ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома в случае, когда размерности больше одного, но меньше двух, методом структурного сращивания

Алымкулов Келдибай, д-р.физ.-мат.наук, профессор
(Кыргызстан, г. Ош)
Омуралиев Марсбек Кенешалиевич, ст.преп.
(Кыргызстан, г. Бишкек)

Аннотация. *Методом структурного сращивания строится асимптотика решения модельной обобщенной задачи Лагерстрома, в случае нецелой размерности пространства.*

Ключевые слова: *сингулярно возмущенное обобщенное уравнение Лагерстрома, внешнее и внутреннее решения, метод структурного сращивания, асимптотика решения.*

1. Введение.

Рассматривается обобщенная задача Лагерстрома

$$y''(x)+(\alpha x^{-1}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2,\ y\ (1)=1,\ y(\infty)=0 \quad (1)$$

где $0<\varepsilon<<1-$ малый параметр, $0<\beta$ $-$ постоянная, $1<\alpha<2$, $x\in[1,\infty)$ $-$ независимая переменная, $y(x)$ $-$ неизвестная функция.

Здесь методом структурного сращивания [2] строится равномерная асимптотика решения этой задачи.

Отметим, что асимптотика решения уравнения (1) при $\beta=0$, т.е.

$$y''(x)+(\alpha x^{-1}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=0,\ \ y\ (1)=1,\ y(\infty)=0 \quad (1^*)$$

построено в [3] методом структурного сращивания. Историю этой задачи и литературу по этой проблеме можно найти в [2].

2. Структура внешнего решения

Определение 1. Переменную x назовем внешней переменной.

Определение 2. Внешним решением задачи (1), назовем решение этой задачи, которое удовлетворяет условию $y(1)=1, y'(1)=a$, где $a=const$ $-$ пока не определена и существует на конечном, но на большом отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$.

Внешнее решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y\ (1)=1$

ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \quad (2)$$

где $y_i(x)$ $-$ пока неопределенная функция на отрезке $J(\varepsilon)$, при чем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$y_0(1)=1,\ y_0'(1)=a$, $y_k(1)=0,\ y_k'(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots)$.

Тогда имеем:

$$y_0''(x)+\frac{\alpha}{x}y_0'(x)-\beta[y_0'(x)]^2=0,\ \ y_0(1)=0,\quad y_0'(1)=a \quad (3.0)$$

$$Ly_1:=y_1''(x)+\frac{\alpha}{x}y_1'-2\beta y_0'(x)y_1'(x)=-y_0'(x)+y_0y_0'(x), \quad (3.1)$$

$$Ly_2=-y_1'+\beta y_1^2+y_0y_1'+y_1y_0',\quad y_2(1)=y_2'(1)=0, \quad (3.2)$$

$$Ly_3=-y_2'+2\beta y_1'y_2'+y_0y_2'+y_1y_1'+y_2y_0',\quad y_3(1)=y_3'(1)=0, \quad (3.3)$$

$$Ly_4=-y_3'+2\beta y_2'^2+2\beta y_1'y_3'+\sum_{i+j=3}y_iy_1',\quad y_4(1)=y_4'(1)=0, \quad (3.4)$$

$$Ly_5=-y_4'+2\beta y_1'y_4'+2\beta y_2'y_3'+\sum_{i+j=4}y_iy_j',\ \ y_5(1)=y_5'=0, \quad (3.5)$$

$$Ly_6=-y_5'+\beta y_3^2+2y_1'y_5'+2y_2'y_4'+\sum_{i+l=5}y_iy'_j,\ \ y_6(1)=y_6'(1)=0, \quad (3.6)$$

Копия верна
Ученый секретарь ИСРиП
Шейшенова Ш.

$$Ly_{2m} = -y_{2m-1}{}' + \beta y_m{}^2 + \sum_{\substack{i+j=6\\ i,j\ge 1\\ i\ne j}} y_i' y_j' + \sum_{i+j=2m-1} y_i y_j',\ y_{2m}(1) = y_{2m}{}'(1) = 0$$

$$Ly_{2m+1} = -y_{2m}{}' + \sum_{\substack{i+j=2m+1\\ i,j\ge 1}} y_i'(x) y_j'(x) + \sum_{i+j=2m} y_i y_j'(x),\quad y_{2m+1}(1) = y_{2m+1}(1) = 0$$

...

Уравнение (3.0) является уравнением Бернулли и его можно решить следующим образом.
Если обозначить

$$y'_0 = z \Rightarrow z_0' + \frac{\alpha}{x} z_0 = \beta z_0^2 \Rightarrow \frac{z'_0}{z_0} + \frac{\alpha}{x}\frac{1}{z_0} = \beta.$$

Если ввести обозначение

$$v_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{y'_0(x)},\ v_0(1) = a^{-1} := b$$

Тогда

$$v'_0(x) = \frac{\alpha}{x} v_0 - \beta \Rightarrow v_0(x) = x^\alpha [b - \beta \int_1^x s^{-\alpha} ds] = x^\alpha [b - \beta \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha}].$$

Или

$$y'_0(x) \sim \gamma^{-1} x^{-\alpha},\quad (\gamma = b - \frac{\beta}{1-\alpha}),\ x \to \infty.$$

Отсюда

$$y_0(x) = 1 - \gamma^{-1}(1-\alpha)^{-1} + \gamma^{-1}(1-\alpha)^{-1} x^{1-\alpha} + \ , x \to \infty.$$

Далее мы будем считать, что $a=O(1)$, $\varepsilon \to 0$ или $b=a^{-1}\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, т.е. $\gamma \sim b$. (4.0.1)

Поэтому из (4.0.1.) и (4.0.2) вытекает, что

$$y_0(x) \sim 1 - a(1-\alpha)^{-1} + a(1-\alpha)^{-1} x^{1-\alpha},\ x \to \infty$$

$$y'_0(x) \sim a x^{-\alpha},\ x \to \infty. \quad (5.0)$$

Используя (5) уравнение (3.2) запишется в виде

$$Ly_1 = (y_0 - 1) y'_0(x) \sim (\alpha - 1)^{-1} a^2 (1 - x^{1-\alpha}) x^{-\alpha} \sim (\alpha - 1)^{-1} a^2 x^{-\alpha},\ x \to \infty.$$

Интегрируя это выражение имеем

$$y'_1(x) \sim (\alpha-1)^{-1} a^2 x^{1-\alpha},\ x \to \infty$$

$$y_1(x) \sim [(\alpha-1)(2-\alpha)]^{-1} a^2 x^{2-\alpha},\ x \to \infty \quad (5.1)$$

Учитывая (5.0)-(5.1) уравнение для определения $y_2(x)$ можно записать в виде

$$Ly_2 \sim \lambda_2 a^3 x^{1-\alpha},\ x \to \infty$$

где λ_2—некоторое число, далее λ_k некоторые вещественные числа не зависящие от ε.

Отсюда

$$y_2'(x) \sim \lambda_3 a^3 x^{2-\alpha},\ x \to \infty$$

$$y_2(x) \sim \lambda_4 a^3 x^{3-\alpha},\ x \to \infty \quad (5.2)$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$y_n(x) \sim \delta_n a x^{2-\alpha} (ax)^{n-1},\ x \to \infty$$

$$y_n'(x) \sim \delta'_n a x^{2-\alpha} (ax)^n,\ x \to \infty,$$

где δ_n, δ_n' -некторые постоянные. Таким образом, внешнее решение задачи (1)-(2) запишется в виде

$$Y(x,\varepsilon) \sim 1 + + a^2 \varepsilon x^{1-\alpha} \{\delta_1 + \delta_2 \varepsilon a x + \delta_3 (\varepsilon a x)^2 + ... + \delta_n (\varepsilon a x)^{n-1} + \quad (6)$$

Если неизвестное число a взять в виде $a = \varepsilon$ то ряд (6) является асимптотическим рядом по малому параметру ε на отрезке $J(\varepsilon) = [1, \varepsilon^{-1}]$. Таким образом доказана

Теорема 1. Если взять внешнее решение с начальным условием $y(1)=1$, $y'(1) = \varepsilon$, то оно является асимптотическим рядом на отрезке J(ε). Теперь построим внутреннее решение удовлетворяющее условию $u(\infty)=0$.

Для этого в (1) сделаем подстановку $t=x\varepsilon$, тогда оно запишется в виде

$$y''(t) + \left(\frac{\alpha}{t} + 1\right) y'(t) = \beta (y'(t))^2 + y(t) y'(t) \quad (8)$$

где $u(t,\varepsilon) = y(x,\varepsilon)\big|_{x = t\varepsilon^{-1}}$.

Ученый секретарь ИСРиП
Исмаилова М.

Определение 3. Переменная t называется внутренней переменной, а решение уравнения (8) внутренним решением задачи (1).

Оказывается внутреннее решение уравнение (8) существует не только в окрестности бесконечной точки x=∞, но и на всем отрезке $t\in[\varepsilon,\infty)$ или $x\in[1,\infty)$. Поэтому уравнение (8) решается с краевыми условиями:

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0 \qquad (9)$$

Теорема 2. Решение задачи (8)-(9) можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+\cdots+u_m(t)+\cdots, \qquad (10)$$

где

$u_k(t)=u_k(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{k(\alpha-1)})$ (k=0,1,2,...) $\varepsilon\to 0$

$u_0(\varepsilon)=1, u_0(\infty)=0;\ u_k(\varepsilon)=u_k(\infty)=0$, (k=1,2,...).

Подставляя (10) в (8) для функций $u_k(t)$ получим следующие задачи:

$$u_0''(t)+(1+\alpha t^{-1})u_0'(t)-\beta u_0'^2(t)=0, u_0(\varepsilon)=1, u_0(\infty)=0, \qquad (11.0)$$

$$Mu_1(t):=u_1''(t)+\left(1+\alpha t^{-1}-2\beta u'_0(t)\right)u_1'(t)=u_0(t)u_0'(t),$$

$$u_1(\varepsilon)=u_1(\infty)=0 \qquad (11.1)$$

$$Mu_2(t):=\beta u_1'^2(t)+u_0u_1'+u_0'u_1(t), u_1(\varepsilon)=u_1(\infty)=0 \qquad (11.2)$$

$$Mu_{2m}=2\beta\sum_{\substack{j+i=2m\\ i,j\ge 1}}u_i'(t)u_j'(t)+u_m^2(t)+\sum_{j+i=2m}u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m}(\varepsilon)=u_{2m}(\infty)=0 \qquad (11.2m)$$

$$Mu_{2m+1}=2\beta\sum_{\substack{j+i=2m+1\\ i,j\ge 1}}u_i'(t)u_j'(t)+\sum_{j+i=2m+1}u_i(t)u'_j(t),$$

$$u_{2m+1}(\varepsilon)=u_{2m+1}(\infty)=0$$

(11.2m+1)

Решение задачи (11.0) имеет вид

$$u_0(t)=1-\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\alpha_0X(t)\right), \left(\alpha_0=e^\beta-1\right) \qquad (12)$$

где

$$\alpha_0=e^\beta-1, X(t):=X_\alpha(t,\varepsilon)=a_\alpha\int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s}ds,$$

$$a_\alpha^{-1}=\int_\varepsilon^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds\,; a_\alpha=O(\varepsilon^{\alpha-1}), \varepsilon\to 0;\ X(\varepsilon)=0, X(\infty)=1.$$

Отметим, что

$$u_0'(t)=-\alpha_0\beta^{-1}a_\alpha t^{-\alpha}e^{-t} \qquad (13)$$

Для определения остальных функций $U_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$ мы используем функцию Грина. Справедлива

Лемма 1. Решение однородной задачи

$Mz(t)=f(t), z(\varepsilon)=z(\infty)=0.$

Представляется в виде

$$z(t)=\int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^{s-2\beta u_0(s)}G(t,s)f(s)ds,$$

Где $f(t)\in C^\infty[C,\infty)$,

$$G(t,s)=\begin{cases}-b_\alpha^{-1}U(t)K(s), \varepsilon\le t\le s\\ -b_\alpha^{-1}U(s)K(t), s\le t<\infty\end{cases}$$

$$U(t):=U_\alpha(t,\varepsilon)=b_\alpha\int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s+2\beta u_0(s)}ds,$$

$$K(t):=K_\alpha(t,\varepsilon)=1-U(t);\ b_\alpha^{-1}=\int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s+2\beta u_0(s)}ds \qquad (14)$$

$$b_\alpha=O(\varepsilon^{\alpha-1})=O(a_\alpha), \varepsilon\to 0.$$

Решение задачи (11.1) представляется в виде

$$u_1(t)=\int_\varepsilon^\infty G(t,s)s^\alpha e^{s-2\beta u_0(s)}u_0(s)u'_0(s)ds \qquad (15)$$

Отсюда используя (13), (14) и оценивая $u_1(t)$ имеем

$$u_1(t)\le l\int_\varepsilon^\infty b_\alpha G(t,s)u_0(s)ds=l\int_\varepsilon^t K(t)U(s)u_0(s)ds+$$

$$+l\int_{\varepsilon}^{\infty} U(t)K(s)u_0(s)ds \le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} u_0(s)ds \le$$

$$\le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} s|u_0'(s)|ds \le lK(t)\int_{\varepsilon}^{\infty} a_\alpha s^{-\alpha+1}e^{-s}ds \le$$

$\le lK(t)a_\alpha, (l = const)$.

Таким образом получим оценку

$$|u_1(t)| \le lK(t)a_\alpha \quad (16)$$

Аналогично, дифференцируя (15) и оценивая имеем

$$|u_1'(t)| \le la_\alpha|K'(t)|. \quad (16')$$

Решение уравнения (11.2) запишется в виде

$u_2(t) = I_1(t) + I_2(t)$,

где

$$I_1(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^\alpha e^{s-2\beta u_0(s)}u'^2_1(s)ds,$$

$$I_2(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)s^\alpha e^{s+2\beta u_0(s)}[u_0(s)u_1'(s) + u_0'(s)u_1(s)]ds$$

Оценивая функции $I_1(t)$ получим

$$|I_1(t)| = \int_{\varepsilon}^{\infty} G(t,s)a_\alpha^2|u'^2_1(s)|ds \le$$

$$\le la_\alpha^3\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds + la_\alpha^3\int_{\varepsilon}^{t} K(t)U(s)s^{-\alpha}e^{-s}ds \le$$

$$\le la_\alpha^2K(t),$$

$|I_1'(t)| \le la_\alpha^2|K'(t)|$.

Аналогично оценивая $I_2(t)$ и $I_2'(t)$ имеем

$$|I_2(t)| \le la_\alpha^2K(t), |I_2'(t)| \le la_\alpha^2|K'(t)|.$$

Таким образом

$$|u_2(t)| \le la_\alpha^2K(t), |u_2'(t)| \le la_\alpha^2|K'(t)|.$$

Теперь методом полной математической индукции доказывается, что для решения задачи (11.m) имеет место оценка $|u_m(t)| \le la_\alpha^mK(t), |u_m'(t)| \le la_\alpha^m|K'(t)|, \forall m \in N$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. Асимптотика решение задачи (1) представляется в виде

$$y(x) = y_0(x) + a_\alpha y_1(x,\varepsilon) + a_\alpha^2 y_2(x,\varepsilon) + \cdots + a_\alpha^m y_m(x,\varepsilon) + \cdots,$$

где $y_j(x,\varepsilon) = u_i(x\varepsilon^{-1}) = O(1), a_\alpha = O(\varepsilon^{\alpha-1}), \varepsilon \to 0$.

Т.е. решения задачи (1) разлагается в асимптотический ряд по асимптотической последовательности

$$\{\varepsilon^{\alpha-1}\}^k \ k = 0,1,\ldots, \text{при } 1 < \alpha < 2.$$

Литература:

1. Lagerstrom P.A. Matched asymptotic expansions. Ideas and techniques. Springer-Verlag, 1988.
2. Alymkulov K., Omuraliev M.K. Method of structural matching and its application to Lagerstrom's model equation, Int. J. of Innovation in Sci.& Math., 2015. Vol. 3. pp. 81-88.
3. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания, в случае нецелой размерности пространства // Приволжский научный вестник. 2017. № 3 (67). С. 5-9.
4. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания, в случае нецелой размерности пространства.

Crack formation in cryoprotective medium at super low temperatures

Boroda A.V., PhD, Researcher
A.V. Zhirmunsky Institute of Marine Biology, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia
Andreev A.A., PhD, Senior Researcher
Institute of Cell Biophysics of Russian Academy of Sciences, Pushchino, Russia

Abstract. *Low-temperature preservation (freezing) is utilised to reduce genetic drift as well as biochemical and contaminating processes in cell cultures, stabilising them for prolonged storage to be used as standards. Interest is the*