**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ
ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.17.554

На правах рукописи
УДК: 517.956.6

МОЛДОЯРОВ УЛАРБЕК ДУЙШОБЕКОВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2018

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Информационные технологии и автоматизированных систем» Ошского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Сопуев Адахимжан**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Алыбаев Курманбек Сарманович**
	кандидат физико-математических наук, доцент **Сапарова Гульмира Баатыровна**
Ведущая организация	Наманганский инженерно-строительный институт (716003 Узбекистан, г. Наманган, ул. И. Каримова -12)

Защита диссертации состоится «29» июня 2018 г. в 14^{30} часов на заседании диссертационного совета К 01.17.554 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Жалал-Абадский государственный университет и Институте природных ресурсов южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета и на сайте http://www.oshsu.kg/univer/?lg=1&id_parent=3688.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

Актуальность темы. Математическое моделирование некоторых задач прикладного характера, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах, движения почвенной влаги и явлений теплообмена в смешанной среде, приводится к исследованию прямых, обратных и нелокальных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

В монографии А.Ф. Чудновского при изучении основных закономерностей движения почвенной влаги используется модифицированное уравнение диффузии (уравнение Аллера)

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial x}+A\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x}\right],$$

где W – влажность, x – глубина, t – время, $D(W)=K\dfrac{\partial\psi}{\partial W}$ – коэффициент диффузивности, K – коэффициент влагопроводности, ψ – потенциал влажности, A – варьируемый коэффициент.

Краевые задачи для псевдопараболических уравнений исследованы в работах D. Colton, А.М. Нахушева, А.И. Кожанова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, М.Х. Шханукова, В.И. Жегалова, Е.А. Уткиной, М.Н. Миронова, К.Г. Кожобекова, Н.С. Попова, В.А. Водаховой и других.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка рассмотрены в работах Б.С. Аблабекова, Э. Атаманова, М.Ш. Мамаюсупова и других.

Одним из важных разделов теории уравнений в частных производных является постановка и исследование корректных краевых задач для вырождающихся параболических уравнений второго, третьего и высокого порядков.

Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений второго порядка рассмотрены в работах M. Gevrey, O. Arena, C.D. Pagani, G. Talenti, Г.Н. Смирновой, Ю.П. Горькова. Параболические уравнения второго порядка с сингулярными коэффициентами изучены в работах S. Kepinski, И.Е. Егорова, V. Alexiades и других.

Однако начально-краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений третьего порядка мало исследованы.

В настоящей работе изучаются краевые задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка и задачи сопряжения для линейных и нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными характеристиками, что и обусловливает актуальность работы.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнена в рамках проекта Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета МОиН КР по теме: «Изучение математических моделей гидроаэродинамики, химической кинетики, тепломассообмена и других явлений природы», № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012.

Цель и задачи исследования.

– Доказать существование и единственность решения краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом;

– построить функции Грина для псевдопараболического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом. Изучить свойства тепловых потенциалов двойного слоя;

– построить и изучить свойства функции Грина для псевдопараболического уравнения третьего порядка, вырождающегося при $x = 0$. Получить представления решения через функции Грина;

– построить решения краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными действительными характеристиками, когда условия сопряжения задаются на линии $y = 0$. Построить и изучить свойства функции Римана для псевдопараболических уравнений третьего порядка;

– установить достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. Рассмотреть различные варианты вхождения интегральных членов в нелокальные условия задачи.

Методика исследования. При построении представления решений уравнений использован метод понижения порядка уравнения, метод тепловых потенциалов и метод функции Римана. Для доказательства существования и единственности решений применен метод редукции краевых задач к решению интегральных уравнений типа Фредгольма или Вольтерра и их систем, а также принцип сжатых отображений и метод последовательных приближений.

Научная новизна полученных результатов. Основные научные результаты:

1. Доказательство существования и единственности решения краевой задачи для псевдопараболического уравнения с сингулярным коэффициентом. Вывод формулы скачков для тепловых потенциалов и построение функции Грина.
2. Получение представления решения псевдопараболического уравнения третьего порядка, вырождающегося при $x = 0$ через функции Грина. Доказательство существования и единственности решения краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с линией сопряжения $x = 0$.
3. Доказательство однозначной разрешимости краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными действительными характеристиками с линией сопряжения $y = 0$. Построение и доказательство свойств функции Римана для псевдопараболических уравнений третьего порядка с младшими членами.
4. Нахождение достаточных условий однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для нелинейных

псевдопараболических уравнений третьего порядка. Исследование различных вариантов вхождения интегральных членов в нелокальные условия задачи.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты, связанные с исследованием краевых задач и задачи сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка, внесут определенный вклад в развитие теории краевых задач уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высокого порядков, а также в моделирование явлений теплообмена в смешанной среде, механических и электрических явлений в разнородных средах с резко отличающимися физическими свойствами, а также в исследование задачи неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах и процессов, протекающих в неоднородных и кусочно-однородных средах.

Основные положения, выносимые на защиту:

– доказательство существования и единственности краевой задачи для псевдопараболического уравнения с сингулярным коэффициентом. Доказательство формулы скачков для тепловых потенциалов и построение функции Грина;

– доказательство существования и единственности решения краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с линией сопряжения $x=0$. Получение представления решения псевдопараболического уравнения третьего порядка, вырождающегося при $x=0$ через функции Грина.

– доказательство существования достаточных условий разрешимости краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными действительными характеристиками с линией сопряжения $y=0$. Построение и вывод свойств функции Римана для псевдопараболических уравнений третьего порядка с младшими членами;

– отыскание достаточных условий однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. Рассмотрение различных вариантов вхождения интегральных членов в нелокальные условия задачи.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались на международных, республиканских и региональных научно-практических конференциях и публиковались в сборниках научных работ:

- Республиканская научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». –Ташкент, 2014 г., 23-25 октября.
- «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященная 80-летию академика НАН РК Касымова К.А., Алматы, 2015 г.
- Международная научная конференция, посвященная 85-летию академика НАН КР М.И. Иманалиева, Бишкек, 2016 г.

Отдельные положения диссертационного исследования обсуждались на семинарах «Уравнения в частных производных», руководитель – д.ф.-м.н., профессор А. Сопуев (г. Ош, 2012-2018 гг.); на межвузовских научных семинарах «Актуальные проблемы математики и информатики» ОшГУ, руководитель – д.ф.-м.н., профессор К. Алымкулов (г. Ош, 2012-2018 гг); на семинарах по дифференциальным уравнениям, руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.С. Алыбаев (г. Жалал-Абад, 2013-2017 гг).

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 7 статей: [1] - [5], [8], [9] и тезисы 3 докладов [6, 7, 10].

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах [5], [8], [9] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем существования и единственности решений, получение основных результатов – автору.

Структура, объем и краткое содержание диссертации: Диссертация состоит из введения, трех глав, состоящих из 7 разделов, списка использованных источников из 82 наименований и заключения. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, формул, примеров – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста – 102 страниц.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность и искреннюю признательность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А. Сопуеву за постановку задач, за ценные и полезные советы, за постоянное внимание и обсуждение результатов работы.

Краткое содержание работы. В первой главе приводится обзор литературы и результатов, примыкающих к теме диссертации, и сформулированы основные результаты, полученные в данной работе.

Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной в одномерном случае записывается в виде

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

которое моделирует фильтрацию вязко-упругой жидкости в трещиновато-пористых средах, где α и λ — вещественные параметры, характеризующие среду.

В работе М.Х. Шханукова методом функции Римана изучены локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения вида

$$u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -q(x,t).$$

В.И. Жегаловым и Уткиной функция Римана для уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными вида

$$U_{xxy} + aU_{xx} + bU_{xy} + cU_x + dU_y + eU = f,$$

построена как решение интегрального уравнения, позволяющее при этом построить явный вид функции Римана в ряде частных случаев уравнения.

В монографии В.И. Жегалова и А.Н. Миронова приведены результаты исследований по дифференциальным уравнениям со старшими частными производными. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными изучены в работе Е.А. Уткиной. Краевые задачи для уравнений с доминирующей частной производной рассмотрены в работе А.Н. Миронова.

В работе К.Г. Кожобекова рассмотрены краевые задачи для смешанных псевдопараболо-гиперболических уравнений третьего порядка с одной линией изменения типа следующего вида:

$$0=\begin{cases} u_{xxx}-u_y+b_1(x,y)u_x+d_1(x,y)\,u, & y>0,\\ u_{xxy}+b_2(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+d_2(x,y)u, & y<0.\end{cases}$$

В работах Б.С. Аблабекова и Э.Р. Атаманова, М.Ш. Мамаюсупова и других авторов изучены обратные задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

В настоящей диссертационной работе методом интегральных уравнений, функции Грина и принципом сжатых отображений исследованы существование и единственность краевых задач для вырождающихся и нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка.

В разделе 1.2 приведен обзор основных результатов, полученных в настоящей диссертации.

В диссертационной работе рассматриваются краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего вида

$$u_{xxy}+\alpha u_{xx}+\beta u_{xy}+\gamma u_{yy}+a u_x+b u_y+cu=f(x,y), \tag{1}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,f$ – заданные функции, зависящие от x и y. Уравнение (1) является каноническим видом относительно старших производных, когда один из корней характеристического уравнения двукратный, а другой – простой. Уравнение вида (1) часто называется псевдопараболическим.

В **разделе 2.1** первой главы в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,0<y<h\}$ рассматривается уравнение (1), когда $\alpha=0,\beta=-\dfrac{1}{x}$:

$$u_{xxy}-\frac{1}{x}u_{yy}+\beta u_{xy}+a u_x+bu_y+cu=f(x,y) \tag{2}$$

и изучена

Задача 2.1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D), u_{xxy}\in C(D)$, удовлетворяющее в области D уравнению (2), краевым и начальным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u(x,0)=\tau(x), u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{4}$$

где $\beta,a,b,c,f,\varphi_1(y),\varphi_2(y),\tau(x),\nu(x)$ – заданные функции, причем $\beta(x,y), a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y)\in C(\overline{D})$,

$$\varphi_i(y)\in C^2[0,h](i=1,2), \tau(x)\in C^2[0,\ell], \nu(x)\in C^1[0,\ell], f(x,y)\in C(\overline{D}), \tag{5}$$

$\varphi_1(0)=\tau(0), \varphi_2(0)=\tau(\ell),\ \varphi_1'(0)=\nu(0),\ \varphi_2'(0)=\nu(\ell).$

Введя обозначение $u_y(x,y)=z(x,y)$, где $z(x,y)$ – новая неизвестная функция, из (2)-(4) имеем первую краевую задачу для уравнения

$$L(u)\equiv z_{xx}-\frac{1}{x}z_y=F, \qquad (6)$$

где $F=-\beta z_x-au_x-bz-cu+f(x,y)$ с условиями

$$z(0,y)=\varphi_1'(y),\ z(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ 0\le y\le h,$$

$$z(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell.$$

Для получения представления решения этой задачи построим функцию Грина с помощью фундаментального решения уравнения (6), представимого в виде

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2}\,zI_1(z)\,e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}},\ z=2\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{y-\eta},$$

где $I_1(z)$ – функция Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Функцию Грина будем искать в виде

$$G(x,y;\xi,\eta)=\vartheta(x,y;\xi,\eta)-w(x,y;\xi,\eta),$$

где

$$w(x,y;\xi,\eta)=W[\sigma_1](\xi,\eta)+W[\sigma_2](\xi,\eta),$$

где $W[\sigma_1](\xi,\eta)=\int\limits_\eta^y\vartheta_x(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt,\qquad W[\sigma_2](\xi,\eta)=\int\limits_\eta^y\vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta)\times$ $\times\sigma_2(t;x,y)dt,$ потенциалы двойного слоя, $\sigma_1(t;x,y),\sigma_2(t;x,y)$ – неизвестные плотности. Пусть $AA_1=\{(\xi,\eta):\xi=0,0<\eta<h\}$, $BB_1=\{(\xi,\eta):\xi=\ell,0<\eta<h\}$. Далее доказаны следующие леммы.

Лемма 2.1.1. *Если $\sigma_1(\eta;x,y)\in C[0,h],\forall(x,y)\in D$, то имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)}W[\sigma_1](\xi,\eta)=\sigma_1(\eta_0;x,y),\text{ при }(\xi,\eta)\in D,(\xi_0,\eta_0)\in AA_1.$$

Лемма 2.1.2. *Если $\sigma_2(\eta;x,y)\in C[0,h],\forall(x,y)\in D$, то имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)}W[\sigma_2](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta_0;x,y)+\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0),$$

при $(\xi,\eta)\in D,(\xi_0,\eta_0)\in BB_1$,

где

$$\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0)=\int\limits_\eta^y\vartheta_x(\ell,t;\xi_0,\eta_0)\sigma_2(t;x,y)dt\ –$$

прямое значение потенциала двойного слоя $W[\sigma_2](\xi,\eta)$ на отрезке BB_1.

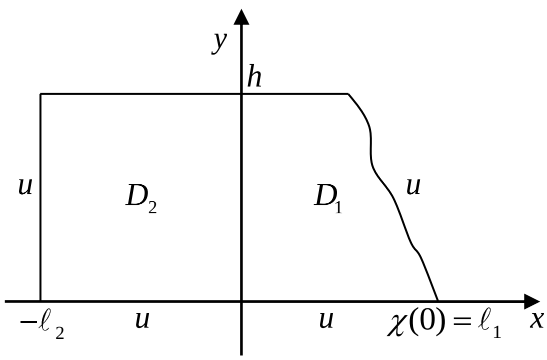

Рис. 1.

Используя свойства тепловых потенциалов для неизвестных плотностей $\sigma_1(\eta;x,y)$, $\sigma_2(\eta;x,y)$, получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, допускающих однозначное решение, и тем самым определяем функцию Грина. Тогда с помощью функции Грина для функций $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $z(x,y)$, $z_x(x,y)$ получаем замкнутую систему интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. В силу свойств заданных функций ядра системы уравнений имеют слабую особенность, и тем самым для указанной системы уравнений применим метод последовательных приближений и однозначно определим решение задачи 2.1.1.

Доказана следующая

Теорема 2.1.1. Если выполняются условия (5), то задача 2.1.1 имеет единственное решение.

В **разделе 2.2** первой главы в области D (рис. 1), ограниченной линиями $x=-\ell_2(\ell_2>0)$, $y=0$, $x=\chi(y)$, $0\le y\le h, y=h$, где $\chi(y)$, – монотонно невозрастающая кривая, причем $\chi(0)=\ell_1(\ell_1>0), \chi(h)=\ell_3$, $0<\ell_3\le\ell_1$, рассмотрим задачу сопряжения для уравнений:

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-x^p u_{yy}=0,(x,y)\in D_1, \tag{7}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,(x,y)\in D_2, \tag{8}$$

где $D_1=D\cap(x>0), D_2=D\cap(x<0), p=const>-1$.

Относительно коэффициентов и заданных функций предполагаем следующее

$$\begin{gathered} a\in C(\overline{D_2})\cap C^{1+0}(D_2), b\in C(\overline{D_2})\cap C^{0+1}(D_2), c\in C(\overline{D_2}), \\ \chi(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \forall y\in[0,h]: \ell_3\le\chi(y)\le\ell_1, \chi(y)\le 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Задача 2.2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap [C^{2+1}(D_1)\cup C^2(D_1)\cup C^{2+1}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнения (7) и (8) в областях D_1 и D_2 соответственно краевым условиям

$$u(\chi(y),y)=\varphi_1(y),\ u(-\ell_2,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$
$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ 0\le x\le\ell_1$$

и начальному условию

$$u(x,0)=\psi_3(x),\ -\ell_2\le x\le 0,$$

где $\varphi_i(i=1,2), \psi_j(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{gathered} \psi_1\in C^2[0,\ell_1], \psi_2\in C^1[0,\ell_1], \psi_3\in C^1[-\ell_2,0], \varphi_i\in C^1[0,h](i=1,2) \\ \psi_1(0)=\psi_3(0), \varphi_2(0)=\psi_3(-\ell_2), \psi_1(\ell_1)=\varphi_2(0). \end{gathered} \tag{10}$$

Введем следующие обозначения:

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y), 0\le y\le h,$$

где $\tau(y), \nu(y)$ – пока неизвестные функции.

Для решения задачи 2.2.1 уравнение (7) представим в виде

$$u_{xx}-x^p u_y=\omega(x),$$

где $\omega(x)=\psi_1''(x)-x^p\psi_2(x)$ – известная функция, и через функцию Грина $G_2(x,y;\xi,\eta)$ получим представление решения задачи в области D_1:

$$\begin{gathered} u(x,y)=\int_0^{\ell_1}\xi^p G_2(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y G_2(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta- \\ -\int_0^y G_{2\xi}(x,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{\chi(\eta)}G_2(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\quad G_2(x,y;\xi,\eta)=U_2(x,y;\xi,\eta)-w(x,y;\xi,\eta),$

$$U_2(x,y;\xi,\eta)=\frac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)}I_{-1/q}\left(2\frac{x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right)e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}},\ q=p+2.$$

При $x=0$ из (11) получаем соотношение между $\tau(y)$ и $\nu(y)$:

$$\tau(y)=-\kappa\int_0^y\frac{\nu(\eta)d\eta}{(y-\eta)^{1-1/q}}+\int_0^y w(0,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\tau_0(y), \tag{12}$$

где $\kappa=\dfrac{1}{q^{1-1/p}\Gamma(1-\frac{1}{p})}$, $\tau_0(y)=\int_0^{\ell_1}\xi^p G_2(0,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-$

$$-\int_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{\chi(\eta)}G_2(0,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi\,.$$

Решение задачи 2.2.1 в области D_2 через функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ представим в виде

$$u(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;0,y)\tau(y)-\vartheta(x,y;0,y)\nu(y)-$$

$$-\int_0^y[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)+a(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta)]\tau(\eta)d\eta+ \tag{13}$$

$$+\int_0^y\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+u_0(x,y),$$

где

$$u_0(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;x,0)\psi_3(x)+\vartheta(x.y;0,0)\psi_3^1(0)-\vartheta_\xi(x.y;0,0)\psi_3(0)-$$

$$-\int_0^x[\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)]\psi_3(\xi)d\xi.$$

Имеет место

Лемма 2.2.1. Если

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}:b(x,y)\le 0, \tag{14}$$

то

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}\wedge\forall\xi\in[x,0]:\vartheta(x,y;\xi,y)\ge\xi-x\ge 0.$$

Из (13) относительно $\tau(y)$, $\nu(y)$ получим соотношение

$$\nu(y)=B(y)\tau(y)+\int_0^y H(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\nu_0(y). \tag{15}$$

Исключая $\nu(y)$ из (12) и (15) для $\tau(y)$, получим интегральное уравнение

$$\tau(y)=-\kappa\int_0^y\frac{B(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}\tau(\eta)d\eta+\int_0^y K(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\tau_0(y), \tag{16}$$

где $K(y,\eta)=w(0,y;0,\eta)B(y)-\int_\eta^y\left[\dfrac{\kappa H(\eta_1,\eta)}{(y-\eta_1)^{1-1/q}}-w(0,y;0,\eta_1)H(\eta_1,\eta)\right]d\eta_1,$

$$g(y)=\tau_0(y)-\int_0^y\left[\frac{\kappa}{(y-\eta)^{1-1/q}}-\omega(0,y;0,\eta)\right]\nu_0(\eta)d\eta.$$

Следовательно, разрешимость задачи 2.2.1 эквивалентно редуцировалась к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода (16), имеющего слабое ядро, которое допускает единственное непрерывное решение.

Таким образом, доказана нижеследующая

Теорема 2.2.1. Если выполняются условия (9), (10) и (14), то решение задачи 2.2.1 существует и единственно.

В **разделе 2.3** первой главы в области D (рис. 2) устанавливается однозначная разрешимость задачи 2.1.3: найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^2(D_1)\cap C^{2+1}(D_1)$, удовлетворяющую уравнение

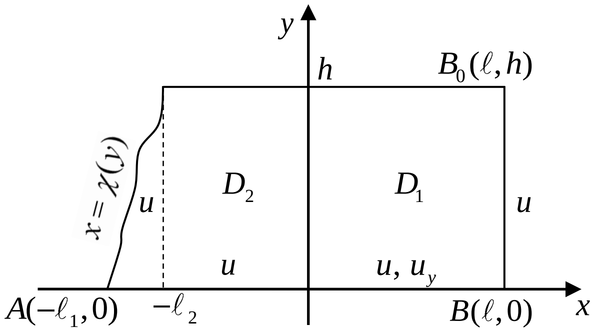

Рис. 2.

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-x^p u_{yy}+d(x,y)u=0,(x,y)\in D_1$$

в области D_1, начальные условия

$$u(x,0)=\psi_1(x),\, u_y(x,0)=\psi_2(x),\, 0\le x\le \ell,$$

граничное условие

$$u(\ell,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h$$

и функцию $u(x,y)\in C(\overline{D_2})\cap C^{2+1}(D_2)$, удовлетворяющую уравнение

$$L_2(u)=u_{xxy}+\beta(x,y)u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_2$$

в области D_2, начальное условие

$$u(x,0)=\psi_3(x),\ -\ell_1\le x\le 0,$$

граничное условие

$$u(\chi(y),y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$

а также условия сопряжения

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h,$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2),\ \varphi_j(x)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_i(y)\in C^1[0,h](i=1,2),\ \psi_1(x)\in C^2[0,\ell],$$

$$\psi_2(x)\in C^1[0,\ell],\ \psi_3(x)\in C^1[-\ell_1,0],$$

$$\psi_1(0)=\psi_3(0),\ \psi_1'(0),=\psi_3'(0),\ \psi_1(-\ell_1)=\varphi_2(0),\ \psi_1(\ell)=\varphi_1(0).$$

В **разделе 2.4** первой главы в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,-h_2<y<h_1\}$ $(\ell,h_1,h_2>0)$ методом функции Грина и интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения задачи 2.4.1, заключающего в определении функции $u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap[C^{2+1}(D_1)\cup C^{1+2}(D_2)]$, удовлетворяющей уравнения

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}+a_1u_{xx}+b_1u_x+c_1u_y+d_1u=0,\ (x,y)\in D_1,\ D_1=D\cap(y>0),$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy}+a_2u_{yy}+b_2u_x+c_2u_y+d_2u=0,\ (x,y)\in D_2,\ D_2=D\cap(y<0)$$

в областях D_1 и D_2 соответственно, краевые условия

$$u(0,y)=\varphi_1(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h_1,$$

$$u(0,y)=\chi(y),-h_2\le y\le 0,$$

$$u(x,h_0)=\psi(x),0\le x\le \ell,-h_2\le h_0<0$$

и условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell,$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\chi(y),\psi(x)$ – заданные гладкие функции, h_0 – произвольное действительное число, причем

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^1[0,h_1],\ \chi(y)\in C^2[-h_2,0],\ \psi(x)\in C^2[0,\ell]$$

$$\varphi_1(0)=\chi(0),\ \varphi_1'(0)=\chi'(0),\ \chi(h_0)=\psi(0).$$

Третья глава диссертации посвящена нелокальным задачам для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$u_{xxy}(x,y)=F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y),u_{xx}(x,y),u_{xy}(x,y)), \tag{17}$$

где F – заданная функция.

В **разделе 3.1** третьей главы изучена задача 3.1.1: найти в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,\ 0<y<h\}$ решение уравнения (17), удовлетворяющее условия

$$\int_0^{\chi(y)} T(x,y)u(x,y)dx=E(y),\ \ u(\ell,y)=\varphi(y),\ \ 0\le y\le h,$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,$$

где $T(x,y),\ E(y),\ \varphi(y),\ \tau(x),\ \chi(y)$ – заданные функции.

При выполнении следующих условий относительно заданных функций:

1) $\chi(y),\ E(y),\ \varphi(y)\in C^1[0,h],\ \tau(x)\in C^2[0,\ell],\ 0<\chi(y)\le \ell$;

2) $T(x,y),T_y(x,y)\in C(\overline{D}),\quad \displaystyle\int_0^{\chi(y)}(x-\ell)T(x,y)dx\ne 0$;

3) $F(x,y,u,p,q,z,s)\in C(D\times R^5),\ \max\left|F(x,y,u,p,q,z,s)\right|\le H),\ R^5$ – пятимерное пространство переменных (u,p,q,z,s);

4) $\left|F(x,y,u,p,q,z,s)-F(x,y,\bar u,\bar p,\bar q,\bar z,\bar s)\right|\le L\left(|u-\bar u|+|p-\bar p|+|q-\bar q|+|z-\bar z|+|s-\bar s|\right)$;

5) $\displaystyle\int_0^{\chi(0)} T(x,0)\tau(x)dx=E(0),\ \ \tau(\ell)=\varphi(0)$,

решение задачи 3.1.1 эквивалентно редуцируется к разрешимости операторного уравнения

$$g=Ag, \tag{18}$$

где $g(x,y)=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)$ – вектор функции, $g_1=u(x,y),\ g_2=u_x(x,y),$ $g_3=u_y(x,y),\quad g_4=u_{xx}(x,y),\ g_5=u_{xy}(x,y)$, а компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ определяются следующим образом:

$$A_i g=g_{0i}+\int_0^x K_{i1}F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+\int_0^y K_{i2}F(x,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+$$

$$+\int_0^{\chi(y)} K_{i3}F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+\int_0^{\ell} K_{i4}F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y K_{i5}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+\int_0^{\chi(y)} d\xi\int_0^y K_{i6}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+$$

$$+\int_0^{\ell} d\xi\int_0^y K_{i7}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta,\quad i=\overline{1,5}.$$

Здесь $K_{ij}=0,\ i=\overline{1,5},\ j=\overline{1,7}$ – заданные функции, $g_{01}=u_0(x,y),\ g_{02}=u_{0x}(x,y),$ $g_{03}=u_{0y}(x,y),\ g_{04}=u_{0xx}(x,y), g_{05}=u_{0xy}(x,y).$

Пусть $\|g\|=\max\limits_{1\le i\le 5}\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}|g_i(x,y)|,\ \max\limits_{\overline{i=1,5},\,\overline{j=1,7}}|K_{ij}|\le N$. Если

$$q=NH(3\ell+3\ell h+h)\le M\,, \qquad (19)$$

то оператор А отображает шар $S(g_o,M)=\{g:\|g-g_o\|\le M\}$ в себя.

Если выполняется условие

$$d=LN(3\ell+3\ell h+h)<1, \qquad (20)$$

то оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0,M)$ в себя. Поэтому в силу теоремы С. Банаха в шаре $S(g_0,M)$ существует, и притом только одна неподвижная точка отображения, т.е. существует только одно решение уравнения (18). Определив в шаре $S(g_0,M)$ решение уравнения (18) методом последовательных приближений, построим решение задачи 3.1.1. Таким образом, доказана

Теорема 3.1.1. Если выполняются условия 1) - 5) и (19), (20), то решение задачи 3.1.1 существует и единственно.

В **разделе 3.2** третьей главы изучена однозначная разрешимость з**адачи 3.2.1:** найти в области $D=\{(x,y):0<x<l,0<y<h\}$ решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h,$$

$$u(x,0)+\int_0^h T(x,y)u(x,y)dy=\psi(x),\ 0\le x\le l,$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ T(x,y),\ \psi(x)-$ заданные функции.

В **разделе 3.3** третьей главы методом интегральных уравнений и принципом сжатых отображений доказаны существование и единственность **задачи 3.3.1:** найти решение $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$ уравнения (17), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\,0\le y\le h$$

$$u_x(0,y)+\int_0^\ell T_1(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y),0\le y\le h\,,$$

$$u(x,0)+\int_0^h T_2(x,y)u(x,y)dy=\psi(x),0\le x\le l\,,$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\psi(x),T_1(x,y),T_2(x,y)-$ заданные функции.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы существование и единственность краевых задач для псевдопараболического уравнения третьего порядка в прямоугольных и криволинейных областях.

При исследовании нелокальной задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом использован метод тепловых потенциалов. Изучены свойства тепловых потенциалов двойного слоя.

В задачах склеивания для псевдопараболического уравнения третьего порядка, вырождающегося при $x = 0$, построены и изучены свойства функции Грина, а также получено представление решения через функции Грина.

Построением функции Римана получены достаточные условия разрешимости краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными действительными характеристиками. Изучен ряд свойств функции Римана, которые существенно использованы при разрешимости задачи.

Найдены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. Рассмотрены различные варианты вхождения интегральных членов в нелокальные условия задачи.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Молдояров, У.Д. Нелокальная задача с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] / У.Д. Молдояров // Известия Томского политехнического университета. Математика, физика и механика. – Томск (РФ), 2012. Т.321. №2. – С. 14 – 17.

2. Молдояров, У.Д. Краевая задача для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка с неклассическим граничным условием [Текст] / У.Д. Молдояров // Естественные и математические науки в современном мире. СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международный научно-практической конференции» (РФ), 2016. – С. 124 - 131.

3. Молдояров, У.Д. О задаче сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / У.Д. Молдояров // Естественные и математические науки в современном мире. СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международный научно-практической конференции» (РФ), 2016. – С. 131 - 138.

4. Молдояров, У.Д. Нелокальные краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] / У.Д. Молдояров // Естественные и математические науки в современном мире. СибАК, «Сборник статей по материалам XLVI международный научно-практической конференции» (РФ), 2016. – С. 46 - 52.

5. Молдояров, У.Д. Краевые задачи для уравнения в частных производных третьего порядка с сингулярным коэффициентом [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Исследования по интегро-дифференциальном уравнениям. – Бишкек, 2009. – С.198 - 204.

6. Молдояров, У.Д. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Неклассические уравнения математикой физики и их приложения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. – Ташкент: НУУ им. М. Улукбека, 2014. – С.164 – 165.

7. Молдояров, У.Д. О задаче сопряжения для вырождающегося псевдопараболического и гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Тезисы докладов международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики». – Алматы, 2015. – С. 109 - 110.

8. Молдояров, У.Д. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Научно-практический журнал, Приволжский научный вестник (РФ), №10(62), 2016. – С. 14 - 20.

9. Молдояров, У.Д. О задаче сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Научно-практический журнал, Приволжский научный вестник (РФ), №7(59), 2016 – С. 27 - 33.

10. Moldoyarov, U.D. On conjugation problem for the pseudoparobolic equations of the third order [Текст] / A. Sopuev, U.D. Moldoyarov // Abstracts of the V International Scientific Conference. Bishkek, Kyrgyzctan, 13 September, 2016. – P. 41.

Молдояров Уларбек Дүйшөбековичтин 01.01.02 – «Дифференциялдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн “Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер» темасында жазылган диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: чектик маселе, чек аралык шарттар, жалгаштыруу маселелери, псевдопараболалык теңдеме, Риман функциясы, интегралдык теңдеме, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөөнүн объектиси: псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик жана жалгаштыруу маселелери.

Изилдөөнүн предмети: псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик жана жалгаштыруу маселелеринин корректтүүлүгүн изилдөө.

Изилдөөнүн максаты: псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик жана жалгаштыруу маселелеринин бир маанилүү чечимге ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөө усулдары: изилдөөдө интегралдык теңдемелер назариятынын, Риман функциясы, кысып чагылдыруу принциби, математикалык физиканын теңдемелеринин, функционалдык анализдин жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер назариятынын усулдары пайдаланылды.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

– сингулярдык коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн локалдык эмес маселелердин корректүүлүгү далилденген. Жылуулук потенциалдар методу менен Грин функциясы курулган. Эки катмарлуу жылуулук потенциалдарынын касиеттери үйрөнүлгөн;

– $x=0$ сызыгында кубулган үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн Грин функциясы тургузулган жана анын касиеттери изилденген. Чечимдин Грин функциясы түрүндөгү көрүнүшү алынган;

– ар түрдүү чыныгы характеристикалуу үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелери үчүн чектик маселелердин чечимдеринин бир маанилүү аныкталышынын жеткиликтүү шарттары табылган, үчүнчү тартипеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн Риман функциясы тургузулган жана анын бир катар касеттери үйрөнүлгөн;

– сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн интегралдык шарттары бар локалдык эмес маселелердин бир маанилүү чечилишинин жетишээрлик шарттары табылган. Маселенин локалдык эмес шарттарына интегралдык мүчөнүн камтылышынын ар түрдүү формадагы варианттары каралган.

Изилдөөнүн практикалык мааниси. Жалгаштыруу маселелери катышкан практикалык маселелерди чечүүдө иштеп чыгылган алгоритмди колдонсо болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Молдоярова Уларбека Дуйшобековича на тему: “Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: краевые задачи, граничные условия, задачи сопряжения, псевдопараболическое уравнение, функция Римана, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: краевые задачи и задачи сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Предмет исследования: корректность краевых задач и задачи сопряжений для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Цель исследования: установить достаточные условия однозначной разрешимости краевых задач и задачи сопряжений для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Методы исследования: при исследовании были использованы методы теории интегральных уравнений, функции Римана, принцип сжатых отображений, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

– доказаны существование и единственность решения нелокальной задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом. Методом тепловых потенциалов построена функция Грина. Изучены свойства тепловых потенциалов двойного слоя.

– построены и изучены свойства функции Грина для псевдопараболического уравнения третьего порядка, вырождающегося при $x = 0$. Получены представления решения через функции Грина.

– получены достаточные условия разрешимости краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными действительными характеристиками. Построен и изучен ряд свойств функции Римана для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

– найдены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. Рассмотрены различные варианты вхождения интегральных членов в нелокальные условия задачи.

Практическое значение исследования. Разработанный алгоритм построения решения может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с задачами сопряжения.

ABSTRACT

of Ularbek Duishobekovich Moldoiarov's dissertation on: "Boundary value tasks for pseudo-parabolic equations of the third order", submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the speciality: 01. 01. 02 – «Differential equations, dynamical systems and optimal control»

Key words: boundary value problems, conjugation problems, pseudo-parabolic equation, Riemann's function, integral equation, uniqueness of solution, existence of solution.

The object of study: boundary value problems and conjugation problems for third-order pseudo-parabolic equations.

Subject of research: the correctness of boundary value problems and the conjugation problem for pseudo-parabolic equations of the third order.

Research object: to establish sufficient conditions for the unique resolution of boundary value problems and the conjugation problem for pseudo-parabolic equations of the third order.

Methods applied: the methods of the theory of integral equations, Riemann's functions, the principle of condensed mappings, equations of mathematical physics, functional analysis, and the theory of nonlinear integral equations have been used in the study.

Scientific novelty and theoretical significance of the research:

– the existence and uniqueness of the solution of a nonlocal problem for a pseudo-parabolic equation of the third order with a singular coefficient are proved. The Green's function has been constructed by the method of thermal potentials. The properties of the thermal potentials of a double layer have been analyzed.

– the properties of the Green's function for the third-order pseudo-parabolic equation degenerated at $x=0$ have been constructed and analyzed. Representations of the solution in terms of Green's functions have been obtained.

– sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for pseudo-parabolic equations of the third order with various real characteristics have been obtained. A number of properties of the Riemann function for pseudo-parabolic equations of the third order have been constructed and studied.

– sufficient conditions for the unique solvability of nonlocal problems with integral conditions for nonlinear pseudo-parabolic equations of the third order have been found. Various variants of the occurrence of integral terms in the nonlocal conditions of the task have been considered.

Practical significance of the study. The developed algorithm for constructing the solution can be applied in applications for solving practical tasks related to conjugation problems.

Молдояров Уларбек Дуйшобекович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать:	14.05.2018
Формат: 60x84 1/16.	Бумага офсетная
Объем: 1,25 п.ф.	Тираж: 30 шт.

Редакционно-издательский отдел «Билим» ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.