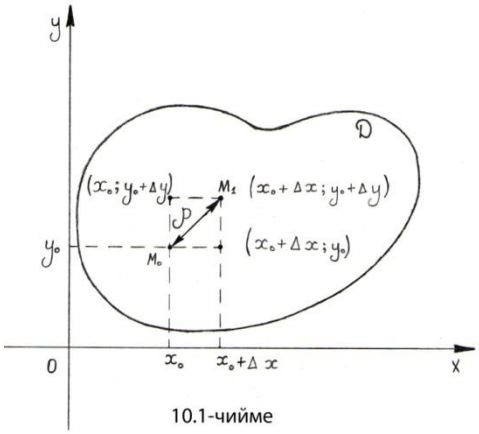
15 – лекция:

КӨП ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ

§10.1 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын туундулары

10.1.1 Жекече туундулар

Айталы $u = f(x, y)$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы $x0y$ координаттык тегиздигиндеги кандайдыр бир D ачык областында аныкталган жана үзгүлтүксүз функция болсун. Бул областтан каалагандай $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ координаталуу бир фиксирленген (кыймылы токтотулган) чекитти алып, ага $x_0 + \Delta x$ жана $y_0 + \Delta y$ өсүндүсүн берген кезде ордунан козголгону менен D областынан чыгып кете албайт деген шарт коёлу (10.1– чийме). Функциянын туундусу кош предел менен байланышкандыктан, аны кайталануучу предел катарында эсептөөгө мүмкүнчүлүк берген шарттар орун алсын дейли. Берилген эки өзгөрүлмөлүү функциянын y_0 өзгөрүлмөсүн фиксирленген абалда калтырып, x өзгөрүлмөсү боюнча туундусун эсептейли. Берилген функция, M_0 чекитинде эки өзгөрүлмөсү боюнча тең үзгүлтүксүз болгондуктан, анын x аргументи $x_0 + \Delta x$ өсүндүсүн алып $y = y_0$ түзү боюнча Ox огуна параллель козголгондо (термелгенде), функция да кошо козголуп тиешелүү



10.1-чийме

$\Delta_{x_0} u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ өсүндүсүнө ээ болот. Анда туундунун 9.1 – аныктамасын, эки өзгөрүлмөлүү функциянын x өзгөрүлмөсү боюнча туундусуна төмөндөгүдөй көрүнүштө жалпылоого болот:

10.1 Аныктама. *Эгерде*

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{x_0} u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0) \qquad (10.1)$$

пределе жашаса, анда анын маанисин $u = f(x, y)$ *функциясынан* x *өзгөрүлмөсү боюнча* M_0 *чекитинде алынган жекече туунду деп атап,* $u'_x|_{x=x_0}$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0}$, $f'_x(x_0, y_0)$ *көрүнүштөрүндө белгилейбиз.*

$\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитин фиксирлебей кыймылга келтирип $\mathrm{M}(x; y)$ деп белгилесек, анда x өзгөрүлмөсү боюнча жекече туундуларды u'_x, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$ көрүнүштөрүндө жазууга болот. Ошентип жалпы учурда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (10.2)$$

теңдештиги орун алат. Ушундай эле талкууну y өзгөрүлмөсү боюнча жүргүзүп, ал боюнча жекече туундуну

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

табабыз жана u'_y, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $f'_y(x, y)$ деп белгилейбиз.

$u = f(x, y)$ функциясынын берилген $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде чектүү жекече туундулары жашаса, анда аны ушул чекиттин жакынкы чеке белинде сызыктуу функция же түз менен алмаштыруу мүмкүнчүлүгү пайда болот. Мисалы чектүү $f'_x(x_0, y_0)$ жекече туундусу жашаса, анда предел алдындагы функция, өзүнүн пределдик маанисинен чексиз кичине чоңдукка гана айырмалангандыктан, (10.1) теңдештигинен

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x) \qquad (10.3)$$

келип чыгып, $\eta \in (x_0,\ x_0 + \Delta x)$ аралыгындагы η өзгөрүлмөсүнө карата

$f(\eta, y_0) = \varphi(\eta)$ белгилөөсүн киргизип, $\Delta x = \eta - x_0$ өсүндүсү x_0 чекити менен η нын аралыгы болорун эске алып,

$\varphi(\eta) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(\eta - x_0) + \mathrm{o}(\Delta x)$ функциясына ээ болобуз. Мындан жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүгүн таштап жиберип,

$\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинин чексиз жакынкы чеке белинде $f(x, y)$ ке эквиваленттүү $f(x, y) \sim \varphi(\eta)$ болгон сызыктуу $\varphi(\eta) = \mathrm{B} + \mathrm{A}(\eta - x_0)$ көрүнүштөгү функцияны түзүүгө болорун көрөбүз

(B = $f(x_0, y_0)$, A = $f'_x(x_0, y_0)$ турактуу сандар).

Жалпы n өзгөрүлмөлүү $u = f(x)$ функциясы $x \in D \subseteq R^n$ болгондуктан, аргументи $x = \{x_1;\ x_2;\ \ .\ .\ .;\ x_n\}$ координаталарына ээ болуп, $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ көрүнүшүндө жазылат. Анын ар бир x_i өзгөрүлмөлөрү ($1 \le i \le n$) боюнча жекече туундулары (10.2) сыяктуу эсептелип, x_i гана фиксирленеген өзгөрүлмө, ал эми башка бардык өзгөрүлмөлөр турактуу сан катары катышышат:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\ x_n)}{\Delta x_i}.$$

Демек жекче туундулар бир эле өзгөрүлмө боюнча алынып, калгандары турактуу сан катары катышкандыктан, бир өзгөрүлмөлүү функциянын туундуларына окшош эсептелип, негизги элементардык функциялардан туунду алуу таблицаларын колдоно беребиз.

Мисалы 1) $u = \sin(xyz)$ функциясынын жекече туундулары

$\frac{\partial u}{\partial x} = (y \cdot z)\cos(xyz)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x \cdot z)\cos(xyz)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = (y \cdot z)\cos(xyz)$ болот.

2) $z = e^{xy}$ функциясынын жекече туундулары $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$ көрүнүшүндө табылат.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялар берилген чекитте үзгүлтүксүз болсо гана, ошол чекиттеги жекече туундуларын эсептөөгө киришебиз. Бирок, айрым учурларда үзүлүү чекиттеринде да жекече туундуларды эсептөө мүмкүнчүлүгү болуп калышы мүмкүн. Мисалы

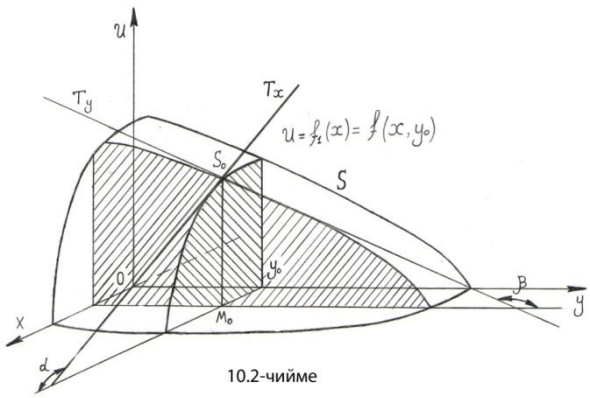
$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ эгерде } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \text{ эгерде } \quad x = y = 0 \end{cases}$ функциясы O(0; 0) чекитинде үзүлүүгө ээ экендигин, $O(0;0)$ чекитине $y = x$ түзүндөгү чекиттер аркылуу жакындап келип, функциянын $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \frac{1}{2}$ пределинин мааниси менен, O(0;0) чекитиндеги $f(0,0) = 0$ мааниси экөөсүнүн барабар эмес экендигинен билебиз. Бирок ошого карабастан O(0;0) чекитинде жекече туундулары жашайт $\frac{\partial f}{\partial x}|_{O(0;0)} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{O(0;0)} = 0$, анткени $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ маанилерин (10.1) пределинин алдындагы

тиешелүү туюнтмаларга койсок, тиешелүү өсүндүлөр пределге өткөнгө чейин эле, $\Delta_x f = 0$ жана $\Delta_y f = 0$ нөлгө айланышып, тиешелүү жекече туундулардын да нөл болору келип чыгат.

10.1.2 Жекече туундулардын геометриялык жана механикалык түшүндүрмөлөрү

∘Айталы, эки өлчөмдүү R^2 мейкиндигиндеги D областында аныкталган жана үзгүлтүксүз $u = f(x, y)$ функциясы берилип, анын x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча жекече туундулары жашасын ($(x, y) \in D \subseteq R^2$). Ал эми үч өлчөмдүү мейкиндиктеги S бети анын графиги болсун. D областынан алынган $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги функциянын жекече туундуларына геометриялык жактан түшүндүрмө берели. Бул чекиттеги функциянын мааанисин $u_0 = f(x_0, y_0)$ десек, анда функциянын графиги болгон S бетинде $\mathrm{S}_0(x_0; y_0; u_0) = \mathrm{S}_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ координаталуу чекити жайгашкан болот.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ жекече туундусун алууда, $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинин жакынкы чеке белинде экинчи $y = y_0$ өзгөрүлмө турактуу сан катары эсептелгендиктен, берилген функцияны $u = f(x, y_0) = f_1(x)$ сыяктуу бир өзгөрүлмөлүү функция катары эсептөөгө болот. $f_1(x)$ тин графиги S бетин $y = y_0$ тегиздиги менен кескенде келип чыккан кесилиш ийриси болот (10.2– чийме). Бир өзгөрүлмөлүү $f_1(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу геометриялык жактан, анын графигине S_0 чекитинен жүргүзүлгөн T_x жаныма түзүнүн k_{T_x} бурчтук коэффициентине барабар болгондуктан,



10.2-чийме

$$k_{\mathrm{T}_x} = \mathrm{tg}\alpha = f_1'(x_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\mathrm{M}_0(x_0; y_0)} \qquad (10.4)$$

теңдештигине ээ болобуз. Бул жерде α – бурчу Ox огу же ал жаткан тегиздик менен T_x жаныма түзүнүн арасындагы бурч.

Ушундай эле талкуулоону жүргүзүп,

$k_{T_y} = \text{tg}\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)|_{M_0(x_0;y_0)}$ болорун көрөбүз.

Ошентип эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги жекече туундулары, геометриялык жактан туунду алынып жаткан өзгөрүлмөнүн багытына карай, анын графигинде жайгашкан $S_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти болот.

Жалпы n –өзгөрүлмөлүү $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясын

$M_0\,(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ чекитиндеги $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ – жекече туундусу, функциянын графигинде жайгашкан $S_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\,; f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$ чекитинен, $(n+1)$ – ченемдүү S бетине (функциянын графигине), O x_i огунун багыты боюнча жүргүзүлгөн T_{x_i} жаныма түзүнүн бурчтук коэффициенти $k_{T_{x_i}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)|_{(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)}$ болот.

- Бир өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги туундусу убакыттын көз ирмеминдеги сызыктуу кыймылдын чекиттеги ылдамдыгын түшүндүрсө, эки өзгөрүлмөлүү функциянын жекече туундулары, механикалык жактан функциянын графиги болгон мейкиндиктеги бет боюнча кыймылдап бара жаткан материалдык чекиттин, убакыт ирмеминде туунду алынып жаткан өзгөрүлмөнүн багытына карай өзгөрүү ылдамдыгын мүнөздөйт.

Мисалы термелүүчү кылдын бекитилген учунан x аралыгында узактыкта жайгашкан M чекитинин, убакыттын t моментиндеги термелүү же четтеп – ийрейүү абалын, эки өзгөрүлмөлүү $u = u(x, t)$ функциясы менен сүрөттөөгө болот. Бул функциянын жекече $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ туундуларына физикалык жана геометриялык жактан түшүндүрмө берели.

Убакыттын кайсы бир ирмемин $t = t_0$ деп фиксирлейли, анда ушул ирмемде термелген кыл $u = u(x, t_0)$ – ийрисинин абалында болот. Ал эми анын ($t = t_0$ болгондогу) жекече $\frac{\partial u}{\partial x}$ туундусу, $u = u(x, t_0)$ – ийрисиндеги абциссасы x болгон чекиттен ушул эле ийриге жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти болот. Ал эми x

аралыгын $x = x_0$ деп фиксирлесек, $u = u(x_0, t)$ функциясы – кылдагы координатасы x_0 болуп фиксирленген М чекитинин тең салмак абалынан четтөө же ийрейүү чоңдугун көрсөтөт. $\frac{\partial u}{\partial t}$ – жекече туундусу болсо, убакыттын t ирмеминдеги М чекитинин чайпалуу (термелүү) ылдамдыгын түшүндүрөт.

10.1.3 Толук дифференцирлөө

Айталы $u = f(x, y)$ функциясы берилип, $f(x, y) \in C[D]$ (аныкталган жана үзгүлтүксүз) болсун. D областын xOy координаталар системасында жайгашкан деп, анын каалаган жеринен $M_0(x_0; y_0) \in D$ чекитин алалы. Тандалган чекитке ар кандай Δx, Δy өсүндүлөрүн берген кезде D областынан чыгып кетпейт деген шарт коёлу

$M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \in D$ (10.1– чийме). Бул учурда,

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (10.5)$$

айырмасы $u = f(x, y)$ функциясынын $(x_0; y_0)$ чекитиндеги **толук өсүндүсү** деп аталат. R^2 мейкиндигине киргизилген метриканын жардамы менен M_0 жана M_1 чекиттеринин арасындагы аралыкты ченейли

$\rho = \rho(M_0, M_1) = \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_0)^2 + (y_0 + \Delta y - y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Мындан $M_1 \to M_0 \Leftrightarrow \rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0 \wedge \Delta y \to 0$ умтулууларынын тең күчтүү болорун көрөбүз. Анда

$$\lim_{M_1 \to M_0} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho} \qquad (10.6)$$

пределинин мааниси: 1) $y = y_0$ турактуу сан болуп, M_1 чекити M_0 чекитине $y = y_0$ түзү боюнча ($\rho = \Delta x \to 0$) жакындап келсе, $f'_x(x_0, y_0)$ – жекече туундусуна барабар болорун (10.1 – аныктамадан жана (10.1) жазылышынан) билебиз.

Бул учурда (10.3) тү пайдаланып, $\Delta_{x_0} u$ өсүндүсүн

$$\Delta_{x_0} u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha \Delta x \qquad (10.7)$$

көрүнүшүндө жазууга болот ($\Delta x \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$ умтулат же $\alpha = \alpha(\Delta x)$).

2). $x = x_0$ турактуу сан болуп M_1 чекити M_0 чекитине $x = x_0$ түзү боюнча ($\rho = \Delta y \to 0$) умтулуп жакындаса, $f'_y(x_0, y_0)$ – жекече туундусуна барабар болору 10.1 – аныктамадан келип чыгат. $\Delta_{y_0} u$ өсүндүсүн

$$\Delta_{y_0} u = f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \beta \Delta y \qquad (10.8)$$

көрүнүшүндө жаза алабыз ($\Delta y \to 0 \Rightarrow \beta = \beta(\Delta y) \to 0$).

3) Эгерде M_1 чекити M_0 чекитине жогорудагыдай белгилүү түздөрдү бойлоп умтулбай, каалаган жолдор менен умтулса, анда (10.6) пределі

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho} \qquad (10.9)$$

кош пределине тең күчтүү болот.

Бул үч учурдун 1) , 2) экөөсүндө (10.9) кош пределі өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүн турактуу сан катары калтырып, экинчи өзгөрүлмөсү боюнча умтулуу менен эсептелди. Эгерде 3) – учурда (10.9) кош пределинин чектүү маанисин табуу мүмкүн болсо, анда $u = f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0; y_0$ чекитиндеги **толук өсүндүсүн** да (10.7), (10.8) жекече өсүндүлөрүнө окшош жазып, $M_0(x_0; y_0)$ чекитинин чексиз жакынкы чеке белинде, $f(x, y)$ функциясын кандайдыр бир сызыктуу функция менен алмаштыруу мүмкүнбү? – деген суроо туулат. Бул суроого төмөндөгүдөй аныктама менен жооп беребиз.

10.2 Аныктама. $M_0(x_0; y_0)$ *чекитинде аргументтерге тиешелүү* $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ *өсүндүлөрү берилген кезде,* $u = f(x, y)$ *функциясы да тиешелүү* (10.5) ***толук өсүндүсүнө*** *ээ болсо жана ал толук өсүндүнү*

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho \qquad (10.10)$$

көрүнүшүндө жазуу мүмкүн болсо, анда $u = f(x, y)$ *функциясын* $M_0(x_0; y_0)$ *чекитинде толук диффренцирленүүчү деп айтабыз.*

Мында $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ жана $\rho \to 0$.

$\rho \to 0$ умтулуу процесси, умтулуу жолун көрсөткөн $\{\Delta x, \Delta y\} \to 0$ өсүндүлөрүнө байланыштуу болгондуктан, бардык багыттардагы ар

кандай жол менен нөлгө келсе да, (10.10) барабардыгынын чексиз кичине бөлүгү, чексиз кичине бойдон каларын ачык көрсөтүү үчүн $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$ көбөйтүндүсү жазылган. Иш жүзүндө бул чексиз кичине чоңдук (10.7) ни, (10.8) ге кошуу кезинде келип чыгат

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right) \cdot \rho = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho \equiv \mathrm{o}(\rho). \quad (10.11)$$

Мында $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right)$ жана $\mathrm{o}(\rho)$ – "ρ го салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук” .

Эгерде (10.10) орун алса, анда $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинин жакынкы чеке белинде жайгашкан M(η; ξ) сыяктуу чекиттерде, $u = f(x, y)$ функциясын сызыктуу функция (түз же тегиздиктин кыркындысы) менен алмаштырууга болот ($\eta \in (x_0,\ x_0 + \Delta x)$, $\xi \in (y_0, y_0 + \Delta y)$). Чынында эле (10.10) ну

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$$

көрүнүшүндө жазып, анын M(η; ξ) чекиттериндеги абалына токтолсок, б.а Δx аралыгындагы η , Δy аралыгындагы ξ маанилерин койсок, өсүндүлөр $\Delta x = \eta - x_0$, $\Delta y = \xi - y_0$ болуп,

$$f(\eta, \xi) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (\eta - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (\xi - y_0) +$$

$+ \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$ теңдештигине ээ болобуз. Мындан $\varphi(\eta, \xi) = f(\eta, \xi)$,

$\mathrm{A} = f(x_0, y_0)$, $\mathrm{B} = f'_x(x_0, y_0)$, $\mathrm{C} = f'_y(x_0, y_0)$ (A , B, C – турактуу сандар) белгилөөлөрүн киргизип, жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдукту таштап жиберип, сөз кылынган чеке белдин ичинде $u = f(x, y)$ функциясына эквиваленттүү болгон

$$\varphi(\eta, \xi) = \mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot (\eta - x_0) + \mathrm{C} \cdot (\xi - y_0)$$

тегиздиктин теңдемесине окшош сызыктуу функцияны алабыз.

Ошентип $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинде дифференцирленүүчү функцияларды, бул чекиттин жакынкы чеке белинде сызыктуу функция көрүнүшүндө жазууга болот.*

Эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0; y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчүлүгүнөн, анын бул чекиттеги үзгүлтүксүздүгү келип чыгары, (10.10) теңдештигинен көрүнүп турат, анткени

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho \right) = 0$$

аргументтердин өсүндүлөрү чексиз кичинерип нөлгө умтулган кезде, функциянын өсүндүсү да нөлгө тең $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta u = 0$ болуп, үзгүлтүксүздүктүн өсүндүлөр тилиндеги аныктамасы аткарылат. Ошентип дифференцирленүүчү функция сөзсүз үзгүлтүксүз болот, б.а. функциянын үзгүлтүксүздүгү жана жана анын чектүү жекече туундуларынын жашашы, анын дифференцирленүүчүлүгүнүн **зарыл шарты** болуп эсептелет. Бирок **жетиштүү шарт** боло албайт, анткени айрым учурда, $M_0(x_0; y_0)$ чекитинде зарыл шарт аткарылганы менен функция дифференцирленбөөчү болуп калышы мүмкүн. Мисалы,

$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ функциясы O(0; 0) чекитинде

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0$ жекече туундуларына ээ болуп, (10.5) боюнча $\Delta f(0,0) = \sqrt[3]{(0 + \Delta x) \cdot (0 + \Delta y)} - \sqrt[3]{0 \cdot 0} = \sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}$, толук өсүндүсүн алат. Эгерде O(0,0) чекитинде функция дифференцирленүүчү деп ойлосок, анда бул чекиттеги толук өсүндүсү 10.2 – аныктамасынын негизинде

$$\Delta f(0,0) = f'_x(0, 0) \cdot \Delta x + f'_y(0,0) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$$

(10.10) көрүнүшүндө жазылышы керек. Функциянын бул чекиттеги ар түрдүү көрүнүштөрдөгү толук өсүндүлөрүн теңдеп,

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho = \sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}$ же

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ теңдештигин алабыз. Дифференцирленүүчүлүктүн зарыл шарты боюнча, $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

умтулганда $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ чексиз кичитне чоңдук болушу керек. Бирок $\Delta x = \Delta y \to 0$ түзү боюнча умтулганда ($\Delta x = \Delta y > 0$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta x}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2} \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{-\frac{1}{3}} = +\infty$$

келип чыгып, берилген функцияны O(0,0) чекитинде дифференцирленүүчү деген оюбуздун туура эмес экендигин көрөбүз.

Демек, берилген чекитте функциянын дифференцирленүүчүлүгү үчүн кошумча жетиштүү шарт аткарылуусу керек.

10.1 Теорема. *$u = f(x, y)$ функциясынын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болушу үчүн, бул чекиттин чеке белинде f'_x, f'_y жекче туундуларынын жашашы жана экөөсүнүн тең $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинин өзүндө үзгүлтүксүз болушу* ***жетиштүү шарт*** *болуп эсептелет.*

Далилдөө. ►Чынында эле $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги функциянын өсүндүсүн

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\} + \{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\}$$

көрүнүшүнө өзгөртүп, ар бир фигуралдык кашаанын ичиндеги айырмалардын биринчисин $]x_0,\ x_0 + \Delta x[$ аралыгында x боюнча, экинчисин $]y_0,\ y_0 + \Delta y[$ арлыгында y боюнча бир өзгөрүлмөлүү функция сыяктуу карап, орточо маани жөнүндөгү теореманы колдонсок,

$$\Delta u = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y \quad (10.12)$$

$(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$ теңдештигине ээ болобуз. Теореманын шарты боюнча f'_x, f'_y жекче туундулары M_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, каралган чексиз кичине интервалдагы (M_0 дун чеке белиндеги) маанилери бири – биринен чексиз кичинеге гана айырмаланып, аларды

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1,$$

$f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2$ көрүнүштөрүндө жазууга болот. Мында Δx, Δy менен кошо $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ да нөлгө умтулат деп эсептелет. Жекече туундулардын туюнтулган маанилерин (10.12) ге коюп, функциянын өсүндүсүн

$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x,$ же

$o(\rho) = \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x$ белгилөөсүн киргизип,

$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$ көрүнүшүнө келтире алабыз, анда 10.2 – аныктаманын (10.10) шарты аткарылып, $u = f(x, y)$ функциясы M_0 чекитинде дифференцирленүүчү экендиги далилденген болот.◀

Жогорудагы мисалда $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ функиясынын O(0;0) чекитинде дифференцирленбөөчү болгондугун себеби, анын f'_x , f'_y жекече туундуларынын бул чекитте үзүлүшкө ээ экендиги менен, же жетишерлик шарттын аткарылбагандыгы менен түшүндүрүлөт. Чынында эле $f'_x = \frac{y}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ жана $f'_y = \frac{x}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ жекече туундулары O(0;0) чекитинде үзүлүшкө ээ болушат.

Жалпы n өзгөрүлмөлүү $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын толук өсүндүсү

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + \varepsilon \cdot \rho$ көрүнүшүндө жазылат. Мында $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$.

10.1.4 Функциянын толук жана жекече дифференциалдары

Эгерде $u = f(x, y)$ функциясы $M(x;\ y) \in D$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын толук өсүндүсү

$\Delta u = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho$ көрүнүшүндө жазыларын, 10.2 – аныктамадан же (10.10) теңдештигинен билебиз. $(x;\ y)$ чекитине чексиз жакын чеке белде, бул толук өсүндү чексиз кичине чоңдук болгондуктан, анын жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүгүн таштап жибергенден кийинки башкы бөлүгү (сызыктуу бөлүгү), берилген функциянын ушул чекиттеги толук дифференциалы деп аталат жана $du = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y$ көрүнүшүндө жазылат. Мында функциянын толук өсүндүсүн $\Delta u \approx du$ менен жакындаштырып алмаштырдык. $\Delta x, \Delta y$ өсүндүлөрүн x, y өзгөрмөлөрүнүн

дифференциалдары менен алмаштырып, толук дифференциалды көбүнчө

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (10.13)$$

көрүнүшүндө жазуу макулдашылган.

Ошондой эле $n-$ өзгөрүлмөлүү $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын толук дифференциалы

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n, \qquad (10.14)$$

көрүнүшүндө жазылат.

Мисалы, $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциясынын толук дифференциалы

$$du = (x^2 + y^2 + z^2)'_x\, dx + (x^2 + y^2 + z^2)'_y\, dy + (x^2 + y^2 + z^2)'_z\, dz =$$

$= 2x\, dx + 2y\, dy + 2z\, dz$ көрүнүшүндө табылат.

$d_x u = f'_x(x, y)dx$ туюнтмасын $u = f(x, y)$

функциясынынын x өзгөрүлмөсү боюнча жекече дифференциалы деп атап, жалпы учурда n өзгөрүлмөлүү функциянын x_i өзгөрүлмөсү боюнча жекече дифференциалын $d_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$ көрүнүшүндө жазабыз ($1 \le i \le n$). Жекече диффренциалдарды пайдаланып, (10.13) жана (10.14) толук дифференциалдарын

$$du = d_x u \ + \ d_y u\,, \qquad du = \sum_{k=1}^{n} d_{x_k} u$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

Жакындаштырылган $\Delta u \approx du$ маанилери бири – биринен

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \mathrm{o}(\rho)$ көрүнүшүндөгү чексиз кичине чоңдуктарга айырмаланышып, аргументтердин $\Delta x, \Delta y$ өсүндүлөрү нөлгө канчалык жакын келсе, ошончолук тактыкта жакындаша беришет.

Мисалдар

1) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ функциясынын (1; 2) чекитиндеги жекече туундуларын жана толук дифференциалын тапкыла.

Чыгаруу: ►Берилген функциянын эркин алынган $(x;y)$ чекитиндеги жекече туундуларын жана толук дифференциалын эсептейбиз. Жекече туундуларын

таап, $f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ толук дифференциалын жекече туундулары менен

$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ көрүнүшүндө жазабыз. $x = 1$, $y = 2$ маанилерин коюп, берилген функциянын (1; 2) чекитиндеги жекече туундулары $f'_x(1,2) = \frac{2}{5}$, $f'_y(1,2) = -\frac{1}{5}$, толук дифференциалы $df(1;2) = \frac{1}{5}(2dx - dy)$ болорун көрөбүз. ◄

2) $$u = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + y^2\sin\frac{1}{y}, & \text{эгерде } xy \neq 0, \\ x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{эгерде } x \neq 0,\ y = 0, \\ y^2\sin\frac{1}{y}, & \text{эгерде } y \neq 0,\ x = 0, \\ 0, & \text{эгерде } x = y = 0 \end{cases}$$

функциясынын жекече туундулары O(0;0) чекитинде үзүлүүгө ээ болгону менен, дифференцирленүүчү болорун далилдегиле.

Далилдөө : ►Берилген функциянын жекече туундуларын табалы:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \text{эгерде } x \neq 0, \\ 0, \quad \text{эгерде } x = 0 \text{ болсо,} \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}, \text{эгерде } y \neq 0, \\ 0, \quad \text{эгерде } y = 0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Анда $f'_x(x,y)$ функциясы $(0;y)$ чекиттеринде же болбосо бүтүндөй Oy огундагы чекиттерде үзүлүшкө ээ болорун, б.а. бул чекиттердеги

$\lim\limits_{x\to 0} f'_x(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ пределе көп маанилүү болуп, $[-1,\ 1]$ сегментин толтурарын байкайбыз. Ошондой эле $f'_y(x,y)$ функциясы $(x;0)$ чекиттеринде үзүлүшкө ээ болот, анткени жогорудагыдай эле $\lim\limits_{y\to 0}\left(2y\sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}\right)$ предели анык бир маниге ээ болбойт, же жашабайт. Ага карабастан

$df(0{,}0) = f'_x(0{,}0)dx + f'_y(0{,}0)dy = 0\cdot dx + 0\cdot dy = 0$ болуп, функциянын O(0;0) чекитинде дифференцирленүүчү экендигин көрөбүз.◀

§ 10.2 Көп өзгөрүлмөлүү татаал функцияны дифференцирлөө

10.2.1 Татаал функциянын туундусун эсептөө эрежеси

Айрым учурларда $u = f(x,y)$ функциясынын аргументтери болгон x, y өзгөрүлмөлөрүнүн өздөрү да башка бир же бир канча өзгөрүлмөлөрдөн көз каранды болуп калышы мүмкүн. Мисалы $f(x,y) = e^x\cos y$ эки өзгөрүлмөлүү функциясынын аргументтери өз кезегинде $x = z\cdot t = \varphi(z,t),\ y = z + t = \psi(z,t)$ көрүнүшүндөгү функциялар болушса, анда аны

$f(x,y) = f[\varphi(z,t),\psi(z,t)] = e^{z\cdot t}\cos(z+t) = F(z,t)$ көрүнүшүндөгү эки өзгөрүлмөлүү татаал функция деп эсептөөгө болот. Ал эми $f(x,y) = x^2 + y^2$ функциясында $x = \sin t,\ y = t^2$ болсо, анда

$f(x,y) = f[\sin t\,, t^2] = sin^2 t + t^4 = F(t) -$ бир өзгөрүлмөлүү татаал функция болот.

Бул учурда xOy координаттык тегиздигинин D областында аныкталган $u = f(x,y)$ функциясы, кандайдыр бир $zO't$ координаттык тегиздигиндеги G областында аныкталган $u = F(z,t) = f[\varphi(z,t),\psi(z,t)]$ татаал функциясын түзөт. Мында $(z;t)$ чекиттери G областында өзгөргөн кезде, $(x;y)$ чекиттери D областынын чегинен чыгып кете албайт деп эсептелет.

∘ Айталы, $u = f(x,y)$ функциясы кандайдыр бир G $=]t_0,\ t_1[$ интервалында бир өзгөрүлмөлүү татаал функция болсун же аргументтери да

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t_0 < t < \ t_1), \qquad (10.15)$$

бир t өзгөрүлмөсүнөн функциялар болушсун.

10.2 Теорема. *Эгерде (10.15) функцияларынын*

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \ \ \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

туундулары жашашса жана $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *маанилерин койгондо* $f(x, y)$ *функциясы дифференцирленүүчү болсо, анда* $u = f[\varphi(t), \psi(t)]$ *татаал функциясы* t *чекитинде туундуга ээ болуп, туундусу*

$$u'_t = f'_x \cdot \varphi'(t) + f'_y \cdot \psi'(t) \ \ \text{же} \ \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (10.16)$$

ыкмалары менен эсептелет.

Далилдөө. ►Эгерде t өзгөрүлмөсүнө $\Delta t \neq 0$ өсүндүсүн берсек, анда x, y өзгөрүлмөлөрү да тиешелүү

$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$ өсүндүлөрүнө ээ болуп, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} \neq 0$ болгондуктан, $u = f(x, y)$ функциясы да $(x;\ y)$ чекитинде нөлдөн айырмалуу Δu өсүндүсүнө ээ болорун көрөбүз. Теореманын шарты боюнча $u = f(x, y)$ бул чекитте дифференцирленүүчү болгондуктан, анын (10.10) толук өсүндүсүн (10.11) белгилөөсүн пайдаланып,

$$\Delta u = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \ .$$

көрүнүшүндө жаза алабыз. Экинчи жактан $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функцияларынын t чекитинде туундулары жашагандыктан, бул чекитте үзгүлтүксүз болушуп, аргументтин өсүндүсү мненен кошо функциялардын тиешелүү өсүндүлөрү да нөлгө умтулушат, же

$\Delta t \to 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ шарты аткарылат. Табылган Δu толук өсүндүсүн Δt га бөлүп жиберип, $(x;\ y)$ чекитиндеги $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ жекече туундуларын турактуу деп алып $\Delta t \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк,

$$u'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\Delta t} = f'_x(x, y) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} +$$

$+\alpha\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'_x(x,y)\cdot\varphi'(t)+f'_y(x,y)\cdot\psi'(t)+0\cdot\varphi'(t)+$

$+\ 0\cdot\psi'(t)=\ f'_x\cdot\varphi'(t)+f'_y\cdot\psi'(t)$ келип чыгып, (10.16) ыкмаларынын туура экендиги далилденет.◀

Мисалы $f(x,y)=x^2+y^2,\ x=\sin t,\ y=t^2$ татаал функциясынын t өзгөрүлмөсү боюнча туундусу $\frac{df}{dt}=(x^2+y^2)'_x\cdot x'_t\ +(x^2+y^2)'_y\cdot y'_t\ =$

$=2x\cdot\cos t+2y\cdot 2\,t=2x\cdot\cos t+4yt=2\sin t\cos t+4t^2\cdot t=\sin 2t+4t^3.$

∘ Айталы, $u=f(x,y)$ функциясынын аргументтеринин бирөөсү экинчи өзгөрүлмөсүнөн функция болуп, экинчиси көз каранды эмес өзгөрүлмө бойдон кала берсин. Мисалы $x=x,\ y=\psi(x)$, анда $u=f\big(x,\psi(x)\big)$ татаал функциясынын x боюнча туундусу (10.16) ыкмасы боюнча,

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\ =\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (10.17)$$

эрежеси менен эсептелерин көрөбүз. Мисалы $f(x,y)=\ \sin(x\cdot y^2)$ функциясында $y=\mathrm{e}^x$ болсун, анда (10.17) ни колдонуп, берилген функциянын x боюнча туундусун

$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\ =(\sin(x\cdot y^2)\ )'_x+(\sin(x\cdot y^2))'_y\cdot(\mathrm{e}^x)'_x=y^2\cos(x\cdot y^2)+$

$+2xy\cos(x\cdot y^2)\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2x}\cos(x\mathrm{e}^{2x})+2x\mathrm{e}^x\cos(x\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{e}^x\ =$

$=\mathrm{e}^{2x}\cos(x\mathrm{e}^{2x})\cdot(1+2x)$ көрүнүшүндө эсептейбиз.

∘ Айталы $x=\varphi(z,t),\ y=\psi(z,t)$ болуп, $u=f(x,y)$ функциясы

$f(x,y)=f[\varphi(z,t),\psi(z,t)]=F(z,t)$ көрүнүшүндөгү эки өзгөрүлмөлүү татаал функция болсун. Бул учурда: 1) $(z;\ t)$ чекитинде $x=\varphi(z,t)$, $y=\psi(z,t)$ функцияларынын $\frac{\partial y}{\partial z},\ \frac{\partial y}{\partial t}$ жана $\frac{\partial x}{\partial z},\ \frac{\partial x}{\partial t}$ жекече туундулары да үзгүлтүксүз функциялар болушса;

2) $(z;\ t)$ чекитине тишелеш болгон $(x;\ y)=\big(\varphi(z,t);\ \psi(z,t)\big)$ чекитинде, $f(x,y)$ дифференцирленүүчү функция болсо.

Анда $f[\varphi(z,t),\psi(z,t)]$ татаал функциясы $(z;\ t)$ чекитинде $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ жекече туундуларына ээ болорун көрсөтүп, аларды эсептөө ыкмаларын табалы:

$\frac{\partial f}{\partial z}$ жекече туундусун эсептөөнүн жүрүшүндө t өзгөрүлмөсү турактуу сан катары эсептелгендиктен, иш жүзүндө $x=\varphi(z,t)$, $y=\psi(z,t)$ функцияларын бир гана z өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болгон бир өзгөрүлмөлүү функциялар катарында эсептөөгө болот. Ошондуктан $\frac{\partial f}{\partial z}$ жекече туундусун бир өзгөрүлмөлүү татаал функциянын туундусуна окшоштуруп (10.16) формуласын колдонсок,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} \qquad (10.18)$$

эрежесине ээ болобуз. Ушундай эле талкуулоо менен

$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$ берилген татаал функциянын t өзгөрүлмөсү боюнча туундусу табылат.

Жалпы учурда көп өзгөрүлмөлүү $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ функциясынын аргументтери

$x_1=\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x_2=\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x_3=\varphi_3(t_1,t_2,\dots,t_m)$, . . . , $x_n=\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$ көрүнүштөрүндөгү функциялар болушса, анда $u=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=$

$=f[\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m),\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m),\dots,\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)]=F(t_1,t_2,\dots,t_m)$ көрүнүшүндөгү m өзгөрүлмөлүү татаал функция болуп эсептелет. Бул учурда деле татаал функциядан туунду алуунун (10.16) эрежеси сакталат, анткени $(t_1,t_2,\dots,t_m)\in \mathrm{G}\subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ аргументтеринин жана арадагы $(x_1,x_2,x_3\dots,x_n)\in\ D\subseteq\ R^n$ өзгөрүлмөлөрүнүн саны канча болгонуна карабастан, t_i же x_j боюнча туунду алуунун жүрүшүндө калган өзгөрүлмөлөр турактуу деп эсептелишет ($1\le i\le \mathrm{m}$, $1\le j\le n$). Ошентип, жогорудагы 1) , 2) – сыяктуу шарттар аткарылган кезде $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ функциясынын t_i өзгөрүлмөсү боюнча туундусу

$F'_{t_i}=f'_{x_1}\cdot(\varphi_1)'_{t_i}+f'_{x_2}\cdot(\varphi_2)'_{t_i}+f'_{x_3}\cdot(\varphi_3)'_{t_i}+\ \dots+f'_{x_n}\cdot(\varphi_n)'_{t_i}$ же

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial t_i}+\ \dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i} \qquad (10.19)$$

эрежеси менен эсептелет.

Мисалы 1) $u=e^{z^2sin^2t+2zt\ sinz\sin t+t^2}$ функциясында $x=z^2sin^2t$, $y=2zt\ sinz\sin t, \eta=t^2$ көрүнүшүндөгү функциялар десек, анда $u=e^{x+y+\eta}$ татаал функциясына ээ болобуз. Бул учурда татаал функциянын z,t өзгөрүлмөлөрү боюнча туундулары

►$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z}=(e^{x+y+\eta})'_x\cdot(z^2sin^2t)'_z\ +$

$+(e^{x+y+\eta})'_y\cdot(2zt\ sinz\sin t)'_z+\ (e^{x+y+\eta})'_\eta\cdot(t^2)'_z=e^{x+y+\eta}\cdot 2z\ sin^2t+$

$+\ e^{x+y+\eta}(2t\sin z\sin t+2zt\cos z\sin t)+e^{x+y+\eta}\cdot 0=2e^{x+y+\eta}(z\ sin^2t+$

$+t\sin z\sin t+zt\cos z\sin t)=2e^{z^2sin^2t+2zt\ sinz\sin t+t^2}(zsin^2t+$

$+t\sin z\sin t+t\,\mathrm{z}\cos z\sin t)$;

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}=(e^{x+y+\eta})'_x\cdot(z^2sin^2t)'_t+$

$+(e^{x+y+\eta})'_y\cdot(2zt\ sinz\sin t)'_t+(e^{x+y+\eta})'_\eta\cdot(t^2)'_t=$

$=e^{x+y+\eta}\cdot(z^2 2\sin t\ cos\ t+2z\sin z\sin t+2zt\sin z\cos t+2t)=$

$=2e^{z^2sin^2t+2zt\ sinz\sin t+t^2}(z^2\sin t\ cos\ t+z\sin z\sin t+zt\sin z\cos t+t)$

көрүнүштөрүндө эсептелет.◄

2) $f(x,y)=\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ функциясынын жекече туундуларын тапкыла.

Чыгаруу: ►$u=\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ белгилөөсүн киргизип, татаал функциянын дифференциалы катарында $df=d(\sin u)=\cos u\,du$ эрежесин колдонобуз. Оболу бөлчөктүн дифференциалы катарында

$du=d\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)=\frac{(x^3+y^3)\cdot d(x^2+y^2)-(x^2+y^2)\cdot d(x^3+y^3)}{(x^3+y^3)^2}$ эсептеп алалы. $d(x^2+y^2)=2xdx+2ydy$, $d(x^3+y^3)=3x^2dx+3y^2dy$

болгондуктан,

$$du = \frac{(x^3+y^3)(2xdx+2ydy\,) - (x^2+y^2)(3x^2dx+3y^2dy)}{(x^3+y^3)^2} =$$

$= \frac{(-x^4-3x^2y^2+2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-y^4)dy}{(x^3+y^3)^2}$ ээ болобуз. Сөз кылынган эрежени эске алып,

$df = \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} \cdot \frac{(-x^4-3x^2y^2+2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-y^4)dy}{(x^3+y^3)^2}$ ээ болобуз. Мындан dx, dy терге көбөйтүлгөн коэффициенттерди өз - өзүнчө бөлүп жазып, талап кылынган жекече туундууларды

$$f'_x(x,y) = \frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2} \cdot \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3},$$

$f'_y(x,y) = \frac{2x^3y-3x^2y^2-y^4}{(x^3+y^3)^2} \cdot \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ табабыз.◄

10.2.2 Татаал функциянын толук дифференциалы жана жазылуу формасынын сакталышы (инварианттуулугу)

Эгерде $u = f(x,y)$ функциясы x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча дифференцирленүүчү болсо, анда (10.13) боюнча анын толук дифференциалы $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ көрүнүшүндө жазыларын билебиз. Айталы x, y аргументтери да өз кезегинде $x = \varphi(z,t)$, $y = \psi(z,t)$ эки өзгөрүлмөлүү функциялар болушуп, берилген функция

$u = f([\varphi(z,t), \psi(z,t)]$ көрүнүшүндөгү татаал функция болсун. Бул учурда: 1) $\varphi(z,t)$, $\psi(z,t)$ функцияларын $(z;\ t)$ чекитинде z, t өзгөрүлмөлөрү боюнча жекече үзгүлтүксүз $\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial t}$ туундулары жашаса же бул чекитте дифференцирленүүчү болушса;

2) Тиешелүү $(x;\ y)$ чекитинде $u = f(x,y)$ функциясы диффренцирленүүчү болсо же $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ жекче туундулары үзгүлтүксүз функциялар болушса.

Анда $u = f([\varphi(z,t), \psi(z,t)]$ татаал функциясынын $(z;\ t)$ чекитиндеги жекече туундулары (10.18) эрежесинин негизинде

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \text{ жана } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (10.20)$$

көрүнүштөрүндө эсептелерин билебиз. Барабардыктардын оң жактарында үзгүлтүксүз функциялар турушкандыктан, алардын сол жактарындагы $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ функцияларынын да $(z;\ t)$ чекитинде үзгүлтүксүз экендиги келип чыгат. Андай болсо, $u = f([\varphi(z,t), \psi(z,t)]$ татаал функциясы үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ функция катарында $(z;\ t)$ чекитинде дифференцирленүүчү функция экендигин көрөбүз. Демек, анын толук дифференциалын (10.13) көрүнүшүндө

$du = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt$ деп жаза алабыз. Бул теңдештикке $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}$ жекече туундуларынын (10.20) маанилерин коюп,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) dt \qquad (10.21)$$

татаал функциянын толук дифференциалын эсептөө эрежесине ээ болобуз.

Жалпы учурда $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ жана $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m)$,

$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $x_3 = \varphi_3(t_1, t_2, \dots, t_m)$, . . . , $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$ болгондо,

$$f[\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)] = F(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

m өзгөрүлмөлүү татаал функциясынын толук дифференциалы 1), 2) – сыяктуу шарттарда

$$du = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right) dt_i\ , \quad (10.22)$$

$$\text{же } du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_i} dt_i \qquad (10.23)$$

көрүнүштөрүндө эсептелет.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын (10.13) толук дифференциалын, көп өзгөрүлмөлүү татаал функциялардын (10.21), (10.22), (10.23) толук дифференциалдарына салыштырып, алардын жазылуу формаларынын бузулбаганын байкайбыз. Чынында эле алардын бардыгында, адегенде өзгөрүлмө боюнча туундусу, андан кийин ошол өзгөрүлмө боюнча

дифференциал көбөйтүлгөн ырааттуулук сакталган. Бул дифференциалдын жазылуу формасынын инварианттуулугу же **инварианттуулуктун сакталышы** деп аталат.

Мисалы $f(\tau, t) = \sin(\tau^2 t^3)$ функциясын толук дифференциалын табуу үчүн $x = \tau^2,\ y = t^3$ белгилөөлөрүн киргизсек, ал

$f(x, y) = \sin(xy)$ көрүнүшүнө келет. (10.20) формулалардын жардамы менен

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} = y\cos(xy) \cdot 2\tau + x\cos(xy) \cdot 0 = 2\tau y\cos(xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = y\cos(xy) \cdot 0 + x\cos(xy)\, 3t^2 = 3t^2 x\cos(xy)$$

жекече туундуларын таап, (10.21) нин негизинде

$$df(\tau, t) = 2\tau y\cos(xy)\, d\tau + 3t^2 x\cos(xy) d\, t = \cos(\tau^2 t^3) \cdot (2\tau t^3\, d\tau\ + 3t^2 \tau dt\ )$$

мисалдагы татаал функциянын толук дифференциалын табабыз.

§10.3 Айкын эмес функциянын туундусу

$F(x, y) = 0$ теңдемеси берилип, анын сол жагындагы $F(x, y)$ туюнтмасы xOy координаттык тегиздигинде жайгашкан, кандайдыр бир D областында аныкталган эки өзгөрүлмөлүү функция болсун. Эгерде D областында жайгашкан $(x_0; y_0)$ чекитинин жакынкы $\rho[(x_0; y_0), (x;\ y)] < h$ чеке белине таандык бардык $(x;\ y)$ чекиттери үчүн, ($x_0 - h,\quad x_0 + h$) интервалында жайгашкан ар бир x тин маанисине карата, ($y_0 - h, y_0 + h$) интервалынан бир гана $y = y(x)$

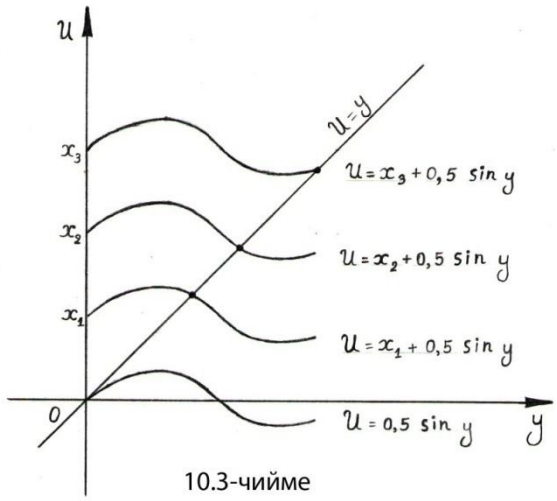
мааниси жашап, $(x, y(x))$ түгөй маанилери көрсөтүлгөн интервалдарда берилген $F\big(x, y(x)\big) = 0$ теңдемесине чечим болушса, анда ушул интервалдардын чегинде $F(x, y) = 0$ теңдемесинен: y өзгөрүлмөсү, x өзгөрүлмөсүнө карата айкын функция катарында аныкталат дейбиз.

Демек, бул интервалда $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$ (10.24)

теңдештиги орун алып, y ке карата чыгарылбаган учурда $F(x, y) = 0$ теңдемеси айкын эмес функция, y ке карата $y = y(x)$ көрүнүшүндө чыгарылгандан кийин айкын функция деп аталышат. Мында

h жетишерлик кичине турактуу сан болуп, R^2 мейкиндигинде тандалган метрикага ылайык борбору $(x_0; y_0)$ чекити болгон тегеректин радиусу, же болбосо диогоналдарынын кесилиши $(x_0; y_0)$ чекити болгон квадраттын жагынын $2h$ узундугунун тең жарымы болот.

Мисалдар : 1). $x^3 - y = 0$ теңдемеси көрүнүшүндөгү айкын эмес функцияны $y = x^3$ көрүнүшүндөгү бир маанилүү айкын функция катарында жазууга болот.



10.3-чийме

2). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ теңдемеси менен графиги эллипс болгон айкын эмес функциясын берүүгө болот. Эллипстин айкын көрүнүштөгү теңдемеси эки маанилүү болуп, жогорку жана төмөнкү деп аталышкан эки канаттан турат:

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, Ox огунун үстүндөгү бөлүгү “+” белгиси менен, төмөн жагындагы бөлүгү “–” белгиси менен алынат.

3). $5x^2 + 2y^2 + 9 = 0$ теңдемеси менен берилген айкын эмес функцияны x тин чыныгы маанилери үчүн, y ке карата чыгаруу мүмкүн эмес (кош мааниде мүмкүн) же аны чыныгы аргументтүү айкын функция көрүнүшүндө жаза албайбыз.

4). $y - x - 0,5 \cdot \sin y = 0$ теңдемеси менен берилген айкын эмес функциясын теориялык жактан y ке карата $y = y(x)$ көрүнүшүндөгү чечими жашары чын болгону менен, иш жүзүндө анын y ке карата чыгаруу мүмкүн эмес же элементардык функциялар менен туюнтулган чечими табылбайт. Чынында эле бул айкын эмес функцияны, ага теңдеш $\begin{cases} u = y, \\ u = x + 0,5 \cdot \sin y = 0 \end{cases}$ параметрдик функциясына (x ти параметр деп алып) өзгөртүп, uOy координаттык тегиздигиндеги графиктерин салыштырсак , алардын графиктери адегенде

$(x;\ y) = (0; 0)$ чекитинде, андан кийин чекиз көп $(x_i;\ y_i)$ чекиттеринде ($i = 1, 2, \ldots$) кесилише берүү мүмкүнчүлүгү бар экендигин көрөбүз.

Демек, бул кесилишүү чекиттеринде теориялык жактан $y = y(x)$ туюнтуусун ишке ашыруу мүмкүн дегенди түшүндүрөт (10.3 – чийме).

Мисалдардан көрүнгөндөй (10.24) теңдештиги ар дайыма эле орун ала бербейт, же $F(x, y) = 0$ теңдемеси айкын функция болбой калышы да мүмкүн.

10.3 Теорема. *Айталы төмөндөгүдөй шарттар аткарылсын:*

1) Эки өзгөрүлмөлүү $F(x, y)$ функциясы кандайдыр бир диогоналдарынын кесилиши $(x_0; y_0)$ чекити, жактарынын узундугу $2h_1$ жана $2h_2$ болгон D төрт бурчтугунун ичинде аныкталган жана үзгүлтүксүз функция болсун (10.4 – чийме). Мында

$$D = \{(x; y) |\ x_0 - h_1 < x < x_0 + h_1, y_0 - h_2 < y < y_0 + h_2\}.$$

2) $(x_0; y_0)$ чекитинде $F(x, y)$ нөлгө айлансын $F(x_0, y_0) = 0$;

3) D төрт бурчтугунун ичинде үзгүлтүксүз $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ жекече туундулары жашашсын;

4) $(x_0; y_0)$ чекитинде $\frac{\partial F}{\partial x}$ жекече туундусу $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}|_{(x_0;y_0)} \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болсун же x ти турактуу деп алганда $F(x, y)$ функциясы y ке карата монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болсун .

Анда 1) $(x_0; y_0)$ чекитинин жетишерлик кичине деп алынган ε - чеке белинде $F(x, y) = 0$ теңдемесинен y ти x ке карата бир маанилүү $y = y(x)$ көрүнүшүндөгү функция катары туюнтууга болот ;

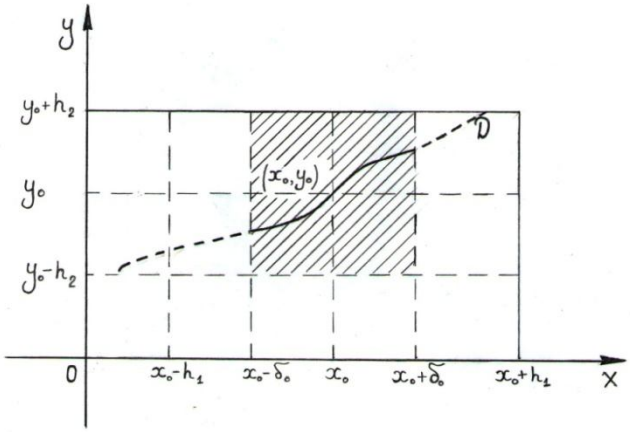
2) $x = x_0$ болгондо $y_0 = y(x_0)$ болуп, $x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0$ аралыгында $|y - y_0| = |y - y(x_0)| < \varepsilon$ шарты аткарылат же $y = y(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот.

3) $(x_0; y_0)$ чекитинде $F(x_0, y_0) = F(x_0, y(x_0)) \equiv 0$ теңдештиги орун алат;

4) $y = y(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция болуп, анын туундусу

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (9.29)$$

эрежеси менен табылат (9 – гл., 9.2.4 – теманы кара).



10.4-чийме

Айкын эмес функциянын жашашын далилдөөсүз кабыл алып, $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y = y(x)$ орун алат деп эсептеп, (9.29) эрежесин келтирип чыгаралы. Эгерде $y = y(x)$ функциясынын аргументине $x+\Delta x$ өсүндүсүн берсек, үзгүлтүксүз функция катарында $y+\Delta y = y(x+\Delta x)$ өсүндүсүнө ээ болобуз. Шарт боюнча алар

$F(x+\Delta x\,, y+\Delta y) = 0$ теңдемесин канааттандырышат. Анда эки өзгөрүлмөлүү функциянын толук өсүндүсү

$\Delta\, F(x,y) = \quad F(x+\Delta x\,, y+\Delta y) - F(x,y) = 0$ көрүнүшүндө болот. Экинчи жактан бул толук өсүндүнү (10.10), (10.11) – лерди пайдаланып,

$\Delta\, F(x,y) \equiv F'_x(x,y)\cdot\Delta x + F'_y(x,y)\cdot\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0$ табабыз. Мындан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}$ теңдештигине ээ болуп, $\Delta x \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}$, (9.29) эрежесинин туура экендиги келип чыгат.

Жалпы учурда n өзгөрүлмөлүү айкын эмес функция

$F(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = u(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ көрүнүшүндө жазылат.

Мисалы эки өзгөрүлмөлүү айкын эмес функцияны

$F(x,y,u)=0 \Leftrightarrow u=f(x,y)$ көрүнүшүндө жазып, 10.3 – теоремасын R^3 мейкиндигиндеги диогоналдарынын кесилишинде $(x_0;y_0;u_0)$ чекити турган параллелопипедке жайылтсак, $f(x,y)$ тин $x,\ y$ боюнча дифференцирленүүчү экендиги келип чыгат. Чынында эле $F\big(x,y,f(x,y)\big)=0$ болгондуктан, жекече өсүндүлөрү да нөлгө тең болушуп

$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0$ барабардыктарына ээ болобуз. Мындан

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0\right) \tag{10.25}$$

эки өзгөрүлмөлүү айкын эмес функциялардын жекече туундуларын эсептөө эрежелерин келтирип чыгарабыз.

Мисалы 1) $F(x,y,u)=0$ айкын эмес функциясы менен

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{u^2}{c^2}-1=0$ эллипсоиди берилсе, аны 10.3 – теореманын шарттарын канааттандырган чекиттерде $u=f(x,y)$ көрүнүшүнө келтирүүгө болот деп эсептеп, f'_x, f'_y жекече туундуларын табайлы. $F'_x=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y=\frac{2y}{b^2}$, $F'_u=\frac{2u}{c^2}$ үзгүлтүксүз жекече туундулары жашап, $F'_u\neq 0$ болгон учурда (10.25) формуласынын негизинде

$f'_x=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2u}{c^2}}=-\frac{c^2x}{u\cdot a^2}=-\frac{c^2x}{u\cdot a^2}$; $f'_y=-\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2u}{c^2}}=-\frac{c^2y}{b^2u}$ талап кылынган жекече туундуларды тапкан болобуз.

2) Айкын эмес көрүнүштөгү $F(x,y,z)\equiv x^2y-y^2z+zx=0$ теңдемеси менен берилген функциянын жекече туундуларын табуунун үч ыкмасын көрсөтөлү:

►А) Берилген теңдемени z ке карата чыгарып, $z=\frac{x^2y}{y^2-x}$ көрүнүшүндөгү айкын функцияны алабыз. Ошондуктан 10.3 – теореманын шарттарын аткарылышын талап кылбай эле

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(y^2-x)\cdot 2xy-x^2y\,(-1)}{(y^2-x)^2}=\frac{xy(2y^2-x)}{(y^2-x)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(y^2-x)x^2-x^2y\cdot 2y}{(y^2-x)^2}=-\frac{x^2(x+y^2)}{(y^2-x)^2}$ жекече туундуларын табууга болот.

Б) Ушул эле жекече туундуларды $F(x,y,z)=0$ функциясы 10.3 – теореманын шарттарын канааттандырган чекиттерде (10.25) формуласын пайдаланып,

$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ болгондо $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2xy+z}{-y^2+x}=\frac{2xy+z}{y^2-x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{x^2-2yz}{-y^2+x}=\frac{x^2-2yz}{y^2-x}$ көрүнүштөрүндө эсептөөгө болот ($z=\frac{x^2y}{y^2-x}$ маанисин койсок, жогорудагы жекече туундуларга тең болушат).

В) $F(x,y,z)=0$ теңдемесинен түз эле x,y өзгөрүлмөлөрү боюнча биринен туунду алганда экинчисин турактуу деп эсептеп, ал эми z ти x,y өзгөрүлмөлөрүнүн экөөсүнөн тең функция деп алып дифференцирлейли. Анда

$F'_x=(x^2y-y^2z+zx)'_x\equiv 2xy-y^2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z=0$ теңдештигинен

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy+z}{y^2-x}$ жекече туундусун, ал эми

$$F'_y=(x^2y-y^2z+zx)'_y\equiv x^2-2yz-y^2\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

теңдештигинен $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2yz}{y^2-x}$ жекече туундусун таап, алардын жогорудагы жекче туундулар менен тең болорун көрөбүз.◄

§ 10.4 Жекече туундуларды вектордук ыкмалар менен эсептөө жана түшүндүрүү

10.4.1 Вектордук жана скалярдык талаалар

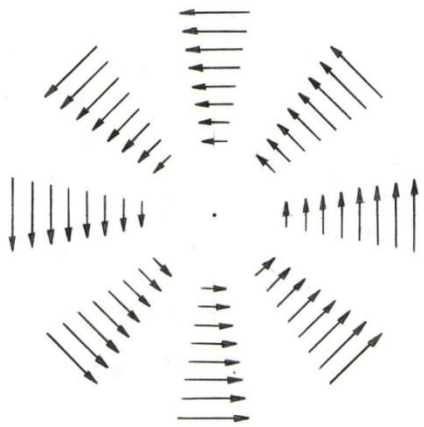
Айталы, R^3 мейкиндигинде жайгашкан кандайдыр бир идиштин ичине эркин кыймылдоочу нерсе салынсын, убакыттын ар бир ирмеминде байкоо салып, нерсе идиштин бир чекитинде, белгилүү бир багыттагы ылдамдык менен $\vec{u}$ вектору сыяктуу кыймылдап жүргөнүн

байкайбыз. Белгилүү бир убакыт өткөн соң, анын кыймылдуу багыттарын векторлор менен толук алмаштырдык деп ойлосок, анда идиштин ичи (G областы) векторлордун $\{\vec{u}\}$ жыш тобунун (көптүгүнүн) агымдары менен толук толтурган болот элек. Мындай учурда $\{\vec{u}\}$ векторлорунун көптүгүн, каралган G областындагы (идиштеги) чекиттердин **вектордук талаасын** түзүшөт деп айтып, ал эми өзгөрүлмө $\vec{u}$ векторунун өзүн – **талаанын вектору** дейбиз. Ошентип $\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\}$ вектору, $(x; y; t)$ чекитиндеги абалды байкап – баяндоочу вектор болуп, анын координаталары байкоо жүргүзүлгөн чекиттин өзгөрүшүнө жараша өзгөрүп турган, үч өзгөрүлмөдөн көз каранды болгон, үч функция сыяктуу

$u_1 = u_1(x, y, t),\ u_2 = u_2(x, y, t),\ u_3 = u_3(x, y, t)$ эсептелишет.

Мисалы материалдык чекиттин айланасындагы күч – талаасын вектордук талаа деп эсептөөгө болот. Бул күч – талаасынын бардык векторлору, Ньютондун тартылуу күчү боюнча

($F = \gamma \frac{M \cdot m}{\rho^2}$) материалдык чекитке тартылып жаткан бирдик массага ээ болгон чекиттерге багытталып, ал эми алардын модулдары материалдык чекиттен, ага тартылып жатышкан бирдик массага ээ болгон чекиттерге чейинки аралыктын квадраттарына тескери пропорцияда болушат.



10.5-чийме

Экинчи жактан, байкоо жүргүзүлүп жаткан $(x; y; t)$ өзгөрүлмө чекитинин радиус – вектору $\vec{r}$ болсо, анда $\vec{u}$ векторун ушул чекиттеги абалды мүнөздөөчү $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ көрүнүшүндөгү вектор – функция деп эсептөөгө да болот.

Вектордук талааны үйрөнүү процессинде декарттык координаталар системасын буруу зарылчылыгы келип чыгышы мүмкүн. Мисалы бир октун айланасында турактуу бурчтук ылдамдык менен айланып жаткан катуу телонун ылдамдыктарынын вектордук талаасын, бурууларды колдонбой үйрөнүү кыйын (10.5 – чийме). Буруу учурунда, вектордук талаада берилген чекиттин $\vec{r}$ радиус – вектору жана бул чекитке туура

келген вектордук талаанын $\vec{u}$ вектору өзгөрбөстөн кала берип, өз ара $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ функционалдык көз карандылыктарын сактап калышат. Ошентип, векторлор өзгөрбөй координата тегиздиги айланып бурулгандыктан, вектордук талаанын $(x; y; t)$ чекитинин координаталары $(x; y; t) \to (\xi; \eta; \tau)$ жаңы координаталарга ээ болушуп, ага тиешелеш талаанын векторлору да жаңы

$\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\} \to \{\omega_1; \omega_2; \omega_3\}$ координаталарга өтүшөт. Координаталар системасын кайсы багытка кандай бурганыбызга карабастан, алардын ортторунун жардамы менен чекиттердин жаңы жана эски (же тескерисинче) координаталарын байланыштыра алабыз (IV – гл. , §4.1 сыяктуу). Демек вектордук талааны, анын $\vec{u}$ вектору менен мүнөздөп үйрөнүү мүмкүнчүлүгү ар дайым сакталат.

- **Скалярдык талаа .**

Эгерде R^3 мейкиндигинде жайгашкан кандайдыр бир G областынын ар бир $(x; y; t)$ чекитине u чоңдугунун анык бир мааниси туура келсе (мисалы ошол чекиттин тыгыздыгын көрсөткөн чоңдук), анда мындай көз карандылык байланышын G областынын чекиттериндеги

$u = f(x, y, t)$ көрүнүшүндөгү **скалярдык функция** деп эсептеп, G областында **скалярдык талаа** берилди деп коёбуз. Ал эми, x, y, t өзгөрүлмөлөрүн, координата башталмасынан башталган кандайдыр бир $\vec{r} = \{x; y; t\}$ векторунун координаталары деп түшүнүп, берилген функцияны вектордон көз каранды $u = f(x, y, t) = F(\vec{r})$ көрүнүшүндөгү чоңдук деп эсептесек, анда u чоңдугун $\vec{r}$ векторуна тиешелеш коюлган, $\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\}$ векторунун $|\vec{u}\ | = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$ узундугу деп түшүнүүгө болот. Ошентип G областындагы $(x; y; t)$ чекитинин скалярдык функциясы вектор болбостон, декарттык координаталар системасы өзгөргөндө да мурдагы чоңдугун сактап кала берген сан (скаляр) болот.

- **Скалярдык талаанын градиенти.**

10.3 Аныктама. *G областында берилген скалярдык талааны аныктаган $u = f(x, y, t)$ скалярдык функциясынын градиенти деп, координаталары $f(x, y, t)$ функциясынын жекече туундулары болгон*

$\vec{u} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial x}\right\}$ *векторун айтабыз жана аны* $\vec{u} = grad\, f$ же ∇f *көрүнүштөрүндө белгилейбиз.*

10.4.2 Скалярдык өзгөрүлмөлүү вектор функциянын туундусу

Аргументтери вектордук жана скалярдык талааларда өзгөрүшкөн вектордук жана скалярдык функциялар менен катар эле, аргументи бир өзгөрүлмүлүү скаляр (сан) болгон вектордук функцияларды карайлы. Айталы $\{\vec{u}\}$ векторлорунун тобу (көптүгү) бир гана t параметринен (скалярынан) көз каранды $\vec{u} = \vec{u}(t)$ векторлорунан турсун, анда

$\vec{u} = \vec{u}(t)$ скалярдык аргументтүү вектор функция деп аталат. Скалярдык аргументтүү вектор функцияны t санынын өзгөрүшүнө жараша өзгөргөн $\vec{u}$ векторунун $\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\}$ координаталары боюнча, бир өзгөрүлмөлүү үч функциялардын системасы катарында да жазуу мүмкүн: $\begin{cases} u_1 = \varphi(t), \\ u_2 = \psi(t), \\ u_3 = \eta(t), \end{cases}$

$\alpha < t < \beta$. Эгерде $\vec{u}$ векторун мейкиндикте жайгашкан $(u_1; u_2; u_3)$ чекититинин радиус – вектору катарында эсептесек, анда t параметри берилген аралыкта өзгөргөн учурда радиус – вектордун учтары мейкиндикте кандайдыр бир L ийрисин (годографын) сызган болот.

Эгерде $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ функциялары (α, β) аралыгында дифференцирленүүчү функциялар болушса, анда скалярдык аргументтүү $\vec{u} = \vec{u}(t)$ функциясынын t параметри боюнча туундусун

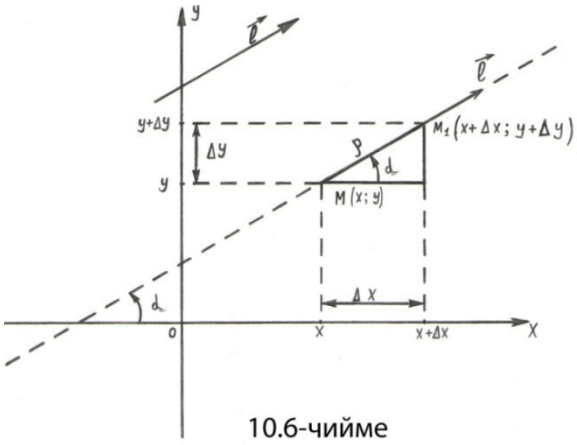
$$\frac{d\,\vec{u}}{dt} = \vec{u}'(t) = \{\varphi'(t)\,;\, \psi'(t)\,;\, \eta'(t)\} \qquad (10.26)$$

көрүнүшүндөгү вектор катарында табууга болот. Скалярдык аргументтүү вектор функциялардын туундуларын эсептөөдө, туунду алуунун бардык касиеттери жана эрежелери сакталат.

10.4.3 Берилген багыт боюнча туунду

Дифференцирленүүчү $u = f(x, y)$ функциясынын f'_x , f'_y жекече туундулары, тиешелүү түрдө Ox, Oy окторунун багыттары боюнча

функциянын өсүү ылдамдыктарын түшүндүрүп, ошол багыттар боюнча алынган туундулар болушат. Эгерде берилген функция дифференцирленүүчү болсо, анда анын октордун багыттары боюнча гана жекече туундуларын жашабастан, туунду алынып жаткан M($x; y$) чекитинен башталуучу каалагандай $\vec{l}$ багыты боюнча да туундусу жашайт. $\vec{l}$ багыты эркин тандалган чекиттен башталган болсо, аны $\mathrm{M}(x;\ y)$ *чекитине параллель которуп келдик деп элестетебиз.*



10.6-чийме

$x\mathrm{O}y$ координаттык тегиздигиндеги ар кандай $\vec{l}$ багыты, анын $\mathrm{O}x$ координаттык огу менен түзгөн α оң бурчу, же $\vec{l}$ багытынын бирдик $\vec{e}_{\vec{l}} = \{\cos\alpha\,, \sin\alpha\}$ вектору менен аныкталары белгилүү. Каралып жаткан $\mathrm{M}(x;\ y)$ чекитинен башталган, $\vec{l}$ менен багытташ жарым түз жүргүзөлү (10.6 – чийме). Бул жарым түздөн

$\mathrm{M}_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ чекитин алып, аны ушул жарым түздү бойлоп M чекитине умтултуп көрөлү. Анда алардын арсындагы аралык да,

$\rho(\mathrm{M}, \mathrm{M}_1) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ нөлгө умтулуп, өз учурунда $\Delta x, \Delta y$ өсүндүлөрү бири – биринен көз карандысыз түрдө, $\begin{cases} \Delta x = \rho\cos\alpha, \\ \Delta y = \rho\sin\alpha \end{cases}$ мыйзамы боюнча нөлгө умтулуп жөнөшөт.

Аргументтин $\vec{l}$ багыты боюнча ρ аралыгына өсүшү менен, функция да үзгүлтүксүз болгондуктан, тиешелүү козголууга же өсүндүгө ээ болот. Аны $\Delta_{\vec{l}}\, u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ деп белгилеп, аны ρ го бөлүп, $\rho \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, $u = f(x,y)$ функциясынын $\vec{l}$ багыты боюнча

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha\,, y+\rho\sin\alpha) - f(x,y)}{\rho} = D_{\vec{l}}\, f(x,y) \quad (10.27)$$

көрүнүшүндөгү туундусун табабыз.

Эгерде $\alpha = 0$ болсо, $\vec{l}$ багыты Оx огу менен багытташ болуп,

$\vec{e}_{\vec{l}} = \vec{e}_x = \{1,\ \ 0\}$ же $\Delta x = \rho$, $\Delta y = 0$ көрүнүштөрүнө келип, (10.27) ден $D_{\vec{l}} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ жекече туундусуна;

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ болсо, $\vec{l}$ багыты Оy огу менен багытташ болуп, $\vec{e}_{\vec{l}} = \vec{e}_y = \{0,\ \ 1\}$, $\Delta x = 0,\ \ \Delta y = \rho$ болуп, $D_{\vec{l}} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \ f'_y$ жекече туундусуна тең болорун көрөбүз.

Ал эми $\alpha = -\pi$ болсо, $\vec{e}_{\vec{l}} = \vec{e}_{-x} = \{-1,\ \ 0\}$ болуп,

$D_{\vec{l}} f(x,y) = D_{-x} f(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ болсо, $\vec{e}_{\vec{l}} = \vec{e}_{-y} = \{0,\ -1\}$ болуп, $D_{\vec{l}} f(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}$ жекече туундулары келип чыгат.

Ошентип жалпы учурда, $\vec{l}$ багыты боюнча функциянын өсүндүсүн

$\Delta_{\vec{l}}\, u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) \ - \ f(x,y) = f'_x\, \Delta x + f'_y\, \Delta y + \varepsilon \cdot \rho =$

$= f'_x \cdot \ \rho \cos\alpha + f'_y \cdot \rho \sin\alpha + \varepsilon \cdot \rho = \rho\left(f'_x \cos\alpha + f'_y \sin\alpha + \varepsilon\right)$ деп жазып, $\vec{l}$ багыты боюнча туундуну

$$D_{\vec{l}} f(x,y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta_{\vec{l}}\, u}{\rho} = \ f'_x \cos\alpha + f'_y \sin\alpha \qquad (10.28)$$

эсептөө эрежесин табабыз.

Ал эми $\vec{l}$ багыты R^3 мейкиндигинде берилип, $u = f(x,y,t)$ функциясынан ушул багыт боюнча туунду алуу керек болсо, анда ал

$$D_{\vec{l}} f(x,y,t) = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta + f'_t \cos\gamma \qquad (10.29)$$

көрүнүшүндө эсептелет. Мында $\alpha = 0x\hat{}\vec{l},\ \beta = Oy\hat{}\vec{l}\,,\ \gamma = Ou\hat{}\vec{l}$ координаттык октор менен $\vec{l}$ багытынын арасындагы бурчтар,

$\vec{e}_{\vec{l}} = \{\cos\alpha\,; \cos\beta; \cos\gamma\}$ вектору $0xyu -$ координаталар системасындагы $\vec{l}$ багытынын бирдик вектору.

Функциянын градиентин пайдаланып, $\vec{l}$ багыты боюнча $u = f(x, y, t)$ функциясынын туундусун $\operatorname{grad} f$ жана $\vec{e}_{\vec{l}}$ бирдик векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү катарында эстеп калууга болот

$$D_{\vec{l}} f(x, y, t) = (\operatorname{grad} f,\ \vec{e}_{\vec{l}}) = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta + f'_t \cos\gamma\ . \quad (10.30)$$

$\nabla -$ “Гамильтондун оператору” деп аталып, “набла” деп окулган

$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ көрүнүшүндөгү оператор болуп (10.3 - Аныктама), f ке таасир эткенде же көбөйтүлгөндө $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$ градиенти келип чыгат. R^2 мейкиндигинде берилген $f(x, y)$ функциясынын градиенти xOy координаталар системасынын $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ орттору боюнча ажыратылып жазылган $\nabla f \equiv \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{\jmath}$ вектор болот.

Демек, $f(x, y, t)$ функциясынын $uOxy$ координаталар системасынын $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ орттору менен ажыратып жазылган градиенти

$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \vec{k}$ көрүнүшүндөгү вектор болуп, ал функциянын кайсыл багыт боюнча ыкчам өсүүсүн же ыкчам кемүүсүн аныктоочу аппарат болуп эсептелет. Эгерде градиенттин проекциясы салыштырмалуу чоңураак оң сан болсо, анда $\vec{l}$ багыты менен градиент багытташ болуп, градиенттин модулу $|\nabla f|$ саны функциянын ыкчам өсүү багытындагы ылдамдыкты көрсөтөт. Ал эми градиенттин проекциясы терс сан болгону менен, анын абсалюттук чоңдугу салыштырмалуу чоңураак оң сан болсо, анда $\vec{l}$ багыты градиентке карама - каршы багытталып, градиенттин модулу функциянын тезирээк кемүү багытындагы ылдамдыгын билдирет. Ошентип функциянын градиенти эсептелип жаткан чекиттен башталган бардык багыттарга карай, ушул функция менен моделдешкен кыймылдардын ылдамдыктарынын эң чоңунан кичинесине чейин табуу мүмкүнчүлүгүн берет.

Градиентке геометриялык жактан түшүндүрмө берели. R^2 тегиздигиндеги $(x; y)$ чекитинин $u = f(x, y)$ скалярдык функциясын карайлы. Анын скалярдык талаасын c – сандарынын көптүгү менен аныкталган, $f(x, y) = c$ деңгээл сызыктарынын тобу деп ойлойлу. Анда

бул скалярдык талаада жайгашкан каалагандай P чекити боюнча өткөн деңгээл сызыгынын багыты боюнча $f(x,y)$ функциясынан алынган туунду, же градиенттин P чекитинен өткөн деңгээл сызыгына жүргүзүлгөн жаныма түздөгү проекциясы нөлгө барабар болот. Анткени $D_{\vec{c}}\, f(x,y) = (\mathrm{grad}\, f, \vec{e}_{\vec{c}}\,) =$

$= (f(\mathrm{P}))'_x \cos\alpha + (f(\mathrm{P}))'_y \sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = 0$. Мында $f(\mathrm{P}) = \mathrm{c}$ турактуу сан. Ошондуктан скалярдык көбөйтүндүлөрү

($\mathrm{grad}\, f,\ \vec{e}_{\vec{c}}$) $= 0$ болгон векторлор сыяктуу, скалярдык талаанын каалагандай P чекитиндеги градиент: P чекитинен өткөн деңгээл сызыгына жүргүзүлгөн жаныма түзгө перпендикуляр же нормаль түз менен багытташ (же дал келген) вектор болот деген натыйжага келебиз (P чекитиндеги жанымага перпендикуляр түз, деңгээл сызыгына ушул чекиттеги нормаль болот). Ошондой эле R^3 мейкиндигиндеги $(x;y;t)$ чекитинде скалярдык $u = f(x,y,t)$ функциясы берилсе, анын скалярдык талаасын $f(x,y,t) = \mathrm{c}$ деңгээл сызыктарынын тобу катарында карап, скалярдык талаанын кааагандай P чекитиндеги $f(x,y,t)$ функциясынын градиенти, $f(x,y,t) = \mathrm{c}$ деңгээл бетине P чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздикке перпендикуляр, же анын P чекитиндеги нормаль түзүнө багытташ болгон вектор болорун көрөбүз.

§10.5 Вектордук талаанын дивергенциясы жана ротору

Чекиттин кандай гана дифференцирленүүчү скалярдык функциясы берилбесин, аны дифференцирлөөнү скалярдык функциянын градиенттери (векторлору) түзгөн вектордук талаа катарында мүнөздөдүк. Ушуга окшош эле кандайдыр бир дифференцирлөө процессинин жардамы менен вектордук талаа үчүн, чекиттин скалярдык функциясын түзөлү.

10.4 Аныктама. *G областында* $\{\vec{u}\}$ *векторлор тобу менен түзүлгөн вектордук талаанын,* $(x;y;t)$ *чекитиндеги* $\vec{u} = \vec{u}(x,y,t) = \{u_1;u_2;u_3\}$ *вектор – функциясынын дивергенциясы деп :*

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \qquad (10.31)$$

көрүнүшүндө жазылып, белгиленген скалярдык функцияны айтабыз.

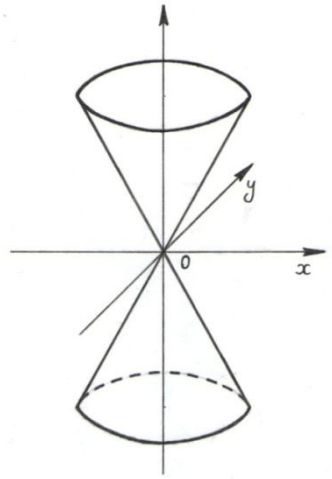
Координаталар системасынын өзгөрүшүнө карап, вектордук талаанын чекиттеринин координаталары $(x; y; t) \to (\xi; \eta; \tau)$ өзгөрүп, ага жараша талаанын векторунун $\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\} \to \{\omega_1; \omega_2; \omega_3\}$ координаталары да өзгөрүп, анын дивергенциясы да

$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau}$ башка көрүнүштө жазылат. Бирок эски жана жаңы (же тескерисинче) координаталар системасынын байланыш формулалары аркылуу

$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \equiv \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau}$ экөөнүн теңдеш экендигин далилдөөгө болот.

10.5 Аныктама. $rot\, \vec{u} = \left\{\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}; \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_3}{\partial x}; \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right\}$ (10.32)

координаталары менен берилген вектор – функциясын, $(x; y; t)$ *чекитиндеги* $\vec{u} = \vec{u}(x, y, t) = \{u_1; u_2; u_3\}$ *вектордук талаанын ротору деп атайбыз.*



10.7-чийме

Ошентип вектордук талаанын ротору вектор болуп, анын координаталары декарттык координаталардын өзгөрүшүнө карап, ар башка болот.

Гамильтондун $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ операторунун жардамы менен $\vec{u}$ векторунун (10.31) дивергенциясын, ∇ жана $\vec{u}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү катарында жазууга болот $\operatorname{div} \vec{u} = (\nabla, \vec{u})$. Ал эми (10.32) роторун бул эки вектордун вектордук көбөйтүндүсү $rot\, \vec{u} = [\nabla, \vec{u}]$ катарында жаза алабыз.

§10.6 Жаныма тегиздик жана бетке түшүрүлгөн нормаль. Толук дифференциалдын геометриялык мааниси

- Айталы $F(x, y, u) = 0$ теңдемеси менен кандайдыр бир S бети берилсин, анда бул бетте жайгашкан $P(x; y; u)$ чекиттерин беттин

кадимкидей жана *өзгөчө* чекиттери деп экиге бөлөбүз.

10.6 Аныктама. *Эгерде S бетинде жайгашкан* $\mathrm{P}(x;y;u)$ *чекитинде* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$ *үзгүлтүксүз жекече туундулары жашап, алардын ичинен жок дегенде бирөөсү нөлдөн айырмалуу болсо, анда аны* S *бетинин* ***кадимкидей*** *чекити деп, ал эми үч* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$ *жекече туундуларынын баары* $\mathrm{M}(x;y;u)$ чекитинде *нөлгө тең болушса, же болбосо жок дегенде бирөөсү жашабай* калса, анда аны S бетинин ***өзгөчө*** *чекити деп айтабыз.*

Мисалы $x^2+y^2-u^2=0$ теңдемеси менен конустук бет берилген (10.7 – чийме). Бул конустук бет бир гана O(0;0;0) өзгөчө чекитине ээ болуп, калган бардык чекиттери кадимкидей чекиттер болушат. Чынында эле конустук беттин теңдемесин $F(x,y,u)=0$ көрүнүшүндөгү айкын эмес функция деп алып, анын жекече туундуларын эсептесек $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial F}{\partial u}=-2u$ келип чыгып, алардын бардыгы O(0;0;0) чекитинде гана нөлгө барабар болоруна ишенебиз.

- R^3 мейкиндигинде $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ u=\eta(t), \end{cases}$ $\alpha<t<\beta$ параметрдик теңдемеси менен берилген L ийрисин карайлы. Айталы, көрсөтүлгөн аралыкта үзгүлтүксүз $\varphi'(t), \psi'(t), \eta'(t)$ туундулары жашап, алардын баары бир убакта нөлгө барабар болуп калбасын дейли

$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\eta'(t))^2\neq 0$, б.а. L ийрисинде өзгөчө чекиттер жок болсун. L ийрисинде параметрдин $t_0\in(\alpha,\beta)$ маанисине туура келген $\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)$ кадимкидей чекити берилсин. Анда L ийрисине P_0 чекитинен жүргүзүлгөн жаныма вектор

$\vec{\tau}=\varphi'(t_0)\cdot\vec{i}+\psi'(t_0)\cdot\vec{j}+\eta'(t_0)\cdot\vec{k}$ же $\vec{\tau}=\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{du}{dt}\cdot\vec{k}$ көрүнүштөрүндө болот ($\frac{dx}{dt}$,$\frac{dy}{dt}$,$\frac{du}{dt}$ – туундулары t_0 чекитинде деп алынган).

- **Бетке жаныма тегиздик жана нормаль.**

Айталы $F(x,y,u)=0$ теңдемеси менен кандайдыр бир S бети берилсин. Анын бетинен бир P кадимкидей чекитин алып, P чекитинен өтүүчү, S бетинде жаткан L ийрисин жүргүзөлү. Бул ийиринин параметрдик

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \ (\alpha<t<\beta) \\ u=\eta(t) \end{cases} \qquad (10.33)$$

теңдемеси берилип, өзгөчө чекиттери жок болсун. Бетке жүргүзүлгөн жаныма түз сызыктын аныктамасы боюнча, P чекитинен L ийрисине жүргүзүлгөн жаныма T_L түзү, S бетине да жаныма түз болот.

(10.33) маанилери беттин теңдемесин $F\big(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\big)\equiv 0$, $t\in(\alpha,\beta)$ канааттандырууга тийиш, анткени ийриде жатат. Бул теңдештикти татаал функция сыяктуу t өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирлеп,

$\frac{\partial F}{\partial t}\equiv\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}=0$ барабардыгына ээ болобуз. Анын сол жагында

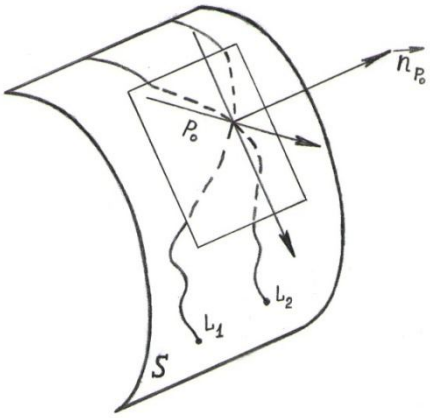
$\vec{n}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\vec{k}$ вектору менен $\vec{\tau}=\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{du}{dt}\cdot\vec{k}$ векторунун скалярдык $(\vec{n},\vec{\tau})$ көбөйтүндүсү турганын көрөбүз. Демек, ал барабардыкты $(\vec{n},\vec{\tau})=0$ деп жаза алабыз. P чекитинде $\vec{\tau}$ вектору L ийрисине ушул чекиттеги жаныма боюнча багытталса, $\vec{n}$ вектору P чекититинин координаталарынан жана $F(x,y,u)$ функциясынын көрүнүшүнөн (жекече туундуларынан) көз каранды болуп, P чекитинен өтүүчү L ийрисинен көз каранды болбойт.

P чекити S бетинин кадимкидей чекити болгондуктан, бул чекитте $F(x,y,u)$ функциясынын жок дегенде бир нөлдөн айырмалуу жекече туундулары жашагандыктан, $\vec{n}$ векторунун узундугу нөлдөн

$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2}\neq 0$ айырмалуу болот. Ошондуктан $(\vec{n},\vec{\tau})=0$ скалярдык көбөйтүндүсүнүн нөлгө барабар болушу, L ийрисине P чекитинен жүргүзүлгөн $\vec{\tau}$ жаныма векторунун, $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр болушу менен түшүндүрүлөт. Мындан S бетине P

чекитинен жүргүзүлгөн бардык жаныма түздөр жаткан тегиздик да $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр болору келип чыгат.

10.7 Аныктама. *S бетинде жайгашкан кадимкидей* P_0 *чекитинен S бетине жүргүзүлгөн бардык жаныма түздөр жаткан тегиздик S бетине* P_0 *чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздик деп, ал эми жаныма тегиздикке* P_0 *чекитинде жүргүзүлгөн* $\vec{n}_{\mathrm{P}}$ *перпендикуляр вектору, S бетине* P_0 *чекитинде жүргүзүлгөн нормалдык вектор деп аталат (10.8 - чийме).* P_0 *чекитинен өтүүчү,* $\vec{n}_{\mathrm{P}}$ *векторуна багытташ түздү, S бетинин нормалы дейбиз.*



10.8-чийме

$F(x,y,u)=0$ теңдемеси мнен берилген S бетинин $\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздикке, ушул чекитте жүргүзүлгөн перпендикуляр вектор же нормалдык вектор координаталары менен

$$\vec{n}_{\mathrm{P}_0}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\vec{k}\Big|_{(x_0;y_0;u_0)}$$ же

$$\vec{n}_{\mathrm{P}_0}=\left\{F'_x(\mathrm{P}_0);F'_y(\mathrm{P}_0);F'_u(\mathrm{P}_0)\right\} \qquad (10.34)$$

көрүнүштөрүндө жазылары жогорудагы талкуулоолордон келип чыгат.

S бетинде берилген $\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)$ чекити аркылуу өтүп, берилген $\vec{n}_{\mathrm{P}_0}$ векторуна перпедикуляр болгон тегиздик катары (III – гл. , §3.2), жаныма тегиздиктин теңдемесин

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)}\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)}\cdot(u-u_0)=0$$

көрүнүшүндө жаза алабыз.

Эгерде S бети айкын түрдөгү $u=f(x,y)$ функциясы менен берилсе, анда аны $F(x,y,u)\equiv f(x,y)-u=0$ көрүнүшүндөгү айкын эмес функция катарында эсептеп, жекече туундуларын табайлы, анда

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u} = (f(x,y) - u)'_u = 0 - 1 = -1$ келип чыгып, $\mathrm{P}_0(x_0; y_0; u_0)$, (Мында $u_0 = f(x_0, y_0)$) чекити аркылуу өткөн S бетине жаныма тегиздиктин теңдемеси

$$u - u_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot (y - y_0) \qquad (10.35)$$

көрүнүшүнө келет.

(10.34) нормалдык векторго багытташ болуп, $\mathrm{P}_0(x_0; y_0; u_0)$ чекитинен өткөн түз катары, S бетине нормаль түздүн теңдемеси (III – гл. , §3.3)

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)}} = \frac{u - u_0}{\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\mathrm{P}_0(x_0;y_0;u_0)}} \qquad (10.36)$$

көрүнүшүндө жазылат. Эгерде S бети айкын $u = f(x, y)$ функциясы менен берилсе, анда $\mathrm{P}_0(x_0; y_0; u_0)$ чекитинен берилген бетке жүргүзүлгөн нормаль түздүн теңдемеси

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)}} = \frac{u - u_0}{-1}, \qquad (10.37)$$

абалына келет (Мында $u_0 = f(x_0, y_0)$) .

Мисалы 1) $F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ айкын эмес көрүнүштөгү теңдемеси менен эллипсоид бети берилсе, анын бетиндеги $\mathrm{P}_0(3; 5; 2)$ чекитинен эллипсоид бетине жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин жана нормаль түздүн теңдемелерин түзөлү. Анын жекече туундуларын $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{9}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{25}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{4}$ таап, $\mathrm{P}_0(3; 5; 2)$ чекитиндеги маанилерин эсептейли :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\mathrm{P}_0(3;5;2)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\mathrm{P}_0(3;5;2)} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{\mathrm{P}_0(3;5;2)} = \frac{4}{4} = 1 .$$

Анда элипсоиддин бетине $\mathrm{P}_0(3; 5; 2)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин теңдемеси

$\frac{2}{3}(x - 3) + \frac{2}{5}(y - 5) + z - 2 = 0$, ал эми нормаль түздүн теңдемеси

$\frac{x-3}{\frac{2}{3}} = \frac{y-5}{\frac{2}{5}} = \frac{z-2}{1} \equiv t$ же $\begin{cases} x = 3 + \frac{2}{3}t\,, \\ y = 5 + \frac{2}{5}t\,, \\ z = 2 + t\,, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$ параметрдик

теңдемеси менен берилет.

2) $z = x^2 + y^2$ $(F(x,y,z) \equiv z - x^2 + y^2 = 0)$ параболидинин чокусу болгон O(0;0;0) чекитинен параболоиддин бетине жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин жана нормаль түздүн теңдемелерин көрсөтөлү. Бул учурда S бети айкын $z = f(x,y)$ функциясы менен берилгендиктен, (10.35), (10.37) формулаларды пайдаланабыз. Жекече туундулардын (0;0) чекитиндеги маанилерин

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} = 2x_0 = 2 \cdot 0 = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} = 2y_0 = 2 \cdot 0 = 0$ таап, (10.35) ден

$z - 0 = 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0)$ же $z = 0 -$ жаныма тегиздиктин (xOy - коородинаттык тегиздиги), ал эми (10.37) ден $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ же $\begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0 \end{cases}$ нормаль түзүнүн (Oz – огунун) теңдемелерин алабыз.

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 16$ параболасына M(1; 1) чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын жана нормалдын теңдемесин түзөлү. Параболанын теңдемеси айкын эмес

$F(x,y) \equiv \sqrt{x} + \sqrt{y} - 16 = 0$ көрүнүшүндө берилди деп ойлоп, берилген чекиттеги F'_x , F'_y жекече туундуларын табабыз

$F'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F'_x(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$; $F'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $F'_y(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.

Тегиздикте жайгашкан $F(x,y) = 0$ ийрисине жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси (R^2 мейкиндигинде жаныма тегиздик болбой түз болот), жаныма тегиздиктин O xy координаттык тегиздиги ($u = 0$) менен кесилиш түзү сыяктуу

$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\mathrm{M}(x_0;y_0)} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\mathrm{M}(x_0;y_0)} \cdot (y - y_0) = 0$ же

$F'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$ көрүнүшүндө жазылып, биздин учурда жаныма түз $\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = 0$ же $x + y = 2$ теңдемесине ээ болот.

(10.36) формуласын пайдаланып, $F(x, y) = 0$ ийрисине М($x_0; y_0$) чекитинде жүргүзүлгөн нормаль түздүн теңдемеси

$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M(x_0;y_0)}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M(x_0;y_0)}}$ же $\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0)}$ же

$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ болорун билип, биздин учурда $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = 0$ же $y = x$ нормаль түзүнүн теңдемесин алабыз.

- **Толук дифференциалдын геометриялык мааниси**

Эгерде жаныма тегиздиктин (10.35) формуласына $x - x_0 = \Delta x$,

$y - y_0 = \Delta y$ белгилөөлөрүн киргизсек, анда ал

$u - u_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta y$ көрүнүшүнө келип, анын оң жагы $u = f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги толук дифференциалын элестетет. Чынында эле $du = u - u_0$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ белгилөөлөрүн киргизип, аны бул функциянын

$du = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$ толук дифференциалы көрүнүшүндө жазууга болот. Мындан эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги Δx, Δy өсүндүлөрүнө тиешелүү болгон толук дифференциалы: аргументтер $M_0(x_0; y_0)$ чекитинен М $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ чекитине которулган кезде, $P_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ чекитинен функциянын графигине (S бетине) жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин, Оu аппликата огу боюнча $u - u_0 = \Delta u = h$ жогорулоо (төмөндөө) бийиктиги болорун көрөбүз.

§10.7 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын жогорку тартиптеги туундулары жана дифференциалдары

10.7.1 Жогорку тартиптеги туундуларды эсептөө эрежелери

Айталы, $u = f(x, y)$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы R^2 тегиздигинин D областындагы бардык $(x; y)$ чекиттеринде

$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y)$ жекече туундулары жашап, алар да эки же андан аз өзгөрүлмөлүү функциялар болушсун. Анда бул жекече туундулар болушкан функциялар да D областынын бардык же айрым чекиттеринде жекече туундуларды эсептөө эрежелерин канааттандырып, жекече туундуларга ээ болушу мүмкүн. Эгерде чынында эле $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ функцияларынан алынган жекече туундулар жашашса, анда алар $u = f(x, y)$ функциясынан алынган **экинчи тартиптеги жекече туундулар** деп аталышат. Бул учурда берилген функциянын экинчи тартиптеги төрт жекече туундулары болушу мүмкүн, анткени $\frac{\partial u}{\partial x}$ жана $\frac{\partial u}{\partial y}$ функциялары да эки өзгөрүлмөлүү функциялар катарында x жана y өзгөрүлмөлөрү боюнча экиден жекче туундулары алынат. Аларды төмөндөгүдөй ырааттуулукта эсептеп :

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, же f''_{xx} , же u_{xx} ; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, же f''_{xy} , же u_{xy} ;

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, же f''_{yx} , же u_{yx} ; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, же f''_{yy} , же u_{yy} (10.38)

көрүнүштөрүндө белгилейбиз. f''_{xy} , f''_{yx} – аралаш туундулар деп аталышып, алар бири - биринен туунду алуу кезектери менен айырмаланып турушат. Биринчисинде оболу x , андан кийин y өзгөрүлмөсү боюнча туунду алынса, экинчисинде оболу y , андан кийин x өзгөрүлмөсү боюнча туунду алынган.

Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүү менен үчүнчү же андан да жогорку тартиптеги жекече туундуларды алууга болот. Мисалы

$u = x^2y^3 + xy$ функциясынын үчүнчү тартиптеги жекче туундуларына чейин эсептейли : 1) $u_x = 2x \cdot y^3 + y$, $u_y = 3x^2y^2 + x$;

2) $u_{xx} = 2y^3$, $u_{xy} = 6xy^2 + 1$, $u_{yx} = 6xy^2 + 1$, $u_{yy} = 6x^2y$;

3) $u_{xxx} = 0$, $u_{xxy} = 6y^2$, $u_{xyx} = 6y^2$, $u_{xyy} = 12xy$, $u_{yxx} = 6y^2$, $u_{yxy} = 12xy$, $u_{yyx} = 12xy$, $u_{yyy} = 6x^2$.

Берилген мисалда экинчи тартиптеги $u_{xy} = 6xy^2 + 1$ жана $u_{yx} = 6xy^2 + 1$ аралаш туундулары барабар экендигине күбө болдук. Бирок мындай теңдештик ар дайым эле орун ала бербейт.

10.4 Теорема (Аралаш туундулардын барабардыгы жөнүндөгү).

Эгерде $u = f(x, y)$ *функциясынын кайсы бир* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинин жакынкы чеке белинде* f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} *жекече жана аралаш туундулары жашашып, экинчи тартиптеги* f''_{xy}, f''_{yx} *аралаш туундулары* M_0 *чекитинде үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинде бул аралаш туундулар*

$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ *барабар болушат.*

Теореманы далилдөөсүз кабыл алып, практикалык эсептөөлөрдө колдонуу менен, чекиттеги аралаш туундулардын барабар болушунун **негизги шарты** – ошол чекитте алардын үзгүлтүксүз функциялар болушу эсептелерин баса белгилеп кетебиз. Мисалы

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{эгерде } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 \quad \text{эгерде} & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

функциясын x боюнча жекече туундусу

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y \cdot \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] & \text{эгерде } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 \quad \text{эгерде} & x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

көрүнүшүндө табылып, $x = 0$ десек (бул жекече туундунун Oy огундагы проекциясы), анда y өзгөрүлмөсүнүнүн каалагандай маанилеринде (анын ичинде $y = 0$ болгондо да) $f'_x(0, y) = -y$ көрүнүшүндөгү функция болорун көрөбүз. Анын экинчи тартиптеги аралаш туундусун $f''_{xy}(0, y) = -1$ эсептеп, O(0;0) чекитинде $f''_{xy}(0,0) = -1$ болорун көрөбүз.

Ушундай эле талкуулоолорду $f'_y(x,y)$ функциясы үчүн жүргүзүп, $y=0$ деп, экинчи тартиптеги аралаш туундусун $f''_{yx}(x,0)=1$ эсептеп, анын O(0;0) чекитиндеги $f''_{yx}(0,0)=1$ маанисин табабыз. Мындан O(0;0) чекитинде экинчи тартиптеги аралаш туундулардын

$f''_{xy}(0,0)=-1\neq f''_{yx}(0,0)=1$ барабар эмес экендигин көрөбүз. Анын себеби, алардын O(0;0) чекитинде үзүлүшкө ээ болгон функциялар болгондугунда экендигине күбө болобуз.

Каралган $u=x^2y^3+xy$ мисалынан көрүнгөндөй, туунду алуу кезектери эрте же кеч келгенине карабай, үчүнчү тартиптеги $u_{xxy}=u_{xyx}=u_{yxx}=6y^2$, $u_{xyy}=u_{yxy}=u_{yyx}=12xy$ аралаш туундуларынын өз ара барабар экендигин жана алардын бардыгынын R^2 тегиздигинде үзгүлтүксүз функциялар экендигин байкайбыз.

Ошентип, жалпы n өзгөрүлмөлүү $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функциясында $m-$ тартиптеги аралаш туундулар ($m\geq 2$), бири – биринен туунду алуу кезектери боюнча гана айырмаланышкан үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда алар барабар маанилерге ээ болот деген жыйынтыкка келебиз.

10.7.2 Жогорку тартиптеги дифференциалдар. Туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги

R^2 тегиздигиндеги xOy декарттык кординаталар системасында берилген D областында $u=f(x,y)$ функциясы аныкталсын (берилсин). Эгерде бул функция D областынын ар бир $(x;y)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын бул чекиттеги дифференциалын

$du=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$ көрүнүшүндө жаза аларыбыз белгилүү. Бул жерде $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ тер $(x;y)$ чекитиндеги эркин козголууну түшүндүргөн өсүндүлөр болгондуктан, аларды x,y өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болбогон жетишерлик кичине турактуу сан катары кабыл алса болот. Ошентип, бир саамга du толук дифференциалын x,y өзгөрүлмөлөрүнөн гана көз каранды функция катары элестетсек, анда кайсы бир шарттарда ал да дифференцирленүүчү функция болуп калышы мүмкүн деген ойго келебиз.

∘10.8 Аныктама. *Эерде* $u = f(x, y)$ *функциясынын толук дифференциалы болгон* $du = df(x, y)$ *функциясы* $(x; y)$ *чекитинде дифференцирленүүчү функция болуп, аны да эки өзгөрүлмөлүү функция сыяктуу ушул чекиттеги толук дифференциалын табуу мүмкүн болсо жана бул процессти аткаруу мезгилинде* $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ *мурдагы калыбында сакталса, анда* $du = df(x, y)$ *функциясынын* $(x; y)$ *чекитиндеги толук диффренциалы,* $u = f(x, y)$ *функциясынын ушул чекиттеги экинчи тартиптеги дифференциалы деп аталып,*

$$d^2u = d\,(du) \qquad (10.39)$$

символу менен белгиленет.

Айталы $u = f(x, y)$ функциясынын D областында биринчи жана экинчи тартиптеги жекече туундулары жашап, алар да ушул областта эки өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Анда берилген функциянын $du = df(x, y)$ толук дифференциалы да дифференцирленүүчү функция болуп, $f(x, y)$ тин (10.39) көрүнүшүндө белгиленген экинчи тартиптеги d^2u дифференциалы жашайт. dx , dy турактуу экендигин эске алып d^2u ну эсептейли:

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\right) =$$

$= d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dy$. Мындагы $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ функцияларынын толук дифференциалдарын өз өзүнчө эсептеп:

$$d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dy \equiv u_{xx}dx + u_{xy}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy \equiv u_{yx}dx + u_{yy}dy$$

эстеп калуу үчүн ар түрдүү белгилениште жазалы. Алардын маанилерин орундарына коюп

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 ,$$ же

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ аралаш туундуларынын (үзгүлтүксүз функциялар) барабар экендигин эске алып, экинчи тартиптеги дифференциалды расмий түрдө

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 \qquad (10.40)$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Мында $(dx)^2 = dx^2$, $(dy)^2 = dy^2$ де жазылышты. (10.40) эрежесин жакшы эстеп калуу үчүн

$d^2u = u_{xx}dx^2 + 2\,u_{xy}dxdy + u_{yy}dy^2$ көрүнүшүндө же $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ белгилөөсүн эки сандардын суммасы сыяктуу элестетип, эки сандын суммасын квадратка көтөрүү формуласын

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}dxdy + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 dy^2$$

көрүнүшүндөгү оператор катарында пайдаланып, бул операторго u функциясын көбөйткөндө (10.40) эрежеси келип чыгат

$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u$ деп элестетсек болот.

$u = f(x, y)$ функциясынын 3 – чү тартиптеги дифференциалы

$$d^3u = d(d^2u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 dx^3 + 3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial y}\, dx^2dy +$$

$$+ 3\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dy^2dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 dy^3$$ же

$$d^3u = u_{xxx}dx^3 + 3\,u_{xx}u_y dx^2dy + 3\,u_{yy}u_x dy^2dx + u_{yyy}dy^3$$

формуласы менен эсептелерин текшерип көрүүгө болот. Ушундай процессти улантуу менен, математикалык индукция усулуна таянып, берилген функциянын $n-$ тартиптеги дифференциалын

$$d^nu = d(d^{n-1}u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot u \qquad (10.41)$$

көрүнүшүндө эсептөөчү формулага ээ болобуз. Мында

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(n)}$ деп, n –тартиптеги туунду белгиленет.

Жалпы n өзгөрүлмөлүү $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын $k-$ тартиптеги дифференциалын эсептөөчү формула (10.41) дин жалпыланышы катары эсептелип,

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k \cdot y$$

көрүнүшүндө болот.

∘ **Инварианттулуктун бузулушу.**

Эгерде $u = f(x, y)$ функциясынын аргументтери x, y өзгөрүлмөлөрү да $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ сыяктуу башка ξ, η өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болгон татаал функция болсо, анда жогорку тартиптеги дифференциалдардын (10.41) көрүнүшү сакталбайт же бир өзгөрүлмөлүү татаал функциялардай эле, көп өзгөрүлмөлүү татаал функцияларда да, жогорку тартиптеги дифференциалдардын инварианттуулугу бузулат. Чынында эле бул учурда dx менен dy дифференциалдарын турактуу сандар сыяктуу көбөйтүп, же туундунун сыртына чыгарып сала албайбыз, анткени алар да $dx = d\varphi(\xi, \eta)$, $dy = d\psi(\xi, \eta)$ көрүнүштөрүндөгү эки өзгөрүлмөлүү функциялар болушуп, алардын биринчи тартиптеги дифференциалдары өзүнчө $dx = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta$, $dy = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta$,

ал эми экинчи тартиптеги дифференциалдары өзүнчө (10.40) сыяктуу

$$d(dx) = d^2x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}d\xi^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}d\xi d\eta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}d\eta^2,$$

$$d(dy) = d^2y = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}d\xi^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}d\xi d\eta + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}d\eta^2$$ көрүнүштөрүндө эсептелишет.

Ошондуктан $u = f(x, y)$ функциясынын биринчи тартиптеги дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta\right) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

көрүнүшүндө жазылып ивариантуулук сакталганы менен, экиден жогорку тартиптердеги дифференциалдарын жазып көрүп

$$d^2u = d\,(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x}d(dx) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}d(dy) = \underbrace{d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}d(dx) + \frac{\partial u}{\partial y}d(dy)} =$$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y$, анын жалпы (10.41) көрүнүшүндө жазылышына экинчи кошулуучу тоскоолдук кыларын көрөбүз.

∘Туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги.

10.9 Аныктама. *Кандайдыр бир X областында*

$(x \in X \subseteq \mathrm{R}^n,\ x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциясынын* $n-$ *тартипеги жана ага чейинки бардык жекече туундулары жашап, алардын бардыгы X областында үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Берилген областта өзүнүн* $n-$ *тартиптеги туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болгон бардык* $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathrm{g}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ... } *сыяктуу функциялардын көптүгүндө, эки функциялардын арасындагы аралыкты ченөөчү*

$$\rho(f, \mathrm{g}) = \max_{1 \le i,j \le n, x \in X} \left\{ |f - \mathrm{g}|, \left|f'_{x_i} - g'_{x_i}\right|, \dots, \left|f^{(n)}_{\underbrace{x_i \dots x_j}_{n\ \text{жолу}}} - \mathrm{g}^{(n)}_{\underbrace{x_i \dots x_j}_{n\ \text{жолу}}}\right| \right\} \qquad (10.42)$$

эрежени же метриканы киргизип, мындай функциялардын көптүгүн (10.42) аралык эрежесине карата метрикалык мейкиндик деп айтабыз. Түзүлгөн метрикалык мейкиндикти X ачык область болсо $\mathrm{C}^n(\mathrm{X})$ *, ал эми туюк область болсо* $\mathrm{C}^n[\mathrm{X}]$ *көрүнүштөрүндө белгилейбиз.*

Киргизилген (10.42) аралыкты ченөө эрежеси метриканын үч аксиомаларын (Гл. I, §1.2) тең канааттандырарын текшерип көрүүгө болот. Ошентип чөйрө таануу процесстеринде (10.42) метриканын жардамы менен, $\mathrm{C}^n(\mathrm{X})$ мейкиндигин элементтери болгон функцияларды сандар сыяктуу практикалык ченөө же баалоо иштеринде колдоно алабыз.

Мисалы, $D = \{(x; y) |\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; (x; y) \in R\}$ төрт бурчтугунда аныкталган $u = x^2 + y^2$, $z = x^2 + y^2 + 4$ функциялары $\mathrm{C}^2[D]$ мейкиндигине таандык болушат. Анткени, бул төрт бурчтуктун чекиттеринде берилген функциялардын өздөрү жана экинчи тартипке чейинки бардык жекече туундулары

$u_x = 2x,\ u_{xx} = 2\ , u_{xy} = u_{yx} = 0, u_y = 2y, u_{yy} = 2;\ z_x = 2x,\ z_{xx} = 2,$ $z_{xy} = z_{yx} = 0,\ z_y = 2y,\ z_{yy} = 2$ үзгүлтүксүз функциялар болушат. Ошондуктан алардын арасындагы аралыкты, бул мейкиндиктеги (10.42) аралыкты ченөө эрежесин пайдаланып,

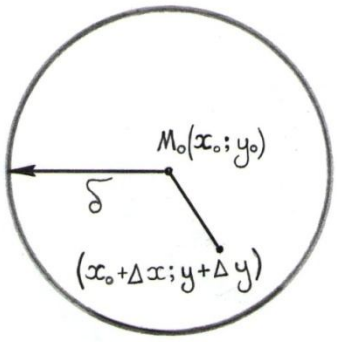
$$\rho(u,z) = \max_{(x;y)\in D}\{|u-z|, |u_x - z_x|, |u_{xy} - z_{xy}|, |u_y - z_y|, |u_{yy} - z_{yy}|\} =$$

$$= max\{4\ , 0, 0, 0, 0\} = 4$$

санына барабар болорун көрөбүз. Каралган мисал өтө жеңил формада (10.42) метрикасын элестетип түшүнүүгө жардам берет. Башка учурларда метриканы табуу үчүн, абсалюттук чоңдук ичиндеги ар бир айырмаларды эки өзгөрүлмөлүү функция катарында карап, алардын максималдык маанилерин аныктап салыштырабыз.

§10.8 Көп өзгөрүлмөлүү функцияларды Тейлордун көп мүчөсүнө ажыратуу

Айталы $M_0(x_0; y_0)$ чекитине жетишерлик жакын $\delta -$ аймактын бардык $(x; y)$ чекиттеринде $u = f(x, y)$ функциясынын $n -$ тартиптеги жана ага чейинки бардык жекече туундулары жашап, үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Ушул аймактын ичинен ($x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y$) чекитин алып (10.9 – чийме), M_0 чекитинен



10.9-чийме

($x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y$) чекитине чейинки аралыкта өзгөргөн $(x; y)$ чекиттерине карата

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y \end{cases} \qquad (10.43)$$

жаңы t өзгөрүлмөсүн киргизип, берилген функцияны $t \in [0,\ 1]$ аралыгында $u = f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = \varphi(t)$

көрүнүшүндөгү бир өзгөрүлмөлүү функция катарында жаза алабыз. Бул учурда u чоңдугун t өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция болорун көрөбүз. Шарт боюнча M_0 чекитинин $\delta -$ аймагында $u = \varphi(t)$ функциясынын $n -$ тартипке чейинки бардык туундулары жашайт, анда аны $t = 0$ чекитинде t нын даражалары (иш жүзүндө $u =$

$f(x,y)$ ти $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде) боюнча Маклерондун (Тейлордун) көп мүчөсүнө ажыратууга болот:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\ \dots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{\varphi^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n\ ,0<\theta<1.$$

Мындан $t=1$ десек,

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ \dots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{\varphi^{(n)}(\theta t)}{n!}\ ,0<\theta<1 \quad (10.44)$$

келип чыгат. $u=f(x,y)$ функциясынын x,y аргументтери (10.43) көрүнүшүндөгү функциялар болгондугуна карабастан ($\Delta x,\Delta y$ өсүндүлөрү өзгөрбөс сан катары эсептелет), турактуу

$dx=\Delta x dt\ ,dy=\Delta y dt$ дифференциалдарына ээ болгондуктан, жогорку тартиптеги дифференциалдарын эсептөөдө инварианттуулук сакталып, (10.41) формуласын пайдалана алабыз. (10.44) теңдештигинин сол жагындагы чоңдукту $f(x,y)$ функциясына карата кайра жазып чыгуу үчүн, анын

$t=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0 \end{cases}$ чекитиндеги $n-$ тартипке чейинки дифференциалдарын эсептеп чыгабыз. (10.41) дин негизинде, $f(x,y)$ тин $\mathrm{p}-$ тартиптеги дифференциалын

$d^{\mathrm{p}}u=d(d^{\mathrm{p}-1}u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y),\ \ 0\le \mathrm{p}\le n$ же

$$d^{\mathrm{p}}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x dt\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y dt\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)\cdot(dt)^{\mathrm{p}},$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Анын эки жагын тең $(dt)^{\mathrm{p}}$ ге бөлүп жиберсек,

$$\frac{d^{\mathrm{p}}u}{dt^{\mathrm{p}}}\equiv\varphi^{(\mathrm{p})}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)$$

келип чыгат ($(dt)^{\mathrm{p}}=dt^{\mathrm{p}}$). Мындан $t=0$ болгондо,

$$\varphi^{(\mathrm{p})}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} \quad (\mathrm{p}=0,1,2,\dots,n-1),\ (10.45)$$

$t=\theta$ болгондо,

$$\varphi^{(n)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}}, \qquad (10.46)$$

$t = 1$ болгондо,

$$\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \qquad (10.47)$$

барабардыктарына ээ болобуз. Бул (10.45), (10.46), (10.47) барабардыктардын жардамы менен туюнтулган $\varphi^{(\text{p})}(0)$, $\varphi^{(n)}(\theta)$, $\varphi(1)$ маанилерин (10.44) кө коюп,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n-1} \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (10.48)$$

эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x,y)$ функциясы үчүн Маклерондун (Тейлордун) формуласы деп аталуучу (10.48) ажыралышына ээ болобуз. Бул ажыралыштагы акыркы кошулуучу

$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}}$ – ажыралыштын n - тартиптеги Лагранж тибиндеги калдык мүчөсү деп аталып, ал чексиз кичине чоңдук болгон учурда гана Тейлордун (10.48) формуласы орун алат дейбиз. Ал эми (10.48) формуласында

$x_0 = y_0 = 0$, $\Delta x = x - x_0 = x$, $\Delta y = y - y_0 = y$ маанилери коюлса, анда аны Маклорендин формуласы деп, Тейлордун формуласынын $M_0(0;0)$ чекитиндеги бир жекече учуру катарында карашат.

(10.48) барабардыгынын оң жагындагы $f(x_0, y_0)$ дү сол жагына өткөрүп, келип чыккан айырманы

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)= \quad \Delta f|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}}$ көрүнүшүндө белгилеп, Тейлордун (10.48) формуласын

$$\Delta f|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = df|_{(x_0;y_0)} + \frac{1}{2!}d^2f|_{(x_0;y_0)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f|_{(x_0;y_0)} +$$

$$+\frac{1}{n!}\, d^n f|_{(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)}\ , \qquad (10.49)$$

кыскартылган көрүнүшкө келтирүүгө болот.

Ошентип Тейлордун (10.49) формуласынын жардамы менен

$u=f(x,y)$ функциясынын $M_0(x_0;y_0)$ чекитиндеги Δf өсүндүсүн жакындаштырып эсептөөгө болот. Анткени координаталар M_0 чекитинен оң же терс багытка (санга) $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ жетишерлик кичине аралыкка гана козголот деп ойлоп, (10.49) теңдештигинде биринчиден башка кошулуучуларды таштап, Δf өсүндүсүн df дифференциалы менен ($df \neq 0$ болсо гана) жакындаштырып теңдештирүүгө

$\Delta f|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} \approx df|_{(x_0;y_0)}$ болот. Эгерде бул жакындаштырып эсептөөдө көбүрөөк каталык кетет деп ойлосок, анда (10.49) теңдештигин оң жагынанТейлордун формуласынын мүчөлөрүн (кошулуучуларды) керегинчелик калтырып, калганын таштоо менен Δf өсүндүсүн керектүү тактыкка чейин эсептей алабыз.

Мисалы Маклорендин формуласы менен $u=e^x\sin y$ функциясын $M_0(0;0)$ чекитинде 3 – тартиптеги калдык мүчөсүнө чейин ажыраткыла.

Чыгаруу: ►Тейлордун (10.48) формуласын пайдаланып, 3 – тартиптеги калдык мүчөсүнө чейинки Тейлордун формуласын жазып алалы

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = u(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)\cdot u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}} =$$

$$= u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2!}\,[\,u_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 +$$

$+2u_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + u_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2] + \frac{1}{3!}[u_{xxx}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^3 +$

$+ 3u_{xxy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2\Delta y + 3u_{yyx}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\Delta x +$

$+ u_{yyy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y^3]$. Мындан $x_0 = y_0 = 0, \Delta x = x, \Delta y = y$ маанилерин коюп,

$u(x,y) = u(0,0) + u_x(0,0)x + u_y(0,0)y + \frac{1}{2!}[u_{xx}(0,0)x^2 +$

$+2u_{xy}(0,0)xy + u_{yy}(0,0)y^2] + \frac{1}{3!}[u_{xxx}(\theta x,\theta y)x^3 +$

$+ 3u_{xxy}(\theta x,\theta y)x^2y + 3u_{xyy}(\theta x,\theta y)y^2x + u_{yyy}(\theta x,\theta y)y^3]$

Маклорендин формуласын алабыз.

Берилген функциянын $M_0(0;0)$ чекитиндеги тиешелүү тартиптердеги аралаш туундуларынын маанилерин эсептейли:

$u(x,y) = e^x \sin y, \qquad u(0,0) = 0;$

$u_x(x,y) = e^x \sin y, \qquad u_x(0,0) = 0;$

$u_y(x,y) = e^x \cos y, \qquad u_y(0,0) = 1;$

$u_{xx}(x,y) = e^x \sin y, \qquad u_{xx}(0,0) = 0;$

$u_{xy}(x,y) = e^x \cos y, \qquad u_{xy}(0,0) = 1;$

$u_{yy}(x,y) = -e^x \sin y, \qquad u_{yy}(0,0) = 0;$

$u_{xxx}(x,y) = e^x \sin y, \qquad u_{xxx}(\theta x,\theta y) = e^{\theta x}\sin\theta y$;

$u_{xxy}(x,y) = e^x \cos y, \qquad u_{xxy}(\theta x,\theta y) = e^{\theta x}\cos\theta y$;

$u_{xyy}(x,y) = -e^x \sin y, \qquad u_{xyy}(\theta x,\theta y) = -e^{\theta x}\sin\theta y$;

$u_{yyy}(x,y) = -e^x \cos y, \qquad u_{yyy}(\theta x,\theta y) = -e^{\theta x}\cos\theta y$.

Табылган маанилерди Маклорендин формуласына койсок, берилген функция M_0 (0;0) чекитинде Маклорендин формуласы боюнча 3 – тартипке чейинки калдыгы менен

$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{6}[e^{\theta x}\sin\theta y \cdot x^3 + 3e^{\theta x}\cos\theta y \cdot x^2y -$

$-3e^{\theta x}\sin\theta y\cdot y^2x\ -e^{\theta x}\cos\theta y\cdot y^3$ - ажыралары келип чыгат. ◄

§10.9 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын экстремумдары

10.9.1 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын экстремумдарын табуу шарттары

Айталы R^2 тегиздигинде жайгашкан D областында аныкталган эки өзгөрүлмөлүү $u=f(x,y)$ функциясы берилип, $M_0(x_0;y_0)$ чекити D областынын ички чекити болсун.

10.10 Аныктама. *Эгерде $M_0(x_0;y_0)$ чекитинин жакынкы $\delta-$ аймакчасын түзүү мүмкүн болуп, аргументтерге бул аймакчанын сыртына чыгып кете албагандай $|\Delta x|<\delta,\ |\Delta y|<\delta$ өсүндүлөрдү берген кезде, функциянын тиешелүү өсүндүсү ар дайым*

$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\le 0$ *терс мааниге ээ болсо, анда $u=f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде локалдык максимумга, ал эми ар дайым* $\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\ge 0$ *оң болсо, локалдык минимумга ээ дейбиз.*

Локалдык дегенибиздин себеби, функциянын максимум (же минумум) мааниси M_0 чекитинин жакынкы $\delta-$ чеке белинде (аймакчасында) жайгашкан гана $(x;y)=(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ чекиттеринде сакталышы мүмкүн. Ошентип, берилген функция D областынын бир же бир канча чекиттеринин кичинекей аймакчасында локалдык максимум (минимум) маанилерди ала бериши мүмкүн. Жалпы учурда мындай чекиттерди функциянын экстремум чекиттери деп атайбыз.

M_0 чекитинин функциянын экстремум чекити болушу үчүн :

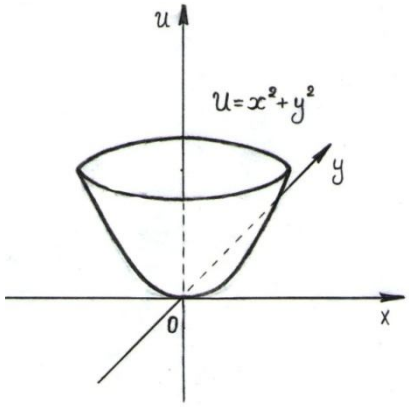
1) $\delta-$ саны табылып, M_0 чекитинин жакынкы $\delta-$ чеке белин (аймакчасын) $\delta_{M_0}=\{M(x;y)\mid \rho(M_0,\mathrm{M})<\delta\ \}$ түзүү мүмкүн экендигин;

2) M_0 чекитинин ушул $\delta_{M_0}-$ аймакчасында жайгашкан бардык $(x;y)$ чекиттеринде $\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ айырмасын белгисисинин турактуу сакталышын ;

көрсөтүү керек экендигин байкайбыз.

Чынында эле, $\forall(x;y) \in \delta_{M_0}$: $\Delta f \leq 0 \Leftrightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ аткарылып, функциянын M_0 чекитиндеги мааниси аймакчадагы калган чекиттердеги маанилерине салыштырмалуу чоң болуп, M_0 локалдык максимум чекити болот. Ал эми

$\forall(x;y) \in \delta_{M_0}$: $\Delta f \geq 0 \Leftrightarrow f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ болсо, функциянын M_0 чекитиндеги мааниси аймакчадагы калган чекиттердеги маанилерге салыштырмалуу кичине болуп, M_0 локалдык минимум чекити болот. Эгерде $\forall(x;y) \in \delta_{M_0}$: $\Delta f < 0 \Leftrightarrow f(x,y) < f(x_0,y_0)$ болсо, анда M_0 чекитин функциянын нагыз максимум чекити, ал эми

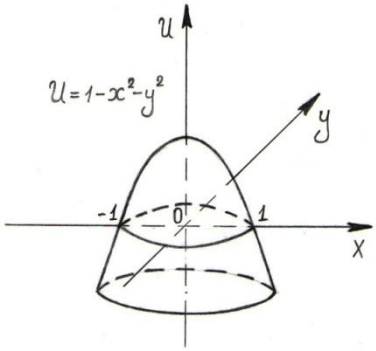


10.10-чийме

$\forall(x;y) \in \delta_{M_0}: \Delta f > 0 \Leftrightarrow f(x,y) > f(x_0,y_0)$ болсо, нагыз минимум чекити деп атап, негизинен нагыз максимум жана минимум чекиттерине гана көңүл бурабыз. Функциянын δ_{M_0} аймагындагы нагыз максимум жана минимум чекиттериндеги маанилери

$$\max_{(x;y)\in\delta_{M_0}} \{f(x,y)\} \text{ жана } \min_{(x;y)\in\delta_{M_0}} \{f(x,y)\}$$

көрүнүштөрүндө белгиленишип, функциянын максимуму жана минимуму деп аталышат. Жалпы учурда аларды функциянын экстремумдары деп коюшат.



10.11-чийме

Мисалдар : 1) $u = x^2 + y^2$ параболоиди жалгыз гана O(0;0) минимум чекитине ээ. Бул учурда минимум чекитине локалдык сөзү кошулбай айтылат, анткени 10.10 – аныктамасы O(0;0) чекитинин кичинекей $\delta -$ аймакчасынын ичинде гана эмес, берилген функциянын бүтүндөй D аныкталуу областында аткарылат (10.10 - чийме). Функциянын минимуму

$$\min_{(x;y)\in D} \{x^2 + y^2\} = 0^2 + 0^2 = 0$$

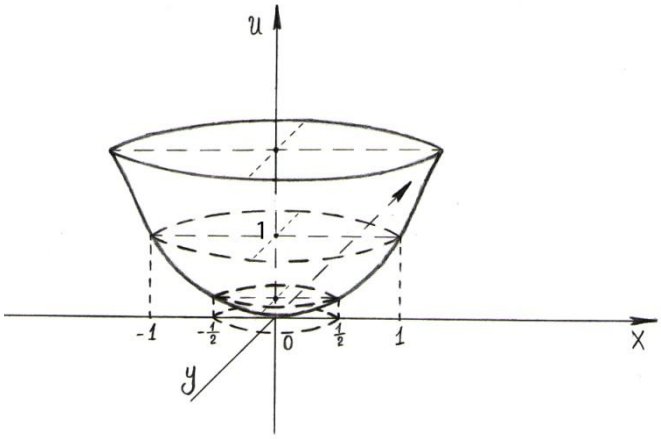
нөл санына барабар.

2) $u = 1 - x^2 - y^2$ функциясы жалгыз гана O(0;0) максимум чекитине ээ экендигин көрөбүз (10.11 – чийме). Функциянын максимуму

$$\max_{(x;y)\in D}\{1 - x^2 - y^2\} = 1 - 0^2 - 0^2 = 1$$

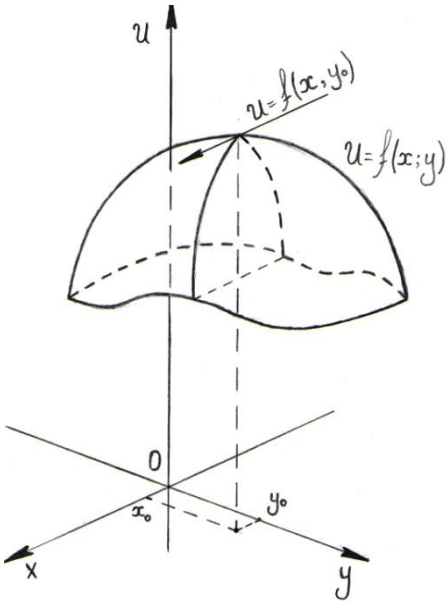
саны болот.

3) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ болсо,} \\ 1\,, & \text{эгерде } x = y = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясы үчүн O(0;0) чекити локалдык максимум чекити болот. Анткени O(0;0) чекитинин $\delta = \frac{1}{2} = 0{,}5$ - аймакчасын түзсөк, бул аймактын ичиндеги бардык $(x;y)$ чекиттери, функциянын O(0;0) чекитиндеги



10.12-чийме

$f(0{,}0) = 1$ маанисинен кичине экендигине күбө болобуз. Бирок, бул $\delta = \frac{1}{2}-$ аймакчанын сыртында жайгашкан чекиттерде функциянын мааниси $f(0{,}0) = 1$ чоңдугунан чоң болуп, максималдык маани айтылган аймактын ичинде гана сакталгандыктан, O(0;0) чекити локалдык максимум чекити гана боло алат. Бул мисалдагы функция, 1) – мисалдагы функциянын O(0;0) чекитинде үзүлүүгө ээ болгон учуру болуп, ал функциянын графиги болгон парболоиддин чокусунан кыркылып үзүлгөн чекит, Ou аппликата огундагы 1 чекитине жылып кеткендиги менен айырмаланат (10.12 – чийме).



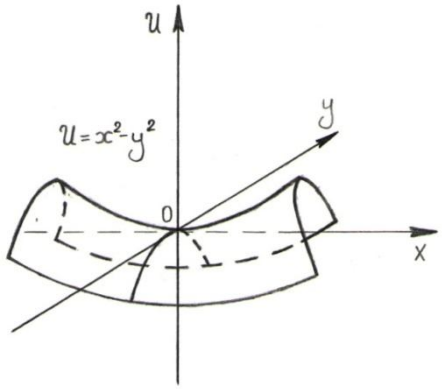
10.13-чийме

Функциянын $\delta_{(0;0)} = \left\{(x;y)|\, x^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$ - аймакчасындагы локалдык минимуму $\min\{f(x,y)\} = f(0,0) = 0$ саны болот.

10.5 Теорема (Экстремумга ээ болуунун зарыл шарты).

Эгерде $u = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде экстремумга ээ болсо, анда анын бул чекиттеги жекече туундулары же нөлгө барабар болушат же таптакыр жашашпайт.

Далилдөө: ►Айталы $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде $u = f(x,y)$ функциясы экстремумга ээ болсун дейли. Убактынча y өзгөрүлмөсүн кыймылын токтотуп, $y = y_0$ болуп турсун дейли, же болбосо аргументтер M_0 чекитинен $y = y_0$ түзүн бойлоп гана өзгөрөт деп эсептейли. Анда бул түздүн чекиттеринде берилген функцияны $u = f(x,y_0)$ көрүнүшүндөгү бир өзгөрүлмөлүү функция катарында кароого болот. Бул бир өзгөрүлмөлүү функция теореманын шарты боюнча $x = x_0$ чекитинде экстремумга (максимумга же минимумга) ээ болгондуктан (10.13 - чийме), анын x ке карата туундусу, бул шектүү чекитте $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} = 0$ нөлгө тең болору же такыр жашабашы келип чыгат. Анткени функциянын $M_0(x_0;y_0)$ чекитиндеги туундусу жалгыз гана болгондуктан, бул чекиттеги $y = y_0$ түзүн бойлоп табылган туунду, башка ар түрдүү багыттар боюнча табылган туундуларга барабар болушу керек. Эгерде алар өз ара барабар эмес болушса, анда функциянын M_0 чекитиндеги туундусу жашабайт болчу.



10.14-чийме

Ушундай эле талкуулоону $x = x_0$ түзүн бойлоп өзгөргөн

$u = f(x_0,y)$ бир өзгөрүлмөлүү

функциясы үчүн жүргүзүп $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} = 0$

болору, же болбосо бул жекече туундунун такыр жашабасына ишенебиз.◄

Далилденген теорема экстремум

чекиттеринин жашашынын зарыл гана шартын көрсөтүп, M_0 чекитинде жекече туундуларынын нөлгө барабар болушу же такыр жашабашы эле, M_0 чекитинин сөзсүз экстремум чекити болушуна толук кепилдик бере албайт. Ошондуктан зарыл шартты канааттандырган чекиттерди, экстремум болууга күмөндүү же шектүү чекиттер (критикалык чекиттер) деп айтабыз. Ал эми жекече туундулары $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ нөлгө айланган шектүү чекиттерди турактуулук (стационардык) чекиттери дейбиз.

Мисалы $u = x^2 - y^2$ функциясынын $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ жекече туундулары O(0;0) чекитинде нөлгө айланганы менен, бул чекит функцияга экстремум чекити боло албайт (10.14 – чийме). Чынында эле O(0;0) чекитинин жакынкы чеке белинде жайгашкан M($x; y$) чекиттеринде Δf өсүндүсү белгисин турактуу сактай албасын көрсөтүүгө болот. O(0;0) чекитине эки багыт боюнча чексиз жакындайлы: 1) $y = 0$ түзүн (Ox – огу) бойлоп M($x; 0$) чекиттери аркылуу келсек,

$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = x^2 - 0^2 - (0^2 - 0^2) = x^2 > 0$ оң белгиде;

2) $x = 0$ түзүн (Oy – огу) бойлоп M(0; y) чекиттери аркылуу жакындасак,

$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0^2 - y^2 - (0^2 - 0^2) = -y^2 < 0$ терс белгиде болуп, экстремум чекит болуунун 2) – шарты аткарылбайт. Ошентип O(0;0) чекити мисалдагы функцияга стационардык гана чекит боло алат.

10.6 Теорема (Экстремумга ээ болуунун жетиштүү шарты).

Айталы $M_0(x_0; y_0)$ чекити, $f(x, y)$ функциясына экстремум чекит болууга шектелген стационардык чекит болсун,

б.а. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Ошондой эле $f(x, y)$ функциясы M_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белиндеги бардык чекиттерде биринчи жана экинчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун. Анда :

1) Эгерде M_0 чекитинде жекече туундулардын маанилеринен түзүлгөн

$$D(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) -$$

$-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 > 0$ *аныктагычынын сандык мааниси оң болсо жана* $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ $\left(f''_{yy}(x_0,y_0) < 0\right)$ *терс болушса, анда* M_0 *чекити* $f(x,y)$ *функциясынын максимум чекити болот;*

2) Эгерде $D(x_0,y_0)$ *аныктагычынын сандык мааниси* $D(x_0,y_0) > 0$ *оң болсо жана* $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ $\left(f''_{yy}(x_0,y_0) > 0\right)$ *оң болушса, анда* M_0 чекити $f(x,y)$ *функциясынын минимум чекити болот.*

3) Эгерде M_0 *чекитинде* $D(x_0,y_0) < 0$ *болсо, анда* $f(x,y)$ *функциясы бул чекитте экстремумга ээ болбойт.*

4)$D(x_0,y_0) = 0$ *болсо, анда* M_0 *чекитинде* $f(x,y)$ *функциясынын экстремумга ээ болушу же болбошу күмөндүү калып, аны тактоо үчүн кошумча изилдөөлөрдү жүргүзүү керек.*

Далилдөө : ► $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде $f(x,y)$ функциясын экинчи тартиптеги калдык мүчөсүнө чейин Тейлордун көп мүчөсүнө ажыраталы :

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2 + \right. \qquad (10.50)$$

$$\left. +2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\right],$$

$0 < \theta < 1.$

Теореманын шарты боюнча $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ болгондуктан, (10.50) теңдештигинен функциянын M_0 чекитиндеги өсүндүсүн

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2 + \right.$$

$+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2]$
көрүнүшүндө жазып, анын белгиси квадраттык кашаанын ичиндеги үч кошулуучулардын суммасынын белгисинен көз каранды болорун байкайбыз. θ көбөйтүүчүсү (параметри) $0 \le \theta \le 1$ аралыгында өзгөргөн кезде, $(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ маанилери M_0 чекитинин жакынкы

$\delta_{M_0} = \{(x;y)|x_0 \le x \le x_0+\Delta x,\ y_0 \le y \le y_0+\Delta y\} -$ чеке белинин же төрт бурчтугунун ичинде жайгашкан бардык $(x;y) \in \delta_{M_0}$ чекиттерин кабыл алат ($|\Delta x|, |\Delta y|$ жетишерлик кичине сандар). Бул төрт бурчтуктун ичиндеги чекиттер $x = x_0+\theta\Delta x$, $y = y_0+\theta\Delta y$ координаталарына ээ болушат. Ошондуктан M_0 чекитинин жакынкы чеке белиндеги чекиттерде функциянын өсүндүсүн

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2\right] = \frac{1}{2!}d^2f,$$

көрүнүшүндө жазып, өсүндүнүн $\delta_{M_0} -$ чеке белиндеги белгиси, экинчи тартиптеги d^2f дифференциалынын белгиси менен аныкталарын сезебиз. Эстөөгө жеңил болсун үчүн

$\mathrm{A} = f''_{xx}(x,y)$, $\mathrm{B} = f''_{xy}(x,y)$, $\mathrm{C} = f''_{yy}(x,y)$ белгилөөлөрүн киргизип,

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\left[\mathrm{A}\cdot\Delta x^2 + 2\,\mathrm{B}\cdot\Delta x\Delta y + \mathrm{C}\cdot\Delta y^2\right],\ (x;y) \in \delta_{M_0}$$

теңдештигин түзөбүз. Демек $\mathrm{A} = f''_{xx}(x,y) \ne 0$ болсо, бул теңдештикти алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\mathrm{A}}\cdot\left[(\mathrm{A}\Delta x + \mathrm{B}\Delta y)^2 + (\mathrm{A}\cdot\mathrm{C} - \mathrm{B}^2)\cdot\Delta y^2\right], \quad (10.51)$$

көрүнүшүнө келтирүүгө болот. Мындан Δf тин белгиси, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C} - \mathrm{B}^2$ менен A нын белгилеринен көз каранды экендиги байкалат. Айталы $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{C} - \mathrm{B}^2 = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 > 0$ оң болсун, анда теореманын шарты боюнча экинчи тартиптеги жекече туундулары үзгүлтүксүз болгондуктан, бул белги $\delta_{M_0} -$ жакынкы чеке белиндеги чекиттерде сакталып, (10.51) теңдештигин оң жагындагы квадраттык кашаанын ичинде жалаң оң сандар тургандыктан, Δf өсүндүсүнүн белгиси $\mathrm{A} = f''_{xx}(x_0,y_0) -$ санынын (же $\mathrm{C} = f''_{yy}(x_0,y_0) -$ санынын)

белгиси менен дал келүүгө тийиш. Анткени $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2>0$ шарты аткарылышы үчүн, A менен C бирдей белгиде болушу керек, болбосо эки кошулуучу тең терс болуп, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2<0$ терс болушу келип чыгат.

Ошентип,

$$D(x_0,y_0)=\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2>$$

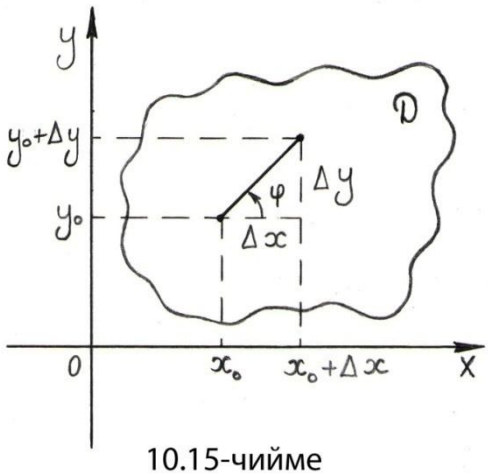
$$>\begin{cases}\mathrm{A}<0\ (\mathrm{C}<0)\text{болсо, } \Delta f\le 0 \text{ же } M_0 \text{ максимум,}\\ \mathrm{A}>0\ (\mathrm{C}>0)\text{болсо, } \Delta f\ge 0 \text{ же } M_0 \textit{ минимум}\end{cases}$$

чекиттери болушуп, теореманын 1), 2) – кортундулары далилденет.

3) – кортундуну далилдөө: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2<0$ болгон учурда Δf өсүндүсүнүн белгиси, $\delta_{M_0}-$ чеке белиндеги чекиттердин $M_0(x_0;y_0)$ чекитине жакындоосу багыттардан көз каранды болуп, турактуу бир белгини сактай алышпайт. Чынында эле $\mathrm{A}\neq 0$ болгон учурда, $\delta_{M_0}-$ төрт бурчтугунун четинде жайгашкан $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ чекитинен $M_0(x_0;y_0)$ чекитине φ бурчу же багыты боюнча жакындап келсек (10.15 – чийме), $\Delta x=\rho\cos\varphi, \Delta y=\rho\sin\varphi$ болгондуктан, (10.51) теңдештигин

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\mathrm{A}}\cdot[(\mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y)^2+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot\Delta y^2]=$$

$=\frac{\rho^2}{2\mathrm{A}}[(\mathrm{A}\cos\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi)^2+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot(\sin\varphi)^2]$ көрүнүшүндө жазып, $\varphi=0$ багыты боюнча M_0 гө жакындаганда $\Delta f=\frac{\rho^2}{2\mathrm{A}}\cdot\mathrm{A}^2=\frac{\mathrm{A}\cdot\rho^2}{2}$ болуп, $\mathrm{A}>0 \Rightarrow \Delta f>0$ болорун көрөбүз. Ал эми φ бурчунун багытын



10.15-чийме

$\mathrm{A}\cos\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi=0\ (\sin\varphi\neq 0)$ шарты аткарыла тургандай $\varphi=\varphi_1$ деп тандасак, анда функциянын өсүндүсү

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2\mathrm{A}}[(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot(\sin\varphi_1)^2]$$

көрүнүшүнө келип, $\mathrm{A}>0$ оң болсо деле $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2<0$ болгондуктан, $\Delta f<0$ терс болуп калат. Демек экстремумга ээ болуунун 2) – шарты аткарылбайт же M_0 чекитинин жакынкы $\delta_{M_0}-$ чеке белинде

Δf өсүндүсү өз белгисин турактуу сактай албайт, анда M_0 чекитинде функция экстремумга ээ болбойт.

4) – кортундуга түшүндүрмө : $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2=0$ болуп калса, (10.51)

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\mathrm{A}}\cdot[(\mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y)^2+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot\Delta y^2]=\frac{1}{2\mathrm{A}}(\mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y)^2$$

көрүнүшүнө келип, Δf өсүндүсүнүн белгиси бир гана $\frac{1}{2\mathrm{A}}$ көбөйтүндүсүндөгү $\mathrm{A}=f''_{xx}(x,y)$, нын белгисинен көз каранды болгону толук ишеничти жарата албай, кошумча тактоону талап кылат. Анткени функциянын жүрүм турумун толук таануу үчүн, экинчи y өзгөрүлмөсүнүн бгыты боюнча өзгөрүүлөрдү да үйрөнүү керек. Ошондуктан Тейлордун формуласынан Δf өсүндүсүнүн белгисин тагыраак аныктоо максатында, чоңураак тартиптеги мүчөлөрдү кошумча киргизүү менен, изилдөөнү улантууга мажбур болобуз. ◄

Мисалдар : 1) $u=x^2+2y^2-2x+4y-6$ функциясынын экстремумдарын изилдейли. Берилген функциянын жекече туундуларын таап: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y+4$, аларды нөлгө теңдештирип, $\begin{cases}2x-2=0\,,\\4y+4=0\end{cases}$ теңдемелер системасын $x=1$, $y=-1$ чечүү менен, $M_0(1;\,-1)$ стационардык чекитин аныктайбыз. Экинчи тартиптеги жекече туундулары $u_{xx}=2,$ $u_{xy}=0,$ $u_{yy}=4$ турактуу сандар болушкандыктан, алардын $M_0(1;\,-1)$ чекитиндеги маанилери өзгөрүүсүз калат

$\mathrm{A}=u_{xx}(1,-1)=2,$ $\mathrm{B}=u_{xy}(1,-1)=0,$ $\mathrm{C}=u_{yy}(1,-1)=4.$ Анда $\mathrm{D}(x_0,y_0)$ аныктагычынын сандык мааниси

$\mathrm{D}(1,-1)=\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2=8>0$ оң сан болуп, $\mathrm{A}=2>0$ $(\mathrm{C}=4>0)$ шарты аткарылып, 10.6 – теорема боюнча $M_0(1;\,-1)$ чекити берилген функциянын минимум чекити болот.

Берилген функцияны алгебралык өзгөртүп түзүү менен

$u=x^2+2y^2-2x+4y-6=(x-1)^2+2(y+1)^2-9$ көрүнүшүнө келтирип, ушул эле натыйжага ээ болуп, $M_0(1;\,-1)$ чекитинин берилген функцияга жалгыз гана минимум чекит

$\underbrace{\min}_{(x,y)\in R^2} \{ x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6 \} = -9$ болорун көрөбүз.

2) $u = 4xy$ функциясынын экстремумдарын изилдейли. Анын жекече туундулары $\frac{\partial u}{\partial x} = 4y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4x$ болуп, $\begin{cases} 4y = 0, \\ 4x = 0 \end{cases}$ теңдемесинен $x = 0$, $y = 0$ чечимдерин таап, берилген функциянын стационардык $M_0(0;\ 0)$ чекитин аныктайбыз. Экинчи тартиптеги жекече туундулары $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4$ турактуу сандар болушкандыктан, алардын $M_0(0;\ 0)$ чекитиндеги маанилери $\mathrm{A} = 0, \mathrm{C} = 0, \mathrm{B} = 4$ өзгөрүүсүз калып,

$\mathrm{D}(x_0, y_0) = 0 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0$ терс болгондуктан, 10.6 – теореманын негизинде берилген функция бул $M_0(0;\ 0)$ шектүү чекитинде экстремумга ээ болбойт деген жыйынтыкка келебиз.

3) $u = x^4 + y^4$ функциясынын экстремумдарын табуу үчүн, жекече туундуларын эсептеп, $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3$, аларды нөлгө теңдөө менен $M_0(0;\ 0)$ стационардык чекитин табабыз. Экинчи тартиптеги жекече туундуларын $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ эсептеп, $M_0(0;\ 0)$ чекитиндеги маанилерин

$$\mathrm{A} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(0;\,0)} = 0;\ \ \mathrm{B} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(0;\,0)} = 0;\ \mathrm{C} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(0;\,0)} = 0$$

табабыз. Бул M_0 шектүү чекитинде

$\mathrm{D}(x_0, y_0) = \mathrm{D}(0,0) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} - \mathrm{B}^2 = 0$ болуп, 10.6 – теорема боюнча, бул чекитте экстремумга ээ болор – болбосу белгисиз калып, кошумча изилдөөнү талап кылат. Ошондуктан берилген функциянын $M_0(0;\ 0)$ чекитиндеги өсүндүсүн $\Delta u(0,0) = u(x, y) - u(0,0) = x^4 + y^4$ көрүнүшүндө жазсак, анда $M_0(0;\ 0)$ чекитинин жакынкы чеке белинде гана эмес, функциянын R^2 аныкталуу областындагы M_0 дөн башка бардык $(x; y)$ чекиттеринде $\Delta u = x^4 + y^4 > 0$ шарты аткарылып, 10.10 – аныктамасынын негизинде $M_0(0;\ 0)$ минимум чекити болорун көрөбүз. Чынында эле берилген функция чокусу $M_0(0;\ 0)$ чекитинде болгон, бутактары жогору караган параболоид болуп, аныкталуу областында жалгыз гана минимум чекитине ээ болот, б.а. функциянын

ушул чекиттеги маанисинен кичине башка маанилери жок болгондуктан, аны абсолюттук минимум чекити дейбиз.

Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүп, чокусу $M_0(0;\ 0)$ чекитинде жайгашып, бутагы төмөн караган $u = -x^4 - y^4$ параболоидинде да

$\mathrm{D}(0,0) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} - \mathrm{B}^2 = 0$ болгонуна карабастан, M_0 чекитинен башка бардык $(x; y)$ чекиттеринде функциянын өсүндүсү

$\Delta u(0,0) = u(x,y) - u(0,0) = -x^4 - y^4 < 0$ терс болгондуктан, 10.10 – аныктамасын негизинде $M_0(0;\ 0)$ чекитин анын абсолюттук максимум чекити дейбиз.

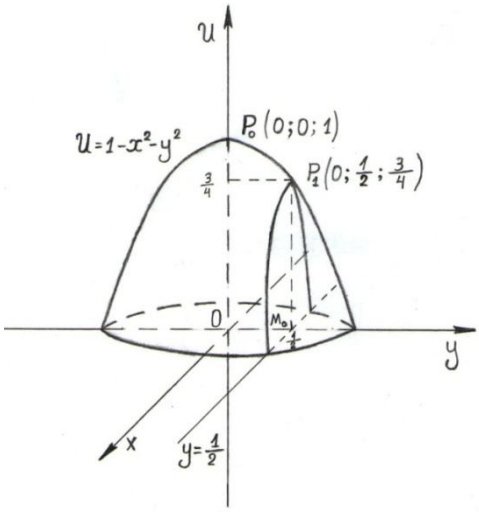
Жалпы n өзгөрүлмөлүү $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын бардык өзгөрүлмөлөрү боюнча жекече туундулары $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинде $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ нөлгө барабар болушса, анда аны берилген функциянын стационардык чекити деп атайбыз. Ал эми экстремумга ээ болуунун жетишерлик шартын баяндаган 10.6 – теореманы төмөндөгүдөй жалпылоого болот.

10.7 Теорема. *Айталы $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы стационардык $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинин жакынкы чеке белинде аныкталган жана экинчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун, анда берилген функциянын M_0 чекитиндеги экинчи тартиптеги дифференциалын мүнөздөгөн*

$$D(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{I,J=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_I \partial x_j}\right|_{M_0} dx_i\, dx_j \qquad (10.52)$$

квадраттык формасы оң сан болсо, анда M_0 чекити $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясына минимум чекит, ал эми (10.52) квадраттык формасы терс сан болсо, максимум чекити болот. Эгерде (10.52) квадраттык формасынын M_0 чекитиндеги белгиси өзгөрүлмө болсо (M_0 чекитине жакындоо багыттарына жараша ар кандай белгилерге ээ болсо), анда M_0 чекити экстремум чекит боло албайт.

Баяндалган теореманы далилдөөсүз кабыл алып, практикалык эсептөөлөрдө колдоно беребиз.



10.16-чийме

10.9.2 Шарттуу экстремумдар

$u = f(x, y)$ функциясынын каралган экстремум чекиттерин аныктоодо, анын аргументтерине эч кандай шарт коюлбагандыктан, ал экстремумдарды шартсыз экстремумдар дейбиз. Бирок, көбүнчө функциянын аргументтерине шарттар коюлган кездеги экстремумдарды издөөгө туура келет.

Айталы D областында аныкталган $u = f(x, y)$ функциясы берилип, анын D областында жайгашкан L ийрисинде жатуучу чекиттердеги экстремумдарын табуу талап кылынсын. Мындай экстремумдар функциянын L ийрисиндеги шарттуу экстремумдары деп аталышат.

10.11 Аныктама. *L ийрисиндеги $M_0(x_0; y_0)$ чекити менен кошо, анын жакынкы чеке белиндеги L ийрисинин* $\mathrm{M}(x; y)$ *чекиттеринде да* $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$ *барабарсыздыгы аткарылса, анда $M_0(x_0; y_0)$ чекитин $u = f(x, y)$ функциясынын шарттуу максимум (минимум) чекити деп айтабыз.*

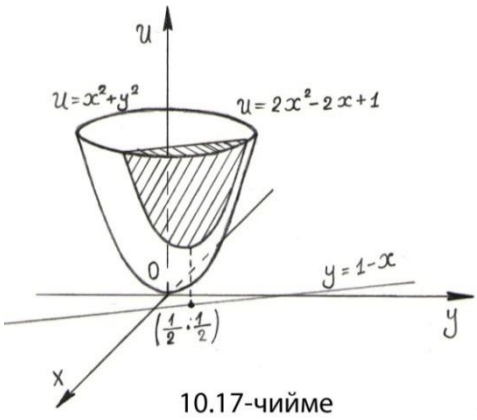
Ошентип D областында L ийриси $\varphi(x, y) = 0$ теңдемеси менен берилсе, анда шарттуу экстремумдарды табуу маселеси: « $u = f(x, y)$ *функциясынын* $\varphi(x, y) = 0$ *шартын канааттандыруучу экстремумдарын тапкыла* » – көрүнүшүндө берилип, (x, y) аргументтерин көз каранды эмес өзгөрүлмөлөр дебестен, бири - бири менен $\varphi(x, y) = 0$ *байланыш теңдемеси* аркылуу көз карандылык байланышында турган өзгөрүлмөлөр катарында мамиле жасайбыз.

Мисалы $u = 1 - x^2 - y^2$ функциясына $(0; 0)$ чекити абсолюттук максимум

$\underbrace{\max}_{(x,y)\in R^2} \{1 - x^2 - y^2\} = 1 - 0^2 - 0^2 = 1$ чекити болот (параболоиддин чокусу P(0;0;1) чекити). Ал эми $\varphi(x, y) \equiv y = \frac{1}{2}$ байланыш теңдемеси менен берилген L түзүндөгү шарттуу экстремум (максимум) чекити $M_0(0; \frac{1}{2})$ болот (10.16 – чийме). Чынында эле параболоиддин $y = \frac{1}{2}$ тегиздиги менен кесилиши

$u = 1 - x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - x^2$ параболасы болуп, анын чокусу $P_1\left(0; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ чекитинде жайгашат жана шарттуу экстремум

$\underbrace{\max}_{x\in R} \left\{\frac{3}{4} - x^2\right\} = \frac{3}{4} - -0^2 = \frac{3}{4}$ көрүнүшүндө аныкталат.



10.17-чийме

∘ Шартту экстремумду аныктоонун бир жөнөкөй усулун көрсөтөлү: Айталы $\varphi(x, y) = 0$ байланыш теңдемеси y ке карата бир маанилүү $y = \psi(x)$ көрүнүшүндөгү x өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирленүүчү функция катарында чечилсин, анда табылган маанини берилген эки өзгөрүлмөлүү функцияга коюп, байланыш шартын өзүнө камтыган $u = f(x, y) = f(x, \psi(x)) = F(x)$ бир өзгөрүлмөлүү функциясына ээ болбуз. Натыйжада $u = F(x)$ функциясынын экстремуму, $u = f(x, y)$ функциясынын изделген шарттуу экстремуму болору келип чыгат. Мисалы, $u = x^2 + y^2$ функциясынын $\varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган экстремумун табуу керек болсун. Берилген байланыш теңдемесинен $y = 1 - x$ функциясын аныктап, аны берилген функцияга койсок, бир өзгөрүлмөлүү

$u = u = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = F(x)$ функциясына ээ болобуз. Анын стационардык чекити $F'(x) \equiv 4x - 2 = 0$ шартынан, $x = \frac{1}{2}$ болуп табылат. Стационардык чекиттеги экинчи тартиптеги туундусу $F''(x) = (4x - 2)'|_{x=\frac{1}{2}} = 4 > 0$ оң сан болгондуктан, $x = \frac{1}{2}$

чекити бир өзгөрүлмөлүү $F(x)$ функциясына минимум чекити болот. Ал эми $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ байланышынан аныкталуучу $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ чекити,

$u = x^2 + y^2$ функциясына $x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган шарттуу минимум чекити болот (10.17 – чийме).

- Шарттуу экстремумдарды Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен аныктоого токтололу :

Айталы $M_0(x_0; y_0)$ чекити $u = f(x, y)$ функциясынын $\varphi(x, y) = 0$ байланыш теңдемесин канааттандыруучу шарттуу экстремум чекити болуп, байланыш теңдемесинен x_0 чекитинин жакынкы чеке белинде үзгүлтүксүз туундусу жашаган жалгыз $y = \psi(x)$ функциясы табылсын дейли. $M_0(x_0; y_0)$ чекитинде $(y_0 = \psi(x_0))$ жекече туундулары нөлгө барабар болгондуктан, бул чекитте $u = f(x, y)$ тин биринчи тартиптеги $du = df(x, y) = df(x, \psi(x))$ дифференциалы да нөлгө барабар болушу керек

$$df|_{M_0} = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)\Big|_{M_0} = 0 . \qquad (10.53)$$

$M_0(x_0; y_0)$ чекити $\varphi(x, y) = 0$ байланыш теңдемеси менен берилген L түзүндө жайгашкандыктан, (10.53) теңдештиги $\varphi(x, y) = 0$ үчүн да аткарылат

$$d\varphi|_{M_0} = \left(\varphi'_x dx + \varphi'_y dy\right)\Big|_{M_0} = 0 . \qquad (10.54)$$

(10.54) теңдештигин азырынча белгисиз деп алынган λ санына көбөйтүп, (10.53) теңдештиги менен мүчөлөп кошсок,

$(f'_x + \lambda\varphi'_x)|_{M_0} dx + \left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\Big|_{M_0} dy = 0$ теңдештигине ээ болобуз. Бул теңдештик экстремум M_0 чекитиндеги функциянын жекече туундуларынын нөлгө тең болуу шартын, функциянын жана байланыш функциясынын экөөсүнүн тең дифференциалдарынын M_0 чекитинде нөлгө тең болуу шартына жалпылап, $u = f(x, y)$ функциясынын L түзүндөгү шарттуу экстремумун жашашынын **зарыл шарты** катарында кабыл алынат. Эгерде λ санын $\varphi'_y \neq 0$ болгон учурда

$$\left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\Big|_{M_0} = 0 \qquad (10.55)$$

шартын канааттандыра тургандай тандай алсак, жогорудагы теңдештиктин калган бөлүгүн (dx эркин сан болгондуктан, аны нөлдөн айырмалуу деп)

$$(f'_x + \lambda\varphi'_x)|_{M_0} = 0, \qquad (10.56)$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

Лагранждын функциясы деп аталуучу жардамчы.

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ функциясын түзсөк, (10.55), (10.56) теңдештиктери бул жардамчы функция үчүн, $M_0(x_0; y_0)$ дун шартсыз экстремум чекит болуусунун **зарыл шарты** болуп каларын көрөбүз. Мында λ саны (10.55) теңдештигинен табылуучу коффициент болот. Ошентип жаңыдан түзүлгөн Лагранждын функциясын пайдаланып,

$u = f(x,y)$ функциясынын шарттуу экстремумдарын аныктоонун дагы бир эрежесин киргизебиз.

$u = f(x,y)$ функциясынын $\varphi(x,y) = 0$ байланыш теңдемесин канааттандырган экстремум чекиттерин табуу үчүн :

1) Лагранждын жардамчы $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ функциясын түзөбүз;

2) Лагранждын функциясын жекече туундуларын $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ эсептеп, аларды нөлгө теңдейбиз;

3) Байланыш теңдемесин $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ көрүнүшүндө жазабыз.

Үчөөнү бириктирип

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x,y) = 0, \end{cases} \qquad (10.57)$$

үч λ, x, y белгисиздерине карата үч теңдемелер системасына ээ болобуз. Эгерде бул система чыгарылышка ээ болсо, анда ал чечимдер: $\lambda = \lambda_0$ белгисиз болгон коэффициент, ал эми $x = x_0,\ y = y_0$ түгөйлөрү

$u = f(x, y)$ функциясынын экстремумга шектелген чекиттеринин координаталары болушат.

4) (10.57) теңдемелер системасынан табылган $\lambda = \lambda_0$ санын жана $M_0(x_0; y_0)$ шектүү чекитин эске алып, Лагранждын функциясынын экинчи тартиптеги дифференциалынын $M_0(x_0; y_0)$ шектүү чекитиндеги маанисинин белгисин тактайбыз. Эгерде

$d^2F(x, y)|_{M_0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2|_{M_0} < 0$ болсо, анда Лагранждын $F(x, y)$ функциясына $M_0(x_0; y_0)$ шартсыз максимум чекити, ал эми $u = f(x, y)$ функциясына шарттуу максимум чекити болот. $d^2F(x, y)|_{M_0} > 0$ болсо, анда Лагранждын $F(x, y)$ функциясына $M_0(x_0; y_0)$ шартсыз минимум чекити, ал эми $u = f(x, y)$ функциясына шарттуу минимум чекити болот. Бул жерде $d^2F(x, y)$ экинчи тартиптеги дифференциалын эсептөөдө

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$$

$((dx)^2 + (dy)^2 \neq 0 -$ "dx, dy бир учурда нөл болбойт")

болору эске алынды. Эскерте кетүүчү нерсе, Лагранждын жардамчы функциясы $u = f(x, y)$ функциясына коюлган шартты эске алып түзүлгөн, шарты жок функция болуп эсептелгендиктен, $M_0(x_0; y_0)$ чекитин Лагранждын $F(x, y)$ функциясы үчүн шартсыз максимум (минимум) чекити деп айтабыз.

Лагранждын жогрудагы төрт этаптан турган методу менен

$u = f(x, y)$ функциясынын шарттуу экстремумдарын аныктоодо, 4) – этапта жаңы белгилөөлөрдү $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$ киргизүү менен

$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0) \\ F''_{xy}(x_0, y_0) & F''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$ аныктагычы оң болгон учурда $u = f(x, y)$ функциясы үчүн:

а) $A = F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ $(C = F''_{yy}(x_0, y_0) < 0)$ болсо, $M_0(x_0; y_0)$ шарттуу максимум чекити;

б) $A = F''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ $(C = F''_{yy}(x_0, y_0) > 0)$ болсо, $M_0(x_0; y_0)$ шарттуу минимум чекити болот дейбиз.

Мисал катары мурда келтирилген $u = x^2 + y^2$ функциясынын $\varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган экстремумун кайра Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен көрсөтөлү:

1) Лагранждын функциясын

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 1)$ түзөбүз.

2) $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынан $\lambda = -1,\ x = y = \frac{1}{2}$

чечимдерин таап, экстремумга ээ болууга шектелген чекит $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ болорун көрөбүз. Лагранждын функциясына $\lambda = -1$ маанисин коюп, $F(x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ ээ болобуз. Анын экинчи тартиптеги жекече туундулары $F''_{xx} = 2,\ F''_{xy} = 0,\ F''_{yy} = 2$ турактуу сандар болгондуктан, алардын $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ чекитиндеги маанилери да ошол эле бойдон калышып,

$A = F''_{xx}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 2$, $B = F''_{xy}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0$, $C = F''_{yy}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 2$, аныктагычтын белгиси $D(x_0, y_0) = AC - B^2 = 4 > 0$ оң сан болорун көрөбүз. $A = 2 > 0$ $(C = 2 > 0)$ болуп, б) – учуру аткарылгандыктан, $u = x^2 + y^2$ функциясынын $x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган шарттуу минимум чекити $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ болору келип чыгат.

Бирок Лагранждын $F(x, y)$ функциясынын шартсыз экстремумдары табылбай калса эле, $u = f(x, y)$ функциясынын $\varphi(x, y) = 0$ байланыш теңдемесин канааттандырган шарттуу экстремумдары табылбайт, же жок деп эсептөө туура эмес.

Мисалы $u = xy$ функциясын $\varphi(x, y) \equiv y - x = 0$ шартын канааттандырган экстремум чекиттерин Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен издеп көрөлү.

1) Лагранждын функциясын түзөлү

$F(x, y) = xy + \lambda(y - x)$;

2) $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv y - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ y - x = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынан

$x = y = \lambda = 0$ чечимдерин тапсак, жардамчы Лагранждын функциясы

$F(x, y, \lambda) = xy$ көрүнүшүндө болуп, экинчи тартиптеги туундулары $M_0(0; 0)$ чекитинде: $A = F''_{xx} = 0$, $B = F''_{xy} = 1$, $C = F''_{yy} = 0$ маанилерине ээ болуп, $D(0,0) = AC - B^2 = -1 < 0$ терс болгондуктан, $F(x, y)$ эки өзгөрүлмөлүү функциясынын экстремумдарынын жашашы үчүн жетиштүү шарттын (10.6 – теорема, 3) – бүтүм) негизинде $M_0(0; 0)$ чекитинде экстремумга ээ болбойт. Бирок $u = xy$ функциясы $y - x = 0$ же $y = x$ түзүндө (L ийрисинде), $u = x^2$ функциясына айланып, чокусу $M_0(0; 0)$ чекитинде болгон парабола катарында, ушул түздө жайгашкан $M_0(0; 0)$ чекитинде шарттуу экстремумга(минимумга) ээ болорун көрөбүз.

Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен жалпы n өзгөрүлмөлүү

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (m < n) \qquad (10.58)$$

байланыш теңдемесин канааттандыруучу шартуу экстремумун табуу үчүн :

1) Лагранждын жардамчы

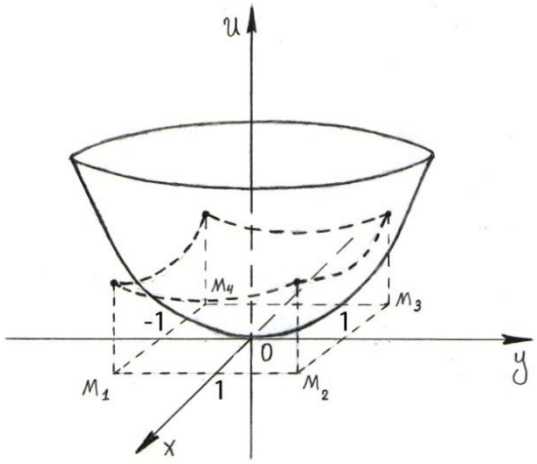
$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) +$

$+\lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын түзөбүз. Мында $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m -$ аныктала элек белгисиз коэффициенттер (сандар).

2) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын жекече туундуларын нөлгө теңдештирген жана (10.58) шарттарын камтыган $x_1, x_2, \dots, x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m$, бардыгы болуп $m + n$ белгисиздүү, $m + n$ теңдемелер системасын түзөбүз. Түзүлгөн теңдемелер системасы биргелешкен болсо, анын чечимдери : $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m -$ коэфициенттери жана экстремумга шектелген чекиттин $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ координаталары болушат. Аныкталган шектелген чекиттин берилген $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияга шарттуу экстремум (максимум же минимум) болор же болбосу, Лагранждын жардамчы функциясына (10.52) эрежесин колдонуу менен, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын шартсыз экстремум чекитин аныктоо менен ишке ашырылат, б.а. M_0 чекити Лагранждын функциясына шартсыз экстремум чекити болсо, анда $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясына шарттуу экстремум чекити болот. Айрым учурларда функциянын физикалык абалдарды чагылдыруу жана геометриялык сүрөттөлүштөрү боюнча алынган мүнөздөөчү - маалыматтарга таянып, шарттуу экстремумдарын аныкташат.

10.9.3 Көп өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялардын эң чоң жана эң кичине маанилери

Кандайдыр бир туюк жана чектелген $\overline{D}$ областында үзгүлтүксүз болгон $u = f(x, y)$ функциясынын эң чоң $\left(\sup\limits_{(x;y)\in\overline{D}} \{f(x, y)\}\right)$ жана эң кичине $\left(\inf\limits_{(x;y)\in\overline{D}} \{f(x, y)\}\right)$ маанилерин табуу талап кылынсын дейли. Үзгүлтүксүз функциялардын касиеттеринин бирин баяндаган Вейерштрасстын теоремасы боюнча, бул функция $\overline{D}$ областынын чекиттеринде өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерин кабыл алышы керек. Эгерде функция $\overline{D}$ областында



10.18-чийме

эң чоң (эң кичине) маанисине ички чекиттердин бири болгон $M_0(x_0; y_0)$ чекитинде жетсе, анда $M_0(x_0; y_0)$ чекити $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы $u = f(x, y)$ функциясынын экстремум (максимум же минимум) чекиттеринин бири болорун көрөбүз. Ал эми $M_0(x_0; y_0)$ чекити $\overline{\mathrm{D}}$ областынын чек арасында жайгашып калса, анда бул чекит $u = f(x, y)$ функциясынын чек арада жайгашкан деген шартты канааттандырган чекиттердеги эң чоң (эң кичине) маанилеринин бири болушу мүмкүн. Ошентип

$u = f(x, y)$ функциясынын $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы эң чоң (эң кичине) маанилерин табуу үчүн:

1) $u = f(x, y)$ функциясынын экстремумга шектелген же

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасын канааттандырган чекиттерди табабыз.

2) Табылган шектүү чекиттердеги функциянын маанилерин эсептейбиз жана чек ара чекиттериндеги функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табабыз.

Аларды салыштырып : эң чоңун $u = f(x, y)$ функциясынын $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы эң чоң мааниси, ал эми эң кичинесин $u = f(x, y)$ функциясынын $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы эң кичине мааниси дейбиз.

Мисалы, $u = x^2 + y^2$ функциясынын

$\overline{\mathrm{D}} = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ областындагы эң чоң жана эң кичине маанилерин табалы (10.18 – чийме).

1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 2y = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынан $M_0(0; 0)$ шектүү чекити табылат.

2) $u(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0 -$ шектүү чекитиндеги мааниси функцияга абсолюттук минимум экенин билебиз;

3) $\overline{\mathrm{D}}$ төрт бурчтугунун төрт жагы тең чек арасы болгондуктан, ар бир жагындагы функциянын шарттуу экстремумдарын жана тиешелүү жактардын учтарындагы функциянын маанилерин эсептейли:

$\Gamma_1 = \{x = 1,\ -1 \le y \le 1\}$ – жагындагы чек арадагы чекиттерде $u = x^2 + y^2$ функциясы, $u = 1 + y^2$ бир өзгөрүлмөлүү функциясына айланып,

$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 2y = 0$ шартынан, $y = 0$ шектүү чекитине ээ болот,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0$ оң болгондуктан, бул чекитте $u = 1 + y^2$ функциясы $u_{min.} = 1 + 0^2 = 1$ маанисине ээ болот. Ал эми Γ_1 жагынын $\mathrm{M}_1(1; -1)$, $\mathrm{M}_2(1; 1)$ учтарында болсо,

$u(1; -1) = (-1)^2 + 1^2 = u(1; 1) = 1^2 + 1^2 = 2$ маанисин алат ;

$\Gamma_2 = \{y = 1,\ \ -1 \le x \le 1\} -$ жагындагы чек ара чекиттеринде

$u_{min.} = (x^2 + 1)_{min.} = 1$, учтарында $u(\mathrm{M}_2) = u(\mathrm{M}_3) = 2$;

$\Gamma_3 = \{x = -1,\ \ -1 \le y \le 1\} -$ жагында $u_{min.} = (1 + y^2)_{min.} = 1$, учтарында $u(\mathrm{M}_3) = u(\mathrm{M}_4) = 2$;

$\Gamma_4 = \{y = -1,\ -1 \le x \le 1\} -$ жагындагы чек ара чекиттеринде

$u_{min.} = (x^2 + 1)_{min.} = 1$, учтарында $u(\mathrm{M}_4) = u(\mathrm{M}_1) = 2$;

$u = x^2 + y^2$ функциясынын абсолюттук минимумун, төрт бурчтуктун жактарындагы же чек ара сызыктарындагы шарттуу минимумдарын, жактардын учтарындагы же төрт бурчтуктун чокуларындагы маанилерин салыштырып көрүп, функция эң чоң маанилерге $\overline{\mathrm{D}} -$ төрт бурчтугунун төрт чокусундагы

$\sup\limits_{(x;y)\in\overline{\mathrm{D}}} \{x^2 + y^2\} = max\{u(\mathrm{M}_1), u(\mathrm{M}_2), u(\mathrm{M}_3), u(\mathrm{M}_4)\} = 2$ чек ара чекиттеринде, ал эми эң кичине маанисине

$\inf\limits_{(x;y)\in\overline{\mathrm{D}}} \{x^2 + y^2\} = 0^2 + 0^2 = 0$, $\overline{\mathrm{D}} -$ төрт бурчтугунун ички O(0; 0) чекитинде жетерине күбө болобуз.

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999, - 88 с.

2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.

3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1- 2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.

4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп»,1971, - 120 б.

5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989, - 9,75 п.л.

6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007, - 230 б.

7. Усубакунов Р. Дифференциальдык жана интегралдык эсептөөлөр. 1 – 2 – бөлүктөр. – Фрунзе:

8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для втузов. – Москва: «Наука», 1981, - 464 с.

9. Зельдович Я.Б. Высшая математике для начинающих. – Москва: «Наука», 1970, - 560 с.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968, - 497 с.

11. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1-2. – Москва: «УРСС», 2002, - 328 б.

12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука»,

1974, - 450 с.

13. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш.. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990, - 100 с.

14. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым талаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3, - с. 80-81.

15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3, - с. 161-163.

16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1, - с. 74-77.

17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшТУ», 2008, - с. 188-192.

18. Аттокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008, - 94 б.