12 – лекция:

ФУНКЦИЯЛАРДЫН ПРЕДЕЛДЕРИ

Функциянын предели

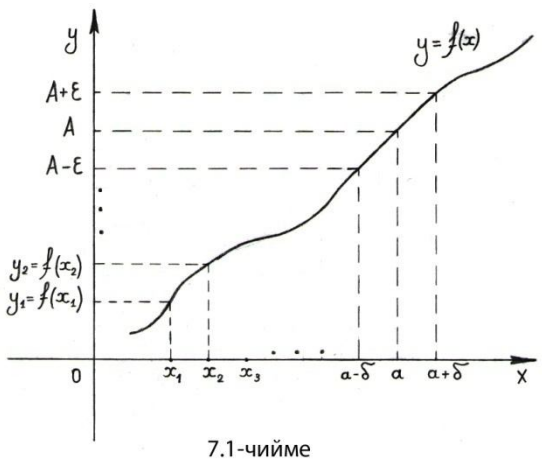
7.1.1 Функциянын чекиттеги предели

X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтуучу $y = f(x)$ функциясы берилсин. X жана Y көптүктөрү R чыныгы сандарынын мейкиндигинде кармалып тургандыктан, алардын элементтерин коңшулук деңгээлге чейин таануу мүмкүн эмес экендигин (1- бөлүк, §1 , 1.1.4) билебиз. Ошондуктан X көптүгүндө аргументтердин a чекитине жакындап келүү же жыйналуу процессин, x аргументтери a чекитине жыйналуучу удаалаштыктын мүчөлөрү боюнча жүрүп олтуруп жетет деп элестетебиз

$$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n , \ldots \to a . \qquad (7.1)$$

Анда ушул чекиттерге тиешелүү болгон функциянын маанилери да, Y көптүгүндө $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, . . ., $y_n = f(x_n)$, . . . сандарынан турган, кандайдыр бир A санына жакындап келүүчү же жыйналуучу

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots\ , f(x_n),\ \ldots \to A \qquad (7.2)$$



7.1-чийме

удаалаштыгын түзүшү мүмкүн (7.1 – чийме). Айтылган пикирди R мейкиндигинде киргизилген ченөө эрежеси – метриканын же аралыктардын тилинде, аныктама көрүнүшүндө билдирели.

7.1 Аныктама. *Жетишерлик кичине* ε *оң санынын кандай тандалганына карабастан, ага ылайыкталган жетишерлик кичине* δ *оң саны табылып,* a *чекитинин* $\delta -$ *аймакчасынын ичинде жайгашкан*

бардык x чекиттериндеги $f(x)$ функциясынын маанилери, A чекитинин ε – аймакчасынын ичинде жайгашса, анда A санын (чекитин) функциянын a чекитиндеги предели деп атап, символикалык түрдө

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (7.3)$$

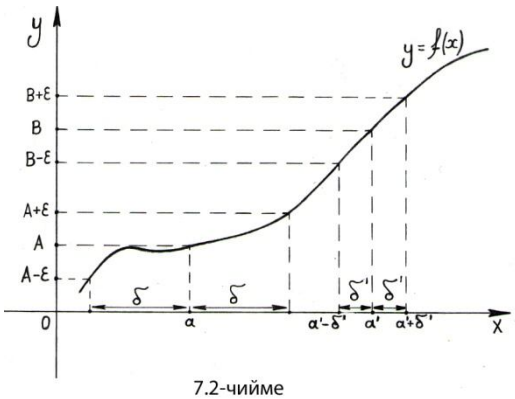
көрүнүшүндө жазабыз жана "x өзгөрүлмөсү a санына умтулган кезде $f(x)$ функциясы A пределине ээ болот" – деп окуйбуз. Эгерде мындай $\delta > 0$ саны табылбаса, же такыр жашабаса, анда функциянын a чекитиндеги предели жашабайт же аныктоого мүмкүн эмес дейбиз.

R мейкиндигиндеги ченөө эрежеси болгон метриканын тилинде бул аныктаманы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \rho(a\,, x) = |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ \rho(f(x), \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon \quad (*)$$

шартынын аткарылышы катарында түшүнүүгө болот.

Ошентип (7.3) аткарылса, анда $\varepsilon > 0$ санына карата ылайыкталып табылган $\delta > 0$ саны аргументтердин a чекитине жакындашуу аралыгынын чен - чоңдугун көрсөтсө, эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ саны $f(x)$ функциясынын маанисинин A санына жакындашуу аралыгынын чен – чоңдугун көрсөтөт. Табылган δ саны алдын ала тандалган ε санынан көз каранды болорун байкайбыз $\delta = \delta(\varepsilon)$. Умтулуу ылдамдыктарына карата салыштырсак, δ саны аргументтердин a санына жакындашуу ылдамдык – чен бирдигин түшүндүрсө, ал эми ε саны функциялардын маанилеринин A санына жакындашуу ылдамдык – чен бирдигин түшүндүрөт. Жалпы учурда табылган δ оң саны, ε оң саны менен кошо a чекити (саны) жайгашкан абалдан да көз каранды болот $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.



7.2-чийме

Мисалы жетишерлик кичине ε оң саны бирдей чоңдукта тандалып, $\{f(x)\}$ маанилеринин A , B пределдик маанилерине жетүү же жакындашуу ылдамдыктары бир эле $\varepsilon -$ саны менен ченелгенине карабай, $\{x\}$ аргументтеринин эки башка абалда алынган a, a'

сандарына (чекиттерине) жетүү же жакындашуу ылдамдыктары ар башка δ , δ' оң сандары менен ченелгенин 7.2 – чиймеде көрсөтөбүз. Мындан ар дайым эле X аныкталуу областынын чекиттериндеги аргументтердин жакындашуу ылдамдык – чендеринин (коюулануусун) бирдей болушунан, функциянын маанилеринин да жакындашуу ылдамдык чендеринин (коюулануусун) бирдей болушу (тескериси да) келип чыкпайт деген кортунду чыгарабыз.

∘ Функциянын чекиттеги пределин, аргументтер a чекитине коюуланган (анын δ - аймакчасына кирген) кезде, функциянын маанилери A чекитине коюланат (анын ε - аймакчасына кирет) деп түшүнүүгө болот. X көптүгүндөгү a чекитинин жайгашуу абалына карап, аргументтер бул чекитке (санга), Оx огу боюнча оң жана сол багыттар менен же эки багыттар боюнча бирдей жакындап келиши же коюуланышы мүмкүн экендигин көрөбүз. Эгерде x аргументтери a чекитине оң жактан гана жакындаса, анда функциянын бул чекиттеги предели оң жактуу, ал эми сол жактан гана жакындаса, анда бул чекиттеги предел сол жактуу деп аталышып, тиешелүү түрдө символикалык

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0), \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0) \qquad (7.4)$$

жазылыштары менен белгиленишет.

Айрым учурларда функциянын a чекитиндеги бир жактуу пределдеринин бирөөсү же бири - бирине барабар эмес эки жактуу пределдери жашаганы менен, функциянын бул чекиттеги предели жашабай кала берет. Мындай көрүнүш a чекитине аргументтер бир багыттан коюуланган кезде, функциянын маанилери да A маанисине бир багыттан гана коюулана алары менен түшүндүрүлөт.

Мисалы $y = [x]$ - “x тин бүтүн бөлүгү” функциясынын $a = 2$ чекитиндеги пределин карайлы (6.5 – чийме, 6 – гл.).

$$\lim_{x\to 2+}[x] = [2+0] = 2, \qquad \lim_{x\to 2-}[x] = [2-0] = 1 \text{ болуп, чынында эле}$$

x аргументтери $a = 2$ санына оң жактан жакындаган кезде, функциянын маанилери 2 ден чоң бөлчөк сан маанилери аркылуу

келишкендиктен, алардын бүтүн бөлүктөрү $[x] = 2$ болуп, оң жактуу пределі 2 ге барабар болот. Ал эми сол жактан келгенде 2 ден кичине бөлчөк сандарды аралап келгендиктен, алардын бүтүн бөлүктөрү $[x] = 1$ болуп, сол жактуу пределі 1 болору келип чыгат.

Ошентип функциянын a чекитиндеги чектүү А пределі жашаса, анда ал бирөө гана болуп, анын оң жана сол жактуу пределдери да А чектүү санына тең болот, б.а. (7.3) жана (7.4) тең болушат

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0) = \lim_{x\to a} f(x) = A. \qquad (7.5)$$

∘ Эгерде x аргументтери a чекитине чексиз жакындаган же умтулган кезде, функциянын $f(x)$ маанилери эбегейсиз чоң деп тандалып алынган Е оң санынынан да чоң болсо $f(x) > \mathrm{E}$ ($f(x) < -\mathrm{E}$) , анда $f(x)$ функциясын a чекитинде $+\infty$ $(-\infty)$ пределдерине ээ болот дейбиз. Бул учурда эбегейсиз чоң Е саны кандай тандалганына карабастан, x аргументтери a чекитине канчалык $\delta-$ аралыкка жакындап келүү керектигинин ченемин көрсөтүүчү $\delta > 0$ саны табылып, x тер a чекитинин δ – аймакчасына ($|x-a| < \delta$) кирери менен, $f(x) > \mathrm{E}$ ($f(x) < -\mathrm{E}$) шарттары аткарылат. Аны

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\,, \qquad (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty) \qquad (7.6)$$

символдору менен жазабыз.

(7.6) орун алса, анда $x = a$ түзү $y = f(x)$ функциясына вертикалдык асимптота болуп эсептелет.

Мисалы, $y = tgx$ функциясынын $a = \frac{\pi}{2}$ чекитиндеги оң жактуу жана сол жактуу пределдери тиешелүү түрдө

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} tgx = tg\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} tgx = tg\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = +\infty$$

көрүнүштөрүндө табылышат (6.39 – чийме, 6 – гл.). Демек, $y = tgx$ функциясынын маанилеринин эбегейсиз чоң деп тандалган Е оң санына карата алынган " $-$ Е" ден да кичине (узак аралыкта) болушун камсыз кылуучу, x өзгөрүлмөлөрүнүн $a = \frac{\pi}{2}$ чекитинин оң жагындагы $\delta-$ аймакчасын түзүү, же δ санын табуу мүмкүн ($\delta > 0$, Е> 0).

Ошондой эле, эбегейсиз чоң деп тандалган Е санынан да $y = tgx$ функциясынын маанилеринин чоң болуусун камсыз кылган, x өзгөрүлмөрүнүн $a = \frac{\pi}{2}$ чекитинин сол жагындагы $\delta -$ аймакчасын ченемин көрсөтүүчү δ саны да табылат (E> 0, $\delta > 0$).

∘ Эгерде функциянын аныкталуу областынын чегинде жайгашкан X = $\{x\}$ аргументтери абсалюттук чоңдугу боюнча эбегейсиз чоң оң жана терс x терди кармап турса, анда функция нөл чекитинен чексиз алыстыкта жайгашкан $+\infty$ жана "$-\infty$" чекиттеринде да коюуланып калышы мүмкүн. Мындай абалда деле функциянын тиешелүү маанилери чектүү А санынын чеке белине (аймакчасына) коюулана алат. Бул абалды аралыктардын тилинде түшүндүрөлү:

Алдын ала берилген $\varepsilon > 0$ санын кандай тандаганыбызга карабай, $\rho(f(x), \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шарты, $\{x\}$ аргументтери кандай эбегейсиз чоң Δ санынан да ашып $x > \Delta$ $(x < -\Delta)$ кеткенде гана аткарыларын билүү же ошондой чекти көрсөтүүчү Δ санын жашашын (табылышын) көрсөтүү керек. Бул пределди

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \mathrm{A}, \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{A}) \qquad (7.7)$$

көрүнүштөрүндө жазабыз.

Мисалдар

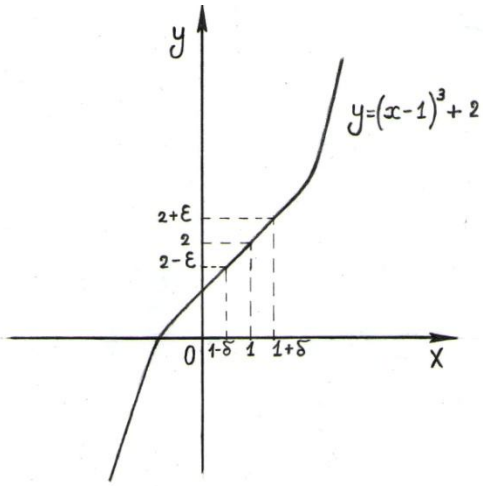
1). $f(x) = (x-1)^3 + 2$ функциясынын $a = 1$ чекитиндеги пределди А = 2 саны болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Жетишерлик кичине деп алынган ε санын тандасак, $\rho(f(x), \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}| = |(x-1)^3 + 2 - 2| = |(x-1)^3| = |x-1|^3 < \varepsilon$, анда $f(x)$ менен А = 2 санынын арасындагы $\rho(f(x), \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}|$ аралык, $|x-1| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ шарты аткарылганда гана ε санынан кичине болорун көрөбүз. Демек табууну талап кылган δ саны деп

$\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$ санын алууга болот.

Эгерде $\varepsilon = 0{,}027$ десек, анда $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$; $\varepsilon = 0{,}001$ десек, анда $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} = \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ болуп, табылган δ саны ε дон көз

каранды $\delta = \delta(\varepsilon)$ экендигине ишенебиз. Ошентип $\varepsilon > 0$ санын кандай тандасак да, ага ылайыкташкан $\delta > 0$ саны табылып, x аргументтери $a = 1$ санынын δ −аймакчасына кирери менен, $f(x) = (x-1)^3 + 2$ функциясынын маанилери A = 2 санынын ε −аймакчасына киргендиктен, A = 2 санын функциянын $a = 1$ чекитиндеги пределі деп айтып (7.3– чийме),



7.3-чийме

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 1}\{(x-1)^3 + 2\} = 2$$

көрүнүшүндө жазабыз. ◄

2). $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциясынын $a = 5$ чекитиндеги пределі A = 3 саны болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Алдын ала жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын тандап,

$\rho(f(x), \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}| = \left|\sqrt{x+4} - 3\right| < \varepsilon$ шартын аткарылышын талап кылалы, анда $\sqrt{x+4} - 3 = \frac{(\sqrt{x+4}-3)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{x+4-9}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}$ өзгөртүп түзүүсүн пайдаланып, ал шартты $\left|\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right| < \varepsilon$ көрүнүшүнө келтиребиз. $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциясынын X = $\{x : x \geq -4, x \in R\}$ аныкталуу областында, бөлчөктүн бөлүмү $\sqrt{x+4} + 3 > 0$ оң сан болуп, $x = -4$ болгондо, эң кичине $\sqrt{-4+4} + 3 = 3$ маанисине ээ болгондуктан (себеби X көптүгүндө мындан кичине x жок), коюлган шарт $\left|\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right| = \frac{|x-5|}{|\sqrt{x+4}+3|} < \frac{|x-5|}{3} < \varepsilon$ же $|x-5| < 3\varepsilon$ шарты менен тең күчтүү болот. Мындан δ деп $\delta = 3\varepsilon$ санын алууга болорун байкайбыз. Ошентип, $\forall\varepsilon > 0$: $\rho(x, 5) = |x-5| < \delta$ болор замат,

$\rho(f(x), 3) = |f(x) - 3| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай

$\delta = 3\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ оң саны табылгандыктан,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4} = 3$ орун алат.◄

3). $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ болсо, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ пределине ээ болорун далил −

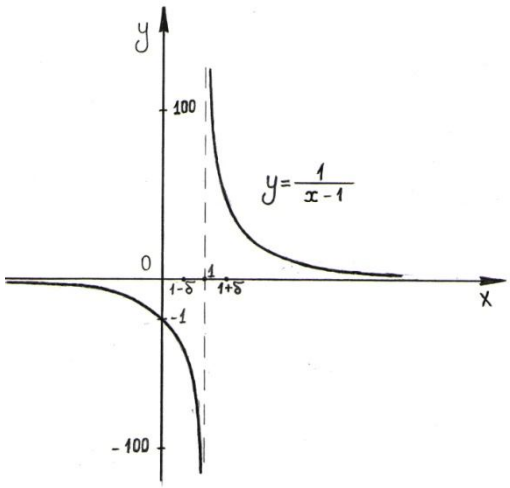
дегиле.

Далилдөө: ► Алдын ала берилген $\varepsilon > 0$ кандай тандаганыбызга карабастан,

$\rho(f(x), \mathrm{A}) = \left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2x+2-2x-1|}{|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$ шартын аткарылышын талап кылсак, анда $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Мындан ар дайым $|2x+1| > |2x| - 1$ барабарсыздыгы орун алгандыктан, коюлган талап $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, же $|x| > \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$ барабарсыздыгына тең күчтүү экендигин көрөбүз. Демек, тандалган $\varepsilon > 0$ санына ылайыкташкан эбегейсиз чоң $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ саны деп,

$\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$ санынын бүтүн бөлүгүн $\Delta = \left[\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\varepsilon})\right]$ алууга болот. Ошентип $|x| > \Delta \Rightarrow \rho(f(x), \mathrm{A}) = \left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, аргументтер чексиз алыстыктагы $\pm\infty$ чекиттерине коюуланган кезде, функциянын маанилери $\mathrm{A} = \frac{1}{2}$ чекитине коюуланып, аргументтер $\Delta(\varepsilon)$ санынан ашып кетер замат, функциянын маанилери $\mathrm{A} = \frac{1}{2}$ чекитинин $\varepsilon -$ аймакчасынын ичине кирет же

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \text{ орун алат.}$$



7.4-чийме

Эгерде $\varepsilon = 0{,}01$ болсо

$$\Delta = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{0{,}01}\right)\right] = \left[\frac{1}{2} \cdot 101\right] = [55{,}5] =$$

$= 55$ келип чыгып, x тер 55 жана -55 сандарынан ашары менен, функциянын маанилери $\mathrm{A} = \frac{1}{2}$ санынын $\varepsilon = 0{,}01$ – аймакчасынын ичине коюланып кирип келишет. Ал эми $\varepsilon = 0{,}001$ болсо, $\Delta = \left[\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{0{,}001})\right] = \left[\frac{1}{2} \cdot 1001\right] = [555{,}5] = 555$ болуп, табылган Δ санын ε дон көз каранды экендигин байкайбыз. ◄

4). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\infty$ болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Өз алдыбызча эбегейсиз чоң деп ойлогон Е оң санын тандап алып, x аргументтери 1 санынын кандай $\delta-$ аймакчасынын ичине кирген кезде, функциянын маанилери Е санынан да

$|f(x)|>$ Е ашып кетерин көрсөтөлү.

$|f(x)|=\frac{1}{|x-1|}>$ Е $\Leftrightarrow$ $|x-1|<\frac{1}{\text{E}}$ болгондуктан, δ деп $\delta=\frac{1}{\text{E}}$ санын алууга болот. Демек алынган Е санына ылайыкталган δ санын таба алдык.

Е = 100 жетишерлик чоң санын алсак, анда $\delta=\frac{1}{\text{E}}=\frac{1}{100}=0{,}01$ көрүнүшүндө табылат.

$|(x)|>$ Е $\Leftrightarrow$ $f(x)>$ Е же $f(x)<-$Е болгондуктан, x аргументтери 1 санынына $\delta=0{,}01$ аралыгынан жакын жайгашса, же анын 0,01 – аймакчасына кирсе, анда $f(x)=\frac{1}{x-1}>100$ же

$f(x)=\frac{1}{x-1}<-100$ болуп, функциянын маанилери жетишерлик чоң деп алынган 100 санынан да ашып кетет. Е санын кандай тандасак да, ага ылайык (көз каранды) δ саны табылгандыктан,

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$ болору чын дейбиз (7.4 – чийме). ◄

5). $a>1$ болгондо $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=+\infty$ экендигин далилдегиле.

Далилдөө: ►Кандай гана эбегейсиз чоң деп эсептелген Е санын алсак да, $\log_a$ Е санын бүтүн бөлүгүн Δ саны деп алууга болорун байкайбыз. Чынында эле $|f(x)|>$ Е болсун деген талап койсок, анда

$a^x>$ Е $\Rightarrow$ $x>\log_a$ Е (себеби $a>1$) келип чыгып, ар дайым

$\Delta=[\log_a \text{E}]$ саны табылат. Мисалы $a=10,$ $\text{E}=1000$ десек, анда 1000

санына ылайыкталган $\Delta=[\log_{10}1000]=[3]=3$ саны табылып, x аргументтери 3 санынан ашары менен, функциянын маанилери 1000 санынан ашып кетишет

$x > 3 \Rightarrow f(x) = a^x > 1000$. Табылган Δ саны E санынан көз каранды болот. ◄

7.1.2 Көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги пределі

Предел аппараты сандардын арасындагы аралыктардын жакындашуу жана алысташуу процесстерин баалоочу математикалык аппарат же каражат болуп эсептелгендиктен, бир өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги пределин, R мейкиндигинде 1.1.6 – аныктамсында (1 – бөлүк) киригизилген ченөө эрежеси (метрика) боюнча аныктадык. ε санын функциянын пределдик А маанисине жетүү шкаласы катарында карап, мындай жакындыкка жетүү үчүн x аргументтери a чекитине канчалык жакындашы керектигин көрсөтүүчү δ санын таап, a чекитинин δ –аймакчасын түздүк.

Көп өзгөрүлмөлүү функцияларда деле, ушундай процесс кайталанып жалпылаштырылганы менен, өзгөрүлмөлөр жйгашкан мейкиндиктерге жараша ченөө эрежелери (метрикалар) өзгөрүшөт.

Мисалы R^2 мейкиндигинде жайгашкан D областында аныкталган

$z = f(x, y)$ функциясынын $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитиндеги пределі, А саны болот дегенди түшүндүрөлү:

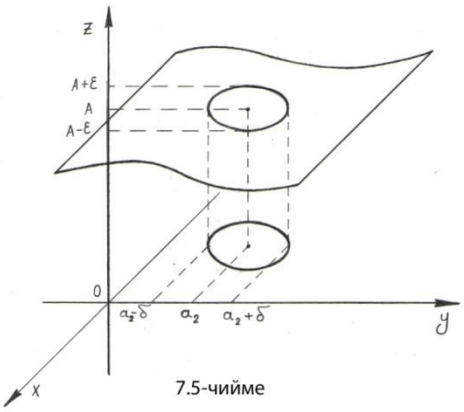
Функциянын мааниси $z \in R$ болгондуктан, мурдагыдай эле жетишерлик кичине деп ойлогон ε оң санын эркин тандайбыз жана

$|z - \mathrm{A}| = |f(x, y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ талабын канааттандыруучу D областындагы $\mathrm{M}(x\,; y)$ координаталуу чекиттеринин $\delta -$ аймакчасын издейбиз. Мындай аймакча $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитине жетишерлик жакын жайгашат,

анткени функциянын ушул чекиттеги пределин каралууда. R^2 мейкиндигиндеги М жана a чекиттериндеги аралыкты же метриканы

$\rho(\mathrm{M}, a\ ) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$
көрүнүшүндө кабыл алсак, анда

табылган δ санына $\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < \delta$ шарты коюлат. Бул шарт D областындагы



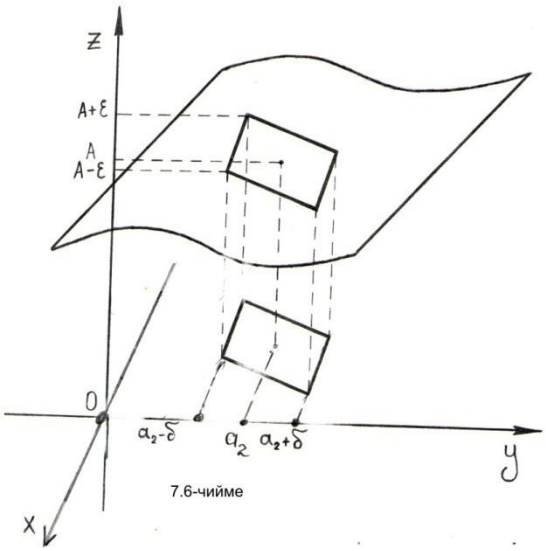
7.5-чийме

борбору $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекити, радиусу $r = \delta$ болгон $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = \delta^{\ 2}$ тегерегинин ички $\mathrm{M}(x\,;y)$ координаталуу чекиттеринде гана аткарылат (7.5 – чийме). Ошентип, айтылган тегерек $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитинин $\delta -$ аймакчасы болуп эсептелет жана $\mathrm{M}(x\,;y)$ чекиттери бул аймакчага кирери менен $|f(x,y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ талабы аткарылып, А саны функциянын $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитиндеги пределі болот. Аны символикалык түрдө кош предел

$$\lim_{\mathrm{M}\to a} f(\mathrm{M}) = \lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y) = \mathrm{A} \qquad (7.8)$$

көрүнүшүндө жазабыз.

Эгерде R^2 мейкиндигинде метриканы



7.6-чийме

$\rho(\mathrm{M}, a\,) = \max\{\,|x - a_1|, |y - a_2|\} = \delta$ көрүнүшүндө киргизсек, анда (7.8) пределинин жашашын,

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\colon |x - a_1| < \delta$ жана

$$|y - a_2| < \delta \ \ \Rightarrow |f(x,y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$$

көрүнүшүндө баяндоого болот. Бул учурда $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитинин $\delta -$ аймакчасы тегерек болбостон, диогоналдарынын кесилишинде a чекити жайгашкан, жактары 2δ саны болгон квадрат болот (7.6 – чийме). Ошентип аргументтер болгон $\mathrm{M}(x\,;y)$ чекиттери аталган квадраттын ичине кирер замат, функциянын тиешелүү маанилери А чекитине жакындап, анын $\varepsilon -$ аймакчасында жайгашып калат деп түшүнөбүз. Бир өзгөрүлмөлүү функцияда пределдик мааниге оң же сол жактардан жакындап келүү мүмкүнчүлүгү болсо, эки өзгөрүлмөлүү функция пределдик А маанисине, тегиздиктеги $\delta -$ тегерекченин каалаган тарабында жайгашкан аргументтер боюнча жакындап келе алат.

∘ R^3 мейкиндигиндеги ар кандай $D \subseteq R^3$ областына таандык $\mathrm{M}(x\,;y;z)$ чекитинин үч координаталары болгондуктан, D областында аныкталган каалагандай функция $u = f(\mathrm{M}) = (fx, y, z)$ үч

өзгөрүлмөлүү болуп, D областындагы чекиттерди, бир өлчөмдүү R мейкиндигиндеги u чекиттерине чагылтат. D областына таандык $a = \{a_1;\ a_2; a_3\}$ чекитиндеги функциянын пределі A саны болсун дегенди түшүндүрөлү.

Аралыктар R мейкиндигиндеги метрикага (ченөө эрежесине) ылайык $\rho(f(\mathrm{M}), \mathrm{A}) = |f(\mathrm{M}) - \mathrm{A}|$, ал эми R^3 мейкиндигиндеги метрика

$\rho(\mathrm{M}, a) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2}$ болгондуктан, алдын ала жетишерлик кичине деп тандалган $\varepsilon > 0$ санына карата, $|f(\mathrm{M}) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шартын канааттандыруучу $\mathrm{M}(x\,; y; z)$ чекиттеринин $a = \{a_1;\ a_2; a_3\}$ чекитине чексиз жакын аралыктагы $\delta -$ аймакчасын табуу талап кылынат. Мындай аймакча борбору $a = \{a_1;\ a_2; a_3\}$ чекити, радиусу $r = \delta$ болгон $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = \delta^{\ 2}$ шарынын ички чекиттери болуп эсептелет.

Ошентип функциянын маанилеринин A чекитинин $\varepsilon -$ аймакчасына жакындап кирүүсүн камсыз кылган, $\mathrm{M}(x\,; y; z)$ аргументтеринин a чекитиндеги $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < \delta^{\ 2}$, $\delta -$аймакчасын (шарын) түзсөк, же жетишерлик кичине δ оң санын таба алсак, анда

$$\lim_{\mathrm{M} \to a} f(\mathrm{M}) = \mathrm{A} \text{ дейбиз.}$$

$\{\mathrm{M}\} \to a$ умтулуу процесси тиешелүү координаталардын бири – бирине умтулуусу менен түшүндүрүлгөндүктөн, бул пределди үчтүк предел

$$\lim_{\substack{x \to a_1 \\ y \to a_2 \\ z \to a_3}} f(x, y, z) = \mathrm{A} \text{ көрүнүшүндө жазууга болот.}$$

Эгерде R^3 мейкиндигинде метриканы

$\rho(\mathrm{M}, a) = max\{|x - a_1|, |y - a_2|, |z - a_3|\} = \delta$ көрүнүшүндө аныктасак, анда a чекититинин $\delta -$ аймакчасы кырларынын узундугу 2δ санына тең болгон, диогоналдарынын кесилишинде a чекити турган кубдун ички чекиттерин түзөт. Демек аргументтер аталган кубдун ичине кирери менен, функциянын маанилери A чекитинин $\varepsilon -$ аймакчасынын ичине кирип келсе гана, функциянын сөз кылган пределі жашайт. Аны символикалардын жардамы менен

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: |x - a_1| < \delta, |y - a_2| < \delta\ , |z - a_3| < \delta \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x, y, z) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ көрүнүшүндө жазабыз

∘ R^n мейкиндигиндеги D областында аныкталган $y = f(x)$ функциясынын аргументинин n координаталары $x = \{x_1; x_2;\ x_3;\ \dots; x_n\}$ болгондуктан, n өзгөрүлмөлүү функция

$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ көрүнүшүндө жазылат.

$\forall\ x, a \in D \subseteq R^n$ чекиттеринин арасындагы аралыкты

$\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$ эрежеси менен эсептейли. Мында $a\ = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$. Берилген функциянын маанилери $y \in \mathrm{R}$ менен, каалагандай $\mathrm{A} \in R$ сандарынын арасындагы аралык $\rho(y, \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}| = |f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \mathrm{A}|$ эсептелгендиктен, a чекитиндеги функциянын предели A саны болот дегенди төмөндөгүдөй түшүндүрөбүз.

Жетишерлик кичине деп эсептелген ε оң санын кандай тандаганыбызга карабай, $|f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай

$x = \{x_1; x_2;\ x_3;\ \dots; x_n\}$ аргументтеринин, $a\ = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекитиндеги δ −аймакчасын же $n -$ өлчөмдүү

$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \delta^{\ 2}$ шарын түзүү мүмкүн болсо, же ушундай $\delta > 0$ санын таба алсак, анда A саны

$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ функциясынынын $a\ = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекитиндеги предели болуп,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{A}$ көрүнүшүндө белгиленет.

$x \to a$ умтулуу процесси, алардын тиешелүү координаталарынын бири – бирине умтулуусу менен жүргөндүктөн, n өзгөрүлмөлүү функциянын пределин

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ x_3 \to a_3 \\ \dots\dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \mathrm{A} \qquad (7.9)$$

n эселүү предел катарында жазууга болот.

Ошентип аргументтер борбору $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекити, радиусу $r = \delta$ саны болгон n өлчөмдүү шардын ичине кирери менен, функциянын ошол аргументтердеги маанилери А чекитинин ε −аймакчасынын ичинде жайгашып калса, анда (7.9) орун алат.

Эгерде R^n мейкиндигиндеги ченөө эрежесин (метриканы)

$\rho(x, a) = max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \dots, |x_n - a_n|\} = \delta$ көрүнүшүндө киргизсек, анда $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекитинин δ −аймакчасы деп, кырларынын узундугу 2δ санына тең болгон, диоганалдарынын кесилишинде a чекити турган, n өлчөмдүү кубду алабыз. Бул учурда (7.9) орун алышы үчүн, аргументтер куб – аймакчага кирген кезде, функциянын маанилери А чекитинин ε −аймакчасына кирет же

$|x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta \quad \Rightarrow \ |f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \mathrm{A}| < \varepsilon$

аткарылат деп түшүнөбүз.

∘ Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын пределинде бардык координаталар боюнча умтулуу бир мезгилде жүрөт деп элестетилет, Ошондой болсо да, айрым бир шарттарды коюу менен, умтулуу кыймылын ар бир координаталар боюнча кезектешип жүргүзүп, **кайталануучу пределдер** түшүнүгүн киргизүүгө болот.

Ошондуктан (7.8) кош пределин кандай шарттарда кайталануучу пределдерге алып келүү маселесине токтололу.

7.1 Теорема. *Эгерде 1)* $\lim\limits_{\substack{x \to a_1 \\ y \to a_2}} f(x, y) = \mathrm{A}$ *кош предели жашаса (А чектүү же чектелбеген сан болушу мүмкүн);*

2) y координатасынын бардык маанилеринде x өзгөрүлмөсү боюнча чектүү жөнөкөй $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to a_1} f(x, y)$ предели жашаса, анда

$$\lim_{y \to a_2} \varphi(y) = \lim_{y \to a_2} \lim_{x \to a_1} f(x, y) = \mathrm{A}$$

кайталануучу предели жашап, кош пределге барабар

$$\lim_{y\to a_2}\lim_{x\to a_1} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y) = \mathrm{A}$$

болот.

Далилдөө: Теореманын шарты боюнча (7.8) кош пределі жашагандыктан (A, a_1, a_2 чектүү учурду карайлы),

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $|x - a_1| < \delta \wedge |y - a_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шарты аткарылат. y өзгөрүлмөсүн $|y - a_2| < \delta$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай абалда, убактылуу кыймылсыз (фиксирленген) деп ойлоп, теоремадагы 2) – шартты эске алып,

$\lim\limits_{x\to a_1} |f(x,y) - \mathrm{A}| = |\varphi(y) - \mathrm{A}|$ пределине ээ болобуз.

x, y аргументтери $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитинин δ –аймакчасында жайгашышкандыктан, теоремадагы кош предел жашасын деген 1) – шарт боюнча функциянын маанилери A чекитинин ε –аймагынын сыртына чыгып кете албайт же $|f(x,y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ аткарылып, анын пределдик мааниси да ε санынан $|\varphi(y) - \mathrm{A}| \le \varepsilon$ ашып кетпейт. Мындан y координатасын (өзгөрүлмөсүн) кыймылга келтирип, анын маанилери $|y - a_2| < \delta$ шартына баш ийер замат,

$|\varphi(y) - \mathrm{A}| \le \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыларын же функциянын чекиттеги пределинин 7.1 – аныктамасы боюнча,

$\lim\limits_{y\to a_2} \varphi(y) = \mathrm{A}$ пределинин жашашына ишенебиз. Андай болсо, теореманын кортундусун туура экендиги далилденген болот:

$$\lim_{y\to a_2} \varphi(y) = \lim_{y\to a_2}\lim_{x\to a_1} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y) = \mathrm{A}\ . \qquad (7.10)$$

Кайталануучу пределдер менен кош пределдин тең болуу шарттарын көрсөткөн теорема боюнча, координаталардын умтулуу кезектерин орундарын алмаштырып коюуга да болот

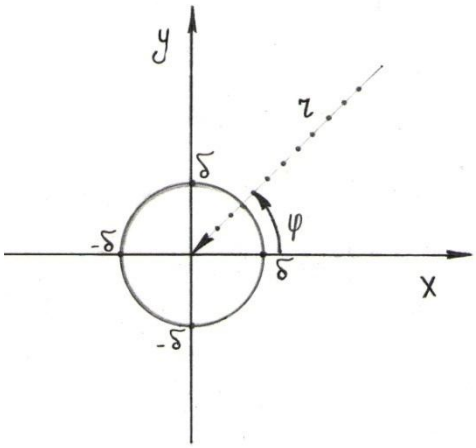
$$\lim_{x\to a_1}\lim_{y\to a_2} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y) = \mathrm{A}.$$

Бул теореманы ар бир координата (өзгөрүлмө) боюнча кезектештирип умтулуу принцибин сактоо менен, жалпы n

өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги пределин, n жолу кайталануучу пределдер көрүнүшүнө келтирүүгө чейин жайылтууга болот.

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ x_3\to a_3\\ \dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = \lim_{x_1\to a_1}\lim_{x_2\to a_2}\dots\lim_{x_n\to a_n} f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = \mathrm{A} \quad (7.11)$$

◦ Бардык пределдер сыяктуу эле көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги предели жашаса, ал жалгыз гана болот, б.а. аргументтер пределдик чекиттин кайсы тарабынан жакындаса да, функция бир гана А пределине ээ болушу керек. Айрым учурларда көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги предели жашабаганы менен, кайсы бир тандалган багыттар боюнча ар башка жекече пределдери жашай бериши мүмкүн, бирок аларды (7.11) маанисиндеги функциянын предели деп айта албайбыз. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги пределин жашабасын көрсөтүү үчүн, анын кайсы бир багыт боюнча жашабастыгын көрсөтүү жетиштүү.



7.7-чийме

Мисалы $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ фунциясынын O(0; 0) чекитинде предели жашабай тургандыгын далилдейли.

Далилдөө:► Берилген эки өзгөрүлмөлүү функциянын $x,\ y$ өзгөрүлмөлөрү менен аныкталган R^2 тегиздигиндеги (мейкиндигиндеги) чекиттер, О чекитине же анын чексиз кичине аймакчасына түрдүү багыттар менен жакындап келүүсү мүмкүн. Айрым бир багыттар боюнча ар башка жекече пределдери жашаганы менен, жалпы учурда функция бир чекитте жалгыз гана пределге ээ болот деген шарт аткарылбай каларын жогоруда эскерттик. Берилген функцияны полярдык $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ координаталар системасында жазып

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{r^2cos^2\varphi-r^2sin^2\varphi}{r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi}=\frac{r^2(cos^2\varphi-sin^2\varphi)}{r^2(cos^2\varphi+sin^2\varphi)}=\cos 2\varphi, \qquad (*)$$

аргументтер O(0; 0) чекитине Ox огу менен φ бурчун түзгөн шооланын r чекиттери аркылуу жакындап келсин деп ойлойлу (7.7 – чийме). Анда алдын ала берилген жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына ылайык, $\delta > 0$ саны табылып, r чекиттери 0 санынын δ −аймакчасына киргенде, функциянын $f(x, y)$ маанилери A≡ O(0; 0) чекитинин ε −аймакчасына киреби ?, б.а. $0 < r < \delta$ ⇨ $|f(x, y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шарты аткарылабы ? – деген суроо туулат.

$(*)$ дан байкалгандай, $f(x, y)$ функциясы r ден көз каранды болбой, φ ден гана көз каранды, ошондуктан φ шооласын бойлоп r нөлгө жакындайбы же жокпу, ал 0 санынын δ −аймакчасына киреби же жокпу, баары бир $|f(x, y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шартынын аткарылышына таасирин тийгизе албайт. Демек, пределдин аныктамасында айтылган $\delta > 0$ санын табуу мүмкүн эмес. Анда O(0; 0) чекитинде функциянын предели жашабайт. Бирок r чекиттери $\varphi = \frac{\pi}{4}$ шооласы боюнча гана 0 чекитине жакындап келсе,

$f(x, y) = \cos\ (2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ болуп, функциянын O(0;0) чекитиндеги жекече предели A = 0 саны болот.◀

Ошентип, аргументтердин пределдик чекиттерге умтулуу багыттарына жараша, ар башка жекече пределдеринин жашашынан функциянын пределинин жашашы келип чыкпайт. Аргументтер бардык багыттар боюнча, каалаган жол менен пределдик чекитке жакындаган учурдагы жекече пределдер барабар болушса гана, аларга тең болгон функциянын предели жашайт жана жалгыз гана болот.

7.1.3 Пределдер теориясындагы жалпылыктар

Сан удаалаштыктарын N натуралдык сандарынын көптүгүндө

аныкталган $x_n = f(n)$ $(n\epsilon \mathrm{N})$ көрүнүшүндөгү функция деп эсептөөгө болгондуктан, функциянын предели удаалаштыктын пределин жалпы X сандык көптүгүндө кеңейтүү менен аныкталып, удаалаштыктын пределине тиешелүү болгон касиеттерге баш ийет, б.а. ошол эле касиеттер эркин алынган X көптүгүндө аныкталган функциялардын пределине ылайыкташтырылып кайталанат. Функциянын предели X көптүгүндө жүрүп жаткан кубулуштардын жыштыгын, алардын Y

көптүгүндөгү элестеринин жыштыгына салыштырып баалоо менен үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк түзүп, таануу процессинде кеңири колдонулган каражат же математикалык аппарат болуп эсептелет.

Чектүү a коюулануу чекитине ээ болгон X көптүгүндө аныкталган $y = f(x)$ функциясына токтололу.

1^0 Эгерде $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{A}$ чектүү предели жашап, $\mathrm{A} > \mathrm{p}$ $(\mathrm{A} < q)$ экендиги белгилүү болсо, анда a чекитинен башка ага жетишерлик жакын жайгашкан x аргументтериндеги функциянын $f(x)$ маанилери да,

$$f(x) > \mathrm{p} \ (\ f(x) < q) \qquad (7.12)$$

барабарсыздыктарына баш ийишет.

Далилдөө: ►Эркин тандалуучу жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын $\varepsilon < \mathrm{A} - \mathrm{p}$ $(\varepsilon < q - \mathrm{A})$ боло тургандай шарттарда тандасак,

$$\mathrm{A} - \varepsilon > \mathrm{p} \ \ (\mathrm{A} + \varepsilon < q\ ) \qquad (7.13)$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Экинчи жактан функциянын a чекитиндеги чектүү предели жашагандыктан, 7.1 – аныктаманын негизинде кандайдыр бир жетишерлик кичине $\delta > 0$ саны табылып, a чекитинин $\delta -$ аймакчасындагы $(|x - a\ | < \delta)$ бардык x чекиттер үчүн, $|f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ же $\mathrm{A} - \varepsilon < f(x) < \mathrm{A} + \varepsilon$ шарттары аткарылат. Анда (7.13) – эске алып, (7.12) барабарсыздыктарын туура экендигин далилидеген болобуз.◄

Бул касиет a чектелбеген учурда да аткарыларын өз алдынча текшерип көрүүгө болот.

2^0 Эгерде $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{A}$ чектүү предели жашап, A оң (терс) сан болсо, анда, a чекитинен башка ага жетишерлик жакын жайгашкан x аргументтериндеги функциянын $f(x)$ маанилеринин өзү да оң (терс) сандар болушат.

Бул касиет $\mathrm{p} = 0$ $(q = 0)$ учурундагы 1^0 касиеттин кайталанышы болот.

3^0 Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ чектүү предели жашаса, a чекитинен башка ага жетишерлик жакын жайгашкан x аргументтериндеги функциянын $f(x)$ маанилери чектелген болушат, б.а. $|x - a| < \delta$ болгондо

$|f(x)| < \mathrm{M}$ болот $(\mathrm{M} - constanta)$.

Бул касиет $1^0 -$ касиеттен келип чыгат, бирок $|x - a| < \delta$ аймакчасында функциянын аныкталуу областына кирбей калган, x аргументтери жайгашып калган учурларда аткарылбай калышы да мүмкүн. Мисалы $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясынын $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \frac{1}{x} = 3 = \mathrm{A}$ чектүү предели жашаганы менен, функциянын маанилери $a = \frac{1}{3}$ чекитинин $\left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta = \frac{1}{2}$ аймакчасынын бардык эле чекиттеринде, чектелген боло бербейт, анткени бул аймакчада анын аныкталуу областына кирбеген $x = 0$ чекити жайгашып, аргументтер 0 гө жакындаганда функция чексиз чоңоёт.

Х көптүгүндө аныкталышкан x аргументтери бир эле a чекитине умтулушкан бир нече $f(x)$, $\mathrm{g}(x)$, ... сыяктуу функцияларга (санаттык санга чейин болушу мүмкүн), удаалаштыктардын пределдеринде орун алган теңдештиктер, барабарсыздыктар жана арифметикалык амалдар менен байланышкан пределдер, төмөндөгүчө кеңейтилет :

4^0 Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ жана $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = B$ чектүү пределдерине ээ болушса, анда

1) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) \pm \mathrm{g}(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = \mathrm{A} \pm \mathrm{B}$,

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot \mathrm{g}(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$,

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $(\mathrm{B} \neq 0, \mathrm{g}(x) \neq 0)$, (7.14)

4) $\lim\limits_{x\to a}\big(\alpha \cdot f(x)\big) = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha \cdot \mathrm{A}$, $(\alpha - conctanta)$

5) $f(x) \leq \mathrm{g}(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x)$ же $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$

эрежелерин кабыл алабыз. Кабыл алынган (7.14) эрежелери функциянын чекиттеги пределинин 7.1 – аныктамасына таянып иштелип чыгылган. Алардын бирөөсүнүн аткарылышын көрсөтөлү.

Мисалы, 1) – де $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$, $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = B$ пределдеринин жашашы берилгендиктен,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon \wedge |\mathrm{g}(x) - \mathrm{B}| < \varepsilon$ орун алат. Экинчи жактан эки функциянын суммасы үчүн,

$\big|\big(f(x) + \mathrm{g}(x)\big) - (\mathrm{A} + \mathrm{B})\big| = |f(x) - \mathrm{A} + \mathrm{g}(x) - \mathrm{B}| \le |f(x) - \mathrm{A}| +$
$+|\mathrm{g}(x) - \mathrm{B}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1$ ээ болобуз. Жетишерлик кичине ε оң сандарынын суммасы катарында ε_1 да, жетишерлик кичине сан болот. ε санын тандоо укугу бизде болгондуктан, аны $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ деп алалы. Андай болсо, $f(x) + \mathrm{g}(x)$ функциясынын маанилери A + B санынын жетишерлик кичине ε_1 – аймакчасына кирери менен, аргументтер a чекитинин δ –аймакчасына киришет, б.а. ушундай аймакчаны түзүүгө мүмкүн болгон δ саны табылат. Бул 7.1 – аныктамасынын негизинде

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x) + \mathrm{g}(x)\} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ болорун ырастап, 1) – эреженин эки функциянын суммасы үчүн тууралыгын көрсөтөт. Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүп, калган эрежелерди жана a, A, B чектелбеген учурларды да текшерип көрүүгө болот.

5^0 Эгерде $y = f(x)$ функциясы, X көптүгүндө монотондуу өсүүчү (жок дегенде жай өсүүчү) болсо жана X көптүгүнүн коюулануу чекити болгон a саны бардык x чекиттеринин эң чоңу болуп, функция жогору жагынан чектелсе, анда $\forall\, x \in \mathrm{X}:\ f(x) \le \mathrm{M}$, чектүү $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ пределди жашайт, ал эми чектелбесе пределди $+\infty$ болот. Ошондой эле, $y = f(x)$ монотондуу кемүүчү функция болуп, a коюулану чекити x тердин эң кичинеси болсо, $f(x)$ төмөн жагынан чектелгенде сөзсүз чектүү пределди жашап, чектелбегенде пределди $"-\infty"$ болот. Бул касиетти монотондуу удаалаштыктын пределинин жалпыланышы катарында эсептөөгө болот.

6^0 $y = f(x)$ функциясынын X көптүгүнүн a коюулану чекитинде чектүү пределинин жашашы үчүн, каалагандай x жана x'элементтери a чекитинин δ –аймакчасына кирери менен, же $|x - a| < \delta \wedge |x' - a| < \delta$ шарттары аткарылар замат, функциянын тиешелүү чекиттердеги маанилери эркин тандалган жетишерлик кичине оң ε санынан да жакын $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ аралыкта жайгашуусун камсыз кыла

тургандай δ –аймакчасынын түзүлүшү, же ушундай δ санынын табылышы зарыл жана жетиштүү шарт болуп эсептелет.

Бул касиет удаалаштыктардын пределинин жыйналуучулугу жөнүндөгү Больцано – Кошинин зарыл жана жетиштүү шартынын, функциянын чекиттеги пределине карата жалпыланышы болот. Мындан $f(x)$ тин a чекитиндеги А предели жашаса, анда a чекитинин δ –аймакчасында бири – бирине чексиз жакын жайгашкан аргументтерге, А чекитинин ε –аймакчасында бири – бирине чексиз жакын жайгашкан функциянын маанилери туура келет деген жыйынтык чыгарабыз.

§7.2. Функциянын пределин эсептөө ыкмалары

7.2.1 Алгебралык ыкма жана сонун пределдер

Функциянын чекиттеги пределинин бар экендигин, ал аныкталган жана өзгөргөн көптүктөр кармалган мейкиндиктердеги тиешелүү ченөө эрежелерине (метрикаларга) таянып, жетишерлик кичине ε, δ мерчемдерине (шкаласына) салыштыруу менен пределдик маниге жакындашуу процессин көрсөтүп келдик. Бирок дайыма эле аралыктарды ченөө эрежесин колдонуп, функциянын пределдик маанисин табуу же далилдөө көптөгөн ыңгайсыздыктарды жаратат, анткени биринчиден, пределдик маани болгон А санын болжолдуу билүү зарыл, антпесе $\rho(f(x), \mathrm{A}) = |f(x) - \mathrm{A}|$ аралыгын баалай албайбыз. Экинчиден, функциянын маанилеринин алдын ала берилген жетишерлик кичине ε мерчемине карап түзүлгөн аймакчасына ылайыкталган аргументтердин маанилеринин a чекитиндеги δ – аймакчасын түзүү, же ушундай δ санын табуу көптөгөн убарагерчиликтерди жаратат. Ошондуктан, функциянын пределин киргизилген $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ - символунун жардамы менен жаңы алгебралык амал катарында карап, аларды кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү жөнүндөгү (7.14) эрежелерин кабыл алдык.

Аналитикалык ыкма менен берилген функциялардын чекиттеги пределдеринин 1^0 – 6^0 касиеттерин эске алып, бардык алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен пределди аныктоону, **алгебралык ыкма** деп атайбыз.

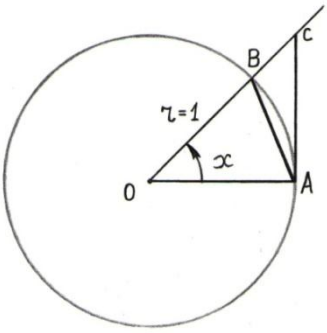
Пределдерди алгебралык жол менен эсептөөдө (a чектүү сан) $\frac{a}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{a}=\infty,\ \frac{a}{\infty}=0,\ a^{\infty}=\infty\ (a\neq 1)$ деп алынып, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$,

$\infty-\infty$, $1^{\infty}, 0^{0}$, ∞^{0} абалдары аныксыздыктар деп аталышат (1 – бөлүк, 1.1.5). Келип чыккан аныксыздыктарды алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен эсептелүүчү абалга келтирүү, аныксыздыктарды ачуу деп аталат. Мисалы

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ пределі , $\frac{0}{0}$ көрүнүшүндөгү аныксыздыкты жаратат, бирок аны алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен көбөйтүүчүлөргө ажыратып, аныксыздыкты пайда кылуучу $(x-1)$ көбөйтүүчүлөрүн кыскартып жиберебиз.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

Функциянын пределдерин эсептөөдө келип чыккан айрым аныксыздыктарды ачууда кеңири колдонулган эрежелерди, “**сонун пределдер**” деп атап, кээ бирлерине токтолуп өтөбүз.



7.8-чийме

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ **же "1 – сонун пределі"**.

x өзгөрүлмөсү нөлгө умтулган кезде $\sin x$ менен x экөөсү тең нөлгө умтулушкандыктан, берилген предел “ $\frac{0}{0}$ “ көрүнүшүндөгү аныксыздык болот. Аны ачуу үчүн, бирдик айланадагы борбордук x бурчуна карата

$$\sin x<x<tgx \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \qquad (7.15)$$

түзүлгөн барабарсыздыгынын туура экендигин далилдейбиз (7.8 – чийме). Бирдик айланага A чекитинен AC жанымасын жүргүзүп,

ΔOAB жана ΔOAC үч бурчтуктарын куралы. Түзүлгөн үч бурчтуктар менен $\overset{\frown}{OAB}$ секторунун аянттарынын арасында

$S_{\Delta OAB} < S_{\overset{\frown}{OAB}} < S_{\Delta OAC}$ байланыштары бар экендигин байкайбыз. Аларды аянттардын тиешелүү сандык маанилери менен туюнтуп,

$$\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\ x < \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot tgx\ \ (r=1)$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Аларды $\frac{1}{2}\cdot r^2$ оң санына бөлүп жиберсек, барабарсыздыктардын белгилери өзгөрбөй, (7.15) барабарсыздыгынын туура экендиги келип чыгат.

Радиан менен алынган x өзгөрүлмөсү, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ аралыгында $(\sin x\ > 0)$ өзгөрөт деп ишенип, (7.15) барабарсыздыгын $\sin x$ оң санына бөлүп жиберип,

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ же $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ барабарсыздыктарына ээ болобуз. Акыркы барабасыздыкты “-1” ге көбөйтүп $-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$, андан кийин баарына 1 ди кошуп,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2sin^2\frac{x}{2} \qquad (7.16)$$

көрүнүшүнө келтиребиз. Бирден кичине сандын квадраты катары

$sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2}$ орун алып, (7.15) барабарсыздыгынын биринчи бөлүгү боюнча $2\cdot\sin\frac{x}{2}\ \ < 2\cdot\frac{x}{2} = x$ келип чыгат. Демек (7.16) барабарсыздыгын

$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x\ \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ көрүнүшүндө жазууга болот. Мындан x тин белгисинен көз каранды болбостон $|x\,| < \frac{\pi}{2}\,, x \neq 0$ болсо эле, аткарылуучу

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x\,| \qquad (7.17)$$

жалпылаштырылган барабарсыздыгын келтирип чыгарабыз.

Андай болсо, алдын ала жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын кандай тандаганыбызга карабай, x аргументтеринин $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ шартын канааттандыруучу $|x - 0| = |x| < \delta$ аймакчасын түзүү мүмкүн, же

ушундай δ саны табылат, Табылган δ саны деп, (7.17) барабарсыздыгынын негизинде ε санын өзүн алууга болот $\delta = \varepsilon$. Бул учурда функциянын чекиттеги пределинин 7.1– аныктамасы боюнча, чектүү предели

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (7.18)$$

көрүнүшүндө табылат. Бул пределди, $x \to 0$ умтулганда бөлчөктүн алымы менен бөлүмү нөлгө умтулуп, бирок умтулуу жолунун бир ирмеминде нөлгө жетпей эле теңделишип, кыскарып кетишкендиктен 1 саны келип чыгат деп түшүнөбүз. (7.18) формуласы нөл чекитине чексиз жакын x чекиттеринде $\sin x \approx x$ эквиваленттүү чоңдуктар болорун билдирет.

Табылган (7.18) формуласы **биринчи сонун предел** деп аталып, тригонометриялык функциялардын пределдерин эсептөөдө кеңири колдонулат. Мисалы төмөндөгү "$\frac{0}{0}$" көрүнүшүндөгү аныксыздыктарды ачып көрсөтөлү:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = 1\cdot 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \left|\begin{matrix}\mu = \frac{x}{2} \text{ белгилесек} \\ x\to 0 \Leftrightarrow \mu\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{\mu\to 0}\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right\} = \frac{1}{\cos 0}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2.$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ же "**2 –** сонун **пределди**".

Бул сонун предел удаалаштыктар үчүн "1^∞" аныксыздыгын ачууда $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ көрүнүшүндө далилденген эле (1.1.6, 1 – бөлүк). Ошондуктан аны пределдер теориясындагы жалпылыктарга шилтеме

жасап, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ жана $x=\frac{1}{\alpha}$ белгилөөсүн жардамы менен, $x\to\infty \Leftrightarrow \alpha\to 0$ болорун эске алып,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad (7.19)$$

көрүнүштөрүндө жалпылай алабыз.

3. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu}$ пределди.

Берилген предел $"\frac{0}{0}"$ көрүнүшүндөгү аныксыздык болот. Аны бардык оң $\mu\in Q$ рационалдык сандары үчүн ачууга болорун көрсөтөлү. Ньютондун биномунун (1.1.2, 1 – бөлүк) жардамы менен $\mu = n$ натуралдык сан болгондо, $(1+x)^n = 1+\mu\cdot x + \frac{\mu\cdot(\mu-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \ldots + x^n$ ажыралышына ээ болобуз, аны предел алдындагы туюнтмага коюп эсептесек,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+n\cdot x+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\ldots+x^n-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{n\cdot x+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\ldots+x^n}{x} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(n+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x + \ldots + x^{n-1}\right) = n$ пределине ээ болобуз. Ошентип $\mu = n$ натуралдык сан болгондо,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu \qquad (7.20)$$

экендиги далилденет.

Экинчи учурда $\mu = \frac{1}{m}$ көрүнүшүндөгү рационалдык сан болсун дейли ($m\in N$). Анда $(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1 = \sqrt[m]{1+x} - 1$ туюнтмасын

$y = \sqrt[m]{1+x} - 1$ көрүнүшүндө белгилеп ($x\to 0 \;\Leftrightarrow\; y\to 0$),

$x = (1+y)^m - 1$ туюнтмасына ээ болобуз. Ошентип берилген пределди, ага тең күчтүү болгон предел менен алмаштырып, m натуралдык сан болгон учурда далилденген бөлүккө таянып,

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\frac{(1+y)^m-1}{y}}=\frac{1}{m}$ (7.20) формуласын аткарыларына ишенебиз.

Үчүнчү учурда $\mu=\frac{n}{m}>0$ кыскарбас бөлчөк көрүнүшүндөгү оң рационалдык сан десек, анда $(1+x)^{\frac{n}{m}}-1=y$ $(x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0)$ белгилөөсүнүн жардамы менен $x=(1+y)^{\frac{m}{n}}-1$,

$(1+x)^n=(1+y)^m$ теңдештиктерин пайдаланып, берилген пределди

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^m-1}{y}}=\frac{n}{m}$ көрүнүшүндө эсептеп, (7.20) формуласынын бардык оң μ рационалдык сандар үчүн туура туура экендигин далилдей алабыз.

Эскертүү: *Айрым учурларда a чекитиндеги функциянын анык бир $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ пределди жашабаганы менен, a чекитине жакындап коюуланып келе жаткан айрым бир тандалган x_n чекиттериндеги функциянын маанилери, ар кандай A_n сыяктуу сандарга жыйнала бериши мүмкүн ($n\epsilon N$). Аларды функциянын a чекитиндеги жекече пределдери деп айтабыз. Бул жекече пределдердин эң чоңун жогорку предел деп $\overline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)=max\{A_n\}$, ал эми эң кичинесин төмөнкү предел деп $\underline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)=min\{A_n\}$ көрүнүштөрүндө белгилейбиз. Мисалы $\lim\limits_{x\to 0}sin\frac{1}{x}$ пределди жашабаганы менен, кандай гана x болбосун $\left|sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ болгондуктан, анын чексиз көп жекече пределдери жашап, алар*

$-1\le A_n\le +1$ *аралыгында жайгашышып,* $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}sin\frac{1}{x}=1$ *жогорку жана* $\underline{\lim\limits_{x\to 0}}sin\frac{1}{x}=-1$ *төмөнкү пределдерине ээ болушат. Бул учурда төмөнкү "– 1" жана жогорку "+1" сандарынын арасында жайгашкан ар бир β саны, берилген удаалаштыкка жекече предел боло алат. Анткени x аргументтеринин арасынан тандап куралган $\{x_n\}\to 0$ удаалаштыгын түзүп, функциянын ушул удаалаштыктар боюнча маанилеринин удаалаштыгы β санына умтуларын көрсөтүүгө болот:*

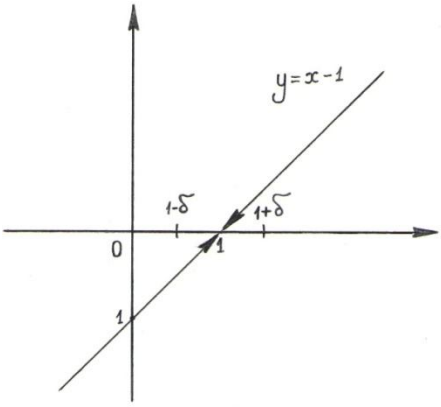
$sin\frac{1}{x_1}$, $sin\frac{1}{x_2}$, $sin\frac{1}{x_3}$, … , $sin\frac{1}{x_n}$, … $\to$ β . *β саны эркин тандалгандыктан, ал сыяктуу чексиз көп жекече пределдер* $[-1\,,+1]$ *сегментин толтуруп турат десек да болот.*

Эгерде функциянын a чекитиндеги предели жашаса, анда ал бирөө гана болуп, анын бардык жекече, жогорку, төмөнкү пределдерине тең болушат

$$\lim_{x\to a} f(x) = \overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \text{A}.$$

7.2.2 Чекиттеги чексиз кичине чоңдуктар (функциялар)

7.2 Аныктама. *$x = a$ чекитиндеги $y = f(x)$ функциясынын предели нөл санына барабар болсо $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, анда a чекитинин чексиз кичине чеке белинде (аймакчасында) $f(x)$ функциясын чексиз кичине чоңдук (функция) деп айтабыз (Мында $a = \pm\infty$ чексиз узактагы коюулануу чекити болушу да мүмкүн).*



7.9-чийме

Бул аныктама $x, a \in R^n$ болгон учурга да таралат, R^n мейкиндигиндеги чекиттер n координаталуу болушкандыктан,

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, көп өзгөрүлмөлүү $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы

$a = \{a_1, a_2, \dots\ a_n\}$ чекитинде чексиз кичине функция (чоңдук) болушу үчүн, анын аргументтеринин ар биринин a чекитинин тиешелүү координаталарына умтулгандагы n эселүү предели

$\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ x_3\to a_3\\ \dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ болушу керек. Кайталануучу пределдер менен эсептөө ыкмасына таянып, аны n жолку жөнөкөй пределдер катары кабыл алууга болот. Ошондуктан бир өзгөрүлмөлүү чексиз кичине функцияларга гана кеңири токтолуп, керек учурда аларды көп өзгөрүлмөлүү чексиз кичине функцияларга жалпылоого болот дейбиз.

a чекитинде пределі нөлгө барабар болгон көптөгөн функциялар же чексиз кичине чоңдуктар болгондуктан, аларды башка функциялардан айырмалап, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, ... көрүнүштөрүндөгү кичине грек тамгалары менен белгиленген функциялар катарында жазабыз. Ошентип чексиз кичине чоңдук түшүнүгү, a чекитине чексиз жакын аймакчада жайгашкан x чекиттериндеги функциянын маанилерине гана арналып, аймакчанын сыртындагы башка жерлерде жайгашкан x чекиттеринде функциянын маанилери чексиз кичине деп эсептелбейт. Мисалы $y = x - 1$ функциясы $x = a = 1$ чекитинде гана чексиз кичине чоңдук болуп, калган чекиттерде жетишерлик кичине маниге ээ эмес (7.9 – чийме). $x = a$ чекитинде көптөгөн чексиз кичине чоңдуктар болгону менен, алар бири - биринен нөлгө жакындоо ылдамдыктары боюнча айырмаланып турушат. $x \to a$ умтулуу процесси бирдей болгонуна карабастан, $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$, ... умтулуу процесстери ар кандай болуп, бири 0 санына ылдамыраак келсе, экинчиси жайыраак жетет. Ошондуктан чексиз кичине чоңдуктарды нөлгө умтулуу мүнөздөрү боюнча салыштырып, класстарга бөлөбүз:

I . Эгерде $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = k$, $(k \neq 0)$ нөлдөн айырмалуу чектүү пределине ээ болсо, анда $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ чексиз кичине чоңдуктары, a чекитиндеги бирдей тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар деп аталышат. $k = 1$ болсо, аларды эквиваленттүү чексиз кичине чоңдуктар деп,
$\alpha(x) \sim \beta(x)$ көрүнүшүндө жазабыз. Эгерде жогорудагы $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ пределі жашабаса, анда бул эки чоңдукту салыштырууга мүмкүн эмес дейбиз.

II . Эгерде $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ катышынын өзү a чекитинде чексиз кичине чоңдук, же $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болсо, анда $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдугун, $\beta(x)$ чексиз кичине чоңдугуна караганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп айтып,
$\alpha = o(\beta)$ көрүнүшүндө белгилейбиз. Аны "о микрон β" деп окуйбуз. Ошол эле мезгилде $\beta(x)$ ти $\alpha(x)$ ке караганда төмөнкү тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп эсептөөгө болот.

Эскертүү: *$\alpha(x) \sim \beta(x)$ эквиваленттүү болушса, анда алардын айырмасы болгон $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ чексиз кичине чоңдугу, $\alpha(x)$ менен $\beta(x)$ тердин ар бирине караганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушат, же $\gamma = o(\alpha), \gamma = o(\beta)$.*

Ар бир a чекитиндеги чексиз кичине чоңдуктарды өз ара салыштыруу үчүн, алардын арасынан бир үлгү (эталлон) чексиз кичине чоңдукту тандап алып, аны нөлгө умтулуу бирдик масштабы же шкала катарында пайдаланып, калган чексиз кичине чоңдуктарды ошол үлгү - шкалага салыштырып, тартиптерин аныктайбыз. Тандалган үлгү - шкала чексиз кичине чоңдугу **негизги чексиз кичине чоңдук** деп аталат.

Мисалы 0 чекитинде негизги чексиз кичине чоңдук деп x чексиз кичине чоңдугун, a чекитинде $x - a$ чексиз кичине чоңдугун, ∞ чекитинде $\frac{1}{x}$ чексиз кичине чоңдугун алууга болот.

Ошентип a чекитиндеги чексиз кичине чоңдуктардын нөлгө умтулуу ылдамдыктарын табыятына жараша, негизги кичине чоңдуктарга же алардын ар кандай оң m −даражаларына салыштырган тартиптерди киргизебиз.

III . Айталы $\beta(x)$ кайсы бир чекиттеги негизги чексиз кичине чоңдук болуп, $\alpha(x)$ менен $\beta^m(x)$ бирдей тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушса, же $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = k,\ (k \neq 0,\ m > 0)$ чектүү пределі жашаса, анда $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдугун, $\beta(x)$ негизги чексиз кичине чоңдугуна карата m −тартиптеги жогорку чексиз кичине чоңдук деп айтабыз. Бул учурда $\alpha = o(\beta)$ болот.

Мисалдар

1. $a = 0$ чекитинде $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдуктары деп $\sqrt[m]{1+x} - 1$ $(m \in N)$, $\sin x$, tgx, функцияларын алсак, алардын баары $\beta(x) = x$ негизги чексиз кичине чоңдуктары менен бирдей тартипте болушат, анткени алардын катыштарынын 0 чекитиндеги пределдери тиешелүү түрдө $\frac{1}{m}$, 1 , 1 нөлдөн айырмалуу чектүү сандары болгонун, жогорудагы (7.20) формуласынын экинчи учурунан жана 1 – сонун пределине (7.18) келтирилип чыгарылган мисалдардан билебиз.

2. Ошондой эле $1-\cos x$ менен x^2 чексиз кичине чоңдуктарынын катышы да, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left(\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$ болуп, бирдей тартипте экенине жана мындан сырткары 0 чекитине чексиз жакын аралыкта $\sin x\sim x$, $tgx\sim x$ эквиваленттүү болоруна күбө болобуз.

3. Ушул эле $a=0$ чекитинде $\alpha(x)=x^3$ чексиз кичине чоңдугу, $\beta(x)=\sin x$ чексиз кичине чоңдугуна карата жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук болот, анткени алардын катышынын пределі

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x^2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot x^2\right)=1\cdot 0=0$$ чексиз кичине чоңдук болууда.

4. Ал эми $a=1$ чекитинде $\alpha(x)=(x^6-1)^2$ чексиз кичине чоңдугу, ушул чекиттеги негизги чексиз кичине $\beta(x)=x-1$ чоңдугуна караганда $m=2$ тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп аталат, анткени

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-1)^2}{(x-1)^m}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)^2\cdot(x^3+1)^2}{(x-1)^m}=\left|\begin{matrix}m=2\\ \text{болсо}\\ \text{гана}\end{matrix}\right|=36$$

нөлдөн айырмаланган чектүү пределине ээ болот.

5. $y=f(x)$ функциясынын графиги менен $y=kx+b$ асимптота түзү жанашып олтуруп, $x\to\infty$ болгондо бири - бирине тийишип, бир эле графикте сүрөттөлүшөт, ошондуктан $x=\infty$ чексиз алыстатылган чекитинде $f(x)\sim kx$, $(f(x)-kx)\sim b$ эквиваленттүү чоңдуктар болушат.

IV. Кайсы бир чекитте $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдугу, негизги $\beta(x)$ чексиз кичине чоңдугуна салыштырмалуу m –тартиптеги чексиз кичине чоңдук болсун, б.а.

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)}=k,(k\neq 0,\ m>0)$ чектүү пределі жашасын, анда

$\lim\frac{\alpha(x)}{k\cdot\beta^m(x)}=1$ болгондуктан, $\alpha(x)\sim k\cdot\beta^m(x)$ эквиваленттүү чексиз кичине чоңдуктар болушуп, $k\cdot\beta^m(x)$ чексиз кичине чоңдугу, $\alpha(x)$ тин **башкы бөлүгү** деп аталат.

Көбүнчө чексиз кичине чоңдуктун башкы бөлүгүн ажыратып,

$$\alpha(x) = k \cdot \beta^m(x) + o(\alpha) \qquad (7.21)$$

жогорку тартиптеги кичине $o(\alpha)$ бөлүгүн көрсөтүшүп жазышат. Анткени чексиз кичине чоңдуктар менен иштөөдө, көбүнчө башкы бөлүгүн гана карап, жогорку тартиптеги кичине $o(\alpha)$ бөлүгүн таштап жиберүүгө болот.

Мисалы $a = 0$ чекитинде $\beta = x$ негизги чексиз кичине чоңдугу менен $\alpha = sin^3x$ чексиз кичине чоңдугун салыштырып,

$\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{sin^3x}{x^m} = \left| \begin{matrix} m = 3 \\ \text{болгондо} \end{matrix} \right| = 1$ келип чыккандыктан,

$\alpha = sin^3x$ чексиз кичине чоңдугун, төмөндөгүдөй көрүнүштө

$sin^3x = x^3 + o(sin^3x)$ башкы жана жогорку тартиптеги чекиз кичине бөлүктөргө ажыратып жазабыз. Ошентип 0 чекитине чексиз жакындаганда $sin^3x \approx x^3$ деп алууга болот.

1 - Натыйжа. *Эгерде* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *чектүү предели жашаса, анда* a *чекитинин жетишерлик кичине чеке белинде (аймакчасында),* $f(x)$ *функциясы өзүнүн пределдик мааниси* A *санынан, болгону чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланып турат же*

$$A = f(x) + \alpha(x). \qquad (7.22)$$

2 – Натыйжа. *Чектүү сандагы чексиз кичине чоңдуктардын суммасы, көбөйтүндүсү да чексиз кичине чоңдук болот. Чексиз кичине чоңдукту чектүү санга көбөйтсөк жана бөлсөк, көбөйтүндүсү жана тийиндиси чексиз кичине бойдон калат.*

7.2.3 Чекиттеги чексиз чоң чоңдуктар (функциялар)

7.3 Аныктама. *Эгерде* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *пределине ээ болсо, анда* a *чекитине чексиз жакын аралыкта (аймакчасында) жайгашкан* x *чекиттеринде* $f(x)$ *функциясын чексиз чоң чоңдук деп айтабыз (*a *чекити* $+\infty$, же $"-\infty"$ *болушу да мүмкүн).*

Көп өзгөрүлмөлүү функцияларда чексиз чоң функция (чоңдук) түшүнүгү x, a аргументтеринин координаталарын санына жараша, эселүү пределдер менен түшүндүрүлөт. Алар кайталануучу пределдер менен жөнөкөй пределдерге келтирилгендиктен, биз бир өзгөрүлмөлүү чексиз чоң функцияларга гана токтолобуз.

Ошентип, чексиз чоң түшүнүгү a чекитине жетишерлик жакын аймакчанын ичинде жайгашкан x чекиттериндеги функциянын маанилерине гана тиешелүү болуп, аймакчанын сыртында калган x чекиттеринде функция чектелген маанилерди кабыл алып, чексиз чоң болбой калышы да мүмкүн. Мисалы $f(x) = \frac{5}{x-7}$ функциясы

$x = a = 7$ чекитинде гана чексиз чоң чоңдук боло алат.

a чекитинде пределдери $+\infty$ ге барабар болгон көптөгөн функциялар бар болушу мүмкүн болгондуктан, анын чеке белинде көптөгөн чексиз чоң чоңдуктар бар деп түшүнөбүз. a чекитиндеги чексиз чоң чоңдуктарды башка функциялардан айырмалап таануу үчүн, аларды $E(x), G(x), B(x), \ldots$ сыяктуу чоң латын тамгалары аркылуу белгиленген функциялар катарында жазабыз. Аргументтер a чекитине белгилүү бир δ масштабы менен ченелген $\rho(x, a) = |x - a| < \delta$ ылдамдыкта жакындаса, чексиз чоң чоңдуктардын ар бири өзүнө гана таандык болгон, ар башка ылдамдыктар менен чексиз чоңоюп олтурушат, ошондуктан аларды чексиз чоңоюу ылдамдыктары боюнча класстарга бөлүп, бири - бири менен салыштырабыз.

I . a чекитиндеги эки $E(x), G(x)$ чексиз чоң чоңдуктарынын катышы

$\lim\limits_{x \to a} \frac{E(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{G(x)}{E(x)} = k, k \neq 0$ чектүү пределине ээ болсо, анда аларды бирдей тартиптеги чексиз чоң чоңдуктар дейбиз. $k = 1$ болсо, $E(x) \sim G(x)$ эквиваленттүү чексиз чоң чоңдуктар болушат.

II . a чекитинде $\frac{E(x)}{G(x)}$ катышынын өзү чексиз чоң чоңдук болсо

$\lim\limits_{x \to a} \frac{E(x)}{G(x)} = \infty$, анда $E(x)$ чексиз чоң чоңдугу, $G(x)$ чексиз чоң чоңдугуна караганда жогорку тартиптеги чексиз чоң чоңдук деп, же $G(x)$ ти $E(x)$ ке караганда төмөнкү тартиптеги чексиз чоң чоңдук деп атайбыз.

Бул учурда анын тескери $\frac{G(x)}{E(x)}$ катышы a чекитинде чексиз кичине $\lim\limits_{x\to a}\frac{G(x)}{E(x)}=0$ чоңдук болот.

Эгерде $\lim\limits_{x\to a}\frac{E(x)}{G(x)}$ пределі жашабаса, анда бул a чекитинде берилген чексиз чоң чоңдуктарды салыштырууга мүмкүн эмес дейбиз.

Чекиттеги чексиз чоң чоңдуктардын ичинен бирөөсүн тандап алып, аны **негизги чексиз чоң чоңдук** деп атап, калгандары менен салыштырууда үлгү - эталлон катары пайдаланабыз. Мисалы a (чектүү) чекитинде негизги чексиз чоң чоңдук деп $\frac{1}{|x-a|}$ чоңдугун, $a=\pm\infty$ чекитинде $|x|$ чоңдугун алууга болот.

III. Айталы $G(x)$ кайсы бир чекиттеги негизги чексиз чоң чоңдук болсун, анда $\lim\frac{E(x)}{G^m(x)}=k, k\neq 0$ чектүү пределі жашаса, анда $E(x)$ чексиз чоң чоңдугун, $G(x)$ негизги чоң чоңдугуна салыштырмалуу m –тартиптеги жогорку чексиз чоң чоңдук деп айтабыз. $k=1$ болсо, $E(x)\sim G^m(x)$ эквиваленттүү болушуп, $G^m(x)$ чексиз чоң чоңдугу, $E(x)$ тин башкы бөлүгү болуп эсептелет.

Мисалы $E(x)=5x^4-1$ жана $G(x)=9x+2x^3+3x^4$ функциялары $a=+\infty$ чекитинде бирдей тартиптеги чексиз чоң чоңдуктар болушат, анткени

$$\lim_{x\to a}\frac{E(x)}{G(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-1}{9x+2x^3+3x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\cdot(5-\frac{1}{x})}{x^4\cdot(\frac{9}{x^3}+\frac{2}{x}+3)}=\frac{5-\frac{1}{\infty}}{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}+3}=\frac{5-0}{0+0+3}=\frac{5}{3}$$

нөлдөн айырмалуу чектүү пределине ээ болот.

$a=3$ чекитиндеги $\frac{7}{(x-3)^8}$ чексиз чоң чоңдугу, $\frac{1}{x-3}$ негизги чоңдугуна караганда $m=8$ – тартиптеги чексиз чоң чоңдук болот анткени,

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{7}{(x-3)^8}}{(\frac{1}{x-3})^m}=\left|\begin{matrix}m=8\\ \text{болгондо}\end{matrix}\right|=7$ нөлдөн айырмалуу чектүү пределі жашайт.

IV. Эгерде $x = a$ чекитинде $f(x)$ чексиз чоң чоңдук болсо, анда ушул чекитте $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ чексиз кичине чоңдук болот. Ошондой эле тескерисинче $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз чоң чоңдук болот.

1– Натыйжа. *Чектүү сандагы чексиз чоң чоңдуктардын суммасы, көбөйтүндүсү да чексиз чоң чоңдук болот. Чексиз чоң чоңдукту чектүү санга көбөйтсөк жана бөлсөк, анда көбөйтүндүсү жана тийиндиси чексиз чоң бойдон калат.*

Пределди табуу ыкмаларына мисалдар

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0^2-1}{2\cdot 0-0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ пределинде $x = 1$ деп эсептесек, "$\frac{0}{0}$" көрүнүшүндөгү аныксыздык келип чыгат. Предел алдындагы бөлчөктүн алымы менен бөлүмүндө $(x-1)$ жөнөкөй көбөйтүүчүсү бар экендигинен, алардын нөлгө айланып жаткандыгын байкайбыз. Аныксыздыкты ачуу үчүн анын алымы менен бөлүмүнөн ушул көбөйтүүчүлөрдү бөлүп алып, кыскартууга аракеттенебиз.

Алымын $x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$, бөлүмүн $(2x^2 - x - 1)$: $(x-1) =$

$= (x-1)\cdot(2x+1)$ көрүнүштөрүндө жазсак, анда

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$ пределине ээ болобуз.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ пределди "$\frac{\infty}{\infty}$" көрүнүшүндөгү аныксыздык болот. Анткени бөлчөктүн алымы менен бөлүмүндө, $a = \infty$ чекитиндеги x^2 чексиз чоң чоңдугу бар. Аныксыздыкты ачуу үчүн, аларды бөлүп алып кыскартууга аракеттенип,

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot(1-\frac{1}{x^2})}{x^2\cdot(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{2-0-0} = \frac{1}{2}$ чектүү пределин эсептеп чыгарабыз. Демек, предел алдындагы бир эле

$f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ функциясы $a=0,\ a=1,\ a=\infty$ үч башка чекиттерде, үч башка пределдик маанилерге ээ болду.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)\cdot(1+2x)\cdot(1+3x)-1}{x}$ пределі "$\frac{0}{0}$" аныксыздыгы болот. Анын аныксыздык болуп жатканынын себеби, алымында жана бөлүмүндө жөнөкөй x көбөйтүүчүсүнүн кармалып турганы менен түшүндүрүлөт. Алымындагы кашааларды ачып чыгып,

$$(1+x)\cdot(1+2x)\cdot(1+3x)-1=6x^3+11x^2+6x+1-1=$$

$=6x^3+11x^2+6x$ ээ болбуз. Ордуна коюп, берилген пределди $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(6x^2+11x+6)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}(6x^2+11x+6)=6$ көрүнүшүндө эсептейбиз.

$$\begin{array}{l|l}
-\ x^5-4x+3 & x-1 \\ \hline
\quad x^5-x^4 & x^4+x^3+x^2+x-3 \\ \hline
-\ 0+x^4-4x+3 & \\
\quad x^4-x^3 & \\ \hline
-\ 0+x^3-4x+3 & \\
\quad x^3-x^2 & \\ \hline
-\ 0+x^2-4x+3 & \\
\quad x^2-x & \\ \hline
-\ 0-3x+3 & \\
\quad -3x+3 & \\ \hline
\quad 0-0 &
\end{array}$$

2-схема

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ пределі "$\frac{\infty}{\infty}$" аныксыздыгы болуп, алымы менен бөлүмүндө ∞ ди пайда кылып жаткан x чексиз чоңдугугунун, эң чоң даражасы 50 болгон x^{50} көрүнүшүндөгү көбөйтүүчүлөр бар, аларды кыскартып,

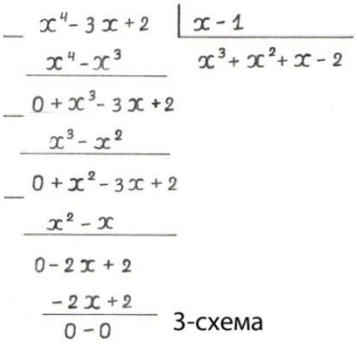
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{20}\cdot\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\cdot x^{30}\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{(2-0)(3+0)}{2+0}=3$$ ээ болобуз.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ пределі "$\frac{0}{0}$" аныксыздыгы болот, анын алымы менен бөлүмүнөн аныксыздыкты пайда кылган $(x-1)$ көбйтүүчүлөрүн бөлүп алып кыскартабыз. Бөлүмүн

$(x^5-4x+3):(x-1)=x^4+x^3+x^2+x-3$ (2 – схема), алымын $(x^4-3x+2):(x-1)=x^3+x^2+x-2$ (3 – схема) бөлүүнүн натыйжаларын пайдаланып, берилген пределди

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+x^2+x-2)}{(x^4+x^3+x^2+x-3)}=1$ эсептей алабыз.



3-схема

7) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}=3$ болорун R мейкиндигиндеги аралыктардын тилинде далилдегиле.

Далилдөө: ►Алдын ала берилген жетишерлик кичине $\varepsilon>0$ санына ылайыкташкан $\delta>0$ саны табылып,

$|x-5|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x+4}-3\right|<\varepsilon$ болсо, анда 7.1 – аныктамасы боюнча A = 3 саны, $a=5$ чекитиндеги функциянын пределі болорун далилдеген болобуз.

Чынында эле $f(x)=\sqrt{x+4}$ функциясынын аныкталуу $(x\geq -4)$ областынын чегиндеги бардык x тер үчүн, $\left|\sqrt{x+4}+3\right|>3$ барабарсыздыгы

аткарылгандыктан, $|f(x)-\mathrm{A}|=\left|\sqrt{x+4}-3\right|=\frac{\left|\sqrt{x+4}+3\right|\cdot\left|\sqrt{x+4}-3\right|}{\left|\sqrt{x+4}+3\right|}=$

$=\frac{|(\sqrt{x+4})^2-9|}{\left|\sqrt{x+4}+3\right|}<\frac{|x-5|}{3}<\varepsilon$ талабы, $|x-5|<3\varepsilon$ болгондо аткарыларын көрөбүз. Демек изделүүчү δ саны деп, $\delta=3\varepsilon$ санын алсак эле, 6.8 – аныктаманын шарты аткарылып, $a=5$ чекитиндеги функциянын пределі A = 3 саны болору далилденген болот.◄

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-1}}$ пределинде, бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн ∞ ге айлантып жаткан $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ көбөйтүүчүсү экендигин байкайбыз. Предел алдындагы бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ ге бөлүп жиберсек, аныксыздык ачылып,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+5x^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[3]{2x^{1-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{\sqrt[6]{x}}+\frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}=$$

$=\frac{2+0+0}{\sqrt{3-0}+\sqrt[3]{0-0}}=\frac{2}{3}$ пределі табылат.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу:► Тригонометриялык функциялар үчүн биринчи сонун пределин пайдалансак, анда мындай "$\frac{0}{0}$" аныксыздыгын ачуу үчүн, берилген пределди

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{tg5x}{5x}\cdot 5}=\frac{\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\lim\limits_{5x\to 0}\frac{tg5x}{5x}\cdot 5}=\frac{3}{5}$ көрүнүшүндө эсептөөгө болот.◄

10) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ предели $0\cdot\infty$ көрүнүшүндөгү аныксыздык болуп, аны ачуу үчүн $y=1-x$ белгилөөсүн киргизебиз.

$x\to 1\Leftrightarrow y\to 0$ болгондуктан, берилген пределди

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}\left\{y\cdot tg\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-y)\right]\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{y\cdot ctg\frac{\pi y}{2}\right\}=$$

$=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y\cdot\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\cos\frac{\pi y}{2}}{\lim\limits_{\frac{\pi y}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$ көрүнүшүндө эсептейбиз.

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+4}$ пределин эсептөөдө 1^{∞} аныксыздыгын ачуучу экинчи сонун пределин пайдаланабыз.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+4}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^{3}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{3}{x})^{4}=e^{3}\cdot 1^{4}=e^{3}.$$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$ пределин да экинчи сонун пределди колдонуп эсептейбиз.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\cdot(1+\frac{1}{3x})^{2x}}{3x\cdot(1-\frac{2}{3x})^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1+\frac{1}{3x})^{2x}}{(1-\frac{2}{3x})^{2x}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{(1+\frac{1}{3x})^{3x}\right\}^{\frac{2}{3}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{(1+\frac{1}{-\frac{3}{2}\cdot x})^{-\frac{3}{2}\cdot x}\right\}^{-\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{4}{3}}}=e^{2}.$$

13) $f(x) = \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$ $(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$ бөлчөк – рационалдык функциясынын $x \to \infty$ умтулгандагы пределин, x тердин даражалары m, n сандарына жараша табабыз

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n} = \begin{cases} \infty, & m > n \text{ болсо,} \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n \text{ болсо,} \\ 0, & m = n \text{ болсо.} \end{cases}$$

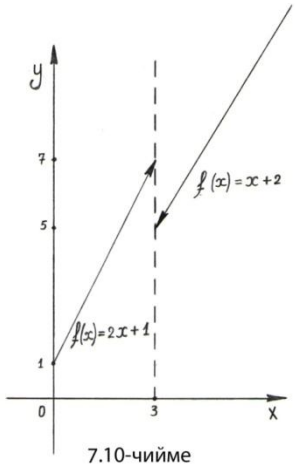
Себеби бөлчөктүн алымынан жана бөлүмүнөн "$\frac{\infty}{\infty}$" аныксыздыгын пайда кылуучу, x тин эң чоң даражаларын бөлүп алып, кыскартуу керек.

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin5x+tg^2x+\ln(1+x^2)}{x+x^2+arcsin^2x}$ пределі "$\frac{0}{0}$" көрүнүшүндөгү аныксыздык болот. Анткени бөлчөктүн алымында жана бөлүмүндө $x = 0$ чекитиндеги чексиз кичине чоңдуктардын суммасы орун алган. Алымындагы tg^2x , $\ln(1 + x^2)$ чексиз кичине чоңдуктары, $sin5x$ чексиз кичине чоңдугуна салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушуп, андан ылдам нөлгө жетишет. Бөлүмүндөгү x^2, $arcsin^2x$ чексиз кичине чоңдуктары да, x ке салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичинелер болушуп, нөлгө мурда келишет. Иш жүзүндө аныксыздыкты нөлгө жайыраак умтулуп келишкен $sin5x$ жана x чексиз кичине чоңдуктары жаратышат. Чексиз кичине чоңдуктардын суммасы да чексиз кичине болгондуктан, алардын башкы бөлүктөрүн алып, жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүктөрүн таштап жиберсек, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin5x+tg^2x+\ln(1+x^2)}{x+x^2+arcsin^2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin5x}{5x} \cdot 5 = 5$ пределине ээ болобуз.

15) $$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ эгерде } 3 < x \leq 8, \\ 2x + 1, \text{ эгерде } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

функциясынын $x = 3$ чекитиндеги оң жана сол жактуу пределдерин тапкыла.

Чыгаруу:► $x = 3$ санына сол жактан жеткенге чейин $f(x) = 2x + 1$ көрүнүшүндөгү функция болгондуктан,



7.10-чийме

$\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-}(2x+1) = 7 = f(3-0)$ сол жактуу пределине ээ болот. Ал эми оң жактан жакындап келген учурда, x аргументи 3 санынын накта өзүнө жете албаса да, анын оң жактагы кошунасына чейин бара алмак, бирок чыныгы сандар кошунасын көрсөтө албай турган деңгээлге чейин тыгыз жайгашкандыктан, 3 санын кошунасынан айырмалоо, чексиз жакындоочу пределдик абалдарда гана такталат. Демек x аргументтери 3 санына оң жактан пределдик абалда жакындаганга чейинки тактыкта, $f(x) = x + 2$ көрүнүшүндөгү функция бойдон кала берет. Андай болсо,

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+}(x+2) = 5 = f(3+0)$ оң жактуу пределин табабыз.

Берилген функциянын $x = 3$ чекитинде предели жашабаганы менен, оң жактуу жана сол жактуу бири – биринен айырмалуу

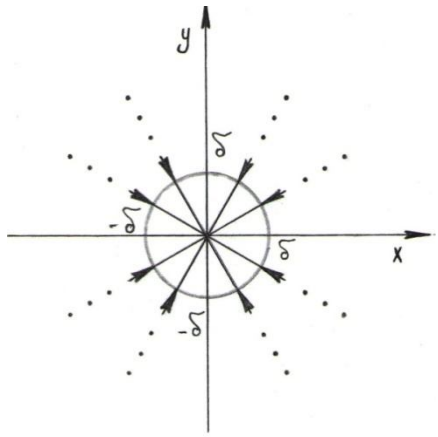
$f(3-0) = 7 \neq f(3+0) = 5$ пределдери жашайт (7.10 – чийме).◄

16) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{эгерде } 0 < x < +\infty \text{ болсо,} \\ x\cdot\cos\frac{1}{x} & \text{эгерде } -\infty < x < 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясынын $x = 0$ чекитинде сол жактуу предели жашап, оң жактуу предели жашабашын далилдегиле.

Далилдөө:► $x = 0$ чекитине сол жактан пределдик абалда жакындаганга чейин $f(x) = x\cdot\cos\frac{1}{x}$ көрүнүшүндө сакталып бара берет. Бул чекитте биринчи x көбөйтүүчүсү чексиз кичине чоңдук, экинчиси $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$ чектелген чоңдук болгондуктан, алардын көбөйтүндүсү чексиз кичине чоңдук болуп,

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-}\left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right) = 0$ сол жактуу предели жашайт.

$x = 0$ чекитине оң жактан жакындап көрөлү. Бул учурда



7.11-чийме

$f(x) = \cos\frac{1}{x}$ көрүнүшүндө сакталып келет. Жакындоону нөл санына эки түрдүү секирик мүнөздө оң жактан жакындоочу $x_n = \frac{1}{2\pi n}$,

$x'_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ удаалаштыктары боюнча жүрсүн дейли. Анда $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ чекиттери менен нөлгө жөнөгөндө, функциянын маанилери $f(x_n) = \cos\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \cos 2\pi n = 1$ болуп, оң жактуу предели

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \cos 2\pi n = 1$ санына барабар болот. Ал эми

$x'_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ чекиттери менен нөлгө жөнөсөк, функциянын маанилери

$f(x'_n) = \cos\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n+1)}} = \cos\frac{\pi(4n+1)}{2} = 0$ болуп, x'_n чекиттери менен жакындаган оң жактуу предел $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \cos\frac{\pi(4n+1)}{2} = 0$ келип чыгат. Демек $x = 0$ чекитине оң жактан туташ x чекиттери менен жакындаганда, функциянын маанилери ар башка пределдерге умтула берип, анык бир оң жактуу предели жашабайт деген тыянакка келебиз.◄

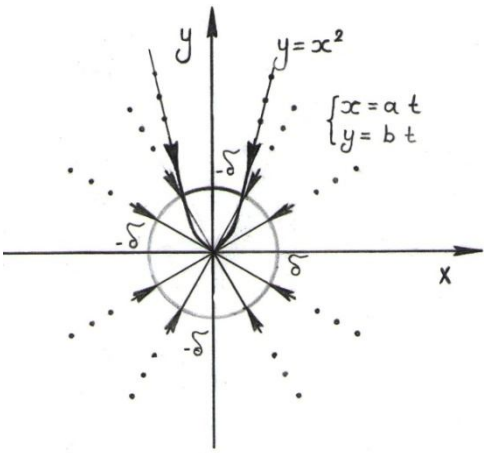
17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу:►Берилген пределди аргументтердин $\{x, y\} \to \{0,0\}$ умтулуусу, Оx огу менен φ бурчун түзгөн О чекитинен өтүүчү шоолаларда жайгашкан r чекиттери боюнча (7.11 – чийме) жүрсүн дейли ($0\leq \varphi \leq 2\pi$). Анда $\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot sin\varphi \end{cases}$ полярдык координаталар системасына өтүү менен, предел алдындагы функцияны

$\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^2\varphi\cdot sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+sin^2\varphi)} = r\cos^2\varphi\cdot sin\varphi$ көрүнүшүнө келтиребиз. φ бурчу кандай болушунан көз каранды болбостон ($\forall\varphi\epsilon[0,\ 2\pi]$), О чекитинен чачырап чыккан чексиз көп шоолалардагы r чекиттери аркылуу нөл чекитине умтулуп,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0}(r\cos^2\varphi\cdot sin\varphi) = 0$ пределине ээ болобуз. ◄

Эскертүү: Жалпы учурда $(a; b)$ чекитинен чыгуучу шоолалар чексиз көп жана жыш жайгашкандай көрүнгөнү менен, $(a; b)$ чекитине келүүчү бардык багыттардагы жолдорду толук камтый алат деп ишенип, $(x; y)$ аргументтери ушул шоолалардагы жол менен $(a; b)$ чекитине умтулган кездеги функциянын пределе А саны болсо эле, бул чекиттеги кош предел жашап, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ = А санына барабар болот деген кортунду чыгарууга боло бербейт, анткени мындай чексиз көп шоолалардан башка $(a; b)$ чекитине келүүчү чексиз сандагы ийрилерди бойлогон жолдор да бар. Ошентсе да кайсы бир деңгээлдеги каталык менен, $(a; b)$ чекитине келүүчү бардык багыттагы жолдорду элестетүүчү чексиз көп шоолалар боюнча умтулууну колдонуп, каталыктарга жол коюу менен көп өзгөрүлмөлүү функциялардын пределдерин эсептөөгө болот.



7.12-чийме

18) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}, & \text{эгерде } (x; y) \neq (0; 0) \text{болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } (x; y) = (0; 0) \text{болсо} \end{cases}$ функциясынын O(0;0) чекитиндеги предели жашайбы?

Чыгаруу:► Айталы $(x; y)$ координаталуу чекиттери O(0;0) чекитине $x = at,\ y = bt\ (a \neq 0\ V\ b \neq 0)$ параметрдик теңдемеси менен берилген түздү бойлоп жакындасын, анда a жана b кандай сандар болгонуна карабастан,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(at, bt) = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 bt}{a^4 t + b^2} =$$

$= \frac{0}{b^2} = 0$ келип чыгат. Эгерде $b = 0$ десек $(a \neq 0)$, анда $y = 0$ менен кошо $f(x, y) = 0$ болуп, $y = 0$ түзүн (Ox огун) бойлоп O(0;0) чекитине жакындаганда да, функция 0 пределине ээ болот. Ошондой эле аргументтер Oy огу боюнча ($x = 0$ түзү, $a = 0, b \neq 0$ учуру) жакындаганда да, функциянын предели 0 болорун көрөбүз. Ошентип

$(x;y)$ чекиттери, O(0;0) чекити аркылуу өтүүчү бардык чексиз көп түздөрдү бойлоп O(0;0) чекитине жакындаганда, функция 0 пределине ээ болот.

Экинчи жактан, $(x;y)$ чекиттери O(0;0) чекитине $y=x^2$ парболасынын чекиттери менен жакындасын десек (7.12– чийме), анын параметрдик теңдемеси $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=t \end{cases}$ $(t>0)$ болгондуктан, пределі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{t\to 0} f(\sqrt{t},t)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}$ санына барабар болот. Демек берилген функция O(0;0) чекити аркылуу өтүүчү түздөр боюнча келгенде 0 жекече пределине, ал эми O(0;0) чекити аркылуу өтүүчү $y=x^2$ параболасы менен жакындаганда $\frac{1}{2}$ жекече пределине ээ болуп, жалпы учурда анын кош пределі жашабайт.◄

19) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу:► Предел алдындагы функцияны өзгөртүп түзөлү

$f(x,y)=\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}=2+\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}$. Эбегейсиз чоң E саны табылсын деп ойлойлу, анда $|x|>\mathrm{E}$, $|y|>\mathrm{E}$ болсо же аргументтер E санынан ашып кетишсе, анда

$\left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|<\left|\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{\mathrm{E}}$ орун алат, себеби эбегейсиз чоң y^2 санын таштап жиберсек, бөлчөктүн бөлүмү кичинергендиктен, бөлчөктүн өзү чоңоёт. Кийинки кадамда бөлүмүндөгү $|x|$ ти андан кичине E саны менен алмаштырып, бөлчөктү чоңойттук. Ошондой эле $\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right|<\left|\frac{1}{y}\right|<\frac{1}{\mathrm{E}}$ келип чыгат. Андай болсо, чын эле $|x|>\mathrm{E}\wedge|y|>\mathrm{E}\Rightarrow|f(x,y)-\mathrm{A}|=$

$=\left|\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}-2\right|=\left|2+\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}-2\right|=\left|\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|+$

$+\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right|<\frac{1}{\mathrm{E}}+\frac{1}{\mathrm{E}}=\frac{2}{\mathrm{E}}<\varepsilon$ шарты аткарыла тургандай, биз ойлогон E$=\frac{2}{\varepsilon}$ эбегейсиз чоң саны табылып, аныктама боюнча функция

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2$ пределине ээ болот.◄

20) $f(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$ функциясынын $x \to \infty,\ y \to \infty$ умтулгандагы предели жашабай тургандыгын көрсөткүлө.

Чыгаруу:► Аргументтер же тегиздиктеги $(x;y)$ координаталуу чекиттер, чексиз алыстатылган чекитке $y = x^4$ ийрисиндеги чекиттер аркылуу жөнөп жетсин дейли, анда бул ийринин параметрдик $\begin{cases} x = t, \\ y = t^4 \end{cases}$ теңдемесин түзсөк, берилген функция $f(x,y) = f(t,t^4) = \frac{t^4+t^8}{t^2+t^{16}} = \frac{t^2+t^6}{1+t^{14}}$ көрүнүшүнө келет. Ийринин чекиттеринде $(x \to \infty,\ y \to \infty) \Leftrightarrow t \to \infty$ болгондуктан, функциянын пределин

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,y) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t,t^4) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^2+t^6}{1+t^{14}} = 0$ көрүнүшүндө эсептөөгө болот.

Экинчи жактан $(x;y)$ чекиттери, чексиз алыстатылган чекитке $x = y^2$ ийрисинде жайгашкан чекиттер менен жүрүп олтуруп жетсе, анда ийринин теңдемесин $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t \end{cases}$ параметрдик көрүнүштө жазуу менен, функциянын предели

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t^2,t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^8+t^2}{t^4+t^4} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^8\cdot(1+\frac{1}{t^6})}{t^8\cdot(\frac{2}{t^4})} = \frac{1+0}{0} = \infty$ болорун көрөбүз. Ошентип эки өзгөрүлмөлүү функциянын аргументтери болушкан $(x;y)$ чекиттери, тегиздиктеги чексиз алыстатылган чекитке эки башка жол менен же эки башка ийрилерде жайгашкан чекиттер менен умтулганда, функция эки башка 0 жана ∞ жекече пределдерине жетти. Демек берилген функциянын $x \to \infty,\ y \to \infty$ умтулгандагы предели жашабайт, анткени функциянын предели жалгыз гана болуп, ал бардык жекече пределдер менен тең болушу керек эле.◄

21) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, & \text{эгерде } x \neq y \text{ болсо,} \\ 4, & \text{эгерде } x = y \text{ болсо} \end{cases}$ функциянын

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} f(x,y)$ кош пределин тапкыла.

Чыгаруу:► Эгерде $x \neq y$ болсо, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y} = \frac{(x-y)\cdot(x+y)}{(x-y)\cdot(x-y+1)} = \frac{(x+y)}{(x-y+1)}$ көрүнүшүнө келип, анын кош предели

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{(x+y)}{(x-y+1)} = \frac{4}{1} = 4$ санына барбар болот. Ошол эле учурда $x = y$ болсо, $f(x,y) = 4$ болгондуктан, эки өзгөрүлмөлүү функциянын аргументтери болгон $(x;y)$ чекиттери, (2; 2) чекитине кайсы жагынан жакындашынан көз каранды болбостон, функциянын предели 4 санына барабар болот. Тегиздиктеги $y = x$ түзү, берилген функцияга өзгөчө сызык болот, анткени бул түздө жайгашкан чекиттерде бөлчөктүн алымы жана бөлүмү нөлгө айланып, аныксыздык келип чыгат. Демек $(x;y)$ чекиттери, $y = x$ өзгөчө түзүндө жайгашкан чекиттер аркылуу

(2; 2) чекитине умтулуп келе албастан, функция ушул чекиттеги пределдик 4 маанисине секирип жетет деп элестетебиз.◄

22) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{x^2}, & \text{эгерде } x \neq 0 \text{ болсо,} \\ 3, & x = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясынын кош

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f(x,y)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу: ►$\alpha = x^2y$ белгилөөсүн киргизсек, анда $(x \to 0,\ y \to 3)$ ⇨ $\alpha \to 0$ болуп, функциянын предели

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin(x^2y)}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin(x^2y)}{x^2\cdot y}\cdot y = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot y = 1\cdot 3 = 3$$

көрүнүшүндө табылат. Ал эми $x = 0$ болсо, $f(x,y) = 3$ болгондуктан, $(x;y)$ аргументтери (чекиттери) пределдик (0; 3) чекитине кайсы багыттан келсе да, $f(x,y)$ функциясынын (0; 3) чекитиндеги предели A = 3 саны болот. Бирок $x = 0$, $y = 3$ болгондо, $\frac{\sin(x^2y)}{x^2}$ бөлчөгүнүн алымы жана бөлүмү нөлгө айланып, аныксыздык келип чыккандыктан, (0; 3) чекити функцияга өзгөчө чекит болуп, аргументтер Оy огунда

($x = 0$ түзүндө) жайгашкан чекиттер аркылуу (0; 3) чекитине жакындап келе албаса да, функция пределдик А = 3 маанисине секирип жетет.◄

23) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & \text{эгерде } x \neq -y \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } x = -y \text{ болсо} \end{cases}$ функциянын $x \to 0,\ y \to 0$ учурдагы кайталанма пределдерин тапкыла.

Чыгаруу: ► Убактылуу y өзгөрүлмөсү боюнча 0 гө умтулуу процессин токтотуп ($y \neq 0$), x боюнча 0 гө умтулалы, анда

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \frac{-y+y^2}{y} = -1 + y$ келип чыгат. Кайра y ти кыймылга киргизсек, кайталанма предели

$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\} = \lim\limits_{y\to 0}(-1+y) = -1$ табылат.

Экинчи жактан, x өзгөрүлмөсүн кыймылын токтотуп ($x \neq 0$), y боюнча пределге өтсөк $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \frac{x+x^2}{x} = 1 + x$ болуп, кийинки кайталанма предел $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1$ санына барабар болот.◄

Ошентип $(x; y)$ аргументтеринин, (0; 0) чекитине умтулуу процесси x жана y өзгөрүлмөлөрү боюнча кезектешип жүрөт десек, анда берилген мисалда алардын умтулуу кезектерин алмаштырууга болбосун көрөбүз.