ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.928

К. Алымкулов
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ошский государственный университет,
г. Ош, Киргизия

М.К. Омуралиев
старший преподаватель,
Институт социального развития
и предпринимательства,
г. Бишкек, Киргизия

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛАГЕРСТРОМА МЕТОДОМ СТРУКТУРНОГО СРАЩИВАНИЯ, В СЛУЧАЕ НЕЦЕЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. Методом структурного сращивания строится асимптотика решения модельной задачи Лагерстрома в случае нецелой размерности пространства. Получена равномерная асимптотика решения этой задачи на рассматриваемом отрезке.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, внешнее и внутреннее решения, метод структурного сращивания, асимптотика решения.

K. Alymkulov, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
K. Omuraliev, Institute of business and social development, Bishkek, Kyrgyzstan

CONSTRUCTION OF THE ASYMPTOTIC OF SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED LAGERSTROM PROBLEM BY STRUCTURAL JOINING METHOD, IN THE CASE OF NONINTEGER DIMENSION OF SPACE

Abstract. It is constructed an asymptotic of the solution Lagerstrom's model problem by the method of structural matching. Received uniform asymptotic expansion of the solution of this problem on the segment under consideration.

Keywords: singularly perturbed equation, outer and inner solutions, structural matching method, asymptotic of the solution.

1. Введение

В 1950 г. А.А. Лагерстром [1] для изучения уравнения Навье-Стокса при малых числах Рейнольдса предложил следующую модельную задачу:

$$\frac{d^2v(r)}{dr^2}+\frac{n-1}{r}v(r)+v(r)\frac{dv(r)}{dr}=0,\ v(\varepsilon)=0,\ v(\infty)=1,$$

где ε – малый положительный параметр, n – размерность пространства (лапласиана), $r\in[1,\infty)$ – независимая переменная, $v(r)$ – неизвестная функция.

Разработаны различные методы построения асимптотики решения этой задачи в случае целого n (см. обзор работ в [2]). Здесь методом структурного сращивания [2] строится равномерная асимптотика решения этой задачи в случае нецелого n.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача:

$$\frac{d^2v(r)}{dr^2}+\frac{\alpha}{r}v(r)+v(r)\frac{dv}{dr}=0,\ v(\varepsilon)=0, v(\infty)=1.$$

Здесь действительное число α не обязательно целое число. Для определенности предположим, что $1<\alpha<2$.

копия верна уч. сек. Дисс. совета К 01.17.554 Бекешов Т.О.

В этой задаче удобно сделать подстановку $r=\varepsilon x, v=1-y(x)$, тогда имеем следующую задачу:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+(\frac{\alpha}{x}+\varepsilon)\frac{dy}{dx}=\varepsilon y(x)\frac{dy}{dx}, y(1)=1,\ y(\infty)=0. \tag{1}$$

Надо построить асимптотику решения задачи (1) на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\infty)$.

3. Структура внешнего решения

Определение 1. Переменную x назовем внешней переменной.

Определение 2. Внешним решением задачи (1) назовем решение этой задачи, которое удовлетворяет условию $y(1)=0, y'(1)=a$ (a – постоянная, которая пока не определена) и существует на конечном, но на большом отрезке: $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-l}]$.

Внешнее решение ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots, \tag{2}$$

где $y_j(x)(j=0,1,\ldots)$ – пока неопределенные функции на отрезке $J(\varepsilon)$, причем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0(1)=0,\ y_0'(1)=a,\ y_k(1)=0,\ y_k'(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Подставляя (2) в (1), для определения $y_j(x)(j=0,1,2,\ldots)$ имеем следующие задачи:

$$Ly_0(x)=y_0'(x)+\frac{\alpha}{x}y_0'(x)=0,\ \ y_0(1)=0,\qquad y_0'(1)=a \tag{3.0}$$

$$Ly_1(x)=-y_0'(x)+y_0(x)y_0'(x),\ \ y_1(1)=0, y_1'(1)=0 \tag{3.1}$$

$$Ly_2(x)=-y_1'(x)+y_0'(x)y_1'(x)+y_1(x)y_0'(x), y_2(1)=0, y_2'(1)=0 \tag{3.2}$$

....

$$Ly_m(x)=-y_{m-1}'(x)+\sum_{i+j=m-1}y_i(x)y_j'(x), y_m(1)=0,\ \ y_m'(1)=0 \tag{3.n}$$

....

Решение задачи (3.0) представляется в виде:

$$\frac{dy_0}{dx}=a\,x^{-\alpha},\ \ y_0(x)=1-\frac{a}{1-\alpha}-\frac{a}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\sim\beta=1+\frac{a}{\alpha-1}, x\to\infty. \tag{4.0}$$

Используя (3.0) для определения $y_1(x)$, имеем задачу:

$$Ly_1(x)=\frac{a^2}{\alpha-1}x^{-\alpha}, y_1(1)=0,\ \ y_1'(1)=0.$$

Решая её, получим

$$y_1'(x)\sim\frac{a^2}{\alpha-1}x^{1-\alpha},\ x\to\infty.$$

Отсюда

$$y_1(x)\sim\frac{a^2}{(\alpha-1)(2-\alpha)}x^{2-\alpha},\ x\to\infty. \tag{4.1}$$

Используя (4.1), уравнение для определения $y_2(x)$ запишется в виде

$$Ly_2(x)\sim\frac{a^3}{(\alpha-1)^2}x^{1-\alpha},\ \ x\to\infty.$$

Решая это уравнение, получим

$$y_2(x)\sim\frac{a^3}{2(\alpha-1)^2(3-\alpha)}x^{3-\alpha},\ y_2'(x)\sim\frac{a^3x^{2-\alpha}}{(\alpha-1)^2}, x\to\infty.$$

Далее, методом математической индукции легко показать, что

$$y_n(x) \sim \frac{a^{n+1}x^{n+1-\alpha}}{n!(\alpha-1)^n(n+1-\alpha)},\ y_n'(x) \sim \frac{a^{n+1}x^{n-\alpha}}{n!(\alpha-1)^n},\ x\to\infty, \forall n\in N. \qquad (4.n)$$

Действительно, пусть имеет место (4.n), тогда докажем, что имеет место (4.n+1).

Для функции $y_{n+1}(x)$ имеем задачу:

$$Ly_{n+1}(x) = -y_n'(x) + \sum_{i+j=n} y_i(x)y_j'(x) := f_{n+1}(x),\ y_{n+1}(1) = y_{n+1}'(1) = 0.$$

Учитывая оценки (4.0) и (4.n), имеем

$$Ly_{n+1}(x) \sim \frac{a^{n+2}x^{n-\alpha}}{n!(\alpha-1)^{n+1}},\ x\to\infty.$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$y_{n+1}(x) \sim \frac{a^{n+2}x^{n+2-\alpha}}{(n+1)!(\alpha-1)^{n+1}(n+2-\alpha)},\ y_n'(x) \sim \frac{a^{n+2}x^{n+1-\alpha}}{(n+1)!(\alpha-1)^{n+1}},\ x\to\infty.$$

Таким образом, внешнее решение (2) имеет следующую структуру:

$$y(x,\varepsilon) \sim 1 + a\frac{1}{\alpha-1} + \frac{\varepsilon a^2x^{2-\alpha}}{(\alpha-1)}\{\frac{1}{2-\alpha} + \frac{\varepsilon ax}{2(\alpha-1)(3-\alpha)}\ldots + \frac{(\varepsilon ax)^{n-1}}{n!(\alpha-1)^n(n+1-\alpha)} + \ldots\},,\ x\to\infty. \qquad (5)$$

Если в (5) положить $x = \varepsilon^{-1}$, то имеем

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon) \sim 1 + a\frac{1}{\alpha-1} + \frac{a^2\varepsilon^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\{\frac{1}{2-\alpha} + \frac{a}{2(\alpha-1)(3-\alpha)}\ldots + \frac{a^{n-1}}{n!(\alpha-1)^n(n+1-\alpha)} + \ldots\}. \qquad (6)$$

Постоянную a выберем равную ε, т.е. $a=\varepsilon$, тогда выражение (6) является асимптотическим рядом на отрезке $J(\varepsilon) = [1,\varepsilon^{-1}]$.

Справедлива

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon) = [1,\varepsilon^{-1})$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \varepsilon^{n+1}R_{n+1}(x,\varepsilon),$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$|R_{n+1}(x,\varepsilon)| \le l\varepsilon^{n+1},$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Строгое доказательство можно провести методом мажорант.

4. Внутреннее и полное решение

Теперь построим внутреннее решение, которое удовлетворяет условию на бесконечности $y(\infty)=0$. Для этого введем внутреннюю переменную t.

$$t = x\varepsilon. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$u''(t) + \left(1+\frac{\alpha}{t}\right)u'(t) = u(t)u'(t), \qquad (8)$$

где $u(t) = y(x)/_{x=t\varepsilon^{-1}}$.

Определение 3. Переменную t назовем внутренней, а функцию $u(t)$ внутренним решением, причем внутреннее решение удовлетворяет краевому условию на бесконечности $u(\infty)=0$.

Оказывается, что внутреннее решение (13) существует не только в некоторой окрестности точки $t=\infty$, но и на всем отрезке $I(\varepsilon)=[\varepsilon,\infty)$, т.е. мы решаем уравнение (11) со следующими граничными условиями:

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0. \tag{9}$$

Решение задачи (8)–(9) ищем в виде:

$$U(t,\mu)=\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots+\varepsilon^n u_n(t)+\ldots. \tag{10}$$

Тогда для определения $u_j(t)$ получим следующие задачи:

$$Mu_1(t):=u_1''(t)+(1+\alpha t^{-1})u_1'(t)=0,\ u_1(\varepsilon)=\varepsilon^{-1},\ u_1(\infty)=0, \tag{11.1}$$

$$Mu_2(t)=u_1(t)u_1'(t),\ u_2(\varepsilon)=u_2(\infty)=0,\ , \tag{11.2}$$

$$Mu_3(t)=u_1(t)u_2'(t)+u_1'(t)u_2(t),\ \ u_3(\varepsilon)=u_3(\infty)=0, \tag{11.3}$$

....

$$Mu_n(t)=\sum_{i+j=n-1}u_i(t)u_j'(t),\ \ u_n(\varepsilon)=u_n(\infty)=0, \tag{11.n}$$

....

Однородное уравнение (11.1) имеет два линейно независимых решения:

$$U_1(t)=1,\ X(t):=X(t,\varepsilon)=b_\alpha\int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s}ds,\ b_\alpha:=b_\alpha(\varepsilon)=[\int_\varepsilon^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds]^{-1}=O(\varepsilon^{\alpha-1}).$$

Краевая задача (11.0) имеет единственное решение:

$$u_1(t)=\varepsilon^{-1}K(t);\ K(t)=1-X(t).$$

Очевидно, что для функции $K(t,s)$ имеет место оценка: $0\le K(t)\le 1,\ |K'(t)|\le b_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}$.

Поэтому для функций $u_1(t),\ u_1'(t)$ имеют место оценки

$$0\le u_1(t,\varepsilon)\le\varepsilon^{-1},\ |u_{1t}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^{-1}b_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}.$$

Краевые задачи (11.n), n=2,3,... можно решить, используя функцию Грина.

Лемма 1. Однородная задача

$$Mz(t)=0,\ \ z(\varepsilon)=z(\infty)=0$$

имеет функцию Грина:

$$G(t,s,\varepsilon)=-b_\alpha^{-1}X(t)K(s),\ \varepsilon\le t\le s,$$

$$G(t,s,\varepsilon)=-b_\alpha^{-1}X(s)K(t),\ s\le t<\infty.$$

Лемма 2. Неоднородная задача

$$Mz(t)=f(t),\ z(\varepsilon)=0,\quad z(\infty)=0,$$

где $f(t)\in C[\varepsilon,\infty)$ имеет единственное решение, представимое в виде

$$z(t)=\int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s G(t,s,\varepsilon)f(s)ds. \tag{12}$$

Доказательство этих лемм проверяется непосредственно подставлением их выражений в соответствующие уравнения.

Решение краевой задачи (11.2) в силу (12) запишется в виде

$$u_2(t)=\int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s G(t,s,\varepsilon)u_0(s)u_0'(s)ds.$$

Используя выражение для функции Грина, отсюда получим

$$u_2(t) = -\varepsilon^{-1} b_\alpha \int_\varepsilon^\infty G(t,s,\varepsilon) u_0(s) ds = \varepsilon^{-1} \int_\varepsilon^t K(t) X(s) u_0(s) ds +$$

$$+\varepsilon^{-1} \int_t^\infty X(t) K(s) u_0(s) ds \le \varepsilon^{-2} K(t) \{ \int_\varepsilon^t K(s) ds + \int_t^\infty K(s) ds \} \le \varepsilon^{-2} K(t) \int_\varepsilon^\infty K(s) ds.$$

Отсюда после интегрирования по частям имеем

$$u_2(t) \le K(t) \varepsilon^{-2} b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1}.$$

Очевидно, что

$$b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1} = O(\varepsilon^{\alpha-1}) O(\varepsilon^{2-\alpha}) = O(\varepsilon).$$

Аналогично для производной этой функции имеем оценку

$$\left| u_2'(t) \right| \le \varepsilon^{-2} b_\alpha{}^2 b^{-1}{}_{\alpha-1} t^{-\alpha} e^{-t}.$$

Далее методом математической индукции получим

$$u_m(t) \le \varepsilon^{-m} K(t) O\{(b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1})^{m-1}\}, \quad |u_m{}'(t)| \le \varepsilon^{-m} b_\alpha O\{(b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1})^{m-1}\} t^{-\alpha} e^{-t} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Значит ряд (13) мажорирутся следующим асимптотическим числовым рядом

$$1 + O\{b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1}\} + O\{b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1}\}^2 + \ldots + O\{(b_\alpha b^{-1}{}_{\alpha-1})^m\} + \ldots \prec 1 + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) + \ldots + O(\varepsilon^m) + \ldots .$$

Отсюда получаем следующую теорему:

Теорема 2. Решение задачи (1) представляется в виде асимптотического ряда (10), для членов которого имеет место оценки (13).

Замечание 1. Можно показать, что этот ряд равномерно сходится на отрезке $I(\varepsilon) = [\varepsilon, \infty)$.

Заключение

Метод структурного сращивания позволяет получить решение задачи уравнения Лагерстрома на всем рассматриваемом бесконечном отрезке.

Список литературы:

1. Lagerstrom P.A. Matched asymptotic expansions. Ideas and techniques. Springer-Verlag, 1988.

2. Alynkulov K., Omuraliev M.K. Method of structural matching and its application to Lagerstrom's model equation // Int. J. of Innjvetion in Sci. & Math., 2015. Vol. 3. P. 81–88.

уч. сек. Белосов