13 – лекция:

ФУНКЦИЯЛАРДЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ

§8.1 Үзгүлтүксүз функциялар

8.1.1 Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү

Математикада предел аппаратынын түзүлүшү менен, чөйрө таануу процессинде чоң бурулуш болгон. Анткени мурда математикада стационардык (турактуу) абалдагы кубулуштарды гана моделдештирүүгө мүмкүнчүлүк болсо, пределдин жардамы менен эркин кыймылдагы кубулуштардын чекиттеги абалына чейин сүңгүп кирип, териштирүүгө мүмкүнчүлүк түзүлдү. Чөйрөнүн ар кайсы бөлүктөрүндө чексиз көп кубулуштар, окуялар жүрүп жаткандыгына карабастан, алардын ар бир абалдарын сандар менен белгилеп, же орнотулган эреже - функциялардын жардамы менен ошол абалдарды сандардын көптүктөрүнө чагылтып, кубулуштар жүрүп жаткан чекиттерден маалымат алып, аларды таанып үйрөнөбүз. Чөйрө мейкиндиктеринин сан моделдеринде баяндалгандай (§1.2, 1 – бөлүк), коңшулук деңгээлге чейинки тактыкта айырмалоого мүмкүн болбогон кубулуштар менен, алардын сандык моделдеринин арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотууга болот. Функциянын предели ошол ар бир чекиттердеги кубулуштардын жүрүүсүнүн жыштык процесстери менен, алардын элестери болгон сандардын (функциянын маанилеринин) жайгашуу жыштыктарын салыштырып, баалоого шарт түзөт.

Айталы, $y = f(x)$ функциясы X көптүгүндө аныкталган же ушул көптүктөгү x сандары (чекиттери) менен белгиленген кубулуштарды, Y сандык көптүгүнө чагылтуучу эреже – мыйзам болсун ($x \in$ X, $y \in$ Y $\subseteq$R). x кубулуштары a чекитине чексиз жакын аралыкта болуп өтсө же ушул чекитте коюуланса, анда алардын элестери болгон кубулуштар же функциянын $y = f(x)$ маанилери, кайсы бир A санына чексиз жакындайт же коюуланат деген түшүнүктү символикалык түрдө $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ A пределди менен белгилегенбиз.

Функциянын a чекитиндеги пределі менен адаштырбас үчүн, X көптүгүнөн a чектинен башка бир кыймылы токтотулган (фиксирленген) x_0 коюулануу чекитин алалы. $f(x)$ функциясы ушул чекитте жана анын жакынкы аймакчасында аныкталсын дейли. Функциянын $x \to x_0$ умтулгандагы пределине токтолойлу.

8.1 Аныктама. *Эгерде $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги пределі жашаса жана ал x_0 чекитиндеги функциянын $f(x_0)$ маанисине барабар болсо, анда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз жана символикалык түрдө*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (8.1)$$

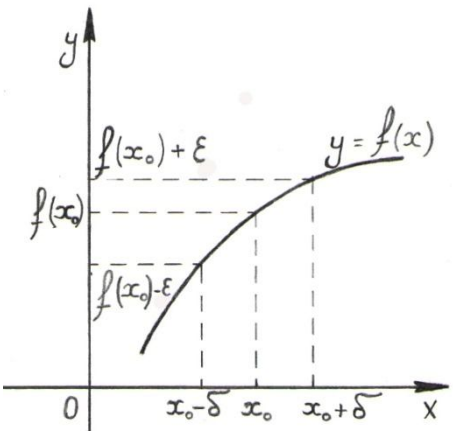
көрүнүшүндө жазабыз. $f(x)$ функциясы X көптүгүнүн бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, аны бүтүндөй X көптүгүндө үзгүлтүксүз функция дейбиз. Ал эми $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ ти x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ деп айтабыз, б.а. функция үзгүлтүксүз болбогон чекитте үзүлүшкө ээ болот.

∘ Ошентип чекиттеги үзгүлтүксүз функцияларда аргументтер кайсы чекитке жыйналса, тиешелүү функциянын маанилери да ошол чекиттеги функциянын маанисине жыйналгандыктан, үзгүлтүксүз функциянын белгисинин алдынан пределге өтүү мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)\,. \qquad (8.2)$$

Бул мүмкүнчүлүктү пайдаланып, үзгүлтүксүз функциялардын пределдерин эсептөө ыкмаларын жаңы сонун пределдер менен кеңейтүүгө болот.

Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн 8.1 – аныктамасы предел аппаратынын жардамы менен берилген. Үзгүлтүксүздүктү аралыктардын, өсүндүлөрдүн, удаалаштыктардын тилдеринде чечмелеп түшүндүрөлү же ага тең күчтүү болгон аныктамаларды келтирип чыгаралы:



8.1-чийме

∘ **1.** x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүз функция түшүнүгү, ушул чекиттеги функциянын пределі менен аныкталгандыктан, 8.1 – аныктамасын R мейкиндигиндеги аралыктарды ченөө эрежесинин (метриканын) жардамы менен түшүндүрөлү: Функциянын чекиттеги пределинин 7.1 – аныктамасына ылайык,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0:$$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *болушу керек, б.а. алдын ала жетишерлик кичине деп тандалган* $\varepsilon > 0$ *санына жараша, кандайдыр бир* $\delta > 0$ *саны табылып, аргументтердин*

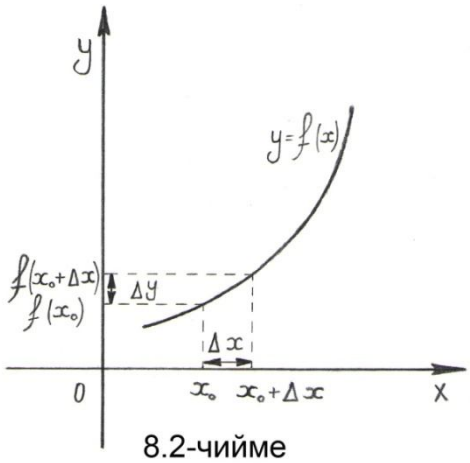
$|x - x_0| < \delta$ *жакындыкта жайланышынан, алардын тиешелүү маанилеринин* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *жакындыгында жайланышы келип чыкса, анда* $f(x)$ *ти* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз функция дейбиз (8.1 – чийме). Эркин берилген* ε *санына карата аныкталуучу* δ *саны* x_0, ε *сандарынан көз каранды* $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ *болот.*

∘ **2.** Функциянын a чекитиндеги пределинде $x \neq a$ деп ойлоп, a чекитиндеги функциянын $f(a)$ мааниси жашайбы же жокпу ага кызыкпастан, анын ушул чекиттеги пределі болгон А санына көңүл бурганбыз. Функциянын x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүндө, пределдик $x = x_0$ чекитинде жана анын жетишерлик кичине аймакчасында $f(x_0)$ менен кошо, $\{f(x)\}$ маанилеринин жашашы негизги шарттардын бири болуп эсептелет. Айтылган шарттарды эске алып, функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн өсүндүлөр тилинде түшүндүрүүгө болот. Айталы $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белинде аныкталсын (жашасын), анда x_0 гө жетишерлик кичине Δx өсүндүсүн кошуу менен, x_0 чекитин сөз кылынган чеке белден чыгып кетпей тургандай $x_0 + \Delta x$ абалына козгоого болот. Бул учурдагы функциянын өзгөрүү $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ чоңдугун, x_0 чекитиндеги Δx өсүндүсүнө туура келүүчү функциянын өсүндүсү деп атайбыз (8.2– чийме). Мындан

$x \to x_0 \Leftrightarrow \quad \Delta x \to 0$ тең күчтүү экендигин байкап, (8.1) эрежесин өсүндүлөр тилинде

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \text{ же } \lim_{\Delta x \to 0} \{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\} = 0 \text{ же } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad (8.3)$$

көрүнүштөрүндө жазууга болорун байкайбыз. *Демек x_0 чекитиндеги аргументтин өсүндүсү нөлгө умтулганда, функциянын тиешелүү өсүндүсү да нөлгө умтулса, анда x_0 чекитинде функцияны үзгүлтүкүз деп айтууга болот* деген натыйжага келебиз. Үзгүлтүксүз функциялар аргументтердин x_0 чекитиндеги жетишерлик кичине козголуусуна же термелүүсүнө, функциянын ушул чекиттеги маанисинин жетишерлик кичине козголуусу же термелүүсү менен жооп беришет. Ошондуктан



8.2-чийме

кубулуштардын жүрүү жыштыгы менен, алардын элестеринин жыштык байланыштарын баалоо аппараты катарында *үзгүлтүксүз функция* деген түшүнүк киргизилгенин байкайбыз.

∘ **3.** Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн удаалаштыктар тилинде түшүндүрөлү: *x_0 чекити X көптүгүнүн коюулануу чекити болгондуктан, бул көптүктүн элементтеринен x_0 чекитине жыйналуучу чексиз көп удаалаштыктарды түзүү мүмкүн. Ошол удаалаштыктардын арасынан $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \to x_0$ кайсынысын алганыбыздан көз каранды болбостон, функциянын тиешелүү маанилеринен түзүлгөн удаалаштык дайыма*

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \to f(x_0)$ пределине ээ болсо, анда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз.

Пределдердин касиеттерине таянып, бир X көптүгүндө аныкталышып, анын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болушкан $f(x)$, $g(x)$, … сыяктуу чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын $f(x) \pm g(x)$ суммасы, $f(x) \cdot g(x)$ көбөйтүндүсү,

$\frac{f(x)}{g(x)}$ тийиндиси $(g(x_0) \neq 0)$ да, x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функциялар болорун көрсөтүүгө болот.

8.1.2 Элементардык функциялардын үзгүлтүксүздүгү

8.1 Теорема. *Бардык элементардык функциялар өз аныкталуу областтарынын чегинде үзгүлтүксүз функциялар болушат.*

Теореманын далилдөөсүн айрым элементардык функциялар үчүн көрсөтүп, калгандары үчүн далилдөөсүз кабыл алабыз. Анткени функциянын чекиттеги пределдерин эсептөө ыкмалары менен, алардын үзгүлтүксүздүгүн көрсөтүү ыкмалары окшош болушат.

1) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн көрсөтөлү.

$f(x) = x$ функциясы $X =]-\infty, +\infty[\equiv R$ аралыгындагы каалаган x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болот, анткени бул аралыктагы ар бир чыныгы сан коюулану чекити болуп, алардын ар бирин x_0 чекити деп алып, ага умтулуучу чексиз көп удаалаштыктарды түзүүгө болот. Бул учурда түзүлгөн удаалаштыктар менен ага тиешелүү чекиттердеги функциянын маанилеринин удаалаштыгы дал келгендиктен, 8.1 – аныктама аткарылып, функция үзгүлтүксүз болот.

$f(x) = ax^n = a\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ жолу}}$ функциясы, x_0 чекитиндеги чектүү сандагы $f(x) = x$ үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү катарында үзгүлтүксүз болот.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ функциясын x_0 чекитиндеги чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын суммасы катарында, өзүнүн $X =]-\infty, +\infty[\equiv R$ аныкталуу областынын ичиндеги бардык x_0 чекиттеринде үзгүлтүксүз деп эсептөөгө болот.

2) $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$ функциясын да өз аныкталуу областынын чегинде ($b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \neq 0$ болгон чекиттерде) үзгүлтүксүз функциялардын катышы катарында, үзгүлтүксүз функция деп эсептей алабыз.

3) $f(x) = \sin x$ функциясы да аныкталуу областынын бардык x_0 чекиттеринде үзгүлтүксүз функция болот. Чынында эле (7.15) барабарсыздыгын эске алсак (7.2.1 – караңыз), $0 < x < \frac{\pi}{2}$ болгондо $\sin x < x$ барабарсыздыгы орун алат. Жалпы x тер үчүн $|\sin x| \leq 1$ барабарсыздыгы аткарылгандыктан, $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ жана $|x| > 1$ болгондо деле $|\sin x| \leq |x|$ барабарсыздыгынын орун аларын байкайбыз. Демек

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылып, алдын ала кандай гана жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын албайлы, $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай аргументтердин $|x - x_0| < \delta$ чеке белин түзүү мүмкүн, же ушундай аймакчанын чегин көрсөтүүчү изделген δ саны деп, ε санын өзүн алууга болорун көрөбүз $\delta = \varepsilon$.

$\cos x$ функциясын да, аныкталуу областынын ар бир x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болорун ушундай эле көрсөтүп, үзгүлтүксүз функциялардын катышы катарында $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ тригонометриялык функцияларынын өз аныкталуу областтарынын ички чекиттеринде үзгүлтүксүз функциялар болоруна ишенебиз.

4) $y = x^2 + 1$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн далилдегиле.

Далилдөө: Берилген функциянын аныкталуу области $X =]-\infty, +\infty[$ көптүгү болот. Анын каалаган жеринен x_0 чекитин алып, ага $x_0 + \Delta x$ өсүндүсүн берели. Бул учурда функция да тиешелүү

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - ({x_0}^2 + 1) = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$ өсүндүгө ээ болот. Анда

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$ келип чыгып, үзгүлтүксүздүктүн 7.1 – аныктамасынын өсүндүлөр тилиндеги чечмеленишине ылайык, мисалдагы функция аныкталуу областынын бардык чекиттеринде же

$X =]-\infty, +\infty[$ көптүгүндө үзгүлтүксүз функция болот.

Өз аныкталуу областтарында үзгүлтүксүз болгон негизги элементардык функциялардын тизмесин жазалы:

1. $y = x^\alpha$ – даражалуу функциясы, $X =]0, +\infty[$ көптүгүндө;

2. $y = a^x$ –көрсөткүчтүү функциясы $(a > 0, a \neq 1)$, X = $]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областында;

3. $y = log_a x$ –логарифмалык функциясы $(a > 0, a \neq 1)$, X = $]0, +\infty[$ аныкталуу областында;

4. Тригонометриялык функциялар:

$y = \sin x$ –функциясы, X = $]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областында;

$y = \cos x$ –функциясы, X = $]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областында;

$y = tgx$ –функциясы, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ болгондо;

$y = ctgx$ –функциясы, $x \neq \pi k, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ болгондо.

5. Тескери тригонометриялык функциялар:

$y = arcsinx$ –функциясы, $-1 \leq x \leq 1$ болгондо;

$y = arccosx$ –функциясы, $-1 \leq x \leq 1$ болгондо;

$y = arctgx$ –функциясы, $-\infty < x < \infty$ болгондо;

$y = arcctgx$ –функциясы, $-\infty < x < \infty$ болгондо.

8.1.3 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү

Айталы $y = f(x)$ аныкталуу областы X $\subseteq R^n$, өзгөрүү областы Y $\subseteq$ R болгон n өзгөрүлмөлүү функция болсун. Аргументтер n өлчөмдүү мейкиндикте өзгөргөндүктөн, алардын ар бирин $x = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\}$ көрүнүшүндө, n координаталары менен жазылышкан чекиттер десек болот. X көптүгүнөн эркин тандалган $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитин алып, аны убактылуу кыймылы токтотулган (фиксирленген) деп эсептейли.

8.2 Аныктама. *Эгерде $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитиндеги предели жашаса жана анын мааниси функциянын ушул чекиттеги $f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_n^0)$ маанисине барабар болсо, анда бул функцияны*

$x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ *чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз. Үзгүлтүксүздүк шартынын символдук жазылышы*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots, x_n^0) \qquad (8.4)$$

n эселүү предел көрүнүшүндө жазылат. Эгерде бул шарт аткарылбаса же

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq f(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots, x_n^0) \qquad (8.5)$$

болсо, анда берилген функцияны $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ чекитинде үзүлүшкө ээ дейбиз, б.а. функция үзгүлтүксүз эмес болгон чекитте үзүлүшкө ээ болот.

Ошентип n өзгөрүлмөлүү функция үзгүлтүксүз дегенди, ар бир өзгөрүлмөсү боюнча үзгүлтүксүз деп түшүнөбүз. Бирок, тескерисинче көп өзгөрүлмөлүү функциянын кайсы бир багыттар боюнча ар бир өзгөрүлмөлөргө карата үзгүлтүксүз болушунан, ар дайым эле функциянын өзүнүн үзгүлтүксүздүгү келип чыга бербей турганын эскерте кетебиз. Мисалы,

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ болсо,} \\ 0, & x = y = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясы $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитинде ар бир өзгөрүлмөлөр боюнча үзгүлтүксүз. Анткени $y = 0$ түзү боюнча $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитине умтулсак $\forall\, x$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0) = f(\mathrm{M}_0)$, ал эми $x = 0$ түзү боюнча умтулсак $\forall\, y$: $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0) = f(\mathrm{M}_0)$ болуп, берилген функция ар бир x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча өз өзүнчө үзгүлтүксүз болорун көрөбүз. Бирок $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитине $y = x$ түзү боюнча умтулсак $\lim\limits_{x=y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \neq 0 = f(\mathrm{M}_0)$ келип чыгып, функциянын M_0 чекитинде үзүлүшкө ээ экендигин көрөбүз. Демек, көп өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги предели умтулуу багыттарынан көз каранды болгондуктан, ар бир өзгөрүлмөлөр боюнча

бардык багыттар боюнча үзгүлтүксүз болгондо гана, функцияны ошол чекитте үзгүлтүксүз дейбиз. Ошондой эле үзгүлтүксүздүктүн аралыктар, өсүндүлөр, удаалаштыктар тилиндеги аныктамаларын да, n өзгөрүлмөлүү функциянын пределинин маанисинде түшүндүрүүгө болот. Мисалы эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x, y)$ функциясынын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде аргументтердин өсүндүлөрү

$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$, ал эми функциянын тиешелүү өсүндүсү

$\Delta u = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0$ көрүнүштөрүндө болуп, эки өзгөрүлмөлүү функциянын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү, өсүндүлөр тилинде

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta u = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \{ f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)\} = 0$ кош пределинин нөл санына барабар болушу менен аныкталат. Ал эми аралыктардын тилинде $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүк

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |y - y_0| < \delta\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ |f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)| < \varepsilon$ шартынын аткарылышы менен түшүндүрүлөт.

Иш жүзүндө чөйрө кубулуштары көп өлчөмдүү X мейкиндиктеринде болуп өткөндүктөн, кубулуштар менен алардын Y көптүгүндөгү элестери болгон чыныгы сандардын арасындагы байланыштар үзгүлтүксүз функциялар аркылуу орнотулат деп ойлойбуз.

Мисал: $z = x^2 + y^2$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы M_0 (0; 1) чекитинде үзгүлтүксүз, анткени $z(\mathrm{M}_0) = 0^2 + 1^2 = 1$ жана

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} (x^2 + y^2) = 1 = z(\mathrm{M}_0)$ болуп, 8.2 – аныктамасы аткарылат. Ошондой эле, аны аралыктардын тилинде да ырастоого болот. Алдын ала кандай гана $\varepsilon > 0$ жетишерлик кичине санын албайлы

$|z(\mathrm{M}) - z(\mathrm{M}_0)| = |x^2 + y^2 - 1| \le |x^2| + |y^2 - 1| =$

$= |x|^2 + |y - 1| \cdot |y + 1| \le |x - 0|^2 + 4 \cdot |y - 1| < \delta^2 + 4\delta = \varepsilon$ деп алсак (экинчи көбйтүүчүдө $y = 3$ деп, y тин жетишерлик кичине

δ –аймакчадагы эң чоң маанисин алдык), анда $\delta = \delta(\varepsilon, \mathrm{M}_0)$ саны деп, $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$ теңдемесинин $\delta_1 = -2 + \sqrt{2 + \varepsilon}$ оң белгидеги чечимин тандай алабыз. Демек,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0$: $|x - 0| < \delta_1 \ \wedge\ |y - 1| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |z(\mathrm{M}) - z(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon$ аткарылып, $z = x^2 + y^2$ функциясы $\mathrm{M}_0(0;\ 1)$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү, бир өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүнүн жалпыланышы болуп, ар бир координаталар (өзгөрүлмөлөр) боюнча кайталануучу мүнөзгө ээ болгондуктан, мындан ары үзгүлтүксүз функцияларга тиешелүү касиеттерди, көп өзгөрүлмөлүү функцияларда да аткарылат деп эсептейбиз. Демек чектүү сандагы көп өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялардын суммасы, көбөйтүндүсү жана тийиндиси (бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгондо) үзгүлтүксүз функциялар болушат. Ошондой эле көп өзгөрүлмөлүү элементардык функциялар да, өз аныкталуу областарында үзгүлтүксүз функциялар болуп эсептелишет.

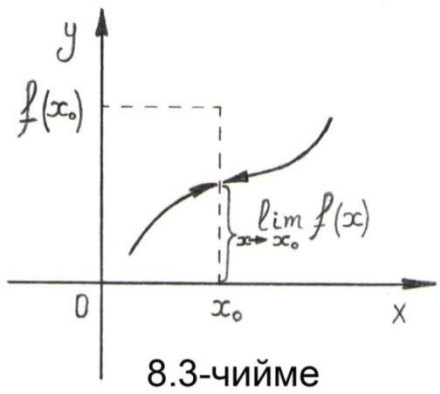
8.1.4 Функциянын үзүлүү чекиттери жана аларды классификациялоо

x_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белинде аныкталган $y = f(x)$ функциясы берилсе (жашаса) жана $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ болсо, анда аны x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция деп айттык. Функциянын чекиттеги предели жашаса, анда ал жалгыз гана болуп, бир жактуу пределдерине тең болгондуктан, функция x_0 чекитинде оң жактан жана сол жактан

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \qquad (8.6)$$

тең үзгүлтүксүз болгондо гана, үзгүлтүксүз болорун көрөбүз.

Айталы, функция x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ болсун $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ дейли. Анда төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:



8.3-чийме

1^0 $y = f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0 - 0)$ сол жактуу, $f(x_0 + 0)$ оң жактуу пределдери жашап, алар барабар

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ болушканы менен, функциянын x_0 чекитиндеги $f(x_0)$ маанисине тең эмес болушсун (8.3 – чийме).

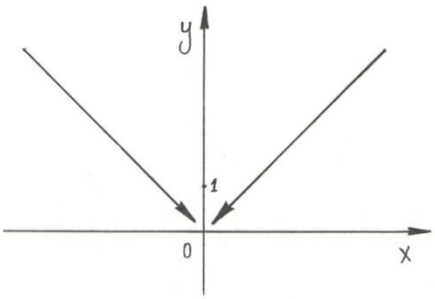
Бул учурда x_0 чекитин $f(x)$ функциясынын жоюлуучу үзүлүү чекити деп айтабыз, анткени берилген функцияны x_0 чекитинде

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{эгерде } x \neq x_0 \text{ болсо;} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{эгерде } x = x_0 \text{ болсо} \end{cases}$$

көрүнүшүндө кошумча аныктоо менен, берилген функцияны (8.6) теңдештиги орун ала тургандай үзгүлтүксүз $\mathrm{F}(x)$ функциясына айлантууга болот. Мисалы

$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \text{ болсо,} \\ 1, & x = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясы $x_0 = 0$ чекитинде жоюлуп кетүүчү үзүлүшкө ээ. Анткени бул чекиттеги оң жана сол жактуу пределдери жашашып барабар болушканы менен

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 \neq f(x_0) = 1$, функциянын ушул чекиттеги маанисине барабар эмес (8.4 – чийме). Эгерде функциянын $x_0 = 0$ чекитиндеги маанисине $f(x_0) = f(0) = 0$ деген түзөтүү киргизсек, анда берилген функция бул чекитте үзгүлтүксүз



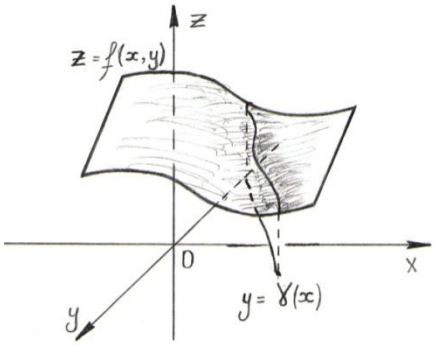
8.4-чийме

$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \text{ болсо,} \\ 0, & x = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясына айланып, үзүлүү чекити жоюлат.

Жоюлуучу x_0 үзүлүү чекитине ээ болгон функциянын графигинде бир гана $(x_0;\ f(x_0))$ чекити кыркылып, башка чекитке жылып калганын көрөбүз (8.3 – чийме). Графиктеги кыркылып тешилген чекитке, оң жана сол жактуу пределдерге барабар

болгон жаңы маанини берүү менен тешикче бүтөлүп, үзүлүү жоюлганын байкайбыз.

$M_0(x_0;\ y_0)$ чекити эки өзгөрүлмөлүү $z = f(x, y)$ функциясынын жоюлуучу үзүлүү чекити болсо, анда анын графиги болгон бет бир гана ($M_0(x_0;\ y_0)$; $f(x_0, y_0)$) координаталуу чекитте тешикчеге ээ болуп, функцияны бул чекитте үзгүлтүксүз боло тургандай кайта аныктап, үзүлүүнү жоюууга болот. Айрым учурларда жоюлуучу үзүлүү чекити, жоюлуучу үзүлүү сызыгына (түзгө же ийриге) айланып, функциянын графиги болгон бет, ошол сызык бойлой жарака көрүнүшүндөгү үзүлүүгө дуушар болот (8.5 – чийме). Мындай жараканы бүтөө үчүн, жараканын (ийринин) параметрдик $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ же айкын $y = \tau(x)$ көрүнүшүндөгү теңдемелерин пайдаланып, эки өзгөрүлмөлүү функциянын жаракадагы маанилерин,



8.5-чийме

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ пределине теңдеп кайра түзөбүз.

2^0 Бир өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0 - 0)$ сол жактан, $f(x_0 + 0)$ оң жактан чектүү пределдери жашап,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

алар барабар эмес болушсун.

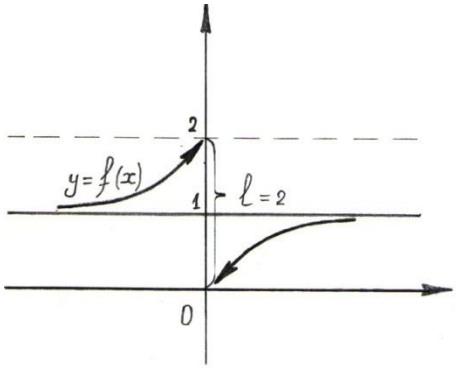
Бул учурда функцияны $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ болсо сол жактан үзгүлтүксүз, ал эми $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ болсо оң жактан үзгүлтүксүз дейбиз. Бирок берилген функция кайсы тараптан үзгүлтүксүз болгонуна карабастан, x_0 чекитиндеги предели жашабайт, анткени ал бирөө гана болуп, (8.6) шартын канааттандырышы керек эле. Ал аткарылбаган соң, берилген функция бул чекитте үзүлүшкө ээ болуп, $f(x)$ функциясы x_0 чекити аркылуу өткөндө чектүү секирик мүнөзүндөгү үзүлүшкө ээ болот дейбиз. Чектүү секирик чоңдугун l десек, анда ал

$l = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ санына барабар болот.

Мисалы $f(x) = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ функциясы $f(0) = 0$ маанисине ээ, бирок $x_0 = 0$ чекитинде сол жактан $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = 2$ пределине, ал эми оң жактан

$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = 0$ пределине ээ болгондуктан, функциянын бул чекиттеги үзүлүү секириги

$l = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| = |0 - 2| = 2$ санына барабар (8.6 – чийме).



8.6-чийме

Көп өзгөрүлмөлүү функция

$x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитинде үзүлүүгө дуушар болгону менен, анын бул чекитте кайсы бир багыттар боюнча чектүү пределдери табылып, алар функциянын $f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_n^0)$ маанисине барабар болуп, ошол багыттар боюнча функция үзгүлтүксүз боло бериши мүмкүн. Үзүлүү секириги деп, функциянын $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитиндеги бардык багыттар боюнча пределдеринин айырмасын эң чоңун алууга болот

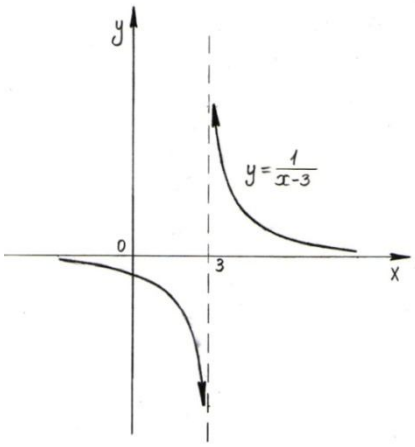
$$l = \max_{1 \le i \le n}\{|f(x_i + 0) - f(x_i - 0)|\}.$$

3^0 Каралган 1^0, 2^0 учурларындагы x_0 чекитиндеги чектүү секирик же тешикче жарака көрүнүшүндөгү үзүлүү чекиттерин **I – роддогу (түрдөгү)** же чектелген үзүлүү чекиттери деп айтабыз. Бул эки учурда тең функциянын x_0 чекитиндеги оң жана сол жактуу ар башка чектүү пределдери жашайт. Ал эми көп өзгөрүлмөлүү функциялар $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитинде **I – роддогу (түрдөгү)** үзүлүшкө ээ болгондо, алардын бардык багыттар боюнча (ар түрдүү болсо да) чектүү пределдери жашашы керек.

4^0 Эгерде $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ бир жактуу пределдеринин жок эле дегенде бирөөсү "∞" пределине ээ болсо, анда x_0 үзүлүү чекиттерин **II - роддогу (түрдөгү)** же чектелбеген үзүлүү чекиттери деп айтабыз.

Мисалы $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3 \text{болсо}, \\ 2, & x = 3 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясы $x_0 = 3$ чекитинде аныкталып, $f(x_0) = f(3) = 2$ маанисине ээ болгону менен, бир жактуу

пределдери $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$ чектелбегендиктен II-түрдөгү үзүлүшкө дуушар болушат (8.7 – чийме).



8.7-чийме

Эгерде $f(x)$ функциясы $]a,\ b[$ интервалынын (ачык көптүгүнүн) ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болуп, кесиндилердин учтарындагы a чекитинде оң жактан, ал эми b чекитинде сол жактан үзгүлтүсүз болсо, анда $f(x)$ ти X = $[a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) үзгүлтүксүз функция деп айтабыз. X = $[a,\ b]$ сегментиндеги бардык үзгүлтүксүз функциялардын көптүгүн C$[a,\ b]$ деп белгилейбиз.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитиндеги пределі, ар бир координаталардын (өзгөрүлмөлөрдүн) пределдеринен жана умтулуу багыттарынан көз каранды болгондуктан, бир эле өзгөрүлмөсүнүн кайсы бир багыт боюнча чектүү пределі жашабаса, анда функцияны бул чекитте II - түрдөгү үзүлүшкө ээ дейбиз. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү функциялар II - түрдөгү үзүлүү чекиттерине гана эмес, II - түрдөгү үзүлүү түздөрүнө жана ийрилерине ээ болушу мүмкүн. Мисалы $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы бир гана $M_0(0;\ 0)$ чекитинде II - түрдөгү үзүлүшкө ээ болсо, $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$ функциясы бөлчөктүн бөлүмү $x^2 - y^2 = 0$ болгон чекиттерде же $y = x$ жана $y = -x$ түздөрүндө II - түрдөгү үзүлүшкө ээ болот.

Эгерде көп өзгөрүлмөлүү функция D туюк көптүгүнүн ($D \subseteq R^n$) ар бир $x = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\}$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда аны бүтүндөй D туюк көптүгүндө үзгүлтүксүз деп айтып, мындай D туюк көптүгүндө үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын көптүгүн C$[D]$ символу менен белгилейбиз.

8.1.5 Татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү

Айталы, сандык октун чекиттеринин кайсы бир E көптүгүндө $u = \varphi(x)$ функциясы берилип, x аргументтери E көптүгүндө өзгөргөн

кезде функциянын тиешелүү u маанилери E_1 көптүгүн түзсүн дейли. Анда E_1 көптүгүндө башка бир $y = f(u)$ функциясын түзүүгө болот. Ошентип ар бир $x \in E$ саны $u \in E_1$ санына, ал эми бул $u \in E_1$ саны өз кезегинде y санына тиешелеш коюлуп, жыйынтыгында E көптүгүндө

$y = f(u) = f(\varphi(x))$ татаал функциясы берилген болот.

- **8.2 Теорема**. *Эгерде $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде A санына барабар болгон пределге ээ болсо жана $y = f(u)$ функциясы $u = A$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $y = f(\varphi(x))$ татаал функциясынын x_0 чекитиндеги предели $f(A)$ санына барабар болот.*

Далилдөө.► $f(u)$ функциясы $u = A$ чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, каалагандай жетишерлик кичине ε оң санын алсак да, ага ылайыкталаган жетишерлик кичине μ оң саны табылып,

$|u - A| < \mu \Rightarrow |f(u) - f(A)| < \varepsilon$ шарты аткарылат. Экинчи жактан теореманын шартында айтылгандай, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ предели жашагандыктан, кандай гана μ жетишерлик кичине оң санын албайлы, ага ылайыкталган жетишерлик кичине δ оң саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ шарты аткарылар замат, $|u - A| = |\varphi(x) - A| < \mu$ болушу келип чыгат. Жыйынтыктап айтканда алынган $\varepsilon > 0$ санына ылайыкталган $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ болору менен

$|f(u) - f(A)| = \left| |f(\varphi(x)) - f(A)| \right| < \varepsilon$ шарты аткарылып, функциянын чекиттеги предели 6.8 – аныктамасы боюнча $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(A)$ көрүнүшүндө табылып, теорема далилденген болот. ◄

Ошентип $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде, ал эми $y = f(u)$ функциясы $u_0 = \varphi(x_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда $y = f(\varphi(x))$ татаал функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болору келип чыгып,

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)) \qquad (8.7)$$

үзгүлтүксүз функциянын белгисинин астынан пределге өтүү эрежеси табылат.

Мисалдар:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\boldsymbol{log_a e}$ сонун пределі $\left(\frac{0}{0}\right.$ аныксыздыгы$\left.\right)$. (8.8)

►Предел алдындагы функцияны логарифмдин касиетин пайдаланып

$y=\frac{log_a(1+x)}{x}=\{log_a(1+x)\}^{\frac{1}{x}}$ ($a>0, a\neq 1$) көрүнүшүндө жазсак, анын

$y=log_a u$ жана $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ функцияларынан турган татаал функция экендигин байкайбыз. Логарифмалык функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн жана экинчи сонун пределди эске алып, (8.7) эрежесинин негизинде

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=log_a\left\{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=log_a e$ далилдөөсүнө ээ болобуз. (8.8) - формуланы $a=e$ болгондо, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ көрүнүшүндө жазышат. ◄

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\boldsymbol{\ln a}$ сонун пределі $\left(\frac{0}{0}\right.$ аныксыздыгы$\left.\right)$. (8.9)

► Мында $a>0, a\neq 1$ болот. $a^x-1=\tau$ белгилөөсүн киргизсек $x\to 0\Leftrightarrow\tau\to 0$ болуп, $a^x=1+\tau$, $x=\frac{\ln(1+\tau)}{\ln a}$ белгилөөлөрүн ордуна коюп, берилген пределди (8.7) ни эске алуу менен

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\tau}{\frac{\ln(1+\tau)}{\ln a}}=\ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}}=\ln a$ көрүнүшүндө эсептей алабыз. $a=e$ болгондо, (8.9) формуласы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ x}-1}{x}=1$ түрүнө келет.◄

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\boldsymbol{\mu}$ сонун пределин $\mu\in Q$ болгондо $\left(\frac{0}{0}\right.$ аныксыздыгы$\left.\right)$ далилдегенбиз ((6.30) формуласын караңыз). $\mu\in R$ болгондо,

► $(1+x)^{\mu}-1=y$ белгилөөсүн киргизип, $(1+x)^{\mu}=1+y$ же

$\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$ же $\frac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=1$ теңдештиктерин пайдаланып,

$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$ келип чыгарын көрөбүз. Белгилөөдөн кийинки келип чыккан функциялар өз аныкталуу областтарында y жана x өзгөрүлмөлөрүнө карата үзгүлтүксүз болушкандыктан, ошол областтардын чегинде $x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$ теңдеш болуп,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=1\cdot\mu\cdot 1=\mu$ пределин табабыз. ◀

4) $\varphi(x),\ \psi(x),\ \alpha(x)$ үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда

1^{∞} – аныксыздыктарына: $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,$

$$\lim_{\psi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\psi(x)}\right)^{\psi(x)}=e.$$

$\frac{0}{0}$ аныксыздыктарына: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\log_a e$,

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1\,,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a\,,$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1\,,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu\,,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,,\qquad \textbf{(8.9*)}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$$

сонун пределдеринин туура болорун (8.7) ден келтирип чыгарууга болот. Демек $x_0=0$ чекитинде $\alpha(x)$ чексиз кичине функциясы үзгүлтүксүз болсо, анда бул чекиттин чексиз кичине чеке белинде

$$\log_a(1+\alpha(x))\sim k\cdot\alpha(x),\ k=\log_a e\ ;\ \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);$$

$$a^{\alpha(x)}-1\sim\ln a\cdot\alpha(x);\ \ e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);\ (1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\alpha(x);\qquad \textbf{(8.10)}$$

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

функцияларынын өз ара эквиваленттүүлүгүн көрөбүз. Мындан алардын үзгүлтүксүздүгүн эске алып, $x\to 0$ умтулгандагы пределдерин

эсептөөдө, эквиваленттүү чоңдуктар катарында бири - бири менен алмаштырып жазуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

- Айрым $x \to x_0 \Rightarrow u(x) \to 1 \quad \wedge \quad v(x) \to \infty$ умтулган учурда $[u(x)]^{v(x)}$ тин пределинен келип чыгуучу 1^{∞} аныксыздыгын логарифмдик предел деп аталуучу ыкма менен эсептейбиз: $u(x)$, $v(x)$ функциялары каралуучу аралыкта үзгүлтүксүз жана логарифмалык функциянын жашоо шарттарын канааттандырсын дейли. Бул учурда u^v туюнтмасын логарифмдин касиетин пайдаланып, $u^v = e^{v \ln u}$ көрүнүшүнө өзгөртө алабыз. Эгерде

$\lim\limits_{x \to x_0} v \ln u = \mathrm{A}$ чектүү пределди табылса, анда предел алуунун

$$\lim_{x \to x_0} [u(x)]^{v(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} [v(x) \ln u(x)]} = e^{\mathrm{A}} \qquad (8.10^*)$$

логарифмдик эрежесин колдонууга болот. (8.10*) формуласын колдонууда $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ салыштыруусун пайдаланууга да болот. Чынында эле $x \to x_0 \Rightarrow u(x) \to 1$ болгондуктан, $(u - 1) = \alpha(x)$ чексиз кичине функция болуп, $\ln u = \ln[1 + (u - 1)] \sim (u - 1)$ келип чыгат.

Андай болсо берилген пределди $\lim\limits_{x \to x_0} v \ln u = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln u}{\frac{1}{v}} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(u-1)}{\frac{1}{v}} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} v(u - 1)$ пределине өзгөртүп түзүүгө болот. Мисалы

$$\lim_{x \to 0} (cosx)^{\frac{1}{x^2}} (1^{\infty}) = \left| \begin{matrix} u = cosx \\ v = \frac{1}{x^2} \end{matrix} \right| = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Ошентип функциянын үзгүлтүксүздүгү, анын пределдерин эсептөө ыкмаларын кеңейтип, жаңы сонун пределдерди колдонууга шарт түзөт. Мисалдар:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)} \left(\frac{0}{0}\right) = |\ln(1 + x^2) \sim x^2| = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$

$= \left| sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \right| = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

б)

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}\ \ (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}} = \left|\begin{matrix}\alpha(x)=\operatorname{tg}x\\ x\to 0 \Leftrightarrow \alpha(x)\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e\ .$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}\ \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}\ln(1-\sin x)\sim\ -\sin x\\ 3^{\operatorname{tg}x}-1\sim \ln 3\cdot\operatorname{tg}x\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\ln 3\cdot\operatorname{tg}x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\ln 3} = -\frac{1}{\ln 3}\,.$$

г) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}(1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{x}}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}} = \frac{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}}}{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}} = \frac{e^1}{e^1} = 1\,.$$

д) $$\lim_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e}\ \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}y=x-e \Rightarrow\ x=y+e\\ x\to e\ \ \Leftrightarrow y\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+e)^3-3}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{3(\ln(y+e)-1)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{3(\ln(y+e)-\ln e)}{y} = 3\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\frac{y}{e}\cdot e} = \frac{3}{e}\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\frac{y}{e}} = \frac{3}{e}\ .$$

е) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2sin^2x-1}\ \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}x-\frac{\pi}{4}=y \Rightarrow\ x=y+\frac{\pi}{4}\\ x\to\frac{\pi}{4}\ \Leftrightarrow y\to 0\\ 2sin^2x-1=-\cos 2x\\ \operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}\\ \sin 2y\sim 2y,\ \operatorname{tg}y\sim y\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\left(\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{-\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}y)^{\frac{1}{3}}-(1-\operatorname{tg}y)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin 2y\cdot(1-\operatorname{tg}y)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}\cdot\frac{1}{(1-y)^{\frac{1}{3}}}\ -\frac{1}{y}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\infty\right) =$$

$-\infty$.

§8.2 Аралыктарда үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери

X = $[a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) аныкталып үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын көптүгүн C $[X]$ же C$[a,\ b]$ деп белгилегенбиз. Бул көптүктүн элементтери болгон, $[a,\ b]$ сегментиндеги үзгүлтүксүз функцияларга жалпы тиешелүү болгон айрым касиеттерге токтолобуз.

8.2.1 Монотондуу функциянын үзгүлтүксүздүгү

∘ X = $[a,\ b]$ аралыгында монотондуу өсүүчү (кемүүчү) функциялар I – түрдөгү (чектелген) гана үзүлүү чекиттерине ээ болушу мүмкүн.

►Чынында $f(x)$ монотондуу өсүүчү болуп, x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ болсун деп ойлойлу. Аныктык үчүн x_0 чекитин аралыктын сол учундагы эң акыркы чекит болбосун дейли. Анда анын сол жагында жайгашкан чекиттер үчүн $x < x_0$ ⇨ $f(x) \leq f(x_0)$ шарты аткарылгандыктан, монотондуу функциянын x_0 чекитиндеги сол жактуу $f(x_0 - 0)$ чектүү предели жашап (7.1.3, 5^0 – караңыз), ал $f(x_0)$ санынан ашып кете албайт. Демек

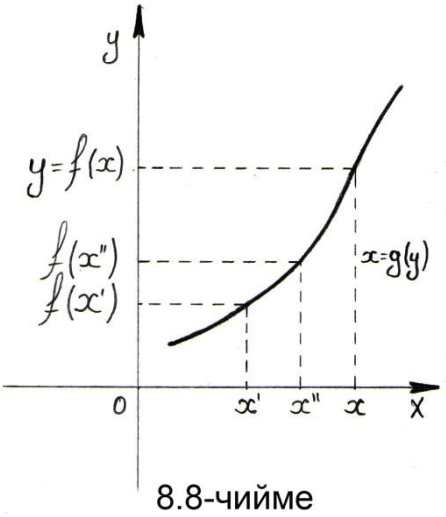
$\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$ келип чыгып, $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ болсо $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде сол жактан үзгүлтүксүз болуп, сол жактуу секириги $l_{\text{сол}} = |f(x_0 - 0) - f(x_0)| = 0$, ал эми

$f(x_0 - 0) < f(x_0)$ болсо, чектүү сандардын айырмасы катарында $l_{\text{сол}} = |f(x_0 - 0) - f(x_0)| = h < +\infty$ чектүү сан болот.

Экинчи жактан x_0 үзүлүү чекитин аралыктын оң учундагы эң акыркы чекит эмес болсун деп алып, функциянын x_0 чекитиндеги оң жактуу

$l_{\text{оң}} = |f(x_0 + 0) - f(x_0)|$ секириги да чектүү сан болорун көрөбүз. Андай болсо монотондуу функциянын x_0 үзүлүү чекитиндеги секириги

$l = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ чектүү сан болору же x_0 чекитинин I – түрдөгү үзүлүү чекити болору далилденген болот.◄



8.8-чийме

Мындан $y = f(x)$ монотондуу жана $f(x) \in C[a,\ b]$ болсо, анда үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясынын маанилери кандайдыр бир Y = $[c,\ d]$ сегментин түзүп, бул аралыкты жыш толтурат, б.а. чыныгы сандардын $[c,\ d]$ аралыгында $f(x)$ функциясынын маанилеринен башка бир да чекит болбойт деген жыйынтык чыгарабыз.

Ошондой эле D туюк көптүгүндө ($x \in D \subseteq R^n$) аныкталган $y = f(x)$ функциясы $f(x) \in C[D]$ жана монотондуу болсо, анда үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясынын маанилери R чыныгы сандарынын көптүгүндөгү кандайдыр бир Y= $[c,\ d]$ сегментин түзүп, аны жыш толтурат. Демек үзгүлтүксүз жана монотондуу функциялар биринчиден, кайсы бир туюк көптүктөгү кубулуштарды толугу менен, кайсы бир туюк аралыкка чагылтуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болуп, бул аралыкта ошол кубулуштардын элестеринен башка бир да чекит жайгашпайт. Экинчиден

$[a,\ b] \leftrightarrow [c,\ d]$ аралыктарын бири – бирине өз ара бир маанилүү чагылтат, анткени ал бул аралыкта монотондуу болгондуктан ар башка x терге, ар башка y тер тиешелеш коюлат (8.8 – чийме). Эгерде эки башка x', x'' терге бир эле y тиешелеш коюлуп калса, анда функция монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болбой $x' < x''$ чекиттеринде функция турактуу $f(x') = f(x'')$ болуп, монотондуулук шарты бузулар эле.

Натыйжа: *Туюк көптүктө аныкталып, үзгүлтүксүз жана монотондуу өсүүчү (кемүүчү) $f(x)$ функциясына сөзсүз бир маанилүү тескери*

$y = f^{-1}(x)$ функциясы жашап, ал да монотондуу өсүүчү (кемүүчү) үзгүлтүксүз функция болот.

8.2.2 Функциянын аралыктардагы маанилери жөнүндөгү Больцано – Кошинин теоремалары

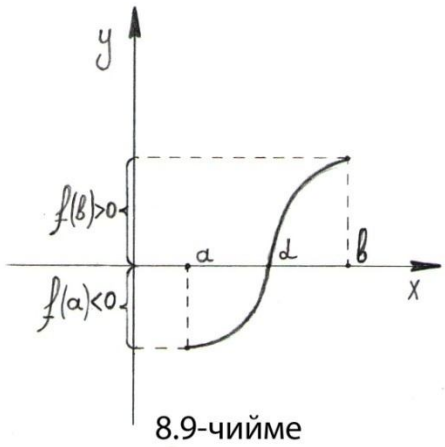
8.3 Теорема(1 - теоремасы). *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ (туюк) аралыгында үзгүлтүксүз болуп ($f(x) \in C[a,\ b]$), аралыктын учтарында карама – каршы белгилердеги маанилерге ээ болсо, анда $f(x)$ функциясы $]a,\ b[$ интервалынын жок дегенде бир чекитинде нөл санына барабар маниге ээ болот.*

Далилдөө.► Айталы $f(x)$ функциясы аралыктардын учтарында карама – каршы белгидеги маанилерге ээ болсун. Аныктык үчүн $f(a) < 0$ жана $f(b) > 0$ деп эсептейли. $[a,\ b]$ аралыгын тең экиге бөлөлү. Бөлүү чекити $\xi = \frac{a+b}{2}$ болсун дейли. Эгерде $f(\xi) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ болсо, изделүүчү ξ чекити табылып, теорема далилденген болот. Ал эми $f(\xi) \neq 0$ болсо, анда тең экиге бөлүнгөн аралыктардын биринин учтарында $f(x)$ карама – каршы белгидеги маанилерди кабыл алууга

тийиш. Ошол $(f(a_1) < 0\,,\ f(b_1) > 0)$ аралыкты $[a_1,\, b_1]$ деп белгилейли. Аны да тең экиге бөлүп, бөлүү чекитин $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ деп белгилейли.

Эгерде $f(\xi_1) = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ болсо теорема далилденет. Ал эми $f(\xi_1) \neq 0$, анда аралыктардын учтарынын биринде $f(x)$ функциясы карама - каршы белгидеги маанилерди кабыл алган болот. Ошол $(f(a_2) < 0\,,\ f(b_2) > 0)$ аралыкты $[a_2,\, b_2]$ деп алып, аны да тең экиге бөлөбүз. Бөлүү чекитинде

$f(\xi_2) = f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \neq 0$ болсо, анда мындай тең экиге бөлүү процесстерин уланта беребиз. Натыйжада узундуктары $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ нөлгө умтулуучу бири - бирине кийиштирилген, аралыктын учтарында функция карама – каршы белгилерге ээ болгон



8.9-чийме

$[a,\ b] \subset [a_1,\, b_1] \subset [a_2,\, b_2] \subset \ \dots\ \subset [a_n,\, b_n] \subset \cdots \to 0$ сегменттеринин системасы курулат. Эгерде бөлүү процесстеринин бирөөсүндө эле, ξ_n бөлүү чекитинде функциянын мааниси $f(\xi_n) = 0$ болуп калса, теорема далилденип, бөлүү процесси токтотулат, б.а. $[a,\ b]$ аралыгынан $f(x)$ нөлгө айлануучу жок дегенде бир ξ_n чекити табылган болот. Эгерде мындай чекит табылбаса, анда бөлүү процессин чексизге чейин улантып, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

пределине таянып, функция нөлгө айлануучу чекит деп, чексиз сандагы кийиштирилген сегменттердин баарына таандык болгон α чекитин алууга болот. Чынында эле $f(\alpha) \neq 0$, б.а. оң же терс болот деп тескерисинче ойлойлу. α чекитинин чеке белине $[a_n,\, b_n]$ сегменти толук бата тургандай $\delta -$аймакчасын түзүү үчүн, $\delta > 0$ санын жана бөлүүлөрдүн n иретин тандайлы. Анда $f(x)$ функциясы α чекитинде $(\alpha \in [a,\ b])$ үзгүлтүксүз болгондуктан, тандалган δ менен n ге карата түзүлгөн α чекитинин жакынкы $\delta -$ аймакчасында анын ичинде

a_n, b_n чекиттеринде $f(x)$ функциясы $f(\alpha)$ нын белгисиндей туруктуу бир, дайыма оң же терс белгисин сактап калышы керек эле. Бирок $[a_n,\ b_n]$ сегменттеринин түзүлүү принцибине ылайык, анын учтарында $f(x)$ карама – каршы белгидеги $f(a_n) < 0$ жана $f(\ b_n) > 0$ маанилерине ээ. Ошентип бир эле мезгилде $f(a_n)$ менен $f(\ b_n)$ маанилеринин белгилери бирдей жана карама - каршы деген эки каршылаш пикирди ырастадык. Мындай карама - каршылык $f(\alpha) \neq 0$ болот деп ойлогонубуздун ката экендигин көрсөтүп, чынында эле $a < \alpha < b$ шартын канааттандыруучу α чекити табылып, $f(\alpha) = 0$ болорун далилдейт. ◄

Бул теорема геометриялык жактан $f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b]$ болуп, аралыктын учтарында карама – каршы $f(a) < 0,\ \ f(b) > 0$ сыяктуу белгидеги маанилерге ээ болсо, анда a жана b сандарынын арасынан жок дегенде бир α саны табылып, $f(x)$ функциясынын графиги $\mathrm{O}\,x$ огун, ошол $x = \alpha$ чекитинде кесип өтөт дегенди түшүндүрөт (8.9 - чийме).

Үзгүлтүксүз функциялардын мындай касиети, айрым теңдемелердин кайсы бир аралыкта чечими табылар – табылбасын болжолдоого мүмкүнчүлүк түзөт. Айрыкча так даражалуу, коэффициенттери чыныгы сандар болгон көп мүчөлөрдүн нөл болуучу чекиттерин (нөлдөрүн) табууда кеңири колдонулат.

Мисалы $\mathrm{P}_3(x) = x^3 + x - 1$ көп мүчөсү $[0,\ 1]$ – аралыгында жок дегенде бир чекитте нөлгө айланарын көрсөтөлү. Берилген көп мүчө функция катарында, биринчиден $[0,\ 1]$ аралыгында үзгүлтүксүз, экинчиден аралыктын учтарында $\mathrm{P}_3(0) = -1 < 0$, $\mathrm{P}_3(1) = 1 > 0$ карама каршы белгидеги маанилерди кабыл алат. Анда Больцано – Кошинин 1 – теоремасы боюнча бул аралыкта сөзсүз $\mathrm{P}_3(\alpha) = 0$ боло тургандай жок дегенде бир $x = \alpha$ чекити табылууга тийиш. Чынында эле бул аралыкты тең экиге бөлсөк, бөлүү чекити $\xi = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ болуп, бөлүнгөн аралыктардын экинчи жарымын учтарында көп мүчө

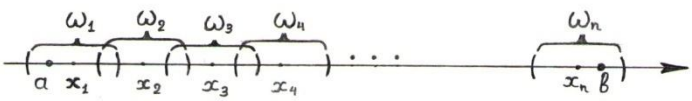
$\mathrm{P}_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0,\ \mathrm{P}_3(1) = 1 > 0$ карама – каршы белгилерге ээ болуп, көп мүчөнүн нөлү ушул аралыкта болушу мүмкүн деп түшүнөбүз. Демек $[a_1,\ b_1] = \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ деп алып, аны да тең экиге бөлөбүз. Бөлүү

чекити $\xi_1 = \frac{3}{4}$ болуп, көп мүчөнүн нөлү $[a_2,\ b_2] = \left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]$ аралыгында гана болуусу мүмкүн, анткени көп мүчө анын учтарында гана

$\mathrm{P}_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, $\mathrm{P}_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0$ карама – каршы белгидеги маанилерди кабыл алат. Мындай процессти өзүбүзгө зарыл болгон абалга чейин улантуу менен, $\mathrm{P}_3(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0$ теңдемесинин керектүү тактыктагы чечимин (көп мүчөнүн нөлүн) таба алабыз.

Эскертүү: Теореманы далилдөөдө колдонулган аралыктарды бөлүү ыкмасы бири – бирине кийиштирилген кесиндилер (сегменттер) принциби деп аталып, математикалык бүтүмдөрдү далилдөөдө кеңири колдонулат. Ушундай эле максаттарда $[a,\ b]$ *сегментин толук кармап же камтып туруучу* ω_i *интервалдарын чектүү же чексиз сандагы суммаларынан турган* $[a,\ b] \subseteq \sum \omega_i$ *системасын колдонууга болот (8.10 - чийме). Бул учурда* $\forall x_i \in [a,\ b], \exists \omega_i \in \sum \omega_i$: $x \in \omega_i$ *аткарылып, Борелдин леммасы орун алат.*

Лемма. *Эгерде* D *чектелген туюк көптүгүн,* ω_i *ачык көптүктөрүнүн чексиз сандагы* $\sum \omega_i$ *системасы толук кармап же камтып турса, анда бул чексиз системанын ичинен* D *көптүгүн толук камтый ала тургандай, чектүү сандагы* $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ *системачасын бөлүп алууга болот.*



8.10-чийме

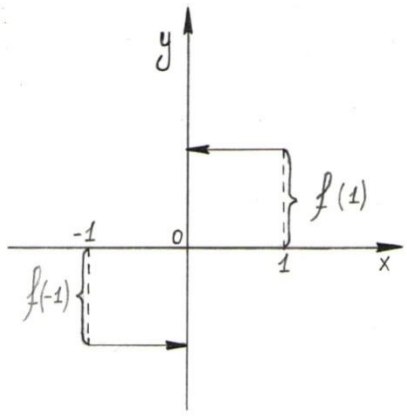
Бул лемманы пайдаланып, үзгүлтүксүз функциялар жөнүндөгү Больцано – Кошинин, Вейерштрасстын, Кантордун теоремаларын башка варианттарда далилдөөгө болорун байкоого болот.

8.4 Теорема (2 – теоремасы). *Айталы* $f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b]$ *болуп, аралыктын учтарында* $f(a) = A$, $f(b) = B$ *барабар эмес маанилерди кабыл алсын, анда алардын арасында жайгашкан каалаган* C *чекити* $(\mathrm{A} < \mathrm{C} < \mathrm{B})$ *үчүн,* $]a,\ b[$ *интервалынан жок дегенде бир* α *чекити* $(a < \alpha < b)$ *табылып,* $f(\alpha) = \mathrm{C}$ *болот.*

Далилдөө.► Аныктык үчүн $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ деп алалы. Жогоруда далилденген 1 – теореманы колдонуу үчүн, аралыктардын учтарында карама –

каршы белгидеги маанилерге ээ болгон, $\varphi(x) = f(x) - \mathrm{C}$ жардамчы функциясын ойлоп табабыз. Чынында эле, $\varphi(x)$ функциясы $[a,\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функциялардын айырмасы катарында үзгүлтүксүз жана аралыктын учтарында $\varphi(a) = f(a) - \mathrm{C} = \mathrm{A} - \mathrm{C} < 0$, $\varphi(b) = f(b) - \mathrm{C} > 0$ карама – каршы белгидеги маанилерге ээ болот, анда Больцано – Кошинин 1 – теоремасы боюнча $]a,\ b[$ интервалынан жок дегенде бир α чекити табылып, $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \mathrm{C} = 0$ шарты аткарылат. Мындан $f(\alpha) = \mathrm{C}$ келип чыгып,]A, B[интервалындагы каалагандай C чекити, сөзсүз түрдө $f(x)$ функциясынын $]a,\ b[$ интервалынын кайсы бир (же бир канча) α чекитиндеги мааниси болору далилденген болот.◀

Ошентип $[a,\ b]$ туюк көптүгүндө үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясынын маанилери, кандайдыр бир [A, B] туюк көптүгүн түзөт жана аны жыш толтурат, б.а. [A, B] аралыгында $f(x)$ функциясынын маанилеринен башка бир да чекит жайгаша албайт.



8.11-чийме

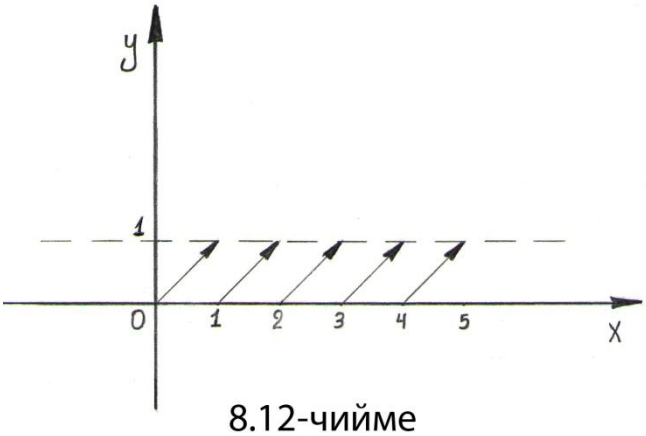
Эскертүү: Теореманын орун алышы үчүн $f(x)$ функциясынын $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз болушу негизги шарт болуп эсептелет. Мисалы

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$ *функциясы,* $[-1,\ 1]$ *арлыгынын учтарында карама - каршы маанилерге ээ болгону менен, бул аралыктан $f(\alpha) = 0$ боло тургандай α чекити табылбайт (8.11– чийме). Анткени функция аралыктагы $x_0 = 0$ чекитинде үзүлөт.*

8.2.3 Үзгүлтүксүз функциялардын чектелгендиги жөнүндөгү Вейерштрасстын теоремасы

$f(x)$ функциясы кайсы бир сандык көптүктө аныкталып, чектелген маанилерди кабыл алганы менен, бул аралыкта эң чоң жана эң кичине маанилерге ээ болбой калышы да мүмкүн. Бул учурда функция өзүнүн накта жогорку $sup\{f(x)\}$, накта төмөнкү $inf\{f(x)\}$ чектерине, сөз

кылынган аралыктагы чекиттерде жете албайт. Мисалы $[0,\ 5]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) үзүлүү чекиттерине ээ болгон,



8.12-чийме

$y = x - \mathrm{E}(x)$ – сандын бөлчөк бөлүгү функциясы

$0 \le x - \mathrm{E}(x) < 1$ чектелген экендигине карабай, бул аралыкта $sup\{f(x)\} = 1$ накта жогорку чегине жете албайт, анткени сандын бөлчөк бөлүгү эч качан 1 санына барабар боло албайт. Ал эми 1 санынан кичине болгон, ага биринчи кошуна бөлчөк санды көрсөтө албайбыз (R тыгыз көптүк). Ошондуктан функциянын бул аралыкта эң чоң мааниси жок же табылбайт(8.12 – чийме).

8.5 Теорема. (Вейерштрасстын теоремасы)*Эгерде $f(x)$ функциясы D чектелген туюк көптүгүндө $(D \subseteq R^n)$ үзгүлтүксүз функция болсо*

$(f(x) \in \mathrm{C}[D])$, *анда*

1) *$f(x)$ функциясы $x \in D$ көптүгүндө сөзсүз чектелген болот.*

2) *$f(x)$ функциясынын $x \in D$ көптүгүндө сөзсүз өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине ээ болот.*

1) – бөлүгүн далилдөө: ►Далилдөөнү $D \subseteq R$ бир ченемдүү $D = [a,\ b]$ сегменти (туюк көптүгү) үчүн жүргүзөлү. Айталы, тескерисинче $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы $[a,\ b]$ сегментинде чектелбеген болсун деп болжолдойлу, анда кандай чоңдуктагы n натуралдык санын албайлы $[a,\ b]$ сегментинен x_n сыяктуу чекиттер табылып, функциянын бул чекиттердеги маанилери n санынан $f(x_n) \ge n$ ашып кетет. $\forall n \in N$: $a \le x_n \le b$ болгондуктан, $\{x_n\}$ чектелген удаалаштык болуп, өзү пределге ээ болбосо да, анын мүчөлөрүнүн арасынан чектүү x_0 пределине $(a \le x_0 \le b)$ ээ болуучу курама $\{x_{n_k}\}$ жекече удаалаштыгын бөлүп алууга болот (1 – бөлүк, 1.1.5, Больцано – Вейерштрасстын леммасы). $f(x)$ функциясы берилген аралыкта үзгүлтүксүз болгондуктан, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ чектүү пределине ээ болушу керек.

Бирок $\{x_{n_k}\}$ удаалаштыгынын түзүлүү табияты боюнча, n_k чоңойгон сайын $f(x_{n_k})$ чоңойуп кете бергендиктен ($f(x_{n_k}) \geq n_k$),

$\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$ пределине ээ болушу керек эле. Келип чыккан мындай карама – каршылык берилген сегментте (туюк аралыкта) $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы чектелген эмес деген тескери болжолубуздун туура эмес экендигин көрсөтүп, теореманын 1) – бөлүгү далилденген болот.

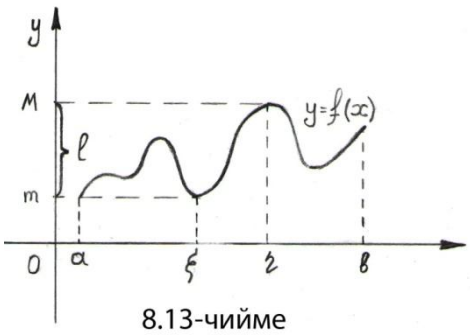
Теореманын 2) – бөлүгүн (эң чоң маани үчүн) далилдейли: Теореманын далилденген бөлүгүнө ылайык, $f(x) \in C[a,\ b]$ болсо, анда бул аралыкта чектелген функция болот. Эгерде анын жогорку чектеринин эң кичинеси же накта жогорку чеги $sup\{f(x)\} = M$ чектүү саны табылса, функция бул аралыкта эң чоң маанисине жетип, теорема далилденип бүтөт. Ал эми тескерисинче $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы бул мааниге $[a, b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) жетпей, анын сыртында жетет деп ойлосок, анда сегменттин чекиттеринде $f(x) < M$ шарты гана аткарылат. Эгерде өзүбүзчө $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ жардамчы функциясын ойлоп тапсак, анда бул кошумча функциянын бөлүмү нөлгө айланбайт жана үзгүлтүксүз функциялардын айырмасы менен катышы катарында $[a,\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болот. Ошондуктан теореманын далилденген 1) – бөлүгүнө ылайык, $\varphi(x)$ функциясы бул аралыкта жогору жана төмөн жактарынан чектелген болууга тийиш, б.а. кандайдыр бир μ оң саны табылып, $\forall\, x \in [a,\ b]$: $\varphi(x) \leq \mu$ (жогору жагынан чектелген абалга токтололу) болот. Мындан

$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}$ келип чыгып, $f(x)$ функциясы эч качан $[a,\ b]$ аралыгында M маанисине жете албасын ырастайт. Андай болсо, $M - \frac{1}{\mu}$ саны $f(x)$ функциясынын накта жогорку чеги болуп калат. Бирок мындай болушу мүмкүн эмес, анткени $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында M санына жетпеген маанилерди кабыл алат деп ойлогонубуз менен, ал $f(x) < M$ шартына гана баш ийип,

$M-\frac{1}{\mu}$ санынан чоң болгон маанилерди кабыл алууга укуктуу. Ошондуктан $M-\frac{1}{\mu}=sup\{f(x)\}$ санын накта жогорку чек деп айта албайбыз. Бул карама - каршылык $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы M= $sup\{f(x)\}$ накта жогорку же эң чоң маанисине, $[a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) жетпейт деген тескери оюбуздун туура эмес экендигин көрсөтүп, теорема толугу менен далилденген болот. ◄

Ушундай эле мазмундагы талкуулоолор менен теореманы жалпы $D \subseteq R^n$ туюк көптүгүндө далилдөөгө болот.

Ошентип $f(x) \in C[a,\ b]$ ⇨ $\exists\, m, M \in R$: 1) $[a,\ b]$ аралыгында $f(x)$ чектелген $m \le f(x) \le M$ функция болот. Теореманын 2) – кортундусу боюнча $\inf\{f(x)\} = m = f(\xi)$ - бардык төмөнкү чектердин эң чоңу же накта төмөнкү чеги жана $sup\{f(x)\} = M = f(\eta)$ - бардык жогорку чектердин эң кичинеси же накта жогорку чеги табылып, алар тиешелүү түрдө функциянын $[a,\ b]$ аралыгындагы эң кичине жана эң чоң маанилери болушат (8.13 – чийме), б.а. $[a,\ b]$ аралыгынан функция эң кичине жана эң чоң маанилерди кабыл ала турган ξ жана η чекиттери табылат. $l = |M - m|$ айырмасын функциянын ушул аралыктагы термелүүсү деп аташат.



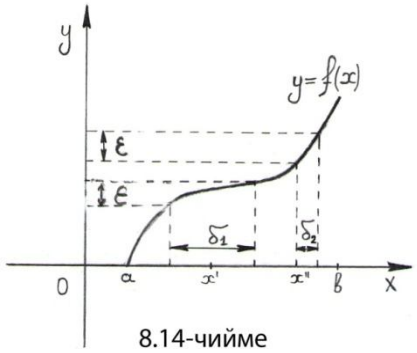
8.13-чийме

Жогоруда каралган $y = x - E(x)$ функциясынын $[0,\ 5]$ туюк көптүгүндө эң чоң мааниге ээ болбогондугун себеби, анын бул аралыктагы 0, 1, 2, 3, 4, 5 чекиттеринде I – түрдөгү үзүлүүгө ээ болгондугу менен түшүндүрөбүз. Ошондой эле Вейерштрасстын теоремалары туюк аралыктарда гана орун алат. Мисалы $y = x$ функциясы $]0,\ 1[$ интервалында (ачык көптүгүндө) үзгүлтүксүз болгону менен бул аралыкта эң чоң жана эң кичине маанилерине жетпейт, анткени жогорку чектеринин эң кичинеси же накта төмөнкү чеги $sup\{f(x)\} = 1$, ал эми төмөнкү чектеринин эң чоңу же накта төмөнкү чеги $sup\{f(x)\} = 0$ болуп, бул маанилерге $y = x$ функциясы каралган интервалдын сырткы чекиттеринде , атап айтканда аралыкка кирбеген учтарында гана жетет.

§8.3 Бир калыпта үзгүлтүксүз функциялар

$f(x)$ функциясы кайсы бир X аралыгында (ачык, туюк, чектелген, чектелбеген боло бериши мүмкүн) жайгашкан чектүү x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда аралыктардын тилиндеги үзгүлтүксүздүктүн түшүндүрмөсү боюнча,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0)\ :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ аткарылат. Мындан функциянын маанилеринин бирдей ε чоңдуктагы өз ара жакындык



8.14-чийме

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ жыштыгына, ар башка x_0 чекиттеринде аргументтердин, ар башка $\delta = \delta_{x_0}$ жакындык $|x - x_0| < \delta_{x_0}$ жыштыктары туура келерин байкайбыз. Мисалы, $f(x)$ функциясын маанилеринин бирдей чоңдуктагы ε жакындык жыштыгына, аргументтер жай өзгөргөн x' чекиттеринде аргументтерин узунураак аралыктагы δ_1 жакындык жыштыгы, ал эми $f(x)$ функциясы ыкчам өзгөргөн x'' чекиттеринде аргументтердин кыскараак аралыктагы δ_2 жыштыгы туура келет (8.14 – чийме). Ошентип табылуучу δ саны ар бир x_0 чекитинде ар башка сан болуп, жалпы учурда x_0, ε сандарынан көз каранды $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ болот. Мындай учурда, X көптүгүнүн (аралыгынын) каалаган x_0 чекити үчүн жарамдуу болгон универсалдуу δ санын табуу мүмкүнбү? – деген суроо туулат. Эгерде табылса, анда ал бир гана ε дон көз каранды $\delta = \delta(\varepsilon)$ болмок. Практикалык эсептөөлөрдө универсалдуу деп эсептелген δ саны катарында, ар бир x_0 чекиттери үчүн табылган $\{\delta_{x_0}\}$ сандарынын эң кичинесин $\delta = min\{\delta_{x_0}\}$ алабыз.

8.3 Аныктама. *Эгерде x_0 чекити X аралыгынын кайсы жеринде жайгашкандыгына карабастан, алдын ала жетишерлик кичине деп алынган $\varepsilon > 0$ санына жараша, кандайдыр бир $\delta > 0$ саны табылып, аргументтердин $|x - x_0| < \delta$ жакындыкта жайланышынан, алардын тиешелүү маанилеринин $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ жакындыгында жайланышы келип чыкса, анда X көптүгүндө аныкталган $f(x)$*

функциясын бүтүндөй X аралыгында бир калыпта үзгүлтүксүз функция деп атайбыз.

Аты айтып тургандай, X аралыгын каалаган жериндеги аргументтердин бирдей δ жакындык жыштыгына же термелүү узундугуна, бир калыпта үзгүлтүксүз функциялардын тиешелүү маанилеринин бирдей ε жакындык жыштыгы же термелүү узундугу туура келет. Мындайча айтканда X аралыгынын бардык жеринде $x \xrightarrow[\delta \text{ ылдамд.}]{} x_0$ жана $f(x) \xrightarrow[\varepsilon \text{ ылдамд.}]{} f(x_0)$ умтулуу ылдамдыктары бирдей болушат.

Демек, X аралыгында $f(x)$ бир калыпта үзгүлтүксүз функция болушу үчүн:

1) $f(x)$ функциясы X аралыгында үзгүлтүксүз болушу;

2) X аралыгынын бардык чекиттериндеги аргументтердин бири – бирине бирдей чоңдуктагы жакындашуу жыштыгынан же термелүү узундуктарынын барабар болушунан, алардын элестери болгон $f(x)$ тин тиешелүү маанилеринин жакындашуу жыштыктарынын же термелүү узундуктарынын бирдей болушу келип чыгышы керек.

Ошентип, бардык эле үзгүлтүксүз функциялар бир калыпта үзгүлтүксүз боло беришпейт. Мисалы $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болуп эсептелет, анткени бул элементардык функциянын аныкталуу областы $x \neq 0$ болгон бардык чыныгы сандар болуп, берилген аралык аныкталуу областында кармалып турат. Берилген аралыктан $x' = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ жана $x'' = \frac{1}{n\pi}$ чекиттерин тандап ($\forall n \in N$), функциянын тешелүү маанилерин

$$f(x') = \sin\frac{1}{\frac{2}{(2n+1)\pi}} = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1 ,$$

$f(x'') = \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0$ табабыз. Натуралдык n санына ар кандай кичине, чоң маанилерди берүү менен, ар кандай x', x'' аргументтерин алып, алардын арасындагы

$|x' - x''| = \left|\frac{1}{n\pi} - \frac{2}{(2n+1)\pi}\right| < \delta_{x',x''}$ термелүү узундуктарын каалаганча жолу кичинертүүгө, чоңойтууга боло берерин байкайбыз. Бирок, ошол эле учурда функциянын тиешелүү чекиттердеги маанилери өзгөрүүсүз калып, термелүүсү $|f(x') - f(x'')| = |0 - (\pm 1)| = 1$ турактуу бойдон кала берет. Демек алдын ала $\varepsilon = 1$ санын алсак, анда $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$ аралыгындагы бардык x', x'' чекиттериндеги термелүү узундуктарына жараган универсалдуу $\delta > 0$ санын табуу мүмкүн эмес экендигин көрөбүз. Анткени $n \to \infty$ ⇨ $\delta_{x',x''} \to 0$ болгондуктан, универсалдуу $\delta = min\{\delta_{x',x''}\} = 0$ болушу гана мүмкүн болот. Андай болсо,

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$ аралыгында үзгүлтүксүз болгону менен, бир калыпта үзгүлтүксүз боло албайт деген жыйынтыкка келебиз.

8.6 Кантордун теоремасы. *Эгерде $f(x)$ функциясы D туюк көптүгүндө ($D \subseteq R^n$) үзгүлтүксүз функция болсо, анда бул көптүктө бир калыпта үзгүлтүксүз болот.*

Далилдөө. ►Далилдөөнү $D = [a,\ b] \subset R$ туюк аралыгында (сегментинде) үзгүлтүксүз болгон, бир өзгөрүлмөлүү $f(x)$ функциясы үчүн жүргүзөлү. Айталы алдын ала эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына жараша, бул аралыктагы кайсы бир чекиттерде универсалдуу $\delta > 0$ саны табылып, бир калыпта үзгүлтүксүздүктүн талабы аткарылганы менен, табылган δ саны берилген аралыктын айрым чекиттеринде универсалдуулугун жоготуп, жарактуу болбой калсын деп, тескерисинче ойлойлу. Мисалы табылган δ_1 саны берилген аралыктагы $x^{(1)}, x_0^{(1)}$ чекиттерине жарактуу болбосун, б.а.

$\left|x^{(1)} - x_0^{(1)}\right| < \delta_1$ ⇨ $\left|f\left(x^{(1)}\right) - f\left(x_0^{(1)}\right)\right| \geq \varepsilon$ болуп калсын. Ал эми табылган δ_2 саны $x^{(2)}$, $x_0^{(2)}$ чекиттерине жарактуу болбосун же

$\left|x^{(2)} - x_0^{(2)}\right| < \delta_2$ ⇨ $\left|f\left(x^{(2)}\right) - f\left(x_0^{(2)}\right)\right| \geq \varepsilon$ аткарылсын. Жалпы учурда табылган δ сандарын $\{\delta_n\} \to 0$ умтулуучу удаалаштык катарында тизмектештирсек, анда ар бир табылган δ_n саны жарактуу болбогон $x^{(n)}$, $x_0^{(n)}$ чекиттерде, $\left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta_n$ ⇨ $\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \geq \varepsilon$ шарты аткарылып кете берүүсү керек. $n \to \infty$ умтулганда, $\delta_n \to 0$ же

$\left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| \to 0$ умтулгандыктан, δ_n саны жарактуу болбогон чекиттер жалпы пределге ээ болуучу удаалаштыктарды түзөрүн байкайбыз $\left\{x^{(n)}\right\} \to x_0$, $\left\{x_0^{(n)}\right\} \to x_0$.

Теореманын шарты боюнча берилген аралыкта $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, аргументтери умтулган чекиттеги маниге $\left\{f\left(x^{(n)}\right)\right\} \to f(x_0)$, $\left\{f\left(x_0^{(n)}\right)\right\} \to f(x_0)$ умтулушуп, алардын айырмасы $\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \to 0$ чексиз кичине болот. Бул n дин бардык маанилеринде $\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \geq \varepsilon$ аткарылат деген тескери оюбузга каршы келет. Бул карама - каршылык табылган δ санынын $[a,\ b]$ аралыгынын бардык чекиттеринде жарактуу экендигин, же $f(x)$ тин берилген аралыкта бир калыпта үзгүлтүксүз экендигин далилдейт.◀

Жогоруда каралган мисалда $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясынын $\left]0,\ \frac{2}{\pi}\right]$ туюк эмес аралыгындагы үзгүлтүксүз болгону менен, бул аралыкта бир калыпта үзгүлтүксүз болбогондугунун себеби, анын Кантордун теоремасынын шарттарын канааттандырбагандыгында экендигин сезебиз.

Натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы $D = [a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) бир калыпта үзгүлтүксүз болсо, анда кандайдыр бир жетишерлик кичине δ мерчемин таап, бул аралыкты узундуктары δ оң санынан кичине болгон бөлүктөргө бөлүп, бул бөлүктөрдүн ар биринде функциянын термелүүсү ε оң санынан ашып кетпей тургандай абалга жетишүүгө болот.

§8.4 Үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги

Аралыктардагы үзгүлтүксүз функцияларды пайдаланып, кайсы бир көптүктө тынымсыз жүрүп жаткан кубулуштардын жыштыктары менен, алардын элестери болгон функциянын маанилеринин жыштыктарын арасындагы мамилени баалоо ыкмасына ээ болдук. Ал эми бир калыпта үзгүлтүксүз функцияларды пайдаланып, кубулуштар менен элестери (кайсы чекитте болбосун) бирдей жыштыкта, же бирдей термелүү узундугунда болорун же болбосун аныктоочу математикалык аппарат түздүк. Ошентип функциялардын жардамы менен кайсы бир

кубулуштардын чыныгы сандардын көптүгүндөгү элестерине карап, жүрүү аралыктарын, өнүгүү процесстерин, кайталануучу мүнөздөрүн, токтоп калуу жана улануу шарттарын, жыштыгын, термелүү узундуктарын ж.б.у.с. касиеттеринин математикалык моделдерин түзүү аракетинде болдук. Кубулуштар болуп жаткан чекиттерден толук маалымат алуу үчүн, функцияларды да сандар сыяктуу эле ченөө иштеринде колдонуп, алардын арасындагы аралыктарды баалоо менен салыштыруу ыкмаларын ойлоп тапсак, функцияларды чөйрө таануу процесстеринде кеңири колдонуучу каражатка айланта алабыз.

8.4 Аныктама. *D туюк көптүгүндө ($D \subseteq R^n$) үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын $\mathrm{C}[D]$ көптүгүнө таандык болгон каалагандай эки $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын арасындагы аралык же метрика деп*

1. $\rho(f,\varphi) = 0 \Leftrightarrow f \equiv \varphi$ дал келишсе гана – аксиомасын,
2. $\rho(f,\varphi) = \rho(\varphi,f)$ симметрия – аксиомасын,
3. $\rho(f,\varphi) \leq \rho(f,\mathrm{g}) + \rho(\mathrm{g},\varphi)$ үч бурчтук – аксиомасын

канааттандырган

$$\rho(f,\varphi) = \max_{x\in D}|f(x) - \varphi(x)| \qquad (8.11)$$

санын айтабыз ($\mathrm{g}(x) \in \mathrm{C}[D]$) .

Эгерде $\mathrm{C}[D]$ көптүгүндө киргизилген (8.11) метрикасы,

$\forall\, \varphi, f,\ \mathrm{g} \in \mathrm{C}[D]$ функцияларына карата метриканын үч аксиомасын канааттандырышса, анда $\mathrm{C}\ [D]$ көптүгүн (8.11) ченөө эрежесине (метрикага) карата, ченелүүчү же метрикалык мейкиндик дейбиз (1 – бөлүк, 1.2.1 –аныктама).

Чынында эле (8.11) аралыктарды ченөө эрежеси бул аксиомаларды канааттандырат, анткени алардын айырмасынын максималдык абалы нөлгө барабар болсо, анда алар бир эле функция болушат. Абсалюттук чоңдуктун касиеттери боюнча $|f(x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - f(x)|$ жана

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |(f(x) - \mathrm{g}(x)) + (\mathrm{g}(x) - \varphi(x))| \leq |f(x) - \mathrm{g}(x)| + |\mathrm{g}(x) - \varphi(x)|$$

болгондуктан, 2, 3 – аксиомалардын аткарылышына да оңой эле

ишенүүгө болот. Ошентип, $C[D]$ көптүгү (8.11) ченөө эрежесине (метрикасына) карата метрикалык мейкиндик болуп эсептелет.

$D = [a,\ b]$ сегмент (туюк көптүк) болгон учурда, бул аралыкта үзгүлтүксүз болгон бардык бир өзгөрүлмөлүү функциялардын метрикалык мейкиндигин $C[a,\ b]$ көрүнүшүндө белгилейбиз. $C[a,\ b]$ мейкиндиги өзүнүн бардык пределдик чекиттерин кармап турган толук метрикалык мейкиндик болот.

Эгерде $f(x) \in C[a,\ b]$ болсо, анда Кантордун теоремасы боюнча $[a,\ b]$ туюк аралыгында $f(x)$ функциясын үзгүлтүксүз гана болуп калбай, бир калыпта үзгүлтүксүз деп түшүнөбүз. Функциялардын мындай метрикалык мейкиндигинин түзүлүшү, аларды чөйрө кубулуштарын таануу каражаты катарында колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтет.

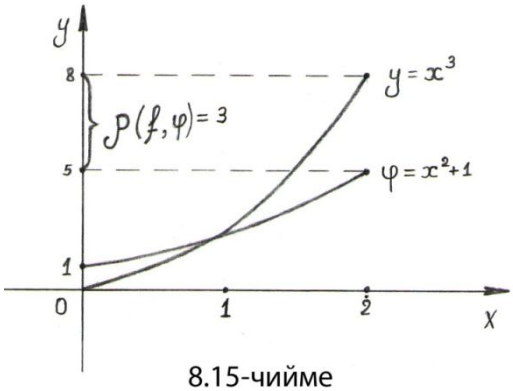
Мисал катарында $C[1,\ 2]$ мейкиндигине таандык $f(x) = x^2 + 1$,

$\varphi(x) = x^3$ функцияларынын аралыгы же метрикасы кандай аныкталарын көрсөтөлү: Бул мейкиндикте киргизилген (8.11) ченөө эрежесине ылайык,

$$\rho(f, \varphi) = \max_{1 \le x \le 2} |(x^2 + 1) - x^3| = \max_{1 \le x \le 2} |x^3 - x^2 - 1|$$

келип чыгат. Демек, алардын арасындагы аралык деп

$\gamma(x) = x^3 - x^2 - 1$ функциясынын $[1,\ 2]$ аралыгындагы оң белгиси менен алынган максималдык маанисин түшүнөбүз. $\gamma(x)$ функциясынын аралыктын 1, 2 учтарындагы, $\gamma'(x) = 3x^2 - 2x = x \cdot (3x - 2) \equiv 0$ шартынан табылган критикалык 0 жана $\frac{3}{2}$ чектиттериндеги маанилерин салыштырабыз



8.15-чийме

$$\gamma(1) = -1,\ \gamma(2) = 4,\ \gamma(0) = -1,$$

$\gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8}$. Алардын оң маанисин алганда эң чоңу болгон

$$\rho(f, \varphi) = \max_{1 \le x \le 2} |(x^2 + 1) - x^3| =$$

$= \max\left|\left\{-1,\ 4, -1,\ \frac{1}{8}\right\}\right| = 4$ саны, каралган эки функциянын арасындагы (8.11) маанидеги аралык же метрика болот (8.15 – чийме).