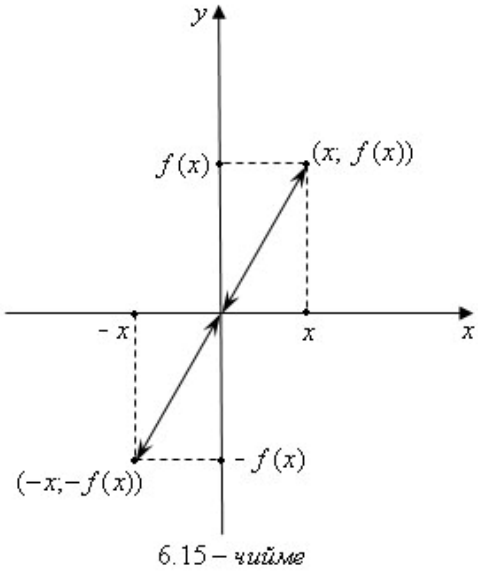
6.3 Аныктама. $y = f(x)$ *функциясы* $(x \in X, y \in Y)$ *берилип, X көптүгүнүн бардык* x *элементтери үчүн* $f(-x) = f(x)$ *шарты аткарылса, анда X көптүгүндө* $f(x)$ *функциясын жуп функция, ал эми*

$f(-x) = f(x)$ *болсо, так функция болот дейбиз. Эгерде бул шарттардын экөөсү тең аткарылбаса, анда* $f(x)$ *ти жуп да, так да эмес функция деп айтабыз.*

Бир өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясы жуп болсо, анда анын декарттык координаталар

системасындагы графиги Oy огуна карата симметриялуу жайгашат. Анткени аргументтердин x жана "$-x$" сыяктуу эки башка маанилерине, функциянын бир эле

$y = f(-x) = f(x)$ мааниси туура келип, $(-x; f(-x))$, $(x;\ f(x))$ чекиттери Oy огуна карата симметриялуу жайгашышкан (6.14 – чийме). Ал эми так функциянын графиги О башталма чекитине карата симметриялуу жайгашат, анткени x жана "$-x$" эки башка аргументтерге, $f(x)$ жана $-f(x)$ деген функциянын эки башка маанилери туура келип, $(-x; -f(x))$, $(x;\ f(x))$ чекиттери О координата башталмасына карата симметриялуу жайгашкан болушат (6.15 – чийме). Ошентип жуп жана так бир өзгөрүлмөлүү функциялар, Ox огундагы О башталмасына карата өз ара симметриялуу жайланышкан x жана "$-x$" аргументтерине тиешелеш коюлган функциянын маанилерин салыштыруу менен аныкталат.



6.15 – чийме

Эки өзгөрүлмөлүү $z = f(x, y)$ функциясынын аргументтери R^2 мейкиндигин түзгөн Oxy тегиздигинде жайгашкан областтарга таандык чекиттер болгондуктан, ушул тегиздикте О координаталар башталмасына карата симметриялуу жайланышкан $(-x; -y)$ жана $(x; y)$ чекиттериндеги функциянын маанилерин салыштырып, жуп же так функциялар түшүнүгүн кеңейтүүгө болот. Ошондой эле, өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүнө карата гана жуп же так болгон функциялар кездешет. Мисалы, $z = x^2 + y$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы x ке карата жуп болгону менен, y ке карата жуптук талап аткарылбайт. Ал жуп да эмес жана так да эмес функция болот. Жалпы учурда X, Y областтарынын ($X \subseteq R^n$, $Y \subseteq R$) арасындагы көз карандылык байланышын орнотуучу n өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясында, аргумент $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ координаталарына ээ болот. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү жуп жана так функциялар, $Ox_1x_2 \dots x_n y$ $n+1$ −өлчөмдүү декарттык

координаталар системасынын n өлчөмдүү $Ox_1x_2 \dots x_n$ мейкиндикчесинде жайгашышкан, О башталмасына карата симметриялуу $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ жана $(-x_1; -x_2; \dots; -x_n)$ чекиттеринде функциянын $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $f(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ маанилерин салыштыруу менен аныкталат. Ошондой эле көп өзгөрүлмөлүү функцияларда, айрым бир x_i өзгөрүлмөлөрүнө карата гана $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ жуп же так болгон функцияларды жолуктурууга болот.

Ошентип, көп өзгөрүлмөлүү функциялардын жуптугу же тактыгы жөнүндө сөз кылуу абстрактуу мүнөзгө ээ болгондуктан, көбүнчө аларды атайын изилдөө иштеринде коюлган талаптарга жараша гана тактайбыз.

4. Мезгилдүү функциялар.

6.4 Аныктама. *$y = f(x)$ функциясы $(x \in X, y \in Y)$ берилип, X көптүгүндөгү бардык x элементтери(сандары) үчүн кандайдыр бир T саны табылып ($T \neq 0$), x жана $x + T$ эки башка аргументтерине функциянын бир эле $f(x) = f(x + T)$ мааниси туура келсе, анда $f(x)$ функциясын X көптүгүндө мезгилдүү функция деп айтабыз. T саны функциянын мезгили деп аталат.*

T мезгилине ээ болгон функция, x жана $x + T$ чекиттеринде барабар мааниге ээ болуп, ар бир T аралыгынан соң кайталануучу болорун байкайбыз. Мисалы, жогоруда каралган $y = x - [x] = \{ x \}$ – “x санынын бөлчөк бөлүгү” функциясы үчүн T = 1 саны табылып, $\forall x \in R$ үчүн x жана $x + 1$ сандарынын бөлчөк бөлүктөрү

$\{ x \} = \{ x + 1 \}$ барабар болушат. Чынында эле сандын бөлчөк бөлүгү 1 ден ашып кетпеген оң сан болуп, улам 1 бүтүн санына жеткенде бөлчөк бөлүгү нөлгө айланып, T = 1 мезгилдүү кайталанма функция болот (6.10 – чийме). $x = 5{,}7$ десек, анда $\{x\} = \{5{,}7\} \Rightarrow \{ x + T \} = \{ 5{,}7 + 1 \} =$

$= \{ 6{,}7 \} = 0{,}7$ болуп, 5,7 жана 6,7 сандарынын бөлчөк бөлүктөрүнүн тең экендигине күбө болобуз. Ошондой эле $y = \sin x$ тригонометриялык функциясы $T = 2\pi$ мезгилине ээ функция болуп,

$\sin x = \sin(x + 2\pi)$ теңдештиги орун алгандыктан, графиги $T = 2\pi$ аралыгынан соң кайталанып турганын 6.9 – чиймеден көрөбүз.

Көп өзгөрүлмөлүү функцияларда мезгилдүүлүк түшүнүгү ар бир өзгөрүлмөлөр боюнча табылган T санына жараша өз – өзүнчө, же бардык өзгөрүлмөлөргө жарамдуу табылган T санына карата бардык өзгөрүлмөлөргө бир учурда жайылтылышы мүмкүн. Мисалы эки өзгөрүлмөлүү $z = \cos x + y$ функциясы x өзгөрүлмөсү боюнча T = 2π мезгилине ээ болгону менен, y өзгөрүлмөсү боюнча мезгилсиз функция болуп, жалпы учурда мезгилсиз функция деп эсептелет. Ал эми

$z = \sin x + \cos y$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы x, y өзгөрүлмөлөрүнүн экөөсү боюнча тең T = 2π мезгилдүү функция болот.

n өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясында $x \in X \subseteq R^n$, $y \in$Y$\subseteq$R болгондуктан, аргумент $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ координаталары менен берилет. Ошондуктан кандайдыр бир T саны табылып, n өлчөмдүү мейкиндикте жайгашкан x чекити $x +$ T чекитине кыймылдап жеткенде, анын координаталары $x +$ T $= \{x_1 +$ T$; x_2 +$ T$; \dots; x_n +$ T$\}$ көрүнүшүндө болуп,

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 +$ T$, x_2 +$ T$, \dots, x_n +$ T$)$ барабардыгы орун алса гана, берилген функцияны 6.4 – аныктамасынын маанисиндеги T мезгилдүү функция деп айта алабыз. Бул учурда функция бардык Ox_i багыттары боюнча ($i = 1, 2, \dots, n$) T аралыгынан кийин кайра кайталана берет. Бирок функциялар сүрөттөгөн кубулуштарына жараша айрым багыттар боюнча ар башка аралыктарда кайталанып, калган багыттарда кайталанбай калышы да мүмкүн, бул учурда x чекитинин $x +$ T чекитине которулуусун $\vec{O}x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ векторуна $\overrightarrow{OT} = \{t_1; t_2; \dots; t_n\}$ векторун кошуу менен жүргүзүлдү деп түшүнүп, айрым $t_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ болушу да мүмкүн деп эсептеп, кайталануу процессин

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n)$ теңдештиги менен көрсөтөбүз. Ошентип көп өзгөрүлмөлүү функциялардагы мезгилдүүлүк маселеси айрым бир өзгөрүлмөлөргө жана бардык өзгөрүлмөлөргө карата бөлүнүп түшүндүрүлгөндүктөн, абстрактуу мүнөзгө ээ болуп, практикалык изилдөөлөрдөгү зарылдыкка жараша гана эске алынат.

Эскертүү: Эгерде T саны функциянын мезгили болсо, анда

T , $2T$, $3T$, . . . , nT , . . . сандарынын ар бирин мезгил деп алууга болот.

Анткени $f(x) = f(x + 2T) = f(x + T + T) = f(x + T)$ *ж.б.у.с. Ошондой эле каалагандай функцияны T=0 нөл мезгилдүү функция деп эсептөөгө болот.*

5. Функциянын асимптоталары жана жанымалары.

Функциянын асимптоталары менен жанымалары түз сызыктар болгондуктан, алар түздүн теңдемелери менен берилишет.

6.5 Аныктама. $y = f(x)$ *функциясынын асимптота сызыгы деп, анын графиги менен кесилишпей, бирок ага чексиз жакындап жандап кеткен түз сызыкты айтабыз жана пределдик абалда функциянын графиги асимптота түзү менен дал келет деп элестетебиз.*

Асимптоталар вертикалдык , горизонталдык жана жантык деп бөлүнүшөт. Oy огуна параллель жайгашкан асимптоталарды вертикалдык деп, Ox огуна параллель жайгашса горизонталдык деп калгандарын жантык асимптоталар дейбиз. Мисалы 6.23, 6.24 а. – чиймелерде $y = x^{\alpha}$ функциясына Oy огу же $x = 0$ түзү вертикалдык, Ox огу же $x = 0$ түзү горизонталдык асимптоталар болушкан учурлар сүрөттөлгөн. Функциянын асимптоталарын табуунун төмөндөгүдөй тартибин түзөбүз:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ чектүү предели жашаса, анда $y = b$ берилген функциянын горизонталдык асимптотасы болот. Ал эми $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ болсо, анда горизонталдык асимптотасы жок болуп, кошумча кийинки кадамдагы изилдөөгө өтөбүз.

Эгерде $y = kx + b$ түзү $y = f(x)$ функциясынын жантык асимптотасы болсо, анда $x \to \infty$ умтулганда алар бири – бирине чексиз жандаша жакындашып, чексизге жеткенде дал келишет же айырмасы $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$ пределине ээ болот деп ойлойбуз. Ошондуктан чексиз алыстатылган x чекиттеринде

$f(x)-(kx+b)\approx\alpha(x)-$ чексиз кичине чоңдук болот. Мындан $k\approx\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{\alpha(x)}{x}$ же $k=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{\alpha(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-0-0=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$, ошондой эле $b\approx f(x)-kx-\alpha(x)$ же

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-\alpha(x)\ ]=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)-0=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ коэффициенттерин табууга болот.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ предели жашаса жантык асимптотасы бар, ал эми предели жашабаса жантык асимптотасы жок болуп, кийинки кадамдагы изилдөөнү улантабыз.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx\ )=b$ чектүү предели жашаса, анда жантык асимптотасы бар болуп, $y=kx+b$ теңдемеси менен жазылат. Эгерде чектүү предели жашабаса, анда асимптотасы жок функция болот. $k=0$ болгон учурда жантык асимптота горизонталдык асимптотага айланат.

4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ болсо, анда $x=a$ түзү вертикалдык асимптота болот.

Мисалы $y=\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$ функциясынын графигинин асимптоталарын издейли.►

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^3})}{x^2(2+\frac{5}{x^2})}=\frac{\infty\cdot(1-0-0)}{2+0}=\infty.$

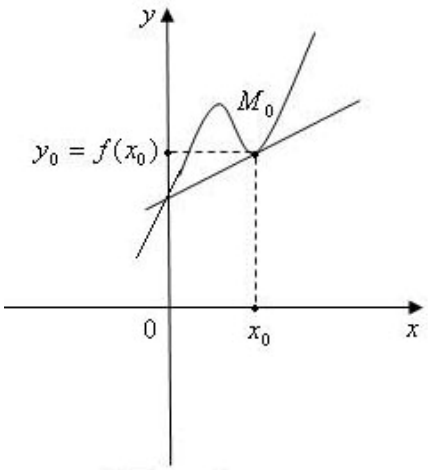
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{x\cdot(2x^2+5)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot(1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^3})}{x^3\cdot(2+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{2}=k$ чектүү предели табылды.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx\ )=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}-\frac{1}{2}\cdot x\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^2-5x+6}{4x^2+10}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot(-12-\frac{5}{x}+\frac{x}{x^2})}{x^2\cdot(4+\frac{10}{x^2})}=\frac{-12}{4}=-3=b$ болуп, функция $y=\frac{1}{2}\ \ x-3$ теңдемеси менен берилген асимптота түзүнө ээ болот.◄

6.6 Аныктама. *$y=f(x)$ функциясынын графигинде жайгашкан $M_0(x_0;y_0)$ чекитинен (мында $y_0=f(x_0)$) жүргүзүлгөн жаныма түз*

сызыгы деп, бул чекиттин өзүндө жана анын жакынкы чеке белинде, берилген функциянын графигин кесип өтпөгөн, б.а. анын графиги менен кесилишпесе да бир гана жалпы $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекитине ээ болгон түз сызыкты айтабыз.*



6.16 – *чийме*

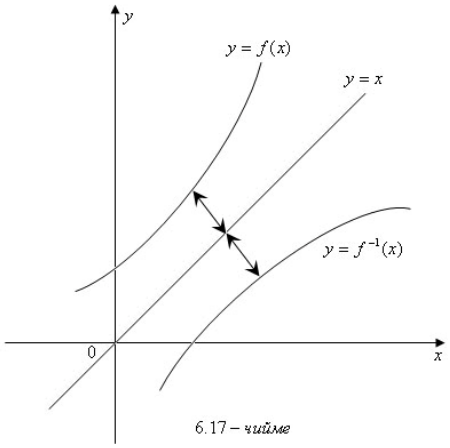
Мектеп программасынан белгилүү болгондой $y = f(x)$ функциясынын графигинде жайгашкан $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$y - \ y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ көрүнүшүндө жазылат. Ошентип функциянын графиги менен кесилишпей, аны менен бир гана жалпы чекитке ээ түздөрдүн баары функцияга жаныма түз болуп эсептелет. Айрым жаныма түздөр, жаныма жүргүзүлүүчү чекиттин жакынкы чеке белинде гана функциянын графиги менен кесилишпей, анын сыртында кесилише берүүсү мүмкүн (6.16 – чийме).

6.1.4 Тескери функциянын жашоо шарттары

Функциялар сан көптүктөрүн бири – бирине чагылтуучу эреже – мыйзамдар болгондуктан, өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашырганда гана тескериси жашайт (6.1.1 ди кара). Ошентип X көптүгүндө $y = f(x)$ функциясы берилип, Y өзгөрүү областы болсо ($x \in X \subseteq R,\ y \in Y \subseteq \mathrm{R}$), анда анын тескери функциясын табуу үчүн:

1. f – "эреже – мыйзамы" X көптүгүнүн ар бир x элементинин жалгыз өзүнө гана туура келген, Y көптүгүнөн бирден гана y элементин тиешелеш коюусу керек, б.а. ар башка x аргументтерине, функциянын ар башка y маанилери туура келиши керек (өз ара бир маанилүүлүк шарты).



6.17 – *чийме*

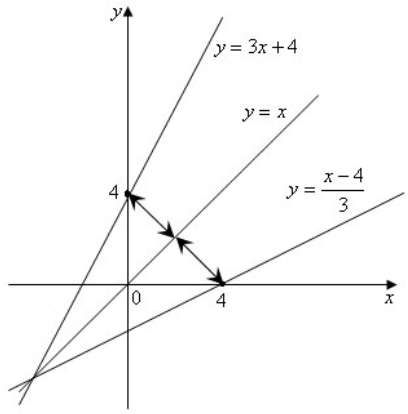
2. $y = f(x)$ теңдештиги теңдеме катарында каралып, x өзгөрүлмөсүнө карата бир маанилүү $x = f^{-1}(y)$ чечимине ээ болушу керек.

Табылган $x = f^{-1}(y)$ чечимин

тескери функция деп алсак, анын графиги $y = f(x)$ оң функциясынын графиги менен дал келип, иш жүзүндө оң жана тескери функциялар бир эле графикте сүрөттөлүшөт. Бирок тескери $x = f^{-1}(y)$ функциясында y өзгөрүлмөсү көз каранды эмес чоңдук же аргумент, Y көптүгү аныкталуу областы, ал эми x көз каранды чоңдук же функциянын мааниси, X өзгөрүү областы болуп эсептелет, б.а. Ox жана Oy октору өз кызматтык милдеттерин алмаштырышат, б.а. Ox огуна функциянын маанилери, ал эми Oy огуна аргументтердин маанилери жайгашышат.

Биз функцияны аныктоодо X көптүгүн аныкталуу областы, Ox огун аргументтердин огу, ал эми Y көптүгүн өзгөрүү областы, Oy огун функциянын маанилеринин огу деп көнүп калгандыктан, көнгөн адатты бузбоо үчүн:

3. $x = f^{-1}(y)$ тескери функциясында x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, тескери функцияны $y = f^{-1}(x)$ көрүнүшүндө жазуу эрежесин кабыл алабыз.

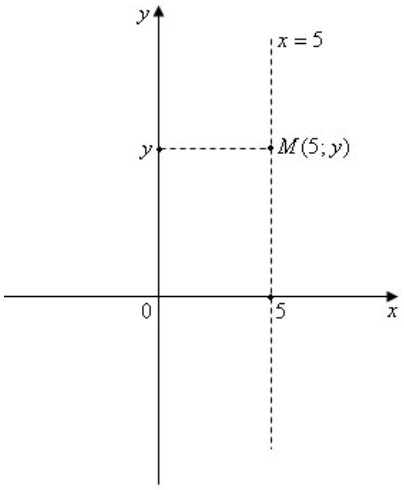


6.18 – *чийме*

Ал эрежеге ылайык $y = f^{-1}(x)$ тескери функциясында, берилген $y = f(x)$ функциясынын аныкталуу областы менен өзгөрүү областтары жана Ox менен Oy октору орундарын алмаштырылып жазылат. Бул учурда, берилген Oxy декарттык координаталар системасындагы $y = x$ түзүндөгү чекиттер гана орундарында калып, калган чекиттер ушул $y = x$ түзүнө (Ox жана Oy окторунун арасындагы бурчту тең экиге бөлүүчү биссектриса сызыгына) карата симметриялуу которулушат. Иш жүзүндө Oxy координаталар системасынан башка, ага $y = x$ түзүнө карата симметриялуу болгон жаңы Oyx декарттык координаталар системасына өтөбүз. Бирок оң жана тескери функцияларды бир эле координаталар системасында карап, салыштыруу ыңгайлуу болгондуктан, $y = f(x)$ функциясынын графиги тургузулган координаталар системасында, x менен y тин орундары алмаштырып жазылган $y = f^{-1}(x)$ тескери функциясынын графигин тургузабыз. Натыйжада, $y = x$ биссектрисасына карата өз ара симметриялуу

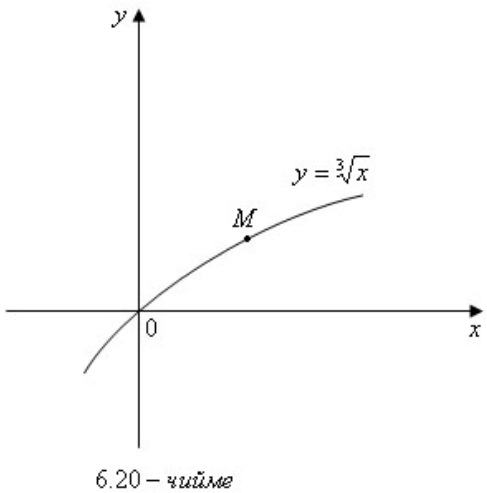
жайгашышкан оң жана тескери функциялардын графиктерин, бир эле декарттык координаталар системасында көрсөткөн болобуз (6.17 – чийме).

Мисалы $y = 3x + 4$ функциясына тескери болгон функцияны табайлы. Анын аныкталуу области $X =]-\infty, +\infty[\equiv R,$ өзгөрүү области $Y =]-\infty, +\infty[\equiv R$ бардык чыныгы сандардын көптүктөрү болушуп, ар бир x тин өзүнө жалгыз гана бир y тиешелеш болгондуктан, өз ара бир маанилүү функция болот. Берилген теңдештикти теңдеме катарында чыгарсак, $x = \frac{y-4}{3}$ тескери функциясы келип чыгып, анын графиги берилген $y = 3x + 4$ оң функциянын графиги менен дал келет. Бирок тескери функцияны жазуунун кабыл алынган эрежесин сактасак, б.а. x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, тескери функцияны



6.19 – *чийме*

$y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$ көрүнүшүндө жазсак, анда анын графиги менен, берилген $y = 3x + 4$ оң функциянын графиктери, $y = x$ түзүнө (биссектрисасына) карата өз ара симметриялуу жайгашышат (6.18 – чийме).



6.20 – *чийме*

Көп өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясында $x \in X \subseteq R^n$, $y \in Y \subseteq R$ болсо, анда n өлчөмдүү мейкиндиктеги бир чекитти элестеткен аргумент

$x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ координаталары же өзгөрүлмөлөрү менен берилгендиктен, өз ара бир маанилүүлүктү $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} \overset{f}{\leftrightarrow} y$ же, n сандагы x_i өзгөрүлмөлөрүнүн $(i = 1, 2, \dots, n)$ жазылган көрүнүштөгү бир тобу менен аныкталган x чекитинин жеке өзүнө гана тиешелеш коюлуучу, бирден гана y саны табылат жана тескерисинче, бир y санынын жеке өзүнө гана тиешелеш коюлуучу, n ченемдүү

мейкиндиктеги бир x чекитин аныктоочу $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ өзгөрүлмөлөрүнүн бирден гана тобу табылат деп түшүнөбүз.

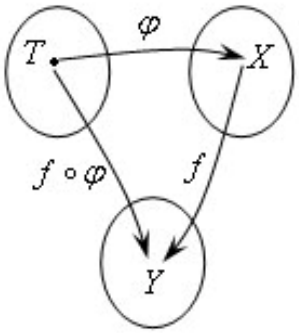
Өз ара бир маанилүү көп өзгөрүлмөлүү функциялар жашаганы менен, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ теңдештигин теңдеме катарында карап, бир маанилүү $x_i = f_i^{-1}(y)$ чечимдерин табуу $(i = 1, 2, \dots, n)$ кыйынчылыкты туудурат. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү функциялардын тескери функцияларын, n өлчөмдүү X көптүгүндө өзгөргөн айкын $x_i = \varphi_i(t)$ сыяктуу $(i = 1, 2, \dots, n;\ t \in T)$ параметрдик же башкача теңдемелер менен берилген түздөрдө жана фигураларда жайгашкан чекиттер үчүн гана жазып көрсөтөбүз. Мисалы $z = x + y^3$ функциясынын тескерисин, $\begin{cases} x = 5, \\ y = y \end{cases}$ түзүнүн $(5; y)$ чекиттеринде табалы (6.19 – чийме). Өзгөрүлмөлөр ушул $x = 5$ түзүндө гана жайгашса, берилген функция $z = 5 + y^3$ көрүнүшүнө келет. Аны y ке карата чыгарып, $\begin{cases} y = \sqrt[3]{5 - z}, \\ x = 5 \end{cases}$ тескери функциясын табабыз. Ушул эле функциянын $y = \sqrt[3]{x}$ ийрисинин чекиттериндеги (6.20 – чийме) тескерисин табалы. $z = x + (\sqrt[3]{x})^3$ же $z = 2x$ же $x = \frac{1}{2}z$ болгондуктан, берилген ийринин чекиттериндеги тескери функция $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ x = \frac{1}{2}z \end{cases}$ көрүнүшүндө жазылат. Ошентип көп өзгөрүлмөлүү оң жана тескери функциялардын графиктери дал келишип, бирөө гана болот. Анткени көз каранды эмес өзгөрүлмөлөрдүн (аргументтердин) мейкиндигинин өлчөмү менен, көз каранды өзгөрүлмөлөрдүн же функциялардын маанилеринин мейкиндигинин өлчөмү тең болбогондуктан, алардын орундарын алмаштырып жаза албайбыз. Каралган мисалда аргументтер $(x; y) \in R^2$ эки өлчөмдүү мейкиндикте, ал эми функциянын мааниси $z \in R$ бир өлчөмдүү мейкиндикте жайгашышкан.

Монотондуу өсүүчү (кемүүчү) функцияларда аргументтердин ар башка маанилерине, функциялардын да ар башка маанилери тиешелеш коюлгандыктан (чоңуна чоңу (кичинеси) же кичинесине кичинеси(чоңу)), алар өз ара бир маанилүү функциялар болушуп, тескери функциялары жашашат. Эгерде берилген функция монотондуу

өсүүчү (кемүүчү) болсо, анда анын тескери функциясы да монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болот.

6.1.5 Функциялардын суперпозициясы же татаал функциялар

Аныкталуу областы X жана өзгөрүү областы Y болгон $y = f(x)$ функциясы берилсин дейли. Эгерде функциянын аргументи болгон x көз каранды эмес өзгөрүлмөсү да, кайсы бир T көптүгүндө аныкталган φ эреже – мыйзамы боюнча t өзгөрүлмөсүнөн көз карандылык байланышта $x = \varphi(\mathrm{t})$ көрүнүшүндөгү функция болсо, анда $y = f(x)$ функциясын t өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция деп атап, $y = f(\varphi(\mathrm{t}))$ көрүнүшүндө жазабыз. Мында t өзгөрүлмөсү T көптүгүндө өзгөргөн кезде, x өзгөрүлмөсү X көптүгүнүн чегинен чыгып кетпейт деп эсептелет.



6.21– *чийме*

Кээде жогорудагыдай f жана φ функцияларынан турган татаал функцияны бул экөөнүн суперпозициясы деп атап, $y = f \circ \varphi$ көрүнүшүндө белгилейбиз. Функциялардын суперпозициясын схемада

T $\xrightarrow{f\circ\varphi}$ Y $\Leftrightarrow$ T $\xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$ көрсөтүп, 6.21 – чиймесинде сүрөттөйбүз. Айрым учурларда экиден көп бир канча функциялардын суперпозицияларынан турган татаал функцияларды жолуктурууга болот.

Мисалдар

1. $f(x) = e^{sin\sqrt{x}}$ татаал функциясын u = $\sqrt{x}$, v = sinu , g = e^{v} үч функцияларынын суперпозициясы катарында кароого болот

$f \Leftrightarrow \mathrm{u} \circ v \circ \mathrm{g}$.

2. $y = \log_7(x^2 + 3x + 4)$ татаал функциясы u = $x^2 + 3x + 4$ жана g = $\log_7$u функцияларынын суперпозицияларынан турат $y \Leftrightarrow$ u∘g .

3.Берилген $f(x) = x^2 + \lg x$, g(x) = $sinx + 2$ функцияларынан чагылтуу кезектерин алмаштырып, функциялардын суперпозицияларын түзүп көрөлү:

1) $f \circ g$, ⇨ $f(g(x)) = (sinx + 2)^2 + \lg(sinx + 2)$,

2) $g \circ f$, ⇨ $g(f(x)) = \sin(x^2 + \lg x) + 2$.

Мындан эки функциялардын суперпозициялары чагылтуу кезектерин алмаштырган кезде, ар башка татаал функциялар болорун байкайбыз. Ошентип $f(x) \neq g(x)$, ⇨ $f(g(x)) \neq g(f(x))$ же $f \circ g \neq g \circ f$, функциялардын суперпозициялары коммутативдүү болбойт деген жыйынтыкка келебиз.

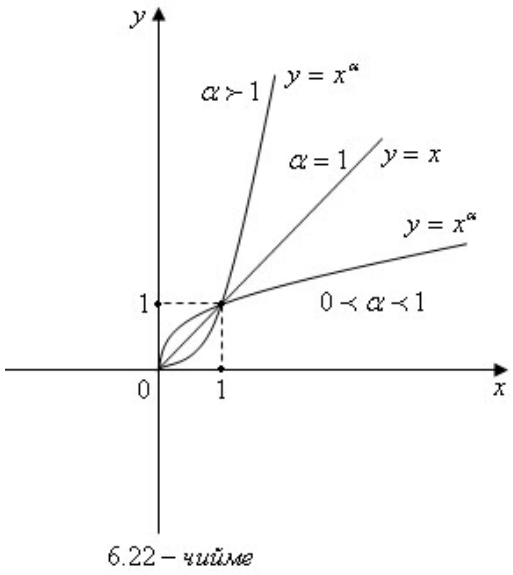
Өз ара тескери болушкан функциялардын супепозицияларында аныкталуу областы X , өзгөрүү областы Y көптүктөрү болгон $y = f(x)$ функциясына карата $y = f^{-1}(x)$ тескери функциясы жашаса, анда

$\forall x \in X: f(f^{-1}(x)) = x$ же $f^{-1} \circ f = x$,

$\forall y \in Y: f(f^{-1}(y)) = y$ же $f \circ f^{-1} = y$ (6.4)

барабардыктары орун алат, б.а. берилген функцияга тескери функциянын тескериси кайра берилген функциянын өзүнө барабар болот.

Чынында эле, тескери функцияларга келтирилген мисалдан $f(x) = 3x + 4$ жана $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$ өз ара тескери функциялар экендигин билебиз. Алардын суперпозицияларын түзүп көрүп:



6.22 – *чийме*

$$f(f^{-1}(x)) = 3 \cdot \frac{x-4}{3} + 4 =$$

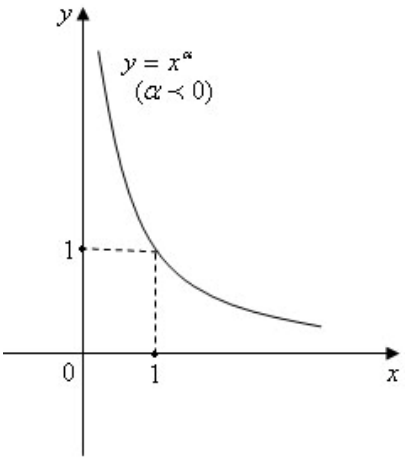
$$= x - 4 + 4 = x,$$

$$f^{-1}(f(y)) = \frac{3y+4-4}{3} = \frac{3y}{3} = y$$

(6.4) барабардыктарынын тууралыгын көрөбүз. Ошондой эле $f(x) = a^x$, жана

$f^{-1}(x) = \log_a x$ өз ара тескери функциялары үчүн да (6.4) тү текшерип, $f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x$ жана $f^{-1}(f(y)) = \log_a a^y = y$, анын аткарыларына ишенебиз. Мындан башка тескеринин тескериси болгон $arctg(tgx) = x$, $\arcsin(sinx) = x$ сыяктуу көптөгөн өз ара тескери тригонометриялык функциялардагы формулаларды эске салып кетебиз. Көп өзгөрүлмөлүү

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясында $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ аргументи n өзгөрүлмөлөрдөн тургандыктан, алардын бир канчасы же баары $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ t \in \mathrm{T})$, башка бир t өзгөрүлмөсүнө же бир канча өзгөрүлмөлөргө карата функция болушса, анда берилген $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын ошол x_i өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция деп эсептей берүүгө болот. Мисалы $f(x, y) = ye^{\sin x} - 7$ функциясында $u(x) = \sin x$ деп алып, берилген эки өзгөрүлмөлүү функцияны



6.23 – чийме

$f(u(x), y) = ye^u - 7$ көрүнүшүндөгү x өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция болот деп эсептөөгө болот. Ал эми

$f(x, y, z) = \cos(e^{x+y+z})$ функциясын $\varphi(u) = e^u,\ u = x + y + z$ деп,

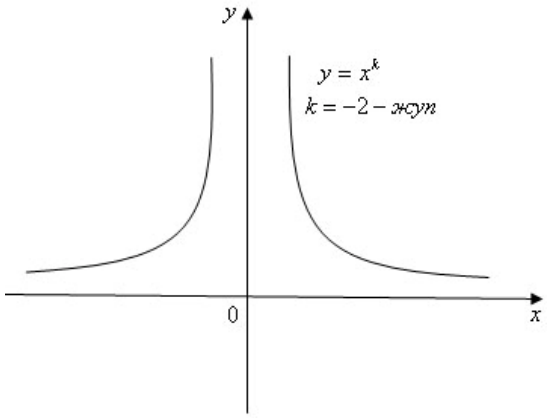
$f(\varphi(u)) = \cos\varphi$ көрүнүшүндөгү татаал функция десе болот.

§ 6.2 Элементардык функциялардын классы

6.2.1 Даражалуу жана көп мүчө көрүнүшүндөгү функциялар

1. Даражалуу функциялар.

$y = x^\alpha$ көрүнүшүндөгү функцияны $(x \in X =]0, +\infty[\equiv R_+)$ α - туруктуу чыныгы сан болгон учурда даражалуу функция дейбиз. Эгерде $\alpha = 0$ болсо, анда



6.24 – чийме а)

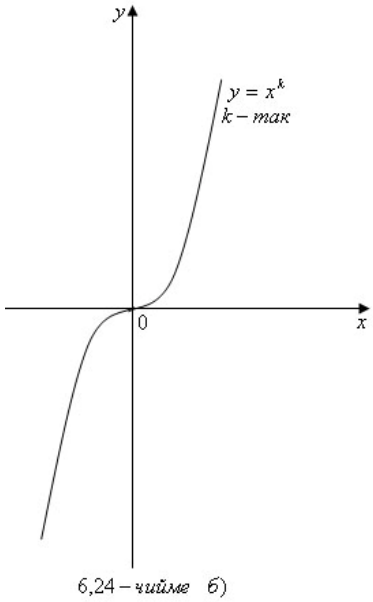
$y = x^0 = 1$ болуп, даражалуу функция $y = 1$ түзүнө айланат.

$0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\infty > \alpha > 1$ болгон учурларда $y = x^{\alpha}$ функциясы X көптүгүндө монотондуу өсүүчү болуп, $1^{\alpha} = 1$ болгондуктан, графиктеринин баары Oxy координаттык тегиздигинин (1 ; 1) чекити аркылуу өтүшөт (6.22 – чийме). Ал эми $\alpha < 0$ болсо, берилген даражалуу функция монотондуу кемүүчү болуп, графиги (1 ; 1) чекитинен өтөт (6.23 – чийме).

Эгерде α оң рационалдык сан болсо, анда аны $\alpha = \frac{m}{n}$ көрүнүшүндөгү кыскарбас бөлчөк көрүнүшүндө жазып, даражалуу функцияны $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ деп жаза алабыз. Демек, n так оң сан болгон учурда терс сандардын тамырлары жашай бергендиктен, даражалуу функциянын аныкталуу областын R_+ арлыгынан,

$X =]-\infty, +\infty[\equiv R$ чыныгы сандардын мейкиндигине чейин кеңейтүүгө болот. n жуп оң сан болгон кезде, аныкталуу области $X = [0, +\infty[$, жуп терс сан болсо $X =]0, +\infty]$ көптүгү болот. Ал эми α терс рационалдык сан болсо, аны $\alpha = -\frac{m}{n}$ кыскарбас көрүнүшүнө келтирип, даражалуу функцияны $y = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ деп жазабыз. n так оң сан болгон учурда, анын аныкталуу области

$X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \{x : x \in R \wedge x \neq 0\}$ көптүгү болот, анткени бөлчөктүн бөлүмү катарында $x \neq 0$ болууга тийиш. n жуп оң сан болсо, терс сандан жуп көрсөткүчтүү тамыр чыкпагандыктан, аныкталуу области



6,24 – чийме б)

$X =]0, +\infty[$ көптүгү болуп калат.

Эгерде $\alpha = k \in Z$ бүтүн сан болсо, даражалуу функция $y = x^k$ көрүнүшүнө келип, аныкталуу областтары $k > 0$ болгондо

$X =]-\infty, +\infty[\equiv R$ көптүгү, ал эми $k < 0$ болгондо

$X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \{x : x \in R \wedge x \neq 0\}$ көптүгү болуп эсептелишет. k жуп сан болсо $y = x^k$ жуп функция, k так сан болсо так функция болуп эсептелет (6.24а).б) - чиймелер).

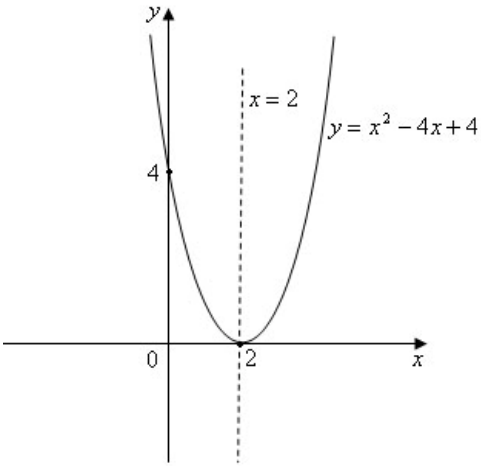
Ошентип даражалуу функциянын аныкталуу области, даража көрсөткүчүнүн белгисине жараша кеңейип же тарып олтургандыктан, жогорудагы $y = x^{\alpha}$ жалпы жазылуусунда аныкталуу область

$X =]0\,, +\infty[$ көрүнүшүндө болот.

2. Көп мүчө көрүнүшүндөгү функциялар.

$n-$ даражадагы көп мүчө же бүтүн рационалдык функция деп

$$y = \mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (6.5)$$



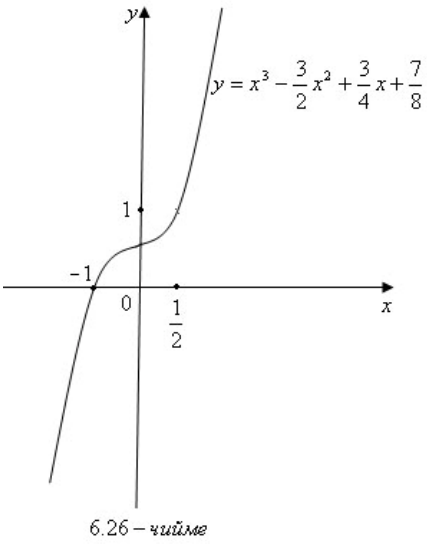
6.25 – *чийме*

көрүнүшүндөгү функцияны айтабыз. Мында даражалар $n \in N$, a_i –коэффициенттери туруктуу фиксирленген рационалдык сандар $a_i \in Q \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (a_n \neq 0)$, аныкталуу области $x \in X \equiv R$ болушат.

Эгерде $n = 0$ болсо, (6.5) функциясы $y = \mathrm{P}_0(x) = a_0$ - түзүнө;

n = 1 болсо,

$y = \mathrm{P}_1(x) = a_0 + a_1 x$ - сызыктуу функциясына; $n = 2$ болсо,



6.26 – *чийме*

$y = \mathrm{P}_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ – квадраттык үч мүчө функциясына айланат.

Мисалы: 1). $y = x^2 - 4x + 4$ квадраттык үч мүчө функциясын айырманын квадратын эсептөө формуласы боюнча $y = (x-2)^2$ көрүнүшүнө келтирип, аныкталуу области $X \equiv R$ болгон, $]-\infty\,, 2[$ аралыгында монотондуу кемүүчү, $]2\,, +\infty[$ аралыгында монотондуу өсүүчү функцияны алабыз. Анын графиги төмөнкү чокусу(2; 0) чекитинде жайгашкан, $x = 2$ түзүнө карата симметриялуу парабола болуп, мезгилсиз жана жуп да, так да эмес функция болот (6.25 – чийме).

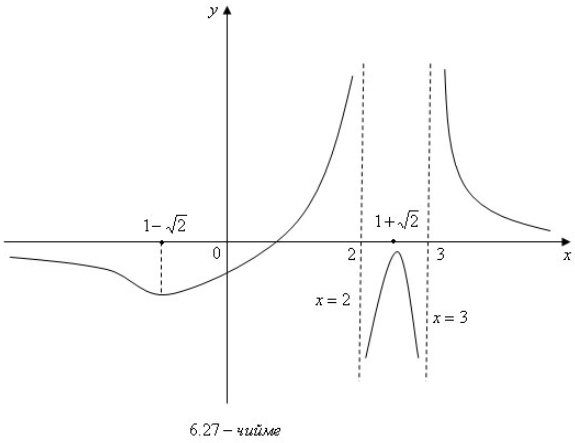
2). $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}$ функциясын айырманын кубун эсептөө формуласын пайдаланып, $y = (x - \frac{1}{2})^3 + 1$ көрүнүшүнө келтирип, графигин тургузалы (6.26 – чийме). Бул функциянын аныкталуу областы X=R болуп, мезгилсиз жана жуп дагы эмес, так дагы эмес өз аныкталуу областынын чегинде монотондуу өсүүчү, асимптоталары жок функция болот.

3. Бөлчөк (рационалдык) функциялар.

Рационалдык функция деп

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m} \qquad (6.6)$$

көрүнүшүндөгү функцияны айтабыз. Мында a_i жана b_j коэффициенттери фиксирленген же туракту рационалдык сандар $a_i \in Q$, $b_j \in Q$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m)$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, n, m - чектүү натуралдык сандар болушат. Берилген (6.6) рационалдык функциясынын аныкталуу областы бөлчөктүн бөлүмү катарында, $Q_m(x) \neq 0$ шартын



6.27 – чийме

канааттандыруучу x чекиттеринин $X = \{x : x \in R \wedge Q_m(x) \neq 0\}$ көптүгү болот. Эгерде $n < m$ болсо, (6.6) функциясын дурус (туура) бөлчөк көрүнүшүндөгү, ал эми $n > m$ болсо буруш (туура эмес) бөлчөк көрүнүшүндөгү функция деп атайбыз.

Мисалы: 1). $y = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$ дурус $(n = 1 < m = 2)$ бөлчөк функциясынын аныкталуу областы $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ шартын канааттандырган R сандарынан турат.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ теңдемесин чыгарып $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ чечимдерин табабыз. Демек берилген функциянын аныкталуу областы болуп, ушул чечимдерден башка бардык чыныгы сандардын

$X =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$ көптүгү эсептелет. $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ сандары сүрөттөлгөн чекиттерди функциянын өзгөчө чекиттери дейбиз. Анткени бул чекиттерге эки жагынан тең жакындасак, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө жакындагандыктан, функциянын маанилери чексизге умтулушуп, чекиттердин эки тарабындагы функциянын маанилери бири – биринен кача башташат. Ошентип $x = 2$ жана $x = 3$ түздөрү вертикалдык асимптоталар, ал эми $y = 0$ түзү горизонталдык асимптота болушат (6.27 -чийме).

Мектеп курсунда функцияны изилдөө темасынан белгилүү болгондой $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ чекиттеринде туундусу

$y' = \frac{(x-1)' \cdot (x^2-5x+6) - (x-1) \cdot (x^2-5x+6)'}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{2-(x-1)^2}{(x^2-5x+6)^2}$ нөлгө тең болуп, алар аркылуу өткөндө белгилери өзгөрүп, бул чекиттер тиешелүү түрдө функциянын минимум жана максимум чекиттери болушат.

$[1 - \sqrt{2}, 2[$ жана $]2, 1 + \sqrt{2}]$ аралыктарында туундусу оң болгондуктан, монотондуу өсөт, ал эми $]-\infty, 1 - \sqrt{2}[$ жана

$]1 + \sqrt{2}, +\infty[$ аралыктарында $y' = f'(x) < 0$ болуп, монотондуу кемийт. Берилген функция мезгилсиз, жуп да эмес жана так да эмес функция болот.

$x^3 - 2x + 1$	x^2+1
$x^3 + x$	x
$0 - 3x + 1$	

1-схема

2). $y = \frac{x^3-2x+1}{x^2+1}$ буруш бөлчөк ($n = 3 > m = 2$) функциясы болот. Буруш бөлчөк функциянын алымын бөлүмүнө 1 – схема боюнча бөлүү менен, дурус бөлчөккө айлантып алалы.

Анда $y = \frac{x^3-2x+1}{x^2+1} = x - \frac{3x-1}{x^2+1}$ бүтүн жана дурус бөлчөк көрүнүшүндөгү рационалдык функцияны алабыз.

6.2.2 Көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялар

1. Көрсөткүчтүү функциялар.

Негизи a саны болгон көрсөткүчтүү функция деп, $y = a^x$ көрүнүшүндөгү функцияны айтабыз. Мында a туракту, оң, бирден айырмалуу чыныгы сан **деген талап** коюлат $(a > 0,\ a \neq 1,\ a \in R)$.

$a = e$ болгондо, $y = e^x$ көрсөткүчтүү функциясын кээде $y = \exp x$ көрүнүшүндө жазып, "экспонента икс" деп окушат.

◦ $a < 0$ болсо, анда $y = a^x$ функциясынын айрым бир x чекиттериндеги маанилери жашабайт, б.а. аларды аныктоо мүмкүн эмес. Мисалы $x = \frac{1}{2}$, $a = -5$ болсо, $y = (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ келип чыгып, терс сандан квадраттык тамыр чыкпагандыктан, функциянын мааниси аныкталбайт. Ошондуктан $a > 0$ талабы коюлган.

◦ $a = 1$ болсо, $y = a^x = 1^x = 1$ келип чыгып, $y = 1$ түзүнө ээ болобуз. Бул түз жөнөкөй жана белгилүү болгондуктан, ага токтолуунун зарылчылыгы жок ($a \neq 1$).

Коюлган шарттардын чегинде $y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы X≡ R аныкталуу областына, Y = $]0, +\infty[$ өзгөрүү областына ээ облуп, аларды бири – бирине өз ара бир маанилүү чагылтып турат. $0 < a < 1$ болгондо $y = a^x$ функциясы X көптүгүндө монтондуу кемүүчү, ал эми $a > 1$ болгондо монотондуу өсүүчү функция болуп эсептелет. Чынында эле $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$ ⇨ $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ айырмасы оң болот. Функциянын тиешелүү маанилеринин айырмасын

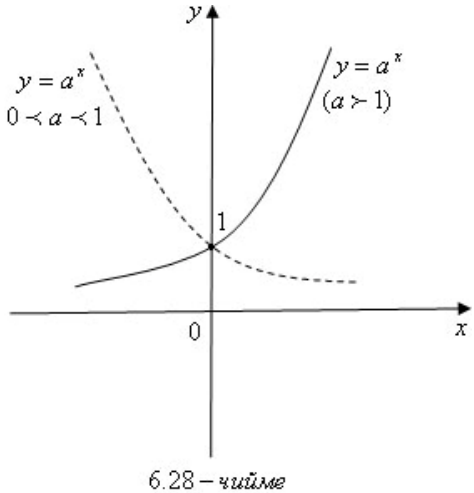
$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+\Delta x} - a^{x_1} = a^{x_1} \cdot (a^{\Delta x} - 1)$

көрүнүшүндө жазып, Δy тин белгиси $a^{\Delta x} - 1$ санын белгисине байланыштуу болорун көрөбүз. Анткени биринчи көбөйтүүчү ар дайым оң сан болуп ($a^{x_1} > 0$), көбөйтүндүнүн белгисине таасирин тийгизбейт. Ошентип $0 < a < 1$ болгондо $a^{\Delta x} < 1$ болгондуктан,

$a^{\Delta x} - 1 < 0$ терс болуп,

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) < 0$ же

$f(x_2) < f(x_1)$ келип чыгат. Бул учурда аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси тиешелеш коюлгандыктан, көрсөткүчтүү функция 6.2 – аныктаманын негизинде монотондуу кемүүчү болот (6.28 – чийме). Ошондой эле $a > 1$ болгондо

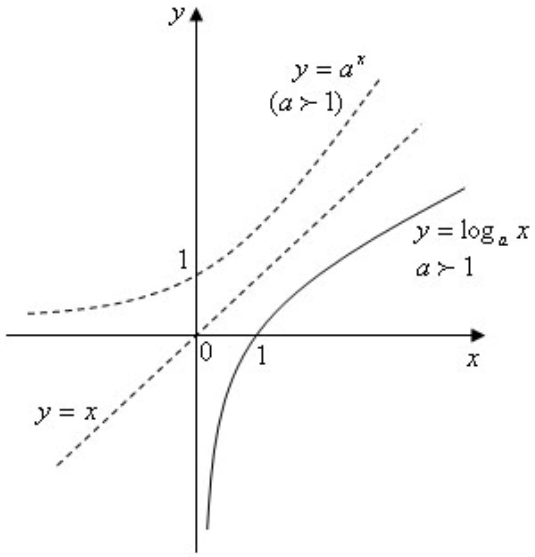


6.28 – чийме

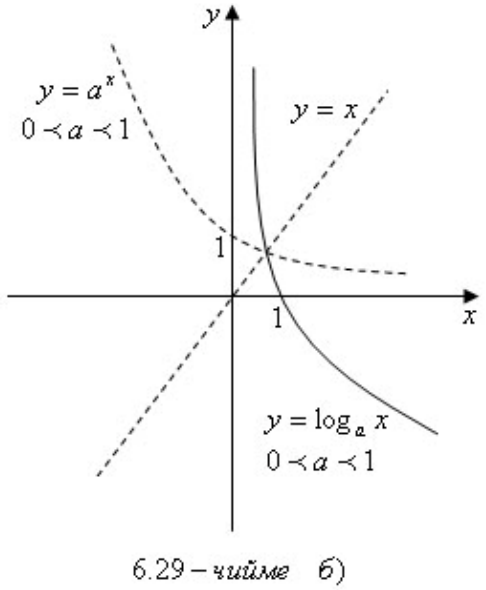
$a^{\Delta x} > 1$ же $a^{\Delta x} - 1 > 0$ келип чыгып,

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ же

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси тиешелеш коюлуп, функция монотондуу өсүүчү болот (6.28 - чийме). $0 < a < 1$, $a > 1$ учурларынын экөөсүндө тең функциянын графиктери (0; 1) чекити аркылуу өтүп (себеби $a^0 = 1$), $y = 0$ жантык асимптота түзү болот. Көрсөткүчтүү функция жуп да эмес, так да эмес, мезгилсиз функция болот.



6.29 – чийме а)



6.29 – чийме б)

2. Логарифмалык функция.

$y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашыргандыктан, анын тескери функциясы жашайт. $y = a^x$ теңдештигинен табылган x өзгөрүлмөсүн, $x = \log_a y$ символу менен белгилеп, аны "a негизи боюнча y өзгөрүлмөсүнүн логарифми " деп окуйбуз. Тескери функцияны жазуу эрежесине ылайык, x менен y өзгөрүлмөлөрүнүн орундарын алмаштырып жазып, $y = a^x$ функциясына тескери болгон $y = \log_a x$ көрүнүшүндө жазылган логарифмалык функцияны алабыз Мында $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in R$ деп кабыл алынат. Өз ара тескери функциялардын аныкталуу жана өзгөрүү областтары алмашкандыктан, логарифмалык функциянын аныкталуу области $X =]0, +\infty[\equiv R$, ал эми өзгөрүү области $Y =]-\infty, +\infty[$ көптүктөрү болушат. Оң функция монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болсо, тескериси да монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болгондуктан, көрсөткүчтүү

функция сыяктуу эле логарифмалык функция да $0 < a < 1$ шартында монотондуу кемүүчү, $a > 1$ шартында монотондуу өсүүчү болот. Өз ара тескери функциялардын графиктери координаттык тегиздиктин $y = x$ биссектриса түзүнө карата симметриялуу жайгашкандыктан, $y = \log_a x$ тескери функциясынын графиги анын оң функциясы болгон $y = a^x$ тин графигин, $y = x$ түзүнө симметриялуу которуу менен тургузулат (6.29 а.б. – чиймелер). Логарифмалык функция $x = 0$ (Oy огу) вертикалдык ассимптота түзүнө ээ болуп мезгилсиз, жуп да эмес, так да эмес функция болот.

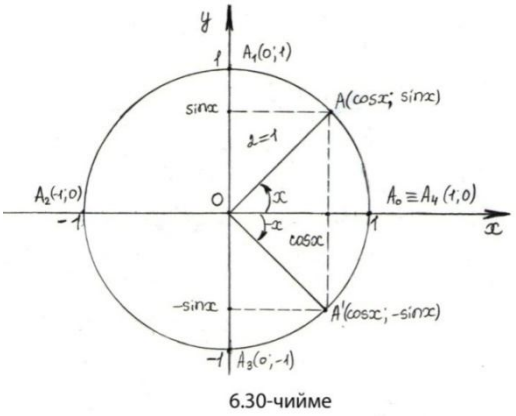
6.2.3 Тригонометриялык функциялар

Бурчтардын чоңдуктарын градус, минута, секунда сыяктуу чен бирдиктери менен катар эле, маниси чыныгы сан болгон радиан чен бирдигинин жардамы менен өлчөп жүрөбүз. Мисалы

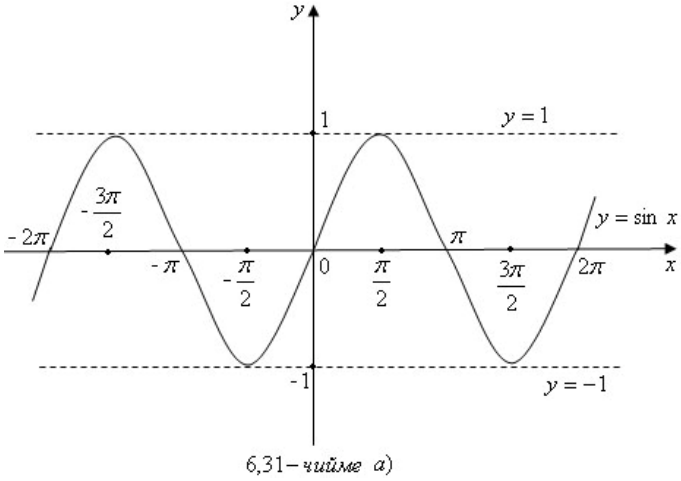
$\pi_{\text{радиан}} = 180^\circ$, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\pi_{\text{радиан}} \approx 3{,}14$ чыныгы санына тең, ал эми

$1_{\text{радиан}} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$ градусту түзөт. Ошентип бурчтардын чоңдук өлчөмдөрүн жалаң гана градустар деп түшүнбөй, чыныгы сандар деп ойлоп, x өзгөрүлмө чыныгы саны менен өзгөрүлмө бурчтарды белгилеп (радиан менен алынган), б.а. аргументтери – чыныгы сандар менен туюнтулган бурчтар болгон функцияларды түзүүгө болот.

1. Синус жана косинус функциялары. Борбору О координаталар башталмасында жайгашып, радиусу $r = 1$ болгон бирдик айланада жайгашкан чекиттердин координаталарын, борбордук бурч менен



6.30-чийме



6,31–*чийме а)*

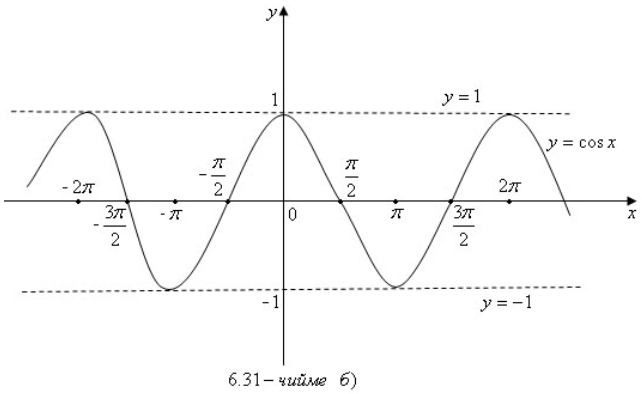
туюнтуу же алардын

арасындагы көз карандылык байланышын орнотуу маселесине токтололу (6.30 - чийме). Берилген бирдик айланада эркин абалда жайгашкан А чекитин алып, ОА радиусун жүргүзөлү. Оx огу менен ОА радиусунун арасындагы бурчту x саны деп алалы. Тегиздикте жайгашкан ар кандай чекит сыяктуу эде, А чекитинин да эки сандардан турган түгөй координаталары бар. А чекитин x бурчуна тиешелеш коюлган чекит экендигин эске алып, анын координаталары болгон түгөй чыныгы сандарын символикалык түрдө $(\cos x\,;\sin x)$ көрүнүшүндө белгилейли. Бул жаңы белгилөө менен киргизилген чыныгы сандарды тригонометриялык сандар деп атап, А чекитинин абциссасын

$\cos x$ "косинус икс" , ординатасын $\sin x$ "синус икс" деп айтып окуйбуз. А чекити бирдик айланага таандык болуп, айлананын радиусу $r = |\mathrm{OA}| = 1$ санынан ашып кетпегендиктен, А чекитинин координаталары катарында киргизилген тригонометриялык сандар $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \sin x \le 1$ аралыктарынан чыгып кете албайт. x өзгөрүлмө бурчу саат жебесине каршы багытта оң сан, ал эми саат жебеси боюнча багытта терс сан болуп, О башталмасынын айланасында айлануу менен бардык R= $]-\infty\,,+\infty[$ чыныгы сандарын кабыл алып чыгуусу мүмкүн. Ошондуктан $y = \sin x$, $y = \cos x$ белгилөөлөрүн киргизип, аларды X = $]-\infty\,,+\infty[\equiv R$ көптүгүн,

Y = $[-1\,,\ 1]$ көптүгүнө чагылтуучу көз карандылык байланыштарын орноткон эрежелер катарында, аныкталуу областы $X =]-\infty\,,+\infty[$, өзгөрүү областы $Y = [-1\,,\ 1]$ көптүктөрү болгон тригонометриялык функциялар деп атайбыз.

1). 6.30 – чиймеден көрүнгөндөй $x = 0$ болсо, А $(\cos x\,;\sin x)$ координаталуу чекити $\mathrm{A}_0(1;0)$ чекитинин абалына келсе, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ болорун көрөбүз. Эгерде $x = \frac{\pi}{2}$ болсо, А чекити $\mathrm{A}_1(0;1)$ чекитине которулуп $\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1$ келип чыгат. $x = \pi$ болсо, А чекити $\mathrm{A}_2(-1;0)$ чекитине



6.31– *чийме б)*

айланып, $\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0$ болот. $x = \frac{3\pi}{2}$ болсо, А чекити $A_3(0;-1)$ чекитине өзгөрүп $\cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ маанилерине ээ болобуз. Ал эми $x = 2\pi$ болсо, А чекити $A_4(1;0) \equiv A_0(1;0)$ бирдик айлананы толук айланып кайтып келет же координаталары $\cos 0 = 1,$ $\sin 0 = 0$ маанилерине экинчи жолу ээ болот. Ушул процессти улантып олтуруп $y = \sin x$, $y = \cos x$ тригонометриялык функцияларынын маанилери, улам бир толук айлануудан кийин кайра кайталанып, мурдагы маанилерин ала бергенин сезебиз. Ошентип

$\mathrm{Sin}(x + 2\pi n) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ теңдештиктери орун алат. $n = 1, 2, 3,$ ... айлануулардын санын көрсөтүп, $y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялары болсо, $T_n = 2\pi n$ мезгилдерине ээ болушат. Бирок алардын мезгили 6.4 – аныктама боюнча бир гана Т саны болгондуктан, мезгил деп $T = \min\{ T_n \} = 2\pi$ оң санын алабыз. Алардын графиктерин $x \in [0\ ,\ 2\pi]$ аралыгындагы маанилери боюнча тургузуп, калган аралыктарга кайталап сызып чыгуу жетиштүү болот (6.31а.б. – чиймелер).

2). Эгерде x бурчун каршы багыттагы $"-x"$ бурчуна алмаштырсак, анда А $(\cos x\,;\sin x)$ чекити $A'(\cos(-x)\,;\sin(-x))$ чекитине өзгөрөт. А жана A' чекиттери Ox огуна карата симметриялуу жайланышкандыктан, $A'(\cos(-x)\,;\sin(-x)) \equiv A'(\cos x\,;-\sin x)$ координаталары менен жазылып,

$\cos x = \cos(-x)$ жана $\sin(-x) = -\sin x$ теңдештиктерине ээ болобуз.

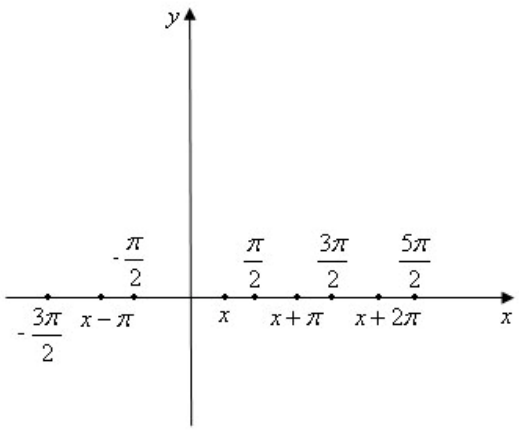
Мындан $y = \cos x$ функциясы $f(-x) = f(x)$ шартын канааттандырып, жуп функция болорун жана графиги Oy огуна карата симметриялуу жайгашары келип чыгат. Ал эми $y = \sin x$ функциясы $f(-x) = f(x)$ шартын канааттандыргандыктан так функция болуп, графиги О башталма чекитине карата симметриялуу жайгашат.

3). 6.31а.б. – чиймелеринен $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларынын бири – биринен Ox огу боюнча $\frac{\pi}{2}$ аралыгына которуштурулган, бир эле функция экендигин байкайбыз. Демек,

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ теңдештиги орун алып, $y = \sin x$ функциясы $y = \cos x$ функциясына караганда $\frac{\pi}{2}$ санына мурда келген, ошол эле функциянын кайталанышы болуп эсептелет. Мындай бир эле функциянын белгилүү аралыктан кийин кечигип кайталанышы, математикада гармоникалык термелүү кубулуштарын моделдештирүүдө пайдаланылгандыктан, $y = \sin x$, $y = \cos x$ – функцияларын гармоникалык функциялар деп да аташат.

4). $y = \sin x$ функциясы $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгында монтондуу өсүүчү болуп, аргументтердин ар башка маанилерине функциянын да Y = $[-1, 1]$ аралыгындагы ар башка маанилери тиешелеш коюлгандыктан(чоңуна чоңу, кичинесине кичинеси), өз ара бир маанилүү функция боло алат. Бирок жалпы $X =]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областынын чегинде кайталанма мүнөзгө ээ болгондуктан, $y = \sin x$ ти X көптүгүндө (аныкталуу областында) көп маанилүү функция дейбиз. Ошондуктан $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгында гана $y = \sin x$ теңдештигинен, x өзгөрүлмөсүн бир маанилүү таба алабыз. Бул табылган маанини $x = \arcsin y$ символу менен белгилеп, “ икс барабар арксинусигрэк” – деп окуйбуз.

$y = \sin x$ функциясы T = 2π мезгилине ээ болгондуктан, анын $X =]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областын $\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right]$ сыяктуу ($k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$) сегменттердин биригүүсү катарында карап (6.32 – чийме), ар бир сегменттерде $y = \sin x$ теңдештигинен, x өзгөрүлмөсүн бир маанилүү таап, табылган маанилерди бардык сегменттер үчүн жалпылап, $x = \arcsin y + \pi k$ $(k \in Z)$

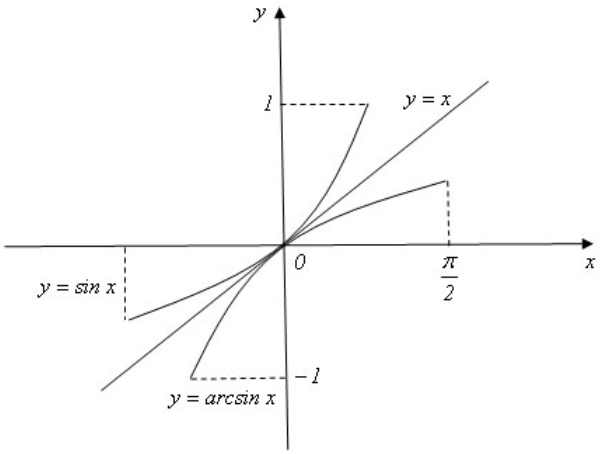


6.32 – чийме

көрүнүшүндө жазуу мүмкүн. Ошондуктан мындай x маанисин бүтүндөй X = $]-\infty, +\infty[$ сан огуна

улаштыра жайылтып, жалпы учурдагы $y = \sin x$ функциясына тескери болгон $x = \arcsin y + \pi k$ $(k \in Z)$ функциясын түзүүгө болот.

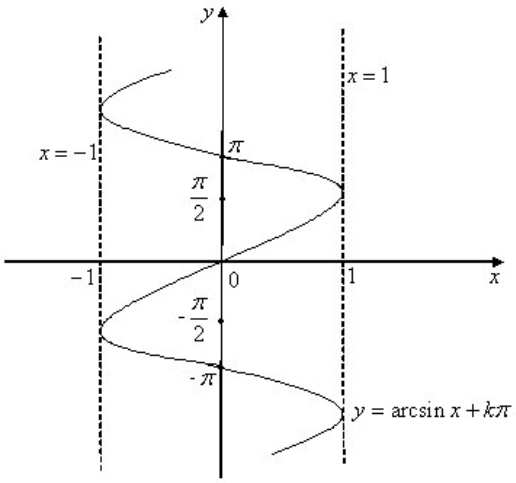
Тескери функцияны жазуу эрежесин карап, x менен y өзгөрүлмөлөрүнүн орундарын алмаштырып жазып, тескери функцияны Oy огу боюнча $y = \arcsin x + \pi k$ $(k \in Z)$ эрежеси менен уланта алабыз.



6.33 – чийме

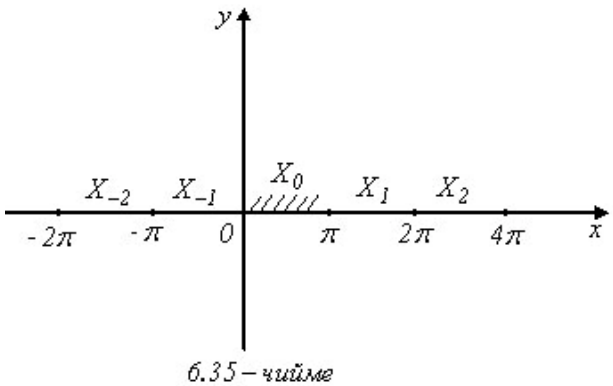
Өз ара тескери функциялардын аныкталуу областы менен өзгөрүү областын орундары алмашкандыктан, табылган тескери функциянын аныкталуу областы $X = [-1\,,1]$ сегменти, өзгөрүү областы

$Y =]-\infty\,,+\infty[\equiv R$ болот. Тескери $y = \arcsin x$ функциясынын графиги,



6.34 – чийме

$y = \sin x$ функциясынын графигин $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде $y = x$ түзүнө карата симметриялуу которуу менен сызылып (6.33 – чийме), андан кийин жалпы $Y =]-\infty\,,+\infty[$ аралыгына $y = \arcsin x + \pi k$ маанилери боюнча улантылат (6.34 –чийме).



6.35 – чийме

5). $y = \cos x$ функциясынын $X =]-\infty\,,+\infty[\equiv R$ аныкталуу областын

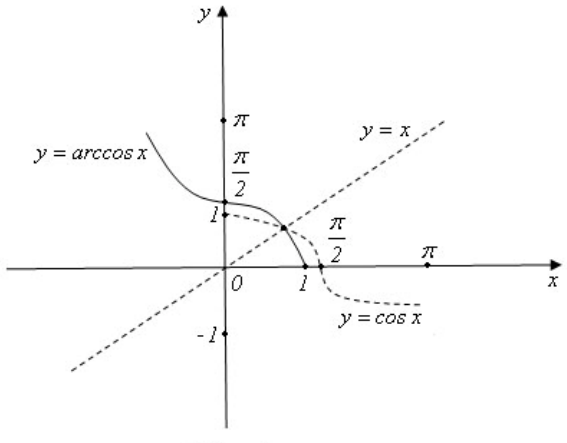
$$X_k = [\pi k\,,\pi(k+1)\,]$$

сегменттерине бөлүп $(k \in Z)$, сан огун алардын биригүүсү катарында элестетели (6.35 – чийме). Анда $y = \cos x$

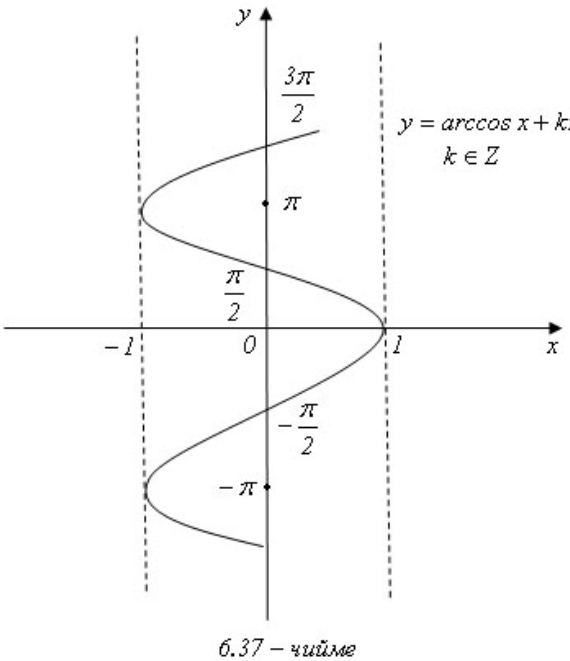
функциясы бул сегменттердин ар бирин өз - өзүнчө, Y = $[-1\,,1]$ сегментине өз ара бир маанилүү чагылтып, ар бир аралыктардын өзүнө ылайыкташкан тескери функциялары табылат же жашайт. Мисалы $k = 0$ болсо, $X_0 = [0\,,\,\pi]$ сегменти келип чыгып, бул аралыкта $y = \cos x$ функциясы монотондуу кемүүчү болуп, ар кандай x аргументтерине, функциянын ар кандай y маанилери тиешелеш коюлуп, $\forall\, x_1, x_2 \in X_0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ шарты аткарылат. Ошондуктан X_0 аралыгы, Y = $[-1\,,1]$ аралыгына өз ара бир маанилүү чагылтылып (монотондуу функция катарында), тескери функция табылат же жашайт. Демек берилген аралыкта $y = \cos x$ теңдештигинен x өзгөрүлмөсүн бир маанилүү табууга болот. Табылган маанини $x = \arccos y$ символу менен белгилеп, "*икс барабар* арккосинусигрэк" – деп окуйбуз.

Ар бир $X_k = [\pi k\,,\,\pi(k+1)\,]$ сегменттеринин өзүндө $y = \cos x$ теңдештиктерин x өзгөрүлмөлөрүнө карата чыгарып чыксак, анда бул x өзгөрүлмөлөрү бири - биринен πk кошулуучуларына гана айырмаланып, $x = \arccos y + \pi k,\ \ k \in Z$ көрүнүшүндө жазылышат. Ошентип $X_k = [\pi k\,,\,\pi(k+1)\,]$ сегменттерин кыялыбызда улаштырып, $y = \cos x$ теңдештигин (теңдемесин) бүтүндөй $X =]-\infty\,,+\infty[\ \equiv R$ аралыгында x ке карата, $x = \arccos y + \pi k,\ \ k \in Z$ көрүнүшүндө чыгардык деп ойлойбуз.

Тескери функцияны жазуу эрежеси боюнча x менен y өзгөрүлмөлөрүнүн орундарын алмаштырып, $y = \cos x$



6.36 – чийме



6.37 – чийме

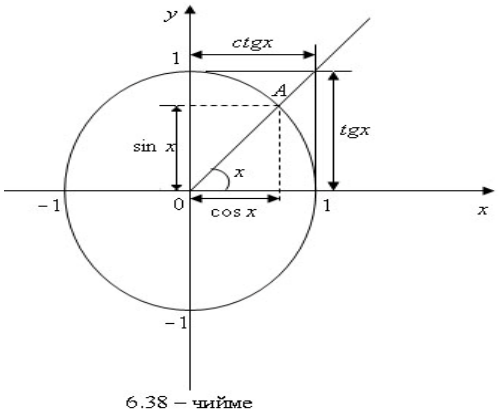
функциясынын $X_0 = [0\ ,\ \pi]$ сегментиндеги тескери функциясын $y = \arccos x$ көрүнүшүндө жазабыз. Табылган тескери функцияны Oy огу боюнча $y = \arccos x + \pi k$ эрежеси менен улантабыз. Жалпы учурда аныкталуу областы $X = [-1\ ,1]$, өзгөрүү областы $Y =]-\infty\ ,+\infty[\ \equiv R$ болгон, тескери $y = \arccos x$ функциясын түзгөн болобуз. Тескери функциянын графигин, адегенде $X_0 = [0\ ,\ \pi]$ сегментиндеги $y = \cos x$ функциясынын графигин $y = x$ түзүнө симметриялуу которуу менен тургузуп (6.36 – чийме), андан кийин Oy огу боюнча $y = \arccos x + \pi k$ маанилерине карап улантып сызабыз (6.37 – чийме).

6). Өз ара тескери функциялардын суперпозицияларын түзүп, (6.4) формулаларын пайдалансак, төмөндөгүдөй теңдештиктер келип чыгат:

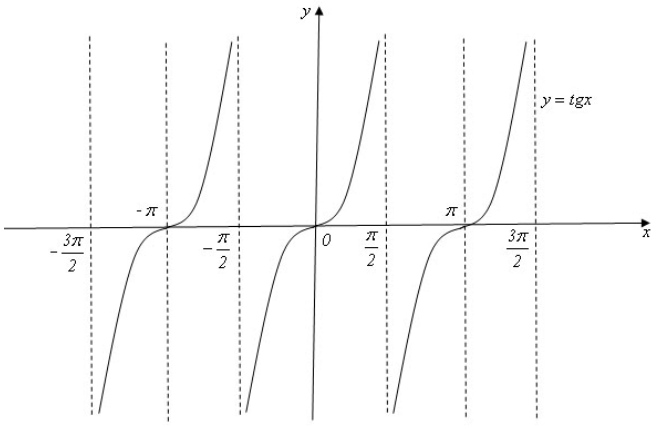
$\sin(\arcsin x) = x$, $\arcsin(\sin x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$.

Аларды пайдаланып $\cos\ (\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$,

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$ ээ болобуз. Мында



6.38 – чийме



6.39 – чийме

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ деп эсептеп, квадраттык тамырлардын оң белгилерин алабыз. Дагы бир $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ теңдештигин далилдейли. Аны $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$ көрүнүшүндө жазып, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ формуласын пайдалансак,

$\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arccos x)+\cos(\arcsin x)\cdot\sin(\arccos x)=x^2+$
$+(\sqrt{1-x^2})^2=x^2+1-x^2=1$ келип чыгып, теңдештиктин туура экендиги далилденет.

2. Тангенс жана котангенс функциялары.

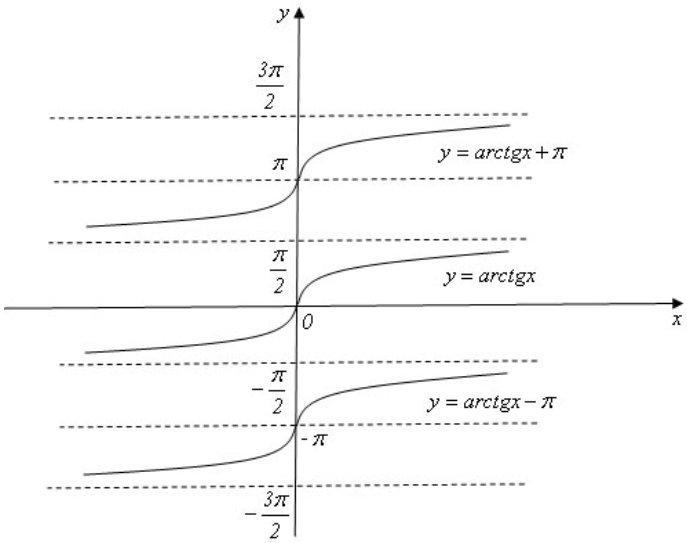
1). $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ функциясын тангенс функциясы деп атап, $y=tgx$ символу менен белгилейбиз. $y=tgx$ функциясы бөлчөктүн бөлүмү $\cos x\neq 0$ же $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$ шарттары аткарылган кезде гана жашагандыктан, анын аныкталуу областы

$X_k=\left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\,,\,\frac{\pi}{2}(2k+1)\right[\ (k\in Z),$ өзгөрүү областы Y = $]-\infty\,,+\infty[$ $\equiv R$ көптүктөрү болушат. Ошентип $y=tgx$ функциясы ар бир X_k интервалдарын өз - өзүнчө, Y көптүгүнө өз ара бир маанилүү чагылтуу кызматын аткарып, $x=\frac{\pi}{2}(2k-1)$ жана $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ вертикалдык асимптота түздөрүнө ээ, анткени бул чекиттерде бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланып, өзгөчө абалдар орун алышат же функциянын маанилери жашабайт. $y=tgx$ функциясынын маанисинин, x бурчунун чоңдугу менен кандай байланышканын, геометриялык жактан жогорудагы бирдик айлананын жардамы менен көрсөтүүгө болот (6.38 – чийме). Тангенс функциясынын графигин ар бир X_k интервалдарында өз - өзүнчө тургузабыз.

Мисалы $k=-1,\ 0,\ 1$ болгон учурлардагы $X_{-1}\,,\ X_0\,,\ X_1$ интервалдарындагы графиктери, 6.39 – чиймедеги көрүнүштөрдө болушат. $y=tgx$ бир эле функция болуп эсептелгени менен, ар бир X_k интервалдарында ар башка функция сыяктуу элести калтырат. Ошондой болсо да $f(x+\mathrm{T})=tg(x+\pi)=tgx=f(x)$ шартын канааттандыруучу, T = π оң саны табылгандыктан, тангес функциясын π мезгилдүү функция деп, графиктери X_k интервалдарында π аралыгынан кийин кайра кайталанып турат деп түшүнөбүз.

$tg(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-tgx$ аткарылгандыктан, ар бир

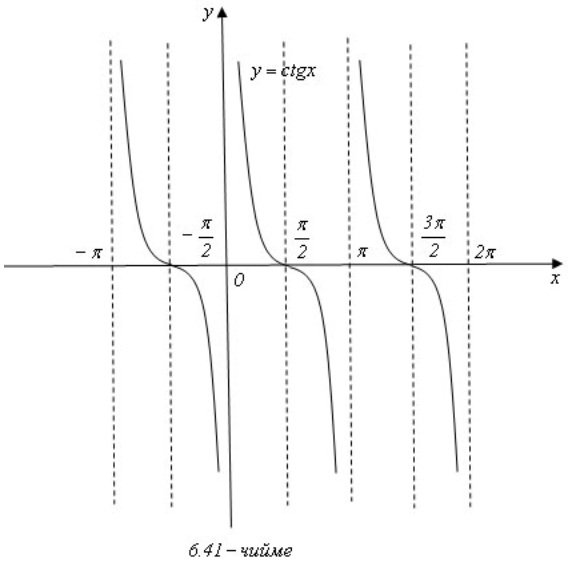
$\left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\,,\,\frac{\pi}{2}(2k+1)\right[\ (k\in Z)$ аралыктарында так функция болот.



6.40 – чийме

Ар бир

$X_k = \left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\,,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right[$ $(k \in Z)$ аралыктарында тангенс функциясы монотондуу өсүүчү болуп, өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашыргандыктан, анын тескери функциясы жашайт же табылат. Демек $y = tgx$ теңдештигин x өзгөрүлмөсүнө карата чыгарууга болот. Табылган x ти $x = arctg\,y$ символу менен белгилеп, аны “икс барабар арктангенсигрэк” - деп окуйбуз.

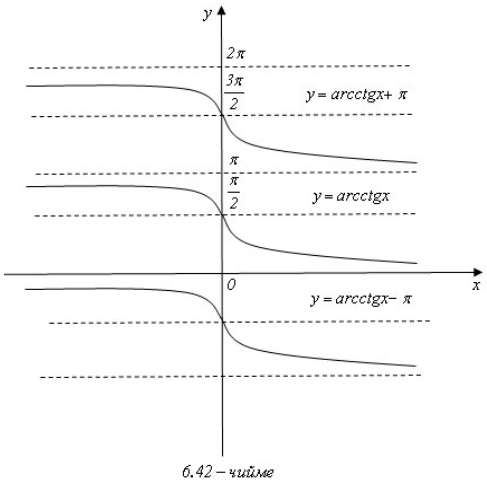


6.41 – чийме

Тескери функцияны жазуу эрежесине таянып, x менен y өзгөрүлмөлөрүнүн орундарын алмаштырып, аныкталуу областы X≡ R , өзгөрүү областы

$Y_k = \left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\,,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right[$

$(k \in Z)$ болгон, тангенс функциясына тескери



6.42 – чийме

$y = arctg\,x + k\pi$ функцияларын алабыз (6.40 – чийме).

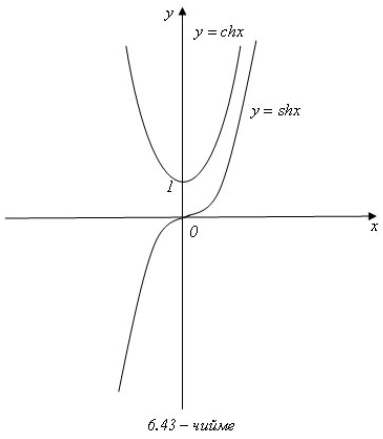
$Y_0 = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$ интервалында арктангенс функциясы

$y = arctg\,x$ көрүнүшүндө жазылат.

2). $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ көрүнүшүндөгү функцияны котангенс функциясы деп, символикалык түрдө $y = ctg\,x$ деп белгилейбиз. Анын аныкталуу области $\sin x \neq 0$ шартын канааттандыруучу $x \neq \pi k$ чыныгы сандары,

же $X_k =]\pi k\ ,\ \pi(k+1)\ [$ $(k \in Z)$ интервалдары, ал эми өзгөрүү областы $Y \equiv R$ көптүгү болушат. x бурчу менен котангенс функциясынын байланышы бирдик айлананын жардамы менен 6.38 – чиймеде көрсөтүлгөн. Арктангенс функциясына да , тангенс функциясы сыяктуу талдоолорду жүргүзүү менен, анын T = π мезгилдүү, так жана X_k областтарында монотондуу кемүүчү болуп, тескери функциясы жашарын билебиз. Тескери функция $y = arcctg\, x$ көрүнүшүндө жазылып, $X \equiv R$ - аныкталуу областына, $Y_k =]\pi k\ ,\ \pi(k+1)\ [\ ,\ (k \in Z)$ – өзгөрүү областына ээ болот. $y = ctg\, x$ жана $y = arcctg\, x$ функцияларынын графиктери 6.41, 6.42 – чиймелерде көрсөтүлгөн.

3). Тангенс жана котангенс функциялары менен өз ара тескери функциялардын суперпозицияларын түзүп,



6.43 – чийме

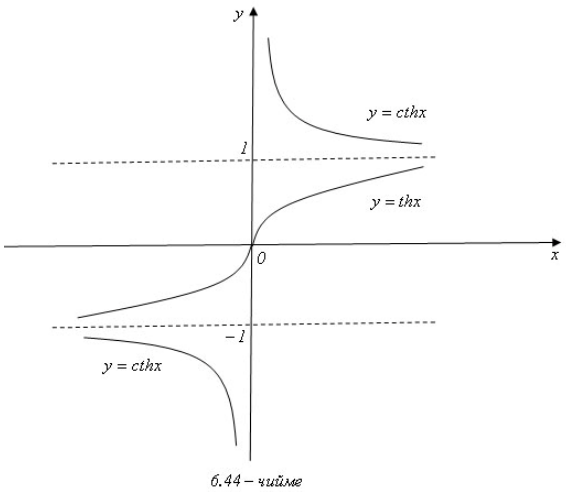
$$tg(arctg\, x) = arctg(tg\, x) = x,$$

$$ctg(arcctg\, x) = arcctg(ctg\, x) = x\ ,$$

$arctg\, x + arcctg\, x = \frac{\pi}{2}$ формулаларын алабыз. Ошондой эле $arctg\, x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\arcsin x = arcctg = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ байланыш формулаларын келтирип чыгарууга болот.

6.2.4 Гиперболалык функциялар

Негизи e саны болгон $y = e^x$ көрсөткүчтүү функцияларынын суперпозициясынан турган



6.44 – чийме

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ функциясын гиперболалык синус функциясы деп, $y = sh\, x$ символу менен белгилейбиз. Ошондой эле

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\, x$ – гиперболалык косинус, $y = \frac{sh\, x}{ch\, x} = th\, x$ - гиперболалык тангенс $(ch\, x \neq 0)$, $y = \frac{ch\, x}{sh\, x} = cth\, x$ – гиперболалык

котангенс ($sh\ x \neq 0$) функциялары деп аталышат.

$y = sh\ x$ так , ал эми $y = \mathrm{c}h\ x$ жуп функциялар болушуп, X≡ R көптүгүндө аныкталышат. Бул эки функциялардын графиктери 6.43 – чиймеде көрсөтүлгөн. Алардын гиперболалык синус, косинус функциялары деп аталышынын себеби, айрым касиеттеринин тригонометриялык функциялардын касиеттерине окшоп кеткендигинде. Чынында эле

$ch(a \pm b) = ch\ a \cdot\ sh\ b\ \pm\ chb \cdot sh\ a$,

$sh\ (a \pm b) = sh\ a \cdot\ ch\ b\ \pm sh\ b \cdot ch\ a$ теңдештик формулаларынын орун аларын текшерип көрүүгө болот.

$y = th\ x$, $y = \mathrm{c}th\ x$ функцияларынын графиктери 6.44 – чиймеде көрсөтүлгөн.

Гиперболалык функциялар өз ара бир маанилүү чагылтууларды ишке ашырышкандыктан аныкталуу областтарында, алардын тескери функцияларын табууга болот.

Эскертүү: Каралган элементардык функцияларды алгебралык, иррационалдык, трансценденттик деп бөлүп да айтышат. Эгерде функцияны берүү эреже – мыйзамы арифметикалык төрт амалдар жана бүтүн даражага көтөрүү катышкан формулаларга негизделсе, анда аны алгебралык функция дешет. Демек даражалуу, көп мүчө, рационалдык функциялар алгебралык функцияларга киришкени менен, аларда радикалдар (тамыр чыгаруу талабы) катышып калса, иррационалдык функциялар болуп калышат. Арифметикалык төрт амалдан башка, жаңы символдор менен белгиленген $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, a^x *сыяктуу амалдар катышкан функциялар трансценденттик функциялар болушат.*

Бардык алгебралык, иррационалдык, трансценденттик функциялар жана алардын ар кандай суперпозицияларынан турган функциялар, элементардык функциялардын классы деген атты алган.

6.2.5 Атайын функциялар

Функцияларды аналитикалык жол менен берилүү ыкмаларынын көпчүлүгү, арифметикалык амалдарга негизделген формулалар

болушса, айрымдары геометриялык ченөө амалдары менен байланышат. Мисалы бирдик тегеректеги бурчтарды, жааларды, кесиндилерди сандар менен ченөө эрежелеринен тригонометриялык функциялар түзүлдү. Бирок практикалык колдонууларда функцияларды түзүүнү чектебестен, кеңири мааниде же жаратылыш кубулуштарынын табиятын түшүндүрүүчү жана аларды чечмелөө жолунда колдонууга мүмкүн болгон аппарат (каражат) катарында түшүнүү зарылчылыгы келип чыгат.

Адам баласынын дүйнө таануу жолунда, бирде теориялык изилдөө алдыга кетсе, бирде практикалык байкоодон келип чыккан жыйынтыктар алдыга кетип олтурат. Мисалы 1929 - жылы англиялык математик – физик Поль Адриен Мерис Дирак, электр жана магнит талааларында өтө тез ылдамдык менен кыймылдаган электрондун абалын мүнөздөөчү функцияны сунуш кылып, теориялык жактан кванттык физикага олуттуу жаңылык киргизген. Анын бул теориясы убагында колдоо таппаса да, 1932 – жылы экспериментте ырасталып, электрондун анти бөлүгү болгон оң зарядду – позитрон табылган соң, окумуштуулар дүйнөсүндө чоң сенсацияны жараткан. Ошентип биринчи жолу Дирактын “Кванттык механиканын принциптери” аттуу эмгегинде колдонулган функция, дельта – функция деген ат менен белгилүү болуп, тажрыйба менен теориянын бирин - бири толуктап, жетелеше жүргөнүнө мисал болуп калды.

6.7 Аныктама. *Дельта – функциясы деп*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

шартын канааттандыруучу,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\text{ , эгерде } x \neq 0,\ x < 0,\ x > 0 \text{ болсо,} \\ \infty\text{ ,} \qquad\qquad \text{эгерде } x = 0 \text{ болсо} \end{cases} \qquad (6.7)$$

символу менен белгиленген функцияны айтабыз.

Дельта – функциянын негизги өзгөчөлүгү болуп,

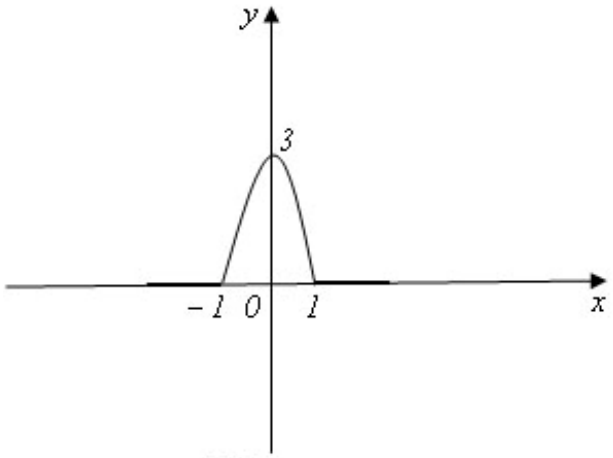
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\delta(x)\,dx = f(0) \qquad (6.8)$$

теңдештигинин жардамы менен, аны δ: $f(x) \to f(0)$ чагылтуусун ишке ашыруучу оператор катарында колдонууга мүмкүн экендиги эсептелет. x өзгөрүлмөсүн Ox огу боюнча a бирдик оң жакка жылдырып, (6.7) , (6.8) формулаларын

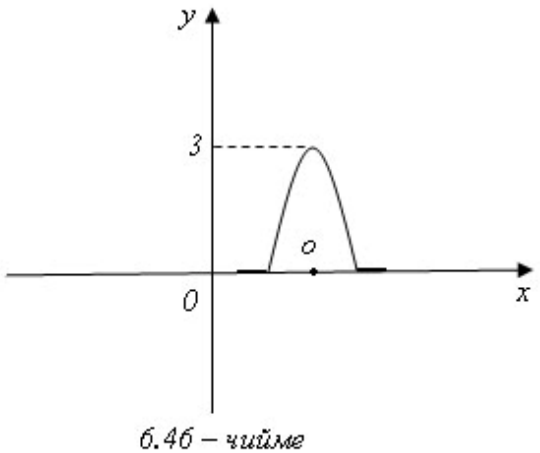
$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0\text{ , эгерде } x \neq a,\ x < a,\ x > a \text{ болсо,} \\ \infty\text{ , эгерде } x = a \text{ болсо} \end{cases} \qquad (6.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\delta(x-a)\,dx = f(a) \qquad (6.10)$$

көрүнүштөрдө жазып, колдонууга болот.

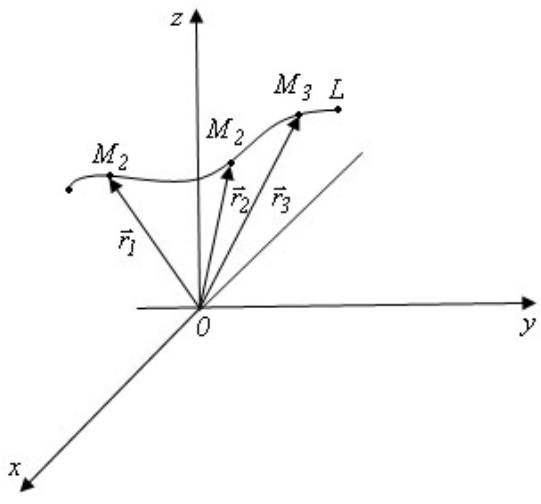


6.45 – чийме



6.46 – чийме

Дельта – функциясынын графигин (6.7), (6.9) учурлар үчүн 6.45 , 6.46 – чиймелерде көрсөтөбүз.



6.47 – чийме

Мындай кайсы бир атайын кубулуштарга ылайыкташып түзүлгөн функцияларды, атайын функциялар деп атайбыз. Математикада Дирактын атайын функциясынан башка Гриндин, Лагеррдин, Якобинин, Эрмиттин, Неймандын, Хиллдин,

Вейерштрасстын ж.б.у.с. , көптөгөн атайын функциялар кеңири колдонулуп жүрөт.

6.2.6 Скалярдык аргументтүү вектор – функция

Үч ченемдүү R^3 мейкиндигинде кандайдыр бир L траекториясы боюнча М материалдык чекити кыймылдап жүрсүн дейли (6.47 - чийме). Анда убакыттын ар бир t ирмеминдеги М чекитинин абалын: М чекитине туура келген $\vec{r}$ радиус векторунун узундугу, багыты, $\overrightarrow{v}$ ылдамдыгы жана $\vec{a}$ ылдамдануусу аркылуу мүнөздөп аныктай алабыз. Ошондуктан бул векторлордун ар бирин t санына (скалярына) карата $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(t), \quad \vec{a} = \vec{a}(t)$ көрүнүшүндөгү функциялар деп эсептөөгө болот.

6.8 Аныктама. *Эгерде t скалярынын $]\alpha, \beta[$ интервалындагы ар бир маанисине, кайсы бир эреже – мыйзамдын негизинде бир $\vec{a}$ вектору тиешелеш коюлса, анда бул эреже – мыйзамды $\vec{a} = \vec{a}(t)$ көрүнүшүндө жазып, скалярдык аргументтүү вектор – функция дейбиз.*

Айталы $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ векторлору $Oxyz$ - декарттык координаталар системасынын орттору же базистик векторлору болушсун, анда $\vec{a}$ векторун базистик векторлор системасы боюнча ажыратып, $\vec{a} = \{x, y, z\}$ координаталары менен

$$\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (6.11)$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Эгерде t скалярына карата $\vec{a} = \vec{a}(t)$ вектор – функция болсо, анда анын координаталары да t га карата функция болушуп,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t), \end{cases} \qquad \alpha < t < \beta \qquad (6.12)$$

көрүнүшүндөгү параметрдик теңдеме менен жазылат. Бул учурда (6.11) вектор – функция катарында

$$\vec{a}(t) = \varphi(t)\vec{\imath} + \psi(t)\vec{\jmath} + \eta(t)\vec{k} \quad (6.13)$$

көрүнүшүндө жазылат. Ошентип скалярдык аргументтүү $\vec{a} = \vec{a}(t)$ вектор – функциясын параметрдик (6.12) функциялар, же вектордук жазылыштагы (6.13) көрүнүштөрүндө берүүгө болот.

М чекитин кыймылдаган издерин туташтыруучу L түзү, координата башталышы O(0; 0; 0) чекитинен чыгуучу $\vec{a} = \vec{a}(t)$ радиус – векторунун учтары сызган ийри болуп эсептелип, вектор – функциянын годографы деп аталат. Ошентип (6.12) теңдештиги L ийрисинин параметрдик теңдемеси болсо, ал эми ийринин вектордук теңдемеси

$$\vec{a}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \eta(t)\vec{k}\ , \quad \alpha < t < \beta \qquad (6.14)$$

көрүнүшүндөгү вектор – функция болот.