КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА
ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Кол жазма укугунун негизинде

УДК: 517.956.6

МОЛДОЯРОВ УЛАРБЕК ДҮЙШӨБЕКОВИЧ

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕЛЕР

01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар
жана оптималдык башкаруу»

Физика-математика илимдеринин кандидаты
окумуштуулук даражасын изденип алуу

ДИССЕРТАЦИЯСЫ

Илимий жетекчи: физика-математика илимдеринин
доктору, профессор А. Сопуев

Ош – 2018

МАЗМУНУ

ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨРДҮН ЖАНА НЕГИЗГИ АНЫКТАМАЛАРДЫН ТИЗМЕСИ

- R *– чыныгы сандардын көптүгү;*
- $\forall$ *– "каалагандай ... ";*
- $\cap$ *– көптүктөрдүн кесилиши амалы;*
- $\subset$ *– камтылуу белгиси;*
- $\in$ *– таандык болуу белгиси;*
- $\setminus$ *– теоретикалык-көптүктүк кемитүү;*
- $=$ *– барабардык белгиси;*
- $\neq$ *– барабар эместик белгиси;*
- $\equiv$ *– теңдеш барабардык белгиси;*
- D *– тегиздиктеги ачык чектелген бир байланыштуу аймак;*
- D_1, D_2 $-D$ *аймагынын камтылуучу аймактары;*
- $\overline{D}$ *– тегиздиктеги туюк чектелен бир байланыштуу аймак;*
- $\overline{D_1}, \overline{D_2}$ $-$ $\overline{D}$ *аймагынын туюк камтылуучу аймактары;*
- L *– дифференциалдык оператор;*
- $k = \overline{1,n}$ $-k$ *өзгөрүлмөсү 1 ден* n *ге чейинки маанилерди кабыл алат;*
- $C^{(n)}(D)$ $-D$ *аймагында аныкталган жана* n *- тартипке чейинки,* n *- кошо, туундуларга ээ болгон функциялардын классы;*
- C^{n+m} *–үзгүлтүксүз* $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s \, (r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m)$ *туундуларына ээ болгон функциялардын классы;*
- $Q = \{(x,\xi): 0 < x < \ell, 0 < \xi < h\}$ – *тегиздиктеги* $0 < x < \ell, 0 < \xi < h$ *тик бурчтугунун ички* (x,ξ) *чекиттеринин көптүгү;*
- $\|K\|_{C(\overline{Q})} = \max\limits_{(x,\xi)\in\overline{Q}} |K(x,\xi)|$ – K *нын нормасы анын модулунун* $\overline{Q}$ *дагы максималдык мааниси катары.*

КИРИШҮҮ

Теманын актуалдуулугу. Жаракалуу-күкүмдүү чөйрөлөрдө суюктукту фильтрлөө процессин [5], көп катмарлуу чөйрөлөрдө үстүнкү бети эркин болгон жер алдындагы суулардын кыймылдарын [72], аралаш чөйрөдөгү кыртыш нымынын кыймылын [67] жана жылуулук алмашуу кубулуштарын изилдөө [35] учурунда пайда болуучу прикладдык мүнөздөгү маселелердин математикалык моделдештирилиши үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн түз, тескери жана локалдык эмес маселелердин изилденишине алынып келинет.

А.Ф. Чудновскийдин монографиясында [67] кыртыштагы нымдын кыймылынын закон-ченемдүүлүктөрүн окуп үйрөнүүдө диффузиянын модификацияланган теңдемеси (Аллердин теңдемеси)

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial x}+A\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x}\right]$$

пайдаланылат, мында W – нымдуулук, x – тереңдик, t – убакыт, $D(W)=K\dfrac{\partial\psi}{\partial W}$ – диффузия коэффициенти, K – нымдуулукту өткөрүмдүүлүк коэффициенти, ψ – нымдуулук потенциалы, A – вариацияланууучу коэффициент.

Псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер D. Colton дун [72], А.М. Нахушевдин [44, 45], А.И. Кожановдун [30], М.С. Салахитдиновдун [52], Т.Д. Джураевдин [15], М.Х. Шхануковдун [68], В.И. Жегаловдун, Е.А. Уткинанын, М.Н. Мироновдун [20, 21], К.Г. Кожобековдун [32], Н.С. Поповдун [49], В.А. Водахованын [11] жана башкалардын эмгектеринде изилденген.

Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер Б.С. Аблабековдун [1], Э. Атамановдун, М.Ш. Мамаюсуповдун [3] жана башкалардын эмгектеринде каралган.

Жекече туундулуу теңдемелердин теориясындагы маанилүү бөлүмдөрдүн бири болуп экинчи, үчүнчү жана жогорку тартиптеги кубулма псевдопараболалык теңдемелер үчүн корректтүү чектик маселелерди коюу жана изилдөө эсептелет.

Экинчи тартиптеги кубулма псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер M. Gevreyдин [73], O. Arenaнын [70], G. Talentiнин [78], C.D. Paganiнин [79, 80], Г.Н. Смирнованын [54], Ю.П. Горьковдун [12, 13] эмгектеринде каралган. Сингулярдык коэффициенттерге ээ болгон экинчи тартиптеги параболалык теңдемелер S. Kepinskiнин [75, 76], И.Е. Егоровдун [19], V. Alexiadesтин [69] жана башкалардын эмгектеринде изилденген.

Бирок, үчүнчү тартиптеги кубулма параболалык теңдемелер үчүн баштапкы-чектик маселелер аз изилденген.

Бул эмгекте үчүнчү тартиптеги кубулма псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер жана ар түрдүү мүнөздөмөлөргө ээ болгон үчүнчү тартиптеги сызыктуу жана сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелери окуп үйрөнүлөт, алар эмгектин актуалдуулугун көрсөтөт.

Диссертациянын темасынын мамлекеттик программалар менен байланышы. Диссертация КР ББжИМ Ош мамлекеттик университетинин Фундаменталдык жана прикладдык изилдөөлөр институтунда «Гидроаэродинамиканын, химиялык кинетиканын, жылуулук-масса алмашуу ж.б. кубулуштардын математикалык моделдерин изилдөө» темасындагы долбоордун чегинде аткарылды, мамлекетик каттоо № 0005721, 20.04.2012.

Изилдөөнүн максаты жана маселелери.

- Сингулярдык коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн локалдык эмес маселенин чечиминин жашашын жана жалгыздыгын далилдөө.
- Сингулярдык коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги

псевдопараболалык теңдеме үчүн Грин функциясын тургузуу. Кош катмар жылуулук потенциалдарынын касиеттерин изилдөө.

- $x=0$ сызыгында кубулуучу үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн Грин функциясын тургузуу жана анын касиеттерин окуп үйрөнүү. Грин функциясы аркылуу чечимдин көрсөтүлүшүн алуу.
- Ар түрдүү чыныгы мүнөздөмөлөргө ээ болгон үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн жалгаштыруу шарттары $y=0$ сызыгында берилген учурда чектик маселелердин чечимдерин тургузуу. Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн Риман функциясын тургузуу жана касиеттерин изилдөө.
- Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн интегралдык шарттарга ээ болгон локалдык эмес маселелердин бир маанилүү чечилишинин жетишээрлик шарттарын орнотуу. Маселенин локалдык эмес шарттарына интегралдык мүчөлөрдүн киришинин ар түрдүү варианттарын кароо.

Изилдөө усулу. Теңдемелердин чечимдеринин көрсөтүлүштөрүн тургузууда теңдеменин тартибин төмөндөтүү, жылуулук потенциалдары жана Римандын функциясы усулдары пайдаланылды. Чечимдердин жашашын жана жалгыздыгын далилдөө үчүн чектик маселелерди Фредгольм же Вольтерра тибиндеги интегралдык теңдемелердин жана алардын системаларынын чечилишине редукциялоо, ошондой эле кысып чагылдыруу принциби жана удаалаш жакындаштыруу усулдары колдонулду.

Алынган жыйынтыктардын илимий жаңылыгы. Негизги илимий жыйынтыктар:

1. Сингулярдык коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик маселенин чечиминин жашашын жана жалгыздыгын далилдөө. Жылуулук потенциалдары үчүн секириктердин формула-

сын келтирип чыгаруу жана Гриндин функциясын тургузуу.

2. $x=0$ сызыгында кубулуучу үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин чечиминин көрсөтүлүшүн Гриндин функциясы аркылуу алуу. $x=0$ жалгаштыруу сызыгына ээ болгон үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чечимдеринин жашашын жана жалгыздыгын далилдөө.

3. $y=0$ жалгаштыруу сызыгына ээ болгон ар түрдүү чыныгы мүнөздөмөлүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин бир маанилүү чечилишин далилдөө. Кичине мүчөлөргө ээ болгон үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн Римандын функциясын тургузуу жана касиеттерин далилдөө.

4. Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн интегралдык шарттарга ээ болгон локалдык эмес маселелердин бир маанилүү чечилишинин жетиштүү шарттарын табуу. Маселенин локалдык эмес шарттарына интегралдык мүчөлөрдүн киришинин ар түрдүү варианттарын изилдөө.

Алынган жыйынтыктардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү. Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик жана жалгаштыруу маселелерин изилдөө менен байланышкан алынган жыйынтыктар жекече туундулардагы экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана андан жогорку тартиптеги теңдемелер үчүн чектик маселелердин теориясынын өнүгүшү үчүн, ошондой эле аралаш чөйрөдө жылуулук алмашуу кубулушун жана чукул өзгөргөн физикалык касиеттерге ээ болгон түрдүү тектүү чөйрөлөрдөгү механикалык жана электрдик кубулуштарды моделдөөгө, жана ошондой эле жаракалуу породалардагы калыптанбай калган (неустановившейся) фильтрлөө маселелерин жана бир тектүү эмес жана бөлүкчө-бир тектүү чөйрөлөрдө болуп өтүүчү процесстерди изилдөөгө анык бир салымын кошо алат.

Коргоого алынып чыгылуучу негизги натыйжалар:

- Сингулярдык коэффициенттүү псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик маселенин чечиминин жашашын жана жалгыздыгын далилдөө. Жылуулук потенциалдары үчүн секириктердин формуласын далилдөө жана Гриндин функциясын тургузуу;
- $x=0$ жалгаштыруу сызыгына ээ болгон үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чечимдеринин жашашын жана жалгыздыгын далилдөө. $x=0$ сызыгында кубулуучу үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин чечиминин көрсөтүлүшүн Гриндин функциясы аркылуу алуу;
- $y=0$ жалгаштыруу сызыгына ээ болгон ар түрдүү чыныгы мүнөздөмөлүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин бир маанилүү чечилишинин жетишерлик шарттарын далилдөө. Кичине мүчөлөргө ээ болгон үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн Римандын функциясын тургузуу жана касиеттерин келтирип чыгаруу;
- үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн интегралдык шарттарга ээ болгон локалдык эмес маселелердин бир маанилүү чечилишинин жетиштүү шарттарын издөө. Маселенин локалдык эмес шарттарына интегралдык мүчөлөрдүн киришинин ар түрдүү варианттарын кароо.

Иштин апробациясы. Диссертациянын негизги жагдайлары жана жыйынтыктары эл аралык, республикалык жана регионалдык илимий–практикалык конференцияларда баяндалган жана илимий эмгектердин жыйнактарында жарыяланган:

- «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» республикалык илимий конференция. Ташкент, 2014-ж., 23-25 - октябрь.

- «Актуальные проблемы математики и информатики», Казак республикасынын УИАнын академиги К.А. Касымовдун 80 жылдыгына арналган илимий конференция, Алматы, 2015 -ж.
- Кыргыз республикасынын УИАнын академиги М.И. Иманалиев 85 жылдыгына арналган эл аралык илимий конференция, Бишкек, 2016-ж.

Диссертациялык изилдөөлөрдүн айрым натыйжалары «Уравнения в частных производных» семинарында, жетекчиси - ф.-м.и. д., профессор А. Сопуев (Ош ш., 2012-2018-жж.); ЖОЖдор аралык «Актуальные проблемы математики и информатики» илимий семинарында, жетекчиси - КР УИА мүч.корр., ф.-м.и. д., профессор К. Алымкулов (Ош ш., 2012-2018 -жж); дифференциалдык теңдемелер боюнча семинарларда, ф.-м.и. д., профессор К.С. Алыбаев (Жалал-Абад ш., ЖАМУ. 2013 – 2017 -жж.) баяндалып, талкууланган.

Диссертациянын темасы боюнча жарыяланган эмгектер. Диссертация-нын темасы боюнча 7 илимий макала: [37], [38], [39], [40], [41], [44], [45] жана 3 баяндамалардын тезистери [42, 43, 78] жарык көргөн. Жалпысынан 150 балл топтолгон.

Биргелешкен эмгектердеги жаратмандын жеке салымы. Биргелешкен [41], [44], [45] эмгектеринде илимий жетекчиге маселелердин коюлушу таандык, ал эми жаратманга – чечимдердин жашашы жана жалгыздыгы теоремаларынын далилдениши, негизги жыйынтыктардын алынышы таандык.

Диссертациянын структурасы, көлөмү жана кыскача мазмуну: Диссертация киришүүдөн, 7 бөлүмдү кармаган үч баптан, 82 аталыштан турган пайдаланылган илимий булактардын тизмесинен жана корутундудан турат. Бөлүмдөр кош номерлөөгө ээ: биринчи санарип баптын номерин, экинчиси - бөлүмдүн номерин көрсөтөт. Теоремалардын, формулалардын, мисалдардын номерлениши - үчтүк: биринчи санарип баптын номерин, экинчиси - бөлүмдүн номерин, үчүнчүсү - бөлүмдөгү иреттик номерди көрсөтөт. Тексттин көлөмү 102 бет.

Учурдан пайдаланып, илимий жетекчим - физика-математика илимдеринин доктору, профессор А. Сопуевге маселелерди коюп бергендиги, баалуу жана пайдалуу кеңештери, такай көңүл буруп жана иштин жыйынтыктырын талкуулап берип тургандыгы үчүн терең ыраазычылыгымды жана чын дилден сый-урматымды билдирем.

1-БАП. АДАБИЯТТАРДЫН ЖАНА ЖЫЙЫНТЫКТАРДЫН БАЯНДАМАЛАРЫ

Биринчи бапта иштин темасына жакын болгон адабияттардын жана жыйынтыктардын баяндамасы келтирилет, жана бул иште алынган негизги жыйынтыктар келтирилген.

1.1. Диссертациянын темасына жакын болгон адабияттардын жана жыйынтыктардын баяндамасы

Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн баштапкы-чектик маселелер Г.И. Баренблаттын, Ю.П. Желтовдун, И.Н. Кочинанын [5], В.А. Водахованын [11], М.Х. Шхануковдун [68], А.И. Кожановдун [30], А.И. Кожановдун, Н.Н. Поповдун [31], D. Colton дун [72], W. Rundell дин [82] жана башкалардын эмгектеринде изилденген.

Баренблат-Желтов-Кочинанын теңдемеси бир ченемдүү учурда төмөндөгүдөй көрүнүштө жазылат [5]

$$(\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u_t = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ал илешкээк-серпилгич суюктукту жаракалуу-күкүм чөйрөдө фильтрлөөнү моделдейт, мында α жана λ – чөйрөнү мүнөздөөчү чыныгы параметрлер.

М.Х. Шхануков [68] эмгегинде Риман функциясы усулу менен төмөндөгүдөй көрүнүштөгү теңдеме үчүн локалдык жана локалдык эмес чектик маселелер окуп үйрөнүлгөн

$$u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -q(x,t)$$

В.И. Жегалов жана Уткина [20] тарабынан көз каранды эмес эки өзгөрүлмөлүү үчүнчү тартиптеги

$$U_{xxy} + aU_{xx} + bU_{xy} + cU_x + dU_y + eU = f$$

көрүнүштөгү теңдеме үчүн Римандын функциясы интегралдык теңдеменин чечими бир катар жекече учурларында Римандын функциясынын айкын көрүнүшүн тургузууга мүмкүнчүлүк берүүчү жол катары тургузулган.

В.И. Жегалов менен А.Н. Мироновдун [21] монографиясында чоң жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер боюнча изилдөөлөрдүн жыйынтыктары келтирилген. Чоң жекече туундулуу жогорку тартиптеги сызыктуу теңдемелер үчүн мүнөздөөчү чектик маселелер Е.А. Уткинанын [64] эмгегинде изилденген. Үстөмдүккө ээ болгон жекече туундулуу теңдемелер үчүн чектик маселелер А.Н. Мироновдун [36] эмгегинде каралган.

К.Г. Кожобековдун эмгегинде [32] типтин бир өзгөрүш сызыгына ээ болгон үчүнчү тартиптеги төмөндөгүдөй көрүнүштөгү аралаш псевдопараболалык-гиперболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер каралган.

$$0=\begin{cases} u_{xxx}-u_{y}+b_{1}(x,y)u_{x}+d_{1}(x,y)\,u, \quad y>0, \\ u_{xxy}+b_{2}(x,y)u_{x}+c_{2}(x,y)u_{y}+d_{2}(x,y)u, \; y<0. \end{cases}$$

Б.С. Аблабековдун [1] жана Э.Р. Атамановдун, М.Ш. Мамаюсуповдун [3] эмгектеринде үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер изилденген.

Диссертациялык иште кубулуучу жана сызыктуу эмес үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы интегралдык теңдемелер, Гриндин функциясы жана кысылган чагылдыруулар усулдары менен изилденген.

1.2. Диссертацияда алынган жыйынтыктардын баяндамасы

Диссертациялык иште төмөндөгүдөй көрүнүштөгү

$$u_{xxy}+\alpha u_{xx}+\beta u_{xy}+\gamma u_{yy}+au_{x}+bu_{y}+cu=f(x,y), \qquad (1)$$

үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер каралган, бул жерде $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,f$ – x жана y терден көз каранды болгон берилген функциялар.

(1) теңдеме чоң туундуларга карата мүнөздөөчү теңдеменин тамырларынын бири эки эселүү, ал эми экинчиси – жөнөкөй болгон учурдагы каноникалык көрүнүш болуп саналат [17]. (1) көрүнүштөгү теңдеме көбүнчө псевдопараболалык [50] деп аталат.

Экинчи баптын **2.1-бөлүмүндө** $D=\{(x,y):0<x<\ell,0<y<h\}$ аймагында (1) теңдеме $\alpha=0,\beta=-\frac{1}{x}$ болгон учурда:

$$u_{xxy}-\frac{1}{x}u_{yy}+\beta u_{xy}+au_{x}+bu_{y}+cu=f(x,y) \qquad (2)$$

каралган жана төмөнкү маселе изилденген.

2.1.1-маселе. D аймагында (2) теңдемесин,

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le h, \qquad (3)$$

$$u(x,0)=\tau(x),u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (4)$$

чектик жана баштапкы шарттарын канааттандырган $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D),u_{xxy}\in C(D)$ функциясын табуу керек, мында $\beta,a,b,c,f,\varphi_1(y),\varphi_2(y),\tau(x),\nu(x)$ – берилген функциялар жана

$$\beta(x,y),a(x,y),b(x,y),c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{D}),$$
$$\varphi_i(y)\in C^2[0,h](i=1,2),\tau(x)\in C^2[0,\ell],\nu(x)\in C^1[0,\ell],\ f(x,y)\in C(\overline{D}), \qquad (5)$$
$$\varphi_1(0)=\tau(0),\varphi_2(0)=\tau(\ell),\ \varphi_1'(0)=\nu(0),\ \varphi_2'(0)=\nu(\ell).$$

Маселени чечүү үчүн $u_y(x,y)=z(x,y)$ белгилөөсүн киргизип, бул жерде $z(x,y)$ - жаңы белгисиз функция, (2)-(4) төн

$$L(u) \equiv z_{xx} - \frac{1}{x} z_y = F, \tag{6}$$

мында $F = -\beta z_x - au_x - bz - cu + f(x,y)$, теңдемесин жана төмөнкү биринчи чектик шарттарды

$$z(0,y) = \varphi_1'(y),\ \ z(\ell,y) = \varphi_2'(y),\ \ 0 \le y \le h,$$
$$z(x,0) = \nu(x),\ \ 0 \le x \le \ell$$

канааттандыруучу шарттары $z(x,y)$ функциясын табуу маселесине келебиз.

Бул маселенин чечиминин көрсөтүлүшүн алуу үчүн (6) теңдеменин

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2} z I_1(z)\, e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}},\ z = 2\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{y-\eta},$$

көрүнүшүндө көрсөтүлүүчү фундаменталдык чечиминин жардамында Гриндин функциясын тургузабыз, мында $I_1(z)$ – Бесселдин биринчи түрдөгү жорума (мнимый) аргументтүү функциясы.

Гриндин функциясын

$$G(x,y;\xi,\eta) = \vartheta(x,y;\xi,\eta) - w(x,y;\xi,\eta),$$

көрүнүшүндө издейбиз, мында

$$w(x,y;\xi,\eta) = W[\sigma_1](\xi,\eta) + W[\sigma_2](\xi,\eta),$$

ал эми $W[\sigma_1](\xi,\eta) = \int\limits_{\eta}^{y} \vartheta_x(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt,\ \ W[\sigma_2](\xi,\eta) = \int\limits_{\eta}^{y} \vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta) \times \sigma_2(t;x,y)dt$

- кош катмар потенциалдары, $\sigma_1(t;x,y), \sigma_2(t;x,y)$ – белгисиз тыгыздыктар. Мейли $\mathrm{AA}_1 = \{(\xi,\eta) : \xi = 0,\ 0 < \eta < h\}$, $\mathrm{BB}_1 = \{(\xi,\eta) : \xi = \ell,\ 0 < \eta < h\}$ болсун. Андан ары төмөнкү леммалар далилденген.

2.1.1-лемма. *Эгерде* $\sigma_1(\eta;x,y) \in C[0,h], \forall (x,y) \in D$ *болсо, анда* $(\xi,\eta) \in D, (\xi_0,\eta_0) \in AA_1$ *болгондо төмөндөгүдөй пределдик катыш орун алат*:

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} W[\sigma_1](\xi,\eta) = \sigma_1(\eta_0;x,y).$$

2.1.2-лемма. *Эгерде* $\sigma_2(\eta;x,y) \in C[0,h], \forall (x,y) \in D$ *болсо, анда*

$(\xi,\eta)\in D,(\xi_0,\eta_0)\in BB_1$ *болгон учурда төмөнкү пределдик катыш орун алат:*

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} W[\sigma_2](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta_0;x,y)+\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0),$$

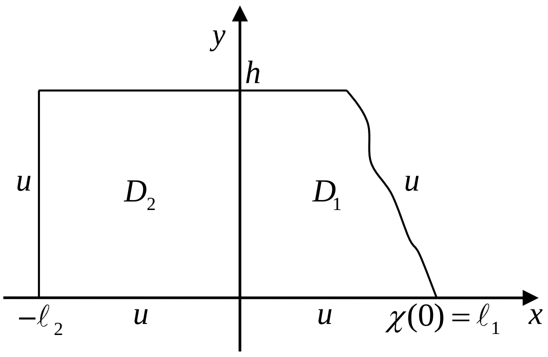
мында $\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0)=\int\limits_{\eta}^{y}\vartheta_x(\ell,t;\xi_0,\eta_0)\sigma_2(t;x,y)dt$ деген $W[\sigma_2](\xi,\eta)$ кош катмар потенциалынын BB_1 кесиндисиндеги түз мааниси.

Жылуулук потенциалдарынын касиеттерин пайдаланып $\sigma_1(\eta;x,y),\ \sigma_2(\eta;x,y)$ белгисиз тыгыздыктары үчүн бир маанилүү чечилишке ээ болуучу Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин системасын алабыз, жана ошону менен Гриндин функциясын аныктайбыз. Гриндин функциясынын жардамында $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $z(x,y)$, $z_x(x,y)$ функциялары үчүн Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин туюк системасын алабыз. Берилген функциялардын касиеттеринин негизинде теңдемелер системасынын ядролору күчсүз өзгөчөлүккө ээ болушат, жана ошону менен теңдемелердин көрсөтүлгөн системасы үчүн удаалаш жакындаштыруу усулу колдонумдуу болот жана 2.1.1-маселенин чечимин бир маанилүү түрдө аныкталат.

Төмөнкү теорема далилденген.

2.1.1-теорема. Эгерде (5) шарттары аткарылса, анда 2.1.1-маселе жалгыз чечимге ээ болот.

Биринчи баптын **2.2-бөлүмүндө** $x=-\ell_2(\ell_2>0),\ y=0,\ x=\chi(y),\ 0\le y\le h,$ $y=h,$ мында $\chi(y)$ – монотондуу өсүүчү жана $\chi(0)=\ell_1(\ell_1>0), \chi(h)=\ell_3,\ 0<\ell_3\le\ell_1$ болгон функция, сызыктары менен чектелген D аймагында (1-сүр.)



1-сүрөт

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} - x^p u_{yy} = 0, (x,y) \in D_1, \tag{7}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, (x,y) \in D_2, \tag{8}$$

теңдемелери үчүн жалгаштыруу маселесин карайбыз, мында $D_1 = D \cap (x > 0), D_2 = D \cap (x < 0), p = const > -1$.

Коэффициенттер жана берилген функцияларга карата төмөндөгүдөй шарттар аткарылат деп эсептейбиз:

$$\begin{gathered} a \in C(\overline{D_2}) \cap C^{1+0}(D_2), b \in C(\overline{D_2}) \cap C^{0+1}(D_2), c \in C(\overline{D_2}), \\ \chi(y) \in C[0,h] \cap C^1(0,h), \forall y \in [0,h] : \ell_3 \le \chi(y) \le \ell_1, \chi(y) \le 0. \end{gathered} \tag{9}$$

2.2.1-маселе. D_1 жана D_2 аймактарында тиешелүү түрдө (7) жана (8) теңдемелерин,

$$u(\chi(y), y) = \varphi_1(y), \;\; u(-\ell_2, y) = \varphi_2(y), \;\; 0 \le y \le h,$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \;\; u_y(x,0) = \psi_2(x), \;\; 0 \le x \le \ell_1,$$

чектик шарттарын

$$u(x,0) = \psi_3(x), \;\; -\ell_2 \le x \le 0,$$

баштапкы шартын канааттандырган $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^2(D_1) \cup C^{2+1}(D_2)]$ фцнкциясын табуу керек, мында $\varphi_i (i = 1,2), \psi_j (j = \overline{1,3})$ - берилген жылмакай функциялар, болгондо да

$$\begin{gathered} \psi_1 \in C^2[0,\ell_1], \psi_2 \in C^1[0,\ell_1], \psi_3 \in C^1[-\ell_2,0], \varphi_i \in C^1[0,h](i = 1,2) \\ \psi_1(0) = \psi_3(0), \varphi_2(0) = \psi_3(-\ell_2), \psi_1(\ell_1) = \varphi_2(0). \end{gathered} \tag{10}$$

Мындай белгилөөлөрдү киргизебиз

$$u(-0,y) = u(+0,y) = \tau(y), \;\; u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = \nu(y), 0 \le y \le h,$$

мында $\tau(y), \nu(y)$ - азырынча белгисиз функциялар.

2.2.1–маселесин чечиш үчүн (7) теңдемесин мындай көрүнүштө көрсөтөбүз

$$u_{xx} - x^p u_y = \omega(x),$$

мында $\omega(x) = \psi_1''(x) - x^p \psi_2(x)$ – белгилүү функция, жана Гриндин $G_2(x, y; \xi, \eta)$ функциясы аркылуу маселенин чечиминин D_1 аймагындагы көрсөтүлүшүн алабыз

$$\begin{aligned} u(x,y) = \int_0^{\ell_1} \xi^p G_2(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi - \int_0^y G_2(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta - \\ - \int_0^y G_{2\xi}(x,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y d\eta \int_0^{\chi(\eta)} G_2(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{11}$$

мында $\qquad G_2(x,y;\xi,\eta) = U_2(x,y;\xi,\eta) - w(x,y;\xi,\eta),$

$$U_2(x,y;\xi,\eta) = \frac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)} I_{-1/q}\left(2\frac{x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right) e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}, \; q = p+2\,.$$

$x = 0$ болгондо (11) ден $\tau(y)$ менен $\nu(y)$ тин ортосундагы катышты алабыз:

$$\tau(y) = -\kappa\int_0^y \frac{\nu(\eta)d\eta}{(y-\eta)^{1-1/q}} + \int_0^y w(0,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta + \tau_0(y), \tag{12}$$

$$\kappa = \frac{1}{q^{1-1/p}\Gamma(1-\frac{1}{p})}, \;\; \tau_0(y) = \int_0^{\ell_1} \xi^p G_2(0,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi - \int_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta -$$

$$- \int_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y d\eta \int_0^{\chi(\eta)} G_2(0,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi \;\; .$$

2.2.1-маселенин D_2 аймагындагы чечимин Римандын $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ функциясы аркылуу төмөндөгүдөй көрүнүштө көрсөтөбүз

$$\begin{aligned} u(x,y) = \vartheta_\xi(x,y;0,y)\tau(y) - \vartheta(x,y;0,y)\nu(y) - \\ - \int_0^y [\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) + a(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta)]\tau(\eta)d\eta + \\ + \int_0^y \vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta + u_0(x,y), \end{aligned} \tag{13}$$

мында

$$u_0(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;x,0)\psi_3(x)+\vartheta(x.y;0,0)\psi_3^1(0)-\vartheta_\xi(x.y;0,0)\psi_3(0)-$$
$$-\int_0^x[\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)]\psi_3(\xi)d\xi.$$

Төмөндөгү лемма орун алат.

2.2.1-лемма. Эгерде

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}:b(x,y)\le 0, \tag{14}$$

болсо, анда

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}\wedge\forall\xi\in[x,0]:\vartheta(x,y;\xi,y)\ge\xi-x\ge 0.$$

(13) төн $\tau(y)$, $\nu(y)$ терге карата мындай катышты алабыз

$$\nu(y)=B(y)\tau(y)+\int_0^y H(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\nu_0(y). \tag{15}$$

$\nu(y)$ ти жоготуп (12) жана (15) тен $\tau(y)$ үчүн төмөндөгү интегралдык теңдемени алабыз

$$\tau(y)=-\kappa\int_0^y\frac{B(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}\tau(\eta)d\eta+\int_0^y K(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+g(y), \tag{16}$$

мында $K(y,\eta)=w(0,y;0,\eta)B(y)-\int_\eta^y\left[\frac{\kappa H(\eta_1,\eta)}{(y-\eta_1)^{1-1/q}}-w(0,y;0,\eta_1)H(\eta_1,\eta)\right]d\eta_1,$

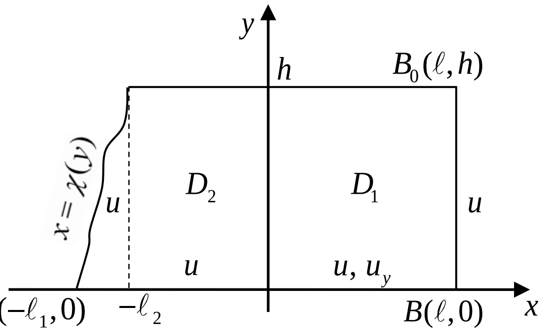
$$g(y)=\tau_0(y)-\int_0^y\left[\frac{\kappa}{(y-\eta)^{1-1/q}}-\omega(0,y;0,\eta)\right]\nu_0(\eta)d\eta.$$

Демек ошентип, 2.2.1-маселенин чечилиши эквиваленттүү түрдө жалгыз үзгүлтүксүз чечимге ээ боло турган Вольтерранын күчсүз ядрого ээ болгон экинчи түрдөгү интегралдык (16) теңдемесинин чечилишине редуцирленди.

Ошентип төмөнкү теорема далилденди.

2.2.1-теорема. Эгерде (9), (10) жана (14) шарттары аткарылса, анда 2.2.1-маселесинин чечими жашайт жана жалгыз болот.

Экинчи баптын **2.3- бөлүмүндө** D аймагында (2-сүр.) 2.1.3-маселенин бир маанилүү чечилиши тургузулган:



2-сүрөт

D_1 аймагында,

$L_1(u) \equiv u_{xxy} - x^{\rho} u_{yy} + d(x,y)u = 0, (x,y) \in D_1$

теңдемесин,

$u(x,0) = \psi_1(x), u_y(x,0) = \psi_2(x), 0 \le x \le \ell,$

баштапкы шарттарын,

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le h,$$

чек аралык шартын канааттандырган $u(x,y) \in C(\overline{D}_1) \cap C^2(D_1) \cap C^{2+1}(D_1)$ функциясын жана D_2 аймагында

$$L_2(u) = u_{xxy} + \beta(x,y)u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0,\ (x,y) \in D_2,$$

теңдемесин,

$$u(x,0) = \psi_3(x),\ -\ell_1 \le x \le 0,$$

баштапкы шартын,

$$u(\chi(y), y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h,$$

чек аралык шартын, ошондой

$$u(-0,y) = u(+0,y),\ u_x(-0,y) = u_x(+0,y),\ 0 \le y \le h,$$

жалгаштыруу шарттарын канааттандырган $u(x,y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^{2+1}(D_2)$ функциясын табуу керек, мында $\varphi_i(y)(i=1,2),\ \varphi_j(x)(j=\overline{1,3})$ – берилген жылмакай функциялар, болгондо да

$$\varphi_i(y) \in C^1[0,h](i=1,2),\ \psi_1(x) \in C^2[0,\ell],$$
$$\psi_2(x) \in C^1[0,\ell],\ \psi_3(x) \in C^1[-\ell_1, 0],$$

$\psi_1(0) = \psi_3(0),\ \psi_1'(0), = \psi_3'(0),\ \psi_1(-\ell_1) = \varphi_2(0),\ \psi_1(\ell) = \varphi_1(0).$

Экинчи баптын **2.4-бөлүмүндө** $D = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_2 < y < h_1\}$ $(\ell, h_1, h_2 > 0)$ аймагында Грин функциясы жана интегралдык теңдемелер усулдары менен 2.4.1-маселенин $u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)]$

функциясынын аныктамасына камтылуучу, D_1 жана D_2 аймактарында тиешелүү түрдө

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} + a_1 u_{xx} + b_1 u_x + c_1 u_y + d_1 u = 0, \ (x,y) \in D_1, \ D_1 = D \bigcap (y > 0),$$

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} + a_2 u_{yy} + b_2 u_x + c_2 u_y + d_2 u = 0, \ (x,y) \in D_2, \ D_2 = D \bigcap (y < 0),$$

теңдемелерин,

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(\ell,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h_1,$$

$$u(0,y) = \chi(y), -h_2 \le y \le 0,$$

$$u(x,h_0) = \psi(x), 0 \le x \le \ell, -h_2 \le h_0 < 0$$

чектик шарттарын жана

$$u(x,-0) = u(x,+0), u_y(x,-0) = u_y(x,+0), 0 \le x \le \ell,$$

жалгаштыруу шарттарын канааттандыруучу чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген, мында $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \chi(y), \psi(x)$ – берилген жылмакай функциялар, h_0 - каалагандай чыныгы сан, болгондо да

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0,h_1], \ \chi(y) \in C^2[-h_2,0], \psi(x) \in C^2[0,\ell],$$

$$\varphi_1(0) = \chi(0), \varphi_1'(0) = \chi'(0), \ \chi(h_0) = \psi(0).$$

Диссертациядагы **үчүнчү бап** жекече туундулуу үчүнчү тартиптеги төмөндөгүдөй көрүнүштөгү

$$u_{xxy}(x,y) = F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y),u_{xx}(x,y),u_{xy}(x,y)), \tag{17}$$

сызыктуу эмес теңдемелер үчүн коюлган локалдык эмес маселелерге арналган, бул жерде F – берилген функция.

Үчүнчү баптын **3.1-бөлүмүндө** төмөндөгү маселе изилденген.

3.1.1-маселе. $D = \{(x,y): 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ аймагында (17) теңдемесинин

$$\int_0^{\chi(y)} T(x,y)u(x,y)dx = E(y), \ \ u(\ell,y) = \varphi(y), \ \ 0 \le y \le h,$$

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le \ell,$$

шарттарын канааттандырган чечимин табуу керек, бул жерде

$T(x,y), E(y), \varphi(y), \tau(x), \chi(y)$ – берилген функциялар.

Берилген функцияларга карата төмөнкү шарттар аткарылган кезде:

1) $\chi(y), E(y), \varphi(y)\in C^1[0,h], \tau(x)\in C^2[0,\ell], 0<\chi(y)\le\ell$;

2) $T(x,y),T_y(x,y)\in C(\overline{D}),\quad \int\limits_0^{\chi(y)}(x-\ell)T(x,y)dx\ne 0$;

3) $F(x,y,u,p,q,z,s)\in C(D\times R^5),\ max|F(x,y,u,p,q,z,s)|\le H),\ R^5$ – бул

(u,p,q,z,s); өзгөрүлмөлөрүнүн беш ченемдүү мейкиндиги

4) $|F(x,y,u,p,q,z,s)-F(x,y,\bar u,\bar p,\bar q,\bar z,\bar s)|\le L(|u-\bar u|+|p-\bar p|+|q-\bar q|+|z-\bar z|+|s-\bar s|)$;

5) $\int\limits_0^{\chi(0)}T(x,0)\tau(x)dx=E(0),\ \tau(\ell)=\varphi(0)$,

3.1.1-маселесинин чечилиши эквиваленттүү түрдө төмөндөгү оператордук

$$g=Ag, \tag{18}$$

теңдемесинин чечилишине редуцирленет, мында $g(x,y)=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)$ –функциянын вектору, $g_1=u(x,y),\ g_2=u_x(x,y)$, $g_3=u_y(x,y),\ g_4=u_{xx}(x,y),\ g_5=u_{xy}(x,y)$, ал эми $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ операторунун компоненттери мындайча аныкталат:

$$A_ig=g_{0i}+\int\limits_0^x K_{i1}F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+\int\limits_0^y K_{i2}F(x,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{\chi(y)}K_{i3}F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+\int\limits_0^{\ell}K_{i4}F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y K_{i5}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+\int\limits_0^{\chi(y)}d\xi\int\limits_0^y K_{i6}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{\ell}d\xi\int\limits_0^y K_{i7}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta,\quad i=\overline{1,5}.$$

Бул жерде $K_{ij}=0,\ i=\overline{1,5},\ j=\overline{1,7}$ – берилген функциялар, $g_{01}=u_0(x,y)$, $g_{02}=u_{0x}(x,y),\ g_{03}=u_{0y}(x,y),\ g_{04}=u_{0xx}(x,y), g_{05}=u_{0xy}(x,y)$.

Мейли $\|g\|=\max\limits_{1\le i\le 5}\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}|g_i(x,y)|,\ \max\limits_{i=\overline{1,5},\,j=\overline{1,7}}|K_{ij}|\le N$ болсун. Эгерде

$$q=NH(3\ell+3\ell h+h)\le M, \tag{19}$$

болсо, анда А оператору $S(g_o, M) = \{g : \|g - g_o\| \leq M\}$ шарын өзүн-өзүнө чагылдырат.

Эгерде

$$d = LN(3\ell + 3\ell h + h) < 1 \qquad (20)$$

шарты аткарылса, анда A оператору $S(g_0, M)$ шарын өзүн-өзүнө кысып чагылдыууну ишке ашырат. Ошондуктан С. Банахтын теоремасынын негизинде $S(g_0, M)$ шарында чагылтуунун жалгыз гана кыймылсыз чекити жашайт, б.а. (18) теңдемесинин бир гана чечими жашайт. Удаалаш жакындаштыруу усулу менен (18) теңдемесинин $S(g_0, M)$ шарындагы чечимин аныктап 3.1.1–маселенин чечимин тургузабыз. Ошентип төмөнкү теорема далилденди.

3.1.1-теорема. Эгерде 1) - 5) жана (19), (20) шарттары аткарылса, анда 3.1.1–маселенин чечими жашайт жана жалгыз.

Үчүнчү баптын **3.2-бөлүмүндө** төмөнкү маселенин бир маанилүү чечилиши изилденген.

3.2.1-маселе. $D = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$ аймагында (17) теңдемесин

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \qquad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \qquad 0 \leq y \leq h,$$

$$u(x, 0) + \int_0^h T(x, y) u(x, y) dy = \psi(x), \; 0 \leq x \leq l,$$

шарттарын канааттандыруучу чечимин табуу керек, мында

$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ T(x, y),\ \psi(x) -$ берилген функциялар.

Үчүнчү баптын **3.3-бөлүмүндө** интегралдык теңдемелер усулу жана кысылган чагылдыруулар принциби менен төмөнкү маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген.

3.3.1-маселе. (17) теңдемесинин

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ 0 \leq y \leq h,$$

$$u_x(0,y) + \int_0^\ell T_1(x,y) u(x,y) dx = \varphi_2(y),\ 0 \leq y \leq h,$$

$$u(x,0)+\int_0^h T_2(x,y)u(x,y)dy=\psi(x), 0\le x\le l,$$

шарттарын канааттандырган $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$ чечимин табуу керек, мында $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x), T_1(x,y), T_2(x,y)-$ берилген функциялар.

2-БАП. СИНГУЛЯРДЫК КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕЛЕР

2.1. Жекече туундулуу сингулярдык коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чектик маселе

2.1.1. Маселенин коюлушу. Т.Д.Джураевдин жана Я.Попёлоктун [17] эмгегинде мүнөздөмөлүк теңдеменин тамырларынын бири эки эселүү, ал эми экинчиси - жөнөкөй болгон учурда гана жекече туундулардагы үчүнчү тартиптеги сызыктуу теңдеме төмөндөгүдөй канproblemалык көрүнүшкө келтирилиши мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн

$$u_{xxy} + \alpha u_{xx} + \beta u_{xy} + \gamma u_{yy} + a u_x + b u_y + cu = f(x, y), \qquad (2.1.1)$$

мында $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, f$ – булар x жана y терден көз каранды болгон берилген функциялар.

(2.1.1) теңдемеси үчүн чектик маселелердин коюлушунун корректтүүлүгү γ коэффициентинен олуттуу түрдө көз каранды болорун байкоо кыйын эмес. Качан $\gamma \equiv 0$ болгон учурда (2.1.1) теңдемеси үчүн Гурстун маселеси жана башка дагы негизги чектик маселелер [68] эмгекте изилденген. Ал эми качан $\gamma \equiv -1$ болгон учурда негизги чектик маселелер [15] эмгекте каралган.

Дагы белгилеп кетчү нерсе, $u(x,y) = exp(-\int_0^y \alpha(x,t)dt)z(x,y)$, мында $z(x,y)$ – жаңы белгисиз функция, алмаштыруусу менен (2.1.1) теңдемесинде αu_{xx} кошулуучусунан арылууга болот.

Бул бөлүмдө $\gamma = -\frac{1}{x}$ болгон учурду карайбыз, б.а. төмөндөгү теңдемени карайбыз

$$u_{xxy} - \frac{1}{x}u_{yy} + \beta u_{xy} + a u_x + b u_y + cu = f(x,y) \qquad (2.1.2)$$

(2.1.2) теңдемеси үчүн $D=\{(x,y):0<x<\ell, 0<y<h\}$ аймагында төмөнкү маселе изилденет.

2.1.1-маселе. D аймагында (2.1.2) теңдемесин,

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{2.1.3}$$

$$u(x,0)=\tau(x), u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{2.1.4}$$

чектик жана баштапкы шарттарын канааттандыруучу $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D),\ u_{xxy}\in C(D)$ функциясын аныктоо керек, мында $\beta, a, b, c,\ f, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x), \nu(x)$ - берилген функциялар, болгондо да

$$\begin{gathered}\beta(x,y),\ a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{D}),\\ \varphi_i(y)\in C^2[0,h](i=1,2),\ \tau(x)\in C^2[0,\ell],\ \nu(x)\in C^1[0,\ell],\ f(x,y)\in C(\overline{D}),\\ \varphi_1(0)=\tau(0),\ \varphi_2(0)=\tau(\ell),\ \varphi_1'(0)=\nu(0),\ \varphi_2'(0)=\nu(\ell).\end{gathered} \tag{2.1.5}$$

2.1.2. 2.1.1 маселесин биринчи чектик маселеге келтирүү.

Төмөндөгүдөй белгилөөнү киргизебиз

$$u_y(x,y)=z(x,y) \tag{2.1.6}$$

мында $z(x,y)$ - жаңы белгисиз функция. Анда (2.1.2) ден төмөндөгүгө ээ болобуз

$$L(u)\equiv z_{xx}-\frac{1}{x}z_y=F, \tag{2.1.7}$$

мында $F=-\beta z_x-au_x-bz-cu+f(x,y)$.

(2.1.3)-(2.1.4) чектик шарттарынан төмөндөгүнү алабыз

$$\begin{aligned}&z(0,y)=\varphi_1'(y),\ z(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ 0\le y\le h,\\ &z(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell.\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

[76] эмгегинде

$$z_{xx}-\frac{1}{x}z_y=0, \tag{2.1.9}$$

теңдемесинин

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2}\,z\,I_1(z)\,e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}},\ z=2\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{y-\eta}, \tag{2.1.10}$$

көрүнүшүндө көрсөтүлүүчү чечими тургузулган,

мында $I_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$.

(2.1.9) теңдемесинин чектик

$$z(0,y)=\varphi(y), 0\le y<\infty,\ z(x,0)=\psi(x),\ 0\le x<\infty,$$

шарттарын канааттандырган чечими төмөнкү көрүнүштө жазылары далилденген

$$z(x,y)=\int_0^y \vartheta_\xi(x,y;0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\vartheta(x,y;\xi,0)\psi(\xi)d\xi.$$

$\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ функциясын мындай көрүнүштө жазып алабыз

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{y-\eta}I_1\left(2\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{y-\eta}\right)e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}}=$$

$$=\left\{\frac{x\xi}{(y-\eta)^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x\xi}{(y-\eta)^2}\right]^2+\frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{x\xi}{(y-\eta)^2}\right]^3+\ldots+\frac{1}{k!\cdot(k+1)!}\left[\frac{x\xi}{(y-\eta)^2}\right]^{k+1}+\ldots\right\}e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}}.$$

Анда төмөндөгүдөй катыштарды алабыз

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=0}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=0}=\frac{x}{(y-\eta)^2}e^{-\frac{x}{y-\eta}}.$$

2.1.3. $G(x,y;\xi,\eta)$ **Грин функциясын тургузуу.**

2.1.1-маселени чечүү үчүн (2.1.10) функциясын пайдаланып (2.1.9) теңдемеси үчүн $G(x,y;\xi,\eta)$ функциясын тургузабыз. Ушул максатта

$$\vartheta L(z)-zL^*(\vartheta)=(\vartheta z_\xi-\vartheta_\xi z)_\xi-(\frac{1}{\xi}\vartheta z)_\eta,\ L^*(\vartheta)\equiv\vartheta_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi}\vartheta_\eta$$

теңдештигин $D^*=\{(\xi,\eta):\varepsilon<\xi<\ell, 0<\eta<y-\delta\}$ аймагы боюнча интегралдайбыз, мында ε жана δ жетишерлик кичине оң сандар:

$$\int_\varepsilon^\ell\int_0^{y-\delta}[\vartheta L(z)-zL^*(\vartheta)]d\xi d\eta=\int_{\partial D^*}\frac{1}{\xi}\vartheta z\,d\xi+(\vartheta z_\xi-\vartheta_\xi z)d\eta \qquad (2.1.11)$$

Төмөнкү асимптотикалык көрүнүшүн пайдаланып

$$I_{\nu}(z)=\frac{e^{z}}{\sqrt{2\pi z}}[1+\mathrm{O}(z^{-1})],\ z\to\infty \tag{2.1.12}$$

төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\varepsilon}^{\ell}\vartheta(x,y;\xi,y-\delta)z(\xi,y-\delta)d\xi=z(x,y).$$

Анда $\varepsilon\to 0,\delta\to 0$ умтултуп (2.1.11) ден төмөндөгүнү алабыз

$$\begin{gathered}z(x,y)=\int_{0}^{\ell}\frac{1}{\xi}\vartheta(x,y;\xi,0)z(\xi,0)d\xi+\int_{0}^{y}\vartheta_{\xi}(x,y;0,\eta)z(0,\eta)d\eta+\\+\int_{0}^{y}[\vartheta(x,y;\ell,\eta)z_{\xi}(\ell,\eta)-\vartheta_{\xi}(x,y;\ell,\eta)z(\ell,\eta)]d\eta-\int_{0}^{\ell}d\xi\int_{0}^{y}\vartheta(x,y;\xi,\eta)F\,d\eta.\end{gathered}\tag{2.1.13}$$

Эми мейли $\vartheta(\xi,\eta)=w(x,y;\xi,\eta)$

$$L^{*}(w)\equiv w_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi}w_{\eta}=0, \tag{2.1.14}$$

теңдемесинин

$$\vartheta(\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0. \tag{2.1.15}$$

шартын канааттандырган регулярдык чечими болсун. Анда, (2.1.13) барабардыгын алгандагыдай эле эсептөөлөрдү жасап чыгып, төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\begin{gathered}0=\int_{0}^{\ell}\frac{1}{\xi}w(x,y;\xi,0)z(\xi,0)d\xi+\int_{0}^{y}[w_{\xi}(x,y;0,\eta)z(0,\eta)-w(x,y;\ell,\eta)z_{\xi}(\ell,\eta)]d\eta+\\+\int_{0}^{y}[w(x,y;\ell,\eta)z_{\xi}(\ell,\eta)-w_{\xi}(x,y;\ell,\eta)z(\ell,\eta)]d\eta-\int_{0}^{\ell}d\xi\int_{0}^{y}w(x,y;\xi,\eta)F\,d\eta.\end{gathered}\tag{2.1.16}$$

(13) төн (16) ны кемитип төмөндөгүнү алабыз

$$\begin{gathered}z(x,y)=\int_{0}^{\ell}\frac{1}{\xi}G(x,y;\xi,0)z(\xi,0)d\xi+\int_{0}^{y}G_{\xi}(x,y;0,\eta)z(0,\eta)d\eta+\\+\int_{0}^{y}[G(x,y;\ell,\eta)z_{\xi}(\ell,\eta)-G_{\xi}(x,y;\ell,\eta)z(\ell,\eta)]d\eta-\int_{0}^{\ell}d\xi\int_{0}^{y}G(x,y;\xi,\eta)F\,d\eta.\end{gathered}$$

мында

$$G(x,y;\xi,\eta)=\vartheta(x,y;\xi,\eta)-w(x,y;\xi,\eta)\ . \tag{2.1.17}$$

$w(x,y;\xi,\eta)$ функциясын (2.1.15) жана

$$w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=0}=0,\ \ w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=\ell}=\vartheta(x,y;\ell,\eta) \qquad (2.1.18)$$

шарттары аткарыла тургандай кылып тандайбыз.

Анда (2.1.7)-(2.1.8) маселесинин чечими төмөнкү көрүнүштө көрсөтүлөт

$$\begin{aligned} z(x,y)&=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2'(\eta)]d\eta+\\ &+\int_0^\ell \frac{1}{\xi}G(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi-\int_0^\ell d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)F\,d\eta. \end{aligned} \qquad (2.1.19)$$

$w(x,y;\xi,\eta)$ функциясы (2.1.14) теңдемесинин (2.1.15) жана (2.1.18) шарттарын канааттандырган чечими катары аныкталат. $w(x,y;\xi,\eta)$ функциясын кош катмар потенциалдарынын суммасы көрүнүшүндө издейбиз [25, 26]:

$$w(x,y;\xi,\eta)=W[\sigma_1](\xi,\eta)+W[\sigma_2](\xi,\eta), \qquad (2.1.20)$$

мында $W[\sigma_1](\xi,\eta)=\int_\eta^y \vartheta_x(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt,$

$W[\sigma_2](\xi,\eta)=\int_\eta^y \vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta)\times\ \times\sigma_2(t;x,y)dt,$ а $\sigma_1(t;x,y),\sigma_2(t;x,y)$ - белгисиз тыгыздыктар. Мейли

$AA_1=\{(\xi,\eta):\xi=0,0<\eta<h\}, BB_1=\{(\xi,\eta):\xi=\ell,0<\eta<h\}$ болсун.

2.1.1-лемма. *Эгерде* $\sigma_1(\eta;x,y)\in C[0,h],\forall(x,y)\in D$ *болсо, анда төмөндөгүдөй пределдик катыш орун алат*

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} W[\sigma_1](\xi,\eta)=\sigma_1(\eta_0;x,y),\ (\xi,\eta)\in D,(\xi_0,\eta_0)\in AA_1 \quad (2.1.21)$$

Далилдөө. $\vartheta_x(0,t;\xi,\eta)=\frac{\xi}{(t-\eta)^2}exp(-\frac{\xi}{t-\eta})$ болгондуктан

$W[\sigma_1](\xi,\eta)=\int_\eta^y \frac{\xi}{(t-\eta)^2}exp(-\frac{\xi}{t-\eta})\sigma_1(t;x,y)dt$ болот. Эми $\frac{\xi}{t-\eta}=s$

өзгөрүлмөсүн киргизип $W[\sigma_1](\xi,\eta)=\int\limits_{\frac{\xi}{y-\eta}}^{+\infty} e^{-s}\sigma_1(\eta+\frac{\xi}{s};x,y)ds$ дегенге ээ болобуз. Мындан $(\xi,\eta)\to(+0,\eta_0)$ болгондогу пределге өтүп (2.1.21) катышын алабыз.

2.1.2-лемма. *Эгерде* $\sigma_2(\eta;x,y)\in C[0,h],\ \forall(x,y)\in D$ *болсо, анда* $(\xi,\eta)\in D,\ (\xi_0,\eta_0)\in BB_1$ *болгон учурда төмөнкү пределдик катыш орун алат*

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} W[\sigma_2](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta_0;x,y)+\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0), \qquad (2.1.22)$$

мында $\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0)=\int\limits_{\eta}^{y}\vartheta_x(\ell,t;\xi_0,\eta_0)\sigma_2(t;x,y)dt$ - бул $W[\sigma_2](\xi,\eta)$ кош катмар потенциалынын BB_1 кесиндисиндеги түз мааниси.

Далилдөө. $\vartheta_x(x,y;\xi,\eta)$ ны төмөнкү көрүнүштө көрсөтөбүз

$$\vartheta_x(x,y;\xi,\eta)=-\frac{\xi^{1/2}}{(y-\eta)^2}\{(x^{1/2}-\xi^{1/2})I_0(z)+x^{1/2}[I_1(z)-I_0(z)]\}exp(-\frac{x+\xi}{y-\eta}).$$

Анда

$$\begin{aligned}W[\sigma_2](\xi,\eta)&=\int\limits_{\eta}^{y}\vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt=\int\limits_{\eta}^{y}H_1(t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt+\\&+\int\limits_{\eta}^{y}H_2(t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt=A(x,y;\xi,\eta)+B(x,y;\xi,\eta),\end{aligned} \qquad (2.1.23)$$

болот, мында

$$H_1(t;\xi,\eta)=-\frac{\xi^{1/2}}{(t-\eta)^2}(\ell^{1/2}-\xi^{1/2})I_0(z)exp(-\frac{\ell+\xi}{t-\eta}),$$

$$H_2(t;\xi,\eta)=-\frac{\xi^{1/2}\ell^{1/2}}{(t-\eta)^2}[I_1(z)-I_0(z)]exp(-\frac{\ell+\xi}{t-\eta}).$$

(12) ден $\nu=0$ болгондо төмөндөгүгө ээ болобуз

$$z\to+\infty \text{ учурда } I_0(z)=\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}[1+O(\frac{1}{z})] .$$

Анда

$$\lim_{\xi\to\ell-0} A(x,y;\xi,\eta) = \lim_{\xi\to\ell-0} \int_{\eta}^{y} H_1(t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt = -\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y). \qquad (2.1.24)$$

Эгерде

$$|I_1(z) - I_0(z)| \le cz^{-3/2}e^z, 0 < z < +\infty,$$

баалоосун эске алсак, анда $H_2(t;\xi,\eta)$ үчүн

$$|H_2(t;\xi,\eta)| \le \frac{N}{\xi^{1/4}(t-\eta)^{1/2}}, N = const > 0$$

баалоосуна ээ болобуз.

Анда демк $B(x,y;\xi,\eta)$ үзгүлтүксүз функция болот жана

$$\lim_{\xi\to\ell-0} B(x,y;\xi,\eta) = B(x,y;\ell,\eta) \qquad (2.1.25)$$

пределдик катышы орун алат.

Эгерде $H_1(t;\ell,\eta) = 0,$ экендигин эске алсак, анда (2.1.24) жана (2.1.25) тен $W[\sigma_2](\xi,\eta)$ лар үчүн секириктин (2.1.22) формуласы адилеттүү болот деген бүтүмгө келебиз. 2.1.2-лемма далилденди.

Эми (2.1.21), (2.1.22) формулаларын жана (2.1.18) шарттарын пайдаланып $w(x,y;\xi,\eta)$ ны аныктоо үчүн интегралдык теңдемелердин төмөндөгү системасын алабыз

$$\sigma_1(\eta;x,y) = 0, \quad -\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y) + \int_{\eta}^{y} \vartheta_x(0,t;\ell,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt +$$

$$+\int_{\eta}^{y} H_2(t;\ell,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt = \vartheta(x,y;\ell,\eta).$$

Мындан $\sigma_2(\eta;x,y)$ үчүн жалгыз үзгүлтүксүз чечимге ээ боло турган Вольтеррдин экинчи түрдөгү

$$\sigma_2(\eta;x,y) - 2\int_{\eta}^{y} H_2(t;\ell,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt = -2\vartheta(x,y;\ell,\eta). \qquad (2.1.26)$$

интегралдык теңдемесине ээ болобуз. Ошентип, $G(x,y;\xi,\eta)$ функциясынын регулярдык бөлүгү төмөндөгүдөй көрүнүштө көрсөтүлөт

$$w(x,y;\xi,\eta)=W[\sigma_2](\xi,\eta)=\int_{\eta}^{y}\vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt,$$

мында $\sigma_2(\eta;x,y)$ (2.1.26) теңдемесинин чечими катары аныкталат.

4. 2.1.1-маселесин интегралдык теңдемелердин системасына келтирүү. F тин маанисин (2.1.19) га коюп төмөнкүгө ээ болобуз

$$\begin{aligned}z(x,y)=z_0(x,y)+\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{y}K_1(x,y;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_{\xi}(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_{\xi}(\xi,\eta)+\\+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]\,d\eta,\end{aligned}\tag{2.1.27}$$

мында $K_1(x,y;\xi,\eta)=G(x,y;\xi,\eta)$, $z_0(x,y)=\int_0^{y}G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta)d\eta-$

$$-\int_0^{y}G_{\xi}(x,y;\ell,\eta)\varphi_2'(\eta)]d\eta+\int_0^{\ell}\frac{1}{\xi}G(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi-\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{y}G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.$$

(2.1.27) ни x боюнча дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз

$$\begin{aligned}z_x(x,y)=z_{0x}(x,y)+\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{y}K_2(x,y;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_{\xi}(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_{\xi}(\xi,\eta)+\\+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]\,d\eta,\end{aligned}\tag{2.1.28}$$

мында $K_2(x,y;\xi,\eta)=K_{1x}(x,y;\xi,\eta)$.

(2.1.27) теңдемесин y боюнча интегралдап төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\begin{aligned}u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{y}K_3(x,y;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_{\xi}(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_{\xi}(\xi,\eta)+\\+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]\,d\eta,\end{aligned}\tag{2.1.29}$$

мында $u_0(x,y)=\tau(x)+\int_0^{y}z(x,t)dt$, $K_3(x,y;\xi,\eta)=\int_0^{y}K_1(x,t;\xi,\eta)dt$.

(2.1.29) ду x боюнча дифференцирлеп төмөндөгүнү табабыз

$$\begin{aligned}u_x(x,y)=u_{0x}(x,y)+\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{y}K_4(x,t;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_{\xi}(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_{\xi}(\xi,\eta)+\\+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]\,d\eta,\end{aligned}\tag{2.1.30}$$

мында $K_4(x,y;\xi,\eta)=K_{3x}(x,y;\xi,\eta)$. Ошентип $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $z(x,y)$, $z_x(x,y)$ функцияларына карата интегралдык теңдемелердин (2.1.27)-(2.1.30) туюк системасын алабыз.

Берилген функциялардын касиеттеринин негизинде (2.1.27)-(2.1.30) теңдемелеринин ядролору күчсүз өзгөчөлүккө ээ болушат деген жыйынтыкка келебиз, жана ошон үчүн көрсөтүлгөн интегралдык теңдемелердин системасына удаалаш жакындаштыруу усулу колдонумдуу болот.

2.1.1-теорема. Эгерде (2.1.5) шарттары аткарылса, анда 2.1.1 маселеси жалгыз чечимге ээ болот.

2.2. $y=0$ сызыгы менен үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселеси

2.2.1. Маселенин коюлушу. Мейли D аймагы – бул $x=-\ell_2(\ell_2>0)$, $y=0,\ \ x=\chi(y),\ 0\le y\le h, y=h,$ мында $\chi(y)$ – монотондуу өспөөчү ийри, болгондо да $\chi(0)=\ell_1(\ell_1>0), \chi(h)=\ell_3,\ 0<\ell_3\le\ell_1,$ сызыктары менен чектелген аймак болсун. Ушул аймакта

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-x^p u_{yy}=0,(x,y)\in D_1, \tag{2.2.1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,(x,y)\in D_2, \tag{2.2.2}$$

теңдемелери үчүн жалгаштыруу маселесин карайбыз, мында $D_1=D\cap(x>0), D_2=D\cap(x<0), p=const>-1$.

Коэффициенттер жана берилген функциялар төмөндөгү шарттарга баш ийишет:

$$\begin{aligned}&a\in C(\overline{D_2})\cap C^{1+0}(D_2), b\in C(\overline{D_2})\cap C^{0+1}(D_2), c\in C(\overline{D_2}),\\&\chi(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \forall y\in[0,h]:\ell_3\le\chi(y)\le\ell_1, \chi(y)\le 0.\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

(2.2.1) жана (2.2.2) көрүнүшүндөгү теңдемелер чечимдердин касиеттеринин мүнөзүнөн улам көбүнчө псевдопараболалык деп аталышат [49, 50]. (2.2.1) көрүнүшүндөгү кубулуучу параболалык теңдемелер [4, 12, 13] эмгектеринде каралган. (2.2.1) жана (2.2.2) көрүнүшүндөгү теңдемелердин жекече учурлары кыртыштагы нымдын өсүмдүк тарабынан жутулушун окуп үйрөнүүдө кездешет [49].

2.2.1-маселе. D_1 жана D_2 аймактарында тиешелүү түрдө (2.2.1) жана (2.2.2) теңдемелерин,

$$u(\chi(y),y)=\varphi_1(y),\ \ u(-\ell_2,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le h \tag{2.2.4}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ \ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ \ 0\le x\le\ell_1, \tag{2.2.5}$$

$$u(x,0)=\psi_3(x),\ \ -\ell_2\le x\le 0, \tag{2.2.6}$$

шарттарын канааттандырган $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^2(D_1) \cup C^{2+1}(D_2)]$ функциясын табуу керек, мында $\varphi_i (i=1,2)$, $\psi_j (j=\overline{1,3})$ - берилген жылмакай функциялар, болгондо да

$$\begin{gathered}\psi_1 \in C^2[0,\ell_1], \psi_2 \in C^1[0,\ell_1], \psi_3 \in C^1[-\ell_2,0], \varphi_i \in C^1[0,h](i=1,2) \\ \psi_1(0)=\psi_3(0), \varphi_2(0)=\psi_3(-\ell_2), \psi_1(\ell_1)=\varphi_2(0).\end{gathered} \tag{2.2.7}$$

Белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y), \;\; u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y), 0 \le y \le h, \tag{2.2.8}$$

мында $\tau(y), \nu(y)$ - азырынча белгисиз функциялар.

2.2.2. D_1 **аймагынан алынган катыштар**. (2.2.1) теңдемесин y боюнча дифференцирлеп чыгып төмөндөгүгө ээ болобуз

$$u_{xx} - x^p u_y = \omega(x), \tag{2.2.9}$$

мында $\omega(x)=\psi_1''(x)-x^p\psi_2(x)$ – белгилүү функция.

Төмөндөгү аралаш маселени карайбыз: D_1 аймагында (2.2.9) теңдемесинин

$$\begin{gathered}u_x(0,y)=\nu(y), \; u(\chi(y),y)=\varphi_1(y), \; 0 \le y \le h, \\ u(x,0)=\psi_1(x), \; 0 \le x \le \ell_1.\end{gathered} \tag{2.2.10}$$

шарттарын канааттандырган чечимин табуу керек.

(2.2.9), (2.2.10) маселесинин чечими $G_2(x,y;\xi,\eta)$ функциясы аркылуу

$$\begin{gathered}u(x,y)=\int\limits_0^{\ell_1} \xi^p G_2(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi - \int\limits_0^y G_2(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta - \\ -\int\limits_0^y G_{2\xi}(x,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^{\chi(\eta)} G_2(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{2.2.11}$$

көрүнүшүндө көрсөтүлөт, мында

$$G_2(x,y;\xi,\eta)=U_2(x,y;\xi,\eta)-w(x,y;\xi,\eta),$$

$$U_2(x,y;\xi,\eta)=\frac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)} I_{-1/q}\left(2\frac{x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right) e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}, \; q=p+2,$$

ал эми $w(x,y;\xi,\eta)$ - төмөнкү маселенин чечими болуп эсептелет:

$$\begin{aligned} & w_{\xi\xi} + \xi^{p} w_{\eta} = 0, \\ & w_{\xi}(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=0} = U_{2\xi}(x,y;0,\eta), \\ & w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=\chi(\eta)} = U_{2}(x,y;\chi(\eta),\eta), \\ & w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = 0. \end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

(2.2.12) маселесинин чечимин

$$\upsilon(\xi,\eta) = V[\sigma_1](\xi,\eta) + W[\sigma_2](\xi,\eta),$$

көрүнүшүндө издейбиз, мында

$$V[\sigma_1](\xi,\eta) = \int_{\eta}^{y} U_2(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt$$ – жөнөкөй катмар потенциалы,

$$W[\sigma_2](\xi,\eta) = \int_{\eta}^{y} U_{2x}(\chi(t),t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt$$ – кош катмар потенциалы.

$$I_{-1/q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k-1/q}}{k!\Gamma(k-\frac{1}{q}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-1/q)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{-1/q} + \frac{1}{\Gamma(2-1/q)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2-1/q} + \frac{1}{2\cdot\Gamma(3-1/q)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{4-1/q} + \dots ,$$

болгондуктан, анда

$$I_{-1/q}\left(2\frac{(x\xi)^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-1/q)} \cdot \frac{(x\xi)^{-1/2}}{q^{-2/q}(y-\eta)^{-1/q}} + \frac{1}{\Gamma(2-1/q)} \cdot \frac{(x\xi)^{q-1/2}}{q^{4-1/q}(y-\eta)^{2-1/q}} +$$

$$+ \frac{1}{2\Gamma(3-1/q)} \cdot \frac{(x\xi)^{2q-1/2}}{q^{8-2/q}(y-\eta)^{4-1/q}} + \dots .$$

Анда $U_2(x,y;\xi,\eta)$ үчүн төмөнкү көрсөтүлүштү алабыз:

$$U_2(x,y;\xi,\eta) = \frac{(x\xi)^{-1/2}}{q(y-\eta)} \; I_{-1/q}\left(2\frac{(x\xi)^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right) e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} =$$

$$= \frac{(x\xi)^{-1/2}}{q(y-\eta)} \left[\frac{(x\xi)^{-1/2}}{q^{-2/q}\Gamma(1-1/q)(y-\eta)^{-1/2}} + \frac{(x\xi)^{q-1/2}}{q^{4-1/q}\Gamma(2-1/q)(y-\eta)^{2-1/q}} + \right.$$

$$+\frac{(x\xi)^{2q-1/2}}{2q^{8-2/q}\Gamma(3-1/q)(y-\eta)^{4-1/q}}+\ldots\Bigg]e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}=$$

$$=\Bigg[\frac{1}{q^{1-2/q}\Gamma(1-1/q)(y-\eta)^{1-1/q}}+\frac{(x\xi)^q}{q^{5-1/q}\Gamma(2-1/q)(y-\eta)^{3-1/q}}+$$

$$+\frac{(x\xi)^{2q}}{2q^{9-2/q}\Gamma(3-1/q)(y-\eta)^{5-1/q}}+\ldots\Bigg]e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}.$$

Мындан $x=0$ болгондо төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$U_2(0,y;\xi,\eta)=\frac{e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}}{q^{1-2/q}\Gamma(1-1/q)(y-\eta)^{-1/q}}=\frac{\kappa e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1-1/q}},$$

Эгер $x=0,\ \xi=0$ болсо, анда

$$U_2(0,y;0,\eta)=\frac{1}{q^{1-2/q}\Gamma(1-1/q)(y-\eta)^{1-1/q}}=\frac{\kappa}{(y-\eta)^{1-1/q}};$$

мында $\quad \kappa=\dfrac{1}{q^{1-2/q}\Gamma(1-1/q)}.$

Эми жөнөкөй катмар потенциалын карайбыз:

$$V[\sigma_1](\xi,\eta)=\int_\eta^y U_2(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt=\int_\eta^y\frac{\kappa e^{-\frac{\xi^q}{q^2(t-\eta)}}}{(t-\eta)^{1-1/q}}\sigma_1(t;x,y)\,dt.$$

Ушул жерде

$$V[\sigma_1](0,\eta)=\int_\eta^y\frac{\kappa\sigma_1(t;x,y)}{(t-\eta)^{1-1/q}}dt$$ – жашай тургандыгын байкайбыз.

Төмөндөгү туундуну табабыз

$$\frac{\partial}{\partial\xi}V[\sigma_1](\xi,\eta)=\int_\eta^y U_{2\xi}(0,t;\xi,\eta)\,\sigma_1(t;x,y)dt=-\int_\eta^y\frac{\kappa\xi^{q-1}e^{-\frac{\xi^q}{q^2(t-\eta)}}}{q(t-\eta)^{2-1/q}}\sigma_1(t;x,y)dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \dfrac{\xi^q}{q^2(t-\eta)}=s,\ t-\eta=\dfrac{\xi^q}{q^2 s},\ t=\eta+\dfrac{\xi^q}{q^2 s},\ dt=-\dfrac{\xi^q}{q^2 s^2}ds \\ \xi>0,\ t=\eta,\ s=+\infty, \\ t=y,\ s=\dfrac{\xi^q}{q^2(y-\eta)},\ (t-\eta)^{2-\frac{1}{q}}=\dfrac{\xi^{2q-1}}{q^{4-\frac{2}{q}}s^{2-\frac{1}{q}}} \end{array}\right|=$$

$$=-\int\limits_{+\infty}^{\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}\frac{\kappa\xi^{q-1}e^{-s^2}q^{4-\frac{2}{q}}s^{2-\frac{1}{q}}}{q\xi^{2q-1}}\sigma_1\left(\eta+\frac{\xi^q}{q^2 s};x,y\right)\left(-\frac{\xi^q}{q^2 s^2}\right)ds=$$

$$=-\int\limits_{\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}^{+\infty}\kappa q^{1-\frac{2}{q}}s^{-\frac{1}{q}}e^{-s^2}\sigma_1\left(\eta+\frac{\xi^q}{q^2 s};x,y\right)ds=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{q})}\int\limits_{\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}^{+\infty}s^{(1-\frac{1}{q})-1}e^{-s^2}\sigma_1\left(\eta+\frac{\xi^q}{q^2 s};x,y\right)ds.$$

Мындан, пределге өтүп төмөнкүгө ээ болобуз

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{\partial}{\partial\xi}V[\sigma_1](\xi,\eta)=-\lim_{\xi\to+0}\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{q})}\int\limits_{\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}^{+\infty}s^{(1-\frac{1}{q})-1}e^{-s^2}\sigma_1\left(\eta+\frac{\xi^q}{q^2 s};x,y\right)ds=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{q})}\int\limits_0^{+\infty}s^{(1-\frac{1}{q})-1}e^{-s^2}\sigma_1(\eta;x,y)\,ds=-\frac{\Gamma(1-\frac{1}{q})}{\Gamma(1-\frac{1}{q})}\sigma_1(\eta;x,y)=-\sigma_1(\eta;x,y).$$

Ошентип,

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{\partial}{\partial\xi}V[\sigma_1](\xi,\eta)=\lim_{\xi\to+0}\int\limits_{\eta}^{y}U_2(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)ds=-\sigma_1(\eta;x,y).$$

Бул катышты төмөндөгүдөй көрүнүштө жазып алабыз:

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)}\frac{\partial}{\partial\xi}V[\sigma_1](\xi,\eta)=-\sigma_1(\eta_0;x,y),\ (\xi,\eta)\in D,\ (\xi_0,\eta_0)\in\Gamma_1,$$

мында

$$\Gamma_1=\{(\xi,\eta):\xi=0,0<\eta<h\}.$$

Эми болсо кош катмар потенциалын карайбыз:

$$W[\sigma_2](\xi,\eta)=\int\limits_{\eta}^{y}U_{2\xi}(\chi(t),t;\xi,\eta)\,\sigma_2(t;x,y)\,dt.$$

Ушул жерде

$$U_2(x,y;\xi,\eta)=\frac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)}I_{-1/q}\left(2\frac{(x\xi)^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right)e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}=$$

$$=\frac{1}{2^{1/q}q^{1-1/q}(y-\eta)^{1-1/q}}\cdot z^{1/q}I_{-1/q}(z)e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}},$$

мында $\quad z=\dfrac{(x\xi)^{q/2}}{q^2(y-\eta)},$

болгондуктан, туунду үчүн төмөндөгүдөй көрсөтүлүшкө ээ болобуз

$$U_{2x}(x,y;\xi,\eta)=\frac{x^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(y-\eta)^2}\left\{(\xi^{q/2}-x^{q/2})I_{1-1/q}(z)+x^{q/2}\left[I_{1-1/q}(z)-I_{-1/q}(z)\right]\right\}e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}.$$

Төмөнкү баалоолорду пайдаланабыз:

$$|I_{-1/q}(z)|\le C(q)z^{-1/2}e^z,\ \ 0<z<+\infty,$$

$$|I_{1-1/q}(z)-I_{-1/q}(z)|\le C\,z^{-3/2}e^z,\ \ 0<z<+\infty.$$

Анда

$$\left|U_{2x}(x,y;\xi,\eta)\right|\le\frac{x^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(y-\eta)^2}\left\{\left|\xi^{q/2}-x^{q/2}\right|C(q)z^{-1/2}e^z+x^{q/2}\cdot C\cdot z^{-3/2}e^z\right\}e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}=$$

$$=\left|z^{-1/2}=2^{-1/2}\frac{(x\xi)^{-q/4}}{q^{-1}(y-\eta)^{-1/2}}\right|=\frac{x^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(y-\eta)^2}\cdot z^{-1/2}\left\{C(q)\left|\xi^{q/2}-x^{q/2}\right|+C\cdot x^{q/2}z^{-1}\right\}e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}e^z=$$

$$=\frac{x^{\frac{q-1}{2}-\frac{q}{4}}\xi^{\frac{1}{2}-\frac{q}{4}}\cdot 2^{-1/2}}{q(y-\eta)^{3/2}}\left\{C(q)\left|\xi^{q/2}-x^{q/2}\right|+C\cdot x^{q/2}\cdot\frac{q^2(y-\eta)}{2(x\xi)^{q/2}}\right\}e^{-\frac{(x^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(y-\eta)}}\le$$

$$\le\frac{x^{\frac{2q-2-q}{4}}\xi^{\frac{2-q}{4}}}{2^{1/2}q(y-\eta)^{3/2}}\left\{C(q)\left|\xi^{q/2}-x^{q/2}\right|+\frac{Cq^2}{2}\cdot\frac{y-\eta}{\xi^{q/2}}\right\}e^{-\frac{(x^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(y-\eta)}}\le$$

$$\le C(q)\frac{x^{\frac{q-2}{4}}\xi^{\frac{2-q}{4}}}{(y-\eta)^{3/2}}\left\{\left|\xi^{q/2}-x^{q/2}\right|+\frac{y-\eta}{\xi^{q/2}}\right\}e^{-\frac{(x^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(y-\eta)}}.$$

Ошентип төмөндөгүдөй баалоону алабыз:

$0<\frac{(x^{q/2}+\xi^{q/2})^2}{q^2(y-\eta)}<+\infty$ болгон учурда

$$\left|U_{2x}(x,y;\xi,\eta)\right|\le C(q)\frac{x^{\frac{p}{4}}\xi^{\frac{p}{4}}}{(y-\eta)^{3/2}}\left\{\left|\xi^{q/2}-x^{q/2}\right|+\frac{y-\eta}{\xi^{q/2}}\right\}e^{-\frac{(x^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(y-\eta)}}$$ болот.

$$\left|U_{2x}(x,y;\xi,\eta)\right|\le\frac{c}{(y-\eta)^{1/2}}$$ болоруна ишенүү кыйын эмес.

Эгер $\chi(y)\in C^1[0,h]$ болсо, анда

$$\left|U_{2x}(\chi(y),y;\chi(\eta),\eta)\right|\le\frac{c}{(y-\eta)^{1/2}}\,.$$

Ошондуктан кош катмардын түз мааниси жашайт жана үзгүлтүксүз

$$W[\sigma_2](\chi(\eta),\eta)=\int_\eta^y U_{2x}(\chi(t),t;\chi(\eta),\eta)\;\sigma_2(t;x,y)\,dt$$

Адегенде, качан $\sigma_2(t;x,y)\equiv 1$ болгон учурду карайбыз.

Анда

$$W[1](\xi,\eta)=\int_\eta^y U_{2x}(\chi(t),t;\xi,\eta)\,dt=$$

$$=\int_\eta^y\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(t-\eta)^2}\left(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}\right)I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)e^{-\frac{[\chi(t)]^q+\xi^q}{q^2(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_\eta^y\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(t-\eta)^2}\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)-I_{-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^q+\xi^q}{q^2(t-\eta)}}dt\,.$$

$$I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)=\frac{qe^{\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}}\sqrt{t-\eta}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\xi^{q/4}}\left[1+O\left(\frac{t-\eta}{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}\right)\right],$$

болгондуктан, анда

$$W[1](\xi,\eta)=\int_\eta^y\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(t-\eta)^2}\cdot\frac{qe^{\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}}\sqrt{t-\eta}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\xi^{q/4}}\left(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}\right)e^{-\frac{[\chi(t)]^q+\xi^q}{q^2(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^{2}(t-\eta)^{2}}\left(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}\right)\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)-\frac{qe^{\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}}\sqrt{t-\eta}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\xi^{q/4}}\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^{q}+\xi^{q}}{q^{2}(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^{2}(t-\eta)^{2}}\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)-I_{-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^{q}+\xi^{q}}{q^{2}(t-\eta)}}dt=$$

$$=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{p/4}\xi^{-p/4}(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^{2}}{q^{2}(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^{2}(t-\eta)^{2}}\left(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}\right)\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}-\frac{qe^{\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}}\sqrt{t-\eta}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\xi^{q/4}}\right)\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^{q}+\xi^{q}}{q^{2}(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{q-1/2}\xi^{1/2}}{q^{2}(t-\eta)^{2}}\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)-I_{-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^{q}+\xi^{q}}{q^{2}(t-\eta)}}dt=$$

$$=\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\xi^{-p/4}}{2q\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y}\frac{\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^{2}}{q^{2}(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{\xi^{-p/4}([\chi(t)]^{p/4}-[\chi(\eta)]^{p/4})(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{([\chi(t)]^{q}-\xi^{q})^{2}}{q^{2}(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{q-1/2}\xi^{1/2}}{q^{2}(t-\eta)^{2}}(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)-\frac{q\sqrt{t-\eta}\,e^{-\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\xi^{q/4}}\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^{q}+\xi^{q}}{q^{2}(t-\eta)}}dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{q-1/2}\xi^{1/2}}{q^{2}(t-\eta)^{2}}\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)-I_{-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^{2}(t-\eta)}\right)\right]e^{-\frac{[\chi(t)]^{q}+\xi^{q}}{q^{2}(t-\eta)}}dt=$$

$$=J(y;\xi,\eta)+\int_{\eta}^{y}K_{1}(y;\xi,\eta;t)\,dt+\int_{\eta}^{y}K_{2}(y;\xi,\eta;t)\,dt+\int_{\eta}^{y}K_{3}(y;\xi,\eta;t)\,dt$$

болот, бул жерде

$$J(y;\xi,\eta)=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{2q\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\cdot e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,dt=$$

$$=\left|\frac{[\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2}}{q\sqrt{t-\eta}}=s,\ \ ds=\left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}}-\frac{[\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}}\right)dt\right|=$$

$$=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}}+\frac{\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}}\right)e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,dt-$$

$$-\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{\pi}\sqrt{t-\eta}}\cdot e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,dt=$$

$$=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}}+\frac{\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}}\right)e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,dt-$$

$$-\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{3p/4}\,\xi^{-p/4}\chi'(t)}{2q\sqrt{\pi(t-\eta)}}\cdot e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,dt=J_1(y;\xi,\eta)+\int_{\eta}^{y}K_4(y;\xi,\eta;t)\,dt\ .$$

Эми төмөндөгү интегралды карайбыз:

$$J_1(y;\xi,\eta)=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}}+\frac{\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}}\right)e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,dt\,.$$

Мейли

$$\frac{[\chi(t)]^{q/2}\,\xi^{q/2}}{q\sqrt{t-\eta}}=s,\quad \text{болсун.}$$

1). Эгерде $\xi<\chi(t),\ t=\eta,\ s=+\infty,\ t=y,\ s=\dfrac{[\chi(y)]^{q/2}-\xi^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}$ болсо,

анда

$$J_1(y;\xi,\eta)=\int_{+\infty}^{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-\xi^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\,dt=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-\xi^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}^{+\infty}[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}\,e^{-s^2}ds\,.$$

Мындан

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)-0} J_1(y;\xi,\eta)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}^{+\infty}[\chi(\eta)]^{p/4}[\chi(\eta)]^{-p/4}e^{-s^2}\,ds=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}^{+\infty}e^{-s^2}\,ds\,.$$

2). Мейли $\xi=\chi(\eta)$ болсун. Анда

$$s=\frac{[\chi(t)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{t-\eta}}\ ,\ t=\eta,\quad s=0,\quad t=y,\quad s=\frac{[\chi(y)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}\ .$$

$$J_1(y;\chi(\eta),\eta)=\int\limits_0^{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}[\chi(\eta)]^{-p/4}}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\,ds=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}e^{-s^2}ds\,.$$

Мындан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$-J_1(y;\chi(\eta),\eta)=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{[\chi(y)]^{q/2}-[\chi(\eta)]^{q/2}}{q\sqrt{y-\eta}}}e^{-s^2}ds\,.$$

Анда

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)-0} J_1(y;\xi,\eta)-J_1(y;\chi(\eta),\eta)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s^2}\,ds=-1/2\,.$$

Ошентип, төмөндөгү барабардык орун алат:

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)-0} J_1(y;\xi,\eta)=-1/2+J_1(y;\chi(\eta),\eta)\,.$$

$$K_4(y;\xi,\eta,t)=-\frac{[\chi(t)]^{3p/4}\xi^{-p/4}\chi'(t)}{2q\sqrt{\pi(t-\eta)}}\cdot e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\ ,$$

болгондуктан, төмөнкү баалоо орун алат

$$\left|K_4(y;\xi,\eta,t)\right|\le\frac{c}{\sqrt{t-\eta}},\ c=const\,.$$

Демек анда, $\int\limits_\eta^y K_4(y;\xi,\eta;t)\,dt$ интегралы үзгүлтүксүз, ошондуктан төмөндөгүдөй катыш орун алат

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)}\int\limits_\eta^y K_4(y;\xi,\eta,t)\,dt=\int\limits_\eta^y K_4(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt\,.$$

Ушуга эле окшош төмөндөгүдөй болорун көрсөтүүгө болот

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)}\int_{\eta}^{y}K_1(y;\xi,\eta,t)\,dt=\int_{\eta}^{y}K_1(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt\,.$$

Эми

$$\left|I_{1-{}^1\!/_q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\,\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)-\frac{q\sqrt{t-\eta}\,e^{-\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\,\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\,\xi^{q/4}}\right|\le$$

$$\le\frac{q(t-\eta)^{3/2}\,e^{-\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\,\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{3q/4}\,\xi^{3q/4}},\qquad 0<\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\,\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}<+\infty\,,$$

болушунан улам төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\left|K_2(y;\xi,\eta,t)\right|\le\frac{[\chi(\eta)]^{-\frac{q+2}{4}}\,\xi^{\frac{2-3q}{4}}}{2q\sqrt{\pi}(y-\eta)^{1/2}}\left(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}\right)\cdot e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\le\frac{c}{\sqrt{y-\eta}}\,.$$

Ошентип, төмөндөгүдөй катышка ээ болобуз

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)}\int_{\eta}^{y}K_2(y;\xi,\eta,t)\,dt=\int_{\eta}^{y}K_2(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt\,.$$

Төмөнкү

$$\left|I_{1-{}^1\!/_q}(z)-I_{-{}^1\!/_q}(z)\right|\le Cz^{-3/2}e^{z}=C\frac{q^3(t-\eta)^{3/2}}{2^{3/2}[\chi(t)]^{3q/4}}e^{-\frac{[\chi(t)]^q+\xi^q}{q^2(t-\eta)}}$$

баалоону эсепке алуу менен, төмөндөгүнү алабыз

$$\left|K_3(y;\xi,\eta,t)\right|\le C\frac{q[\chi(t)]^{q-1/2-3q/4}\,\xi^{1/2-3q/4}}{(t-\eta)^{1/2}}e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\le\frac{c}{(y-\eta)^{1/2}}\,.$$

Ошондуктан да

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)}\int_{\eta}^{y}K_3(y;\xi,\eta,t)\,dt=\int_{\eta}^{y}K_3(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt\qquad\text{болот.}$$

Ошентип

$$W[\sigma_2](\xi,\eta)=J_1(y;\xi,\eta)+\int_{\eta}^{y}K_1(y;\xi,\eta,t)\,dt+\int_{\eta}^{y}K_2(y;\xi,\eta,t)\,dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y} K_3(y;\xi,\eta,t)\,dt+\int_{\eta}^{y} K_4(y;\xi,\eta,t)\,dt\,.$$

Анда төмөнкү барабардык орун алат:

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)+0} W[1](\xi,\eta)=-{}^1\!/_2+J_1(y;\chi(\eta),\eta)+\int_{\eta}^{y} K_1(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y} K_2(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt+\int_{\eta}^{y} K_3(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt+\int_{\eta}^{y} K_4(y;\chi(\eta),\eta,t)\,dt=-{}^1\!/_2+\overline{W[1]}(\chi(\eta),\eta)\,.$$

Ошентип төмөндөгүдөй катышка ээ болобуз:

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)-0} W[1](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}+\overline{W[1]}(\chi(\eta),\eta)\,.$$

Эми $\forall\sigma_2(t;x,y)$: үчүн секириктин формуласын далилдейбиз:

$$W\left[\sigma_2\right](\xi,\eta)=\int_{\eta}^{y} U_{2x}(\chi(t),t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)=$$

$$=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}}+\frac{\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}}\right)e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\sigma_2(t;x,y)-$$

$$-\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{3p/4}\,\xi^{-p/4}\chi'(t)}{2q\sqrt{\pi(t-\eta)}}\cdot e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\sigma_2(t;x,y)dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{\xi^{-p/4}([\chi(t)]^{p/4}-[\chi(\eta)]^{p/4})(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\sigma_2(t;x,y)dt+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(t-\eta)^2}(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)-\frac{q\sqrt{t-\eta}\,e^{-\frac{2[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}}}{2\sqrt{\pi}[\chi(t)]^{q/4}\xi^{q/4}}\right]\times$$

$$\times e^{-\frac{[\chi(t)]^q+\xi^q}{q^2(t-\eta)}}\sigma_2(t;x,y)dt+\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(t)]^{\frac{q-1}{2}}\xi^{1/2}}{q^2(t-\eta)^2}\left[I_{1-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)-I_{-1/q}\left(2\frac{[\chi(t)]^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(t-\eta)}\right)\right]\times$$

$$\times e^{-\frac{[\chi(t)]^q+\xi^q}{q^2(t-\eta)}}\sigma_2(t;x,y)dt=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5\,.$$

Бул жерде $T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5$ – үзгүлтүксүз функциялар экендигин байкоо кыйын эмес.

Төмөндөгүнү карайбыз

$$T_1 = \int_\eta^y \frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}} + \frac{\xi^{q/2} - [\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}} \right) e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}} \sigma_2(t;x,y)\,dt\,.$$

Мейли

$$\frac{([\chi(t)]^{q/2} - \xi^{q/2})^2}{q\sqrt{t-\eta}} = s\,.$$

болсун. Анда

$$\left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2\sqrt{t-\eta}} - \frac{[\chi(t)]^{q/2} - \xi^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}} \right) dt = ds\,.$$

$\xi < \chi(t),\quad t = \eta,\quad s = +\infty;\quad t = y,\quad s = \dfrac{[\chi(t)]^{q/2} - \xi^{q/2}}{q(y-\eta)}$ болгондуктан, анда

$$T_1 = \sigma_2(\eta;x,y)J_1(y;\xi,\eta) + \int_\eta^y \frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}} + \frac{\xi^{q/2} - [\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}} \right) \times$$

$$\times e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}} [\sigma_2(t;x,y) - \sigma_2(\eta;x,y)]\,dt = \sigma_2(\eta;x,y)J_1(y;\xi,\eta) + \int_\eta^y \frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \frac{[\chi(t)]^{q/2-1}\chi'(t)}{2q\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}} \cdot [\sigma_2(t;x,y) - \sigma_2(\eta;x,y)]\,dt + \int_\eta^y \frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \frac{\xi^{q/2} - [\chi(t)]^{q/2}}{2q(t-\eta)^{3/2}} e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}} \cdot [\sigma_2(t;x,y) - \sigma_2(\eta;x,y)]\,dt = \sigma_2(\eta;x,y)J_1(y;\xi,\eta)] +$$

$$+\Pi(y;\xi,\eta) - L(y;\xi,\eta)]\,.$$

$\Pi(y;\xi,y)$ үзгүлтүксүз экендиги көрүнүп турат.

$L(y;\xi,\eta)$ функциясынын $(\xi_0,\eta_0) = (x(\eta_0),\eta_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болорун далилдейбиз, мында

$$L(y,\xi,\eta) = \int_\eta^y \frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}(\xi^{q/2} - [\chi(t)]^{q/4})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}} e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{-q/2})^2}{q^2(t-\eta)}} [\sigma_2(t;x,y) - \sigma_2(\eta;x,y)]dt\,.$$

Төмөндөгү туюнтманы карайбыз:

$$L(y,\xi,\eta)-L(y,\xi_0,\eta_0)=\int_{\eta}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}\,(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,\omega(t,\eta)dt-$$

$$-\int_{\eta_0}^{y}\frac{[\chi(\eta_0)]^{p/4}\,\xi_0^{-p/4}\,(\xi_0^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta_0)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta_0)}}\,\omega(t,\eta_0)dt=$$

$$=\int_{\eta}^{\eta_0+h}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}\,(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,\omega(t,\eta)dt+$$

$$+\int_{\eta_0+h}^{y}\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}\,(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}\,\omega(t,\eta)dt-$$

$$-\int_{\eta_0}^{\eta_0+h}\frac{[\chi(\eta_0)]^{p/4}\,\xi_0^{-p/4}\,(\xi_0^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta_0)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta_0)}}\,\omega(t,\eta_0)dt-$$

$$-\int_{\eta_0+h}^{y}\frac{[\chi(\eta_0)]^{p/4}\,\xi_0^{-p/4}\,(\xi_0^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta_0)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta_0)}}\,\omega(t,\eta_0)dt=$$

$$=\int_{\eta_0+h}^{y}[K(t,\xi,\eta)\omega(t,\eta)-K(t,\chi(\eta_0),\eta_0)\omega(t,\eta_0)]dt+$$

$$+\int_{\eta}^{\eta_0+h}[K(t,\xi,\eta)\omega(t,\eta)dt-\int_{\eta_0}^{\eta_0+h}-K(t,\chi(\eta_0),\eta_0)\omega(t,\eta_0)]dt=A_1+A_2+A_3,$$

мында

$$K(t,\xi,\eta)=\frac{[\chi(\eta)]^{p/4}\,\xi^{-p/4}\,(\xi^{q/2}-[\chi(t)]^{q/2})}{2q\sqrt{\pi}(t-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{([\chi(t)]^{q/2}-\xi^{q/2})^2}{q^2(t-\eta)}}.$$

$$\forall\varepsilon>0:\ \ |A_1|\le\varepsilon C_1,\quad |A_3|\le\varepsilon C_3,$$

мында $C_1,\ C_3-const$, экендигин байкоо кыйын эмес.

Эгерде $|\eta-\eta_0|<\delta,\ h<\delta,$ башкача айтканда η_0чекитинин чекебелинде $|\omega(t.\eta)|<\varepsilon$ болсо, анда

$$|A_2|<\varepsilon\int_{\eta}^{\eta_0+h}|K(t;\xi,\eta)|dt=\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\int_{\eta}^{\eta_0+h}|K_2(t;\chi(\eta),\eta)|dt\right)<\varepsilon C_2,\qquad C_2-const.$$

Ошентип

$$\left|L(y;\xi,\eta)-L(y;\xi_0,\eta_0)\right|<\varepsilon C,$$

болот, мында $C=C_1+C_2+C_3$.

Анда, демек $L(y;\xi,\eta)$ – үзгүлтүксүз . Ошондуктан төмөнкү катыш орун алат

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)-0}T_1=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y)+\sigma_2(\eta;x,y)J_1(y;\chi(\eta),\eta)+\Pi(y;\chi(\eta),\eta)+L(y;\chi(\eta),\eta)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y)+T_1(y;\chi(\eta),\eta),$$

Ошентип төмөнкүгө ээ болобуз

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)-0}W\left[\sigma_2\right](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y)+\overline{W\left[\sigma_2\right]}(\chi(\eta),\eta).$$

Бул катышты төмөнкү көрүнүштө көрсөтөбүз

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)}W\left[\sigma_2\right](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta_0;x,y)+\overline{W\left[\sigma_2\right]}(\xi_0,\eta_0),\quad (\xi,\eta)\in D,$$

$$(\xi_0,\eta_0)\in\Gamma,:\ \xi_0=\chi(\eta_0),\quad 0\le\eta_0\le h.$$

Эми $\upsilon(\xi,\eta)$ ны карайбыз. Эгерде секириктин

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{\partial}{\partial\xi}V\left[\sigma_1\right](\xi,\eta)=-\sigma_1(\eta;x,y),$$

$$\lim_{\xi\to\chi(\eta)+0}W\left[\sigma_2\right](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y)+\overline{W\left[\sigma_2\right]}(\chi(\eta),\eta),$$

формулаларын эске алсак, анда теңдемелердин төмөнкү системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases}-\sigma_1(\eta;x,y)+\int\limits_{\eta}^{y}U_{2\xi}(\chi(\eta),t;0,\eta)-\sigma_2(t;x,y)]\,dt=0,\\ -\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y)+\int\limits_{\eta}^{y}U_2(0,t;0,\eta)\,\sigma_1(t;x,y)\,dt+\int\limits_{\eta}^{y}U_{2x}(\chi(\eta),t;\chi(\eta),\eta)\,\sigma_2(t;x,y)\,dt=\\ =U_2(x,y;\chi(\eta),\eta).\end{cases}$$

Системаны төмөнкү көрүнүштө кайра жазып алабыз

$$\begin{cases} \sigma_1(\eta;x,y)+\int\limits_\eta^y 0\cdot\sigma_1(t;x,y)\,dt-\int\limits_\eta^y U_{2\xi}(\chi(\eta),t;0,\eta)\,\sigma_2(t;x,y)\,dt=0, \\ \sigma_2(\eta;x,y)-2\int\limits_\eta^y U_2(0,t;0,\eta)\ \sigma_1(t;x,y)\,dt-2\int\limits_\eta^y U_{2x}(\chi(\eta),t;\chi(\eta),\eta)\ \sigma_2(t;x,y)\,dt= \\ =2U_2(x,y;\chi(\eta),\eta). \end{cases}$$

Мейли

$$N_{11}(t,\eta)=0,\quad N_{12}(t,\eta)=-U_{2\xi}(\chi(t),t;0,\eta),\quad Q_1(x,y;\eta)=0;$$
$$N_{21}(t,\eta)=-2U_2(0,t;0,\eta),\quad N_{22}(t,\eta)=-2U_{2x}(\chi(t),t;\chi(\eta),\eta),$$
$$Q_2(x,y;\eta)=-2U_{2x}(x,y;\chi(\eta),\eta).$$

болсун. Төмөнкү баалоолор орун алат:

$$|N_{12}|\le C_1,\quad |N_{12}|\le\frac{C_2}{(t-\eta)^{1/2}}$$
$$|N_{22}|\le\frac{C_3}{(t-\eta)^{1/2}},\qquad |Q_2|\le\frac{C_4}{(y-\eta)^{1/2}}$$

Анда теңдемелердин

$$\begin{cases} \sigma_1(\eta;x,y)+\int\limits_\eta^y N_{11}(t,\eta)\,\sigma_1(t;x,y)dt+\int\limits_\eta^y N_{12}(t,\eta)\,\sigma_2(t;x,y)dt=Q_1(x,y;\eta), \\ \sigma_2(\eta;x,y)+\int\limits_\eta^y N_{21}(t,\eta)\,\sigma_1(t;x,y)dt+\int\limits_\eta^y N_{22}(t,\eta)\,\sigma_2(t;x,y)dt=Q_2(x,y;\eta), \end{cases}$$

системасы жалгыз чечимге ээ болот.

Ошентип, (2.2.12) маселесинин чечими катары аныкталуучу $G_2(x,y;\xi,\eta)$ функциясы тургузулду.

$x=0$ болгондо (2.2.11) ден $\tau(y)$ менен $\nu(y)$ тин ортосундагы катышты алабыз:

$$\tau(y)=-\kappa\int\limits_0^y\frac{\nu(\eta)d\eta}{(y-\eta)^{1-1/q}}+\int\limits_0^y w(0,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\tau_0(y),\qquad (2.2.13)$$

мында $\kappa = \dfrac{1}{q^{1-1/p}\Gamma(1-\frac{1}{p})}$, $\tau_0(y) = \int\limits_0^{\ell_1} \xi^p G_2(0,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi - \int\limits_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta -$

$$-\int\limits_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^{\chi(\eta)} G_2(0,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi \ .$$

2.2.3. D_2 **аймагындагы** $\tau(y)$ **и** $\nu(y)$ **тин ортосундагы катыш**. Төмөндөгү теңдештикти түзөбүз

$$\vartheta L_2(u) - u L_2^*(\vartheta) = \{\vartheta u_{\xi\eta} + [\vartheta_{\xi\eta} + a\vartheta]u\}_\xi - [\vartheta_\xi u_\xi - b\vartheta u]_\eta, \qquad (2.2.13)$$

мында $L_2^*(\vartheta) \equiv -\vartheta_{\xi\xi\eta} - (a\vartheta)_\xi - (b\vartheta)_\eta + c\vartheta$.

Мейли $M(x,y)$ деген D_2 аймагынын каалагандай чекити болсун. (2.2.13) теңдештигин $D_2^* = \{(\xi,\eta): x < \xi < 0, 0 < \eta < y\}$ аймагы боюнча интегралдоону ишке ашырып жана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ функциясынын касиеттерин эске алып мындай көрсөтүлүшкө ээ болобуз

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_\xi(x,y;0,y)\tau(y) - \vartheta(x,y;0,y)\nu(y) - \\ &- \int\limits_0^y [\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) + a(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta)]\tau(\eta)d\eta + \qquad (2.2.14) \\ &+ \int\limits_0^y \vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta + u_0(x,y), \end{aligned}$$

мында

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \vartheta_\xi(x,y;x,0)\psi_3(x) + \vartheta(x.y;0,0)\psi_3^1(0) - \vartheta_\xi(x.y;0,0)\psi_3(0) - \\ &- \int\limits_0^x [\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0) + b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)]\psi_3(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

$\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ функциясы

$$L_2^*(\vartheta) = 0, \quad (\xi,\eta) \in D_2^* \ , \qquad (2.2.15)$$

теңдемесинин

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = 0, \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = 1 \quad 0 \le \eta \le x, \qquad (2.2.16)$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = \omega(x,y;\xi), \qquad x \le \xi \le 0, \qquad (2.2.17)$$

шарттарын канааттандырган чечими катары аныкталат, болгондо да $\omega(x,y;\xi)$ төмөнкү маселесинин чечими болот:

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+b(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)=0, x<\xi<0, \\ &\vartheta(x,y;\xi,y)_{\xi=x}=0, \vartheta_{\xi}(x,y;\xi,y)_{\xi=x}=1. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Көрүнүп тургандай, (2.2.18) маселесинин чечими жашайт жана жалгыз көрүнүштө. Бул маселенин чечимге ээ болору

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_y^{\xi}(\xi_1-\xi)b(\xi_1,y)\vartheta(x,y;\xi_1,y)d\xi_1 \tag{2.2.19}$$

интегралдык теңдемесинин чечилишине эквиваленттүү түрдө келтирилет.

(2.2.19) интегралдык теңдемесинин чечимин резольвента аркылуу төмөнкү көрүнүштө көрсөтөбүз

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_y^{\xi}R(x,\xi_1)(\xi_1-x)d\xi_1,$$

мында $R(x,\xi_1)$ – бул $(\xi_1-\xi)b(\xi_1,y)$ ядросунун резольвентасы.

(2.2.15) - (2.2.18) ден $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ функциясы үчүн

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\xi-x-\int_x^{\xi}(\xi-\xi_1)b(\xi_1,\eta)\vartheta(x,y;\xi,\eta)d\xi_{1}- \\ &-\int_x^{\xi}d\xi_1\int_y^{\eta}\left[a(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)c(\xi_1,\eta_1)\right]\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

интегралдык теңдемесин алабыз.

2.2.1-лемма. Эгерде

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}:b(x,y)\leq 0, \tag{2.2.21}$$

болсо, анда

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}\wedge\forall\xi\in[x,0]:\vartheta(x,y;\xi,y)\geq\xi-x\geq 0. \tag{2.2.22}$$

(2.2.22) ден

$$\forall y\in[0,h]:\vartheta(\ell_2,y;0,y)\geq\ell_2>0. \tag{2.2.23}$$

барабарсыздыгы келип чыгат

(2.2.14) төн (2.2.4) түн экинчи шартын пайдаланып төмөнкүгө ээ болобуз

$$\begin{aligned} &\vartheta(-\ell_2,y;0,y)\nu(y)=\int_0^y\vartheta_{\eta}(-\ell_2,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+ \\ &+\vartheta_{\eta}(-\ell_2,y;0,y)\tau(y)-\int_0^y A(-\ell_2,y;\eta)\tau(\eta)d\eta+g_0(y), \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

мында $g_0(y)=u_0(-\ell_2,y)-\varphi_2(y)$.

Эгерде (2.2.23) барабарсыздыгын эске алсак, анда (2.2.24) теңдемеси интегралдык теңдеме болот жана анын $\nu(y)$ ке карата кайрылмасы (обращение) төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ болот

$$\nu(y) = B(y)\tau(y) + \int_0^y H(y,\eta)\tau(\eta)d\eta + \nu_0(y), \qquad (2.2.25)$$

мында $B(y) = \dfrac{\vartheta_\xi(-\ell_2,y;0,y)}{\vartheta(-\ell_2,y;0,y)}, \nu_0(y) = \dfrac{g_0(y)}{\vartheta(-\ell_2,y;0,y)} + \int_0^y \dfrac{g_0(\eta)R_1(y,\eta)}{\vartheta(-\ell_2,\eta;0,\eta)}d\eta,$

$$H(y,\eta) = -\frac{A(-\ell_2,y;0,\eta)}{\vartheta(-\ell_2,y;0,y)} + \frac{\vartheta_\xi(-\ell_2,\eta;0,\eta)}{\vartheta(-\ell_2,\eta;0,\eta)}R_1(y,\eta) - \int_\eta^y \frac{A(-\ell_2,\eta_1;\eta)}{\vartheta(-\ell_2,\eta_1;0,\eta_1)}R_1(y,\eta_1)d\eta_1.$$

2.2.4. Маселени интегралдык теңдемеге келтирүү. (2.2.12) жана (2.2.25) тен төмөндөгүнү алабыз

$$\tau(y) = -\kappa\int_0^y \frac{B(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}\tau(\eta)d\eta + \int_0^y K(y,\eta)\tau(\eta)d\eta + g(y), \qquad (2.2.26)$$

мында $K(y,\eta) = w(0,y;0,\eta)B(y) - \int_\eta^y \left[\dfrac{\kappa H(\eta_1,\eta)}{(y-\eta_1)^{1-1/q}} - w(0,y;0,\eta_1)H(\eta_1,\eta)\right]d\eta_1,$

$$g(y) = \tau_0(y) - \int_0^y \left[\frac{\kappa}{(y-\eta)^{1-1/q}} - \omega(0,y;0,\eta)\right]\nu_0(\eta)d\eta.$$

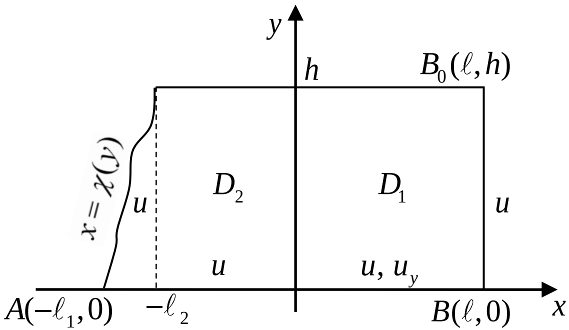
Мына ушундай кылып, 2.2.1 маселесинин чечилиши жалгыз үзгүлтүксүз чечимге ээ боло турган күчсүз ядролуу (2.2.26) интегралдык теңдемесинин чечилишине эквиваленттүү түрдө редуцирленди.

Ошентип төмөнкү теорема далилденди.

2.2.1-теорема. Эгерде (2.2.3), (2.2.7) жана (2.2.21) шарттары аткарылса, анда 2.2.1-маселесинин чечими жашайт жана жалгыз.

2.3. $x=0$ сызыгы менен үчүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселеси

2.3.1. Маселенин коюлушу. Мейли ℓ, ℓ_1 жана h - каалагандай оң сандар болсун. AA_0 аркылуу $A_0(-\ell_1,0)$ жана $A(-\ell_2,h)$ чекиттерин туташтыруучу жөнөкөй жылма $x=\chi(y)$ ийрисин белгилейли, мында $\ell_1=-\chi(0)$, $\ell_2=-\chi(h)$, болгондо да $-\ell_1<-\ell_2<0$. Мейли $A(-\ell_1,0)B(\ell,0)$, $B(\ell,0)B_0(\ell,h)$, $B_0(\ell,h)A_0(-\ell_2,h))$ – тешелүү түрдө $y=0,\ x=\ell,\ y=h$ түздөрүнүн кесиндилери болсун (2-сүрөттү эске салабыз).



2-сүрөт

$AB, BB_0,\ B_0A_0,\ A_0A$ сызыктары менен чектелген D аймагында

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-x^{\rho}u_{yy}+d(x,y)u=0,(x,y)\in D_1, \qquad (2.3.1)$$

$$L_2(u)=u_{xxy}+\beta(x,y)u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,(x,y)\in D_2, \qquad (2.3.2)$$

теңдемелери үчүн, мында $D_1=D\cap(x>0), D_2=D\cap(x<0),\ p=const>-1$, жалгаштыруу маселесин карайбыз.

(2.3.1) жана (2.3.2) көрүнүшүндөгү теңдемелерди, алардын гиперболалык типтеги болгонуна карабастан, псевдопараболалык типтеги [50] деп атоо кабыл алынган.

Мейли C^{n+m} деген $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s(r=0,1,...,n,s=0,1,..m)$ туундуларына ээ болгон функкциялардын классын билдирсин.

2.3.1-маселе. D_1 аймагында (2.3.1) теңдемесин,

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (2.3.3)$$

баштапкы шартын,

$$u(\ell,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h \qquad (2.3.4)$$

чек аралык шартын канааттандырган $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^2(D_1)\cap C^{2+1}(D_1)$ функциясын жана D_2 аймагында (2.3.2) теңдемесин,

$$u(x,0)=\psi_3(x),\ -\ell_1\le x\le 0, \qquad (2.3.5)$$

баштапкы шартын,

$$u(\chi(y),y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (2.3.6)$$

чек аралык шартын, ошондой эле

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h, \qquad (2.3.7)$$

жалгаштыруу шарттарын, мында $\varphi_i(y)(i=1,2),\ \varphi_j(x)(j=\overline{1,3})$ – берилген жылма функциялар, болгондо да

$$\begin{aligned}&\varphi_i(y)\in C^1[0,h](i=1,2),\ \psi_1(x)\in C^2[0,\ell],\\&\psi_2(x)\in C^1[0,\ell],\ \psi_3(x)\in C^1[-\ell_1,0],\end{aligned} \qquad (2.3.8)$$

$$\psi_1(0)=\psi_3(0),\ \psi_1'(0),=\psi_3'(0),\ \psi_1(-\ell_1)=\varphi_2(0),\ \psi_1(\ell)=\varphi_1(0)\,, \qquad (2.3.9)$$

канааттандырган $u(x,y)\in C(\overline{D_2})\cap C^{2+1}(D_2)$ функциясын табуу керек.

(2.3.1) жана (2.3.2) теңдемелеринин коэффициенттерине карата төмөндөгүдөй шарттардын аткарылышын талап кылабыз:

$$\begin{aligned}&d\in C(\overline{D}_1),\ \beta\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\ a\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2),\\&b\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2),\ c\in C(\overline{D}_2).\end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

2.3.1–маселени чечиш үчүн аралаш типтеги теңдемелердин теориясында пайдаланылуучу Трикоминин усулун пайдаланабыз [58].

Мейли

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\ 0\le y\le h, \qquad (2.3.11)$$

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y),\ 0\le y\le h, \qquad (2.3.12)$$

болсун, мында $\tau(y)$ жана $\nu(y)$ – азырынча белгисиз функциялар. Анда, (2.3.7) шарттары сакталаары көрүнүп турат. Төмөндөгүдөй жардамчы маселелерди карайбыз.

2.3.1.1-маселе. Баштапкы (2.3.3) шарттары, (2.3.4) жана (2.3.12) чек аралык шарттары менен (2.3.1) теңдемесинин чечимин табуу керек.

2.3.1.2-маселе. Баштапкы (2.3.5) шарттары, (2.3.11) жана (2.3.12) чек аралык шарттары менен (2.3.2) теңдемесинин чечимин табуу керек.

2.3.2. 2.3.1.2-маселенин чечимин интегралдык теңдемеге келтирүү.

(2.3.1) теңдемесин у боюнча 0 дөн y ке чейинки пределдерде интегралдап жана ошол эле учурда (2.3.3) баштапкы шарттарын эске алып

$$u_{xx} - x^p u_y = \omega(x) - \int_0^y d(x,\eta)u(x,\eta)d\eta, \tag{2.3.13}$$

теңдемесине келебиз, мында $\omega(x) = \psi_1''(x) - x^p \psi_2(x)$ – белгилүү функция.

(2.3.13) көрүнүшүндөгү кубулуучу экинчи тартиптеги параболалык теңдемелер [73], [80], [81] эмгектеринде изилденген.

(2.3.13) теңдемесин интегралдык теңдемеге келтиребиз. Ушул максатта $G_2(x,y;\xi,\eta)$ функциясын карайбыз

$$G_2(x,y;\xi,\eta) = U_2(x,y;\xi,\eta) - w(x,y;\xi,\eta),$$

мында

$$U_2(x,y;\xi,\eta) = \frac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)} I_{-1/q}\left(2\frac{x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right)e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}},\ q = p+2,$$

$w(x,y;\xi,\eta)$ – төмөнкү маселенин чечими

$$w_{\xi\xi} + \xi^p w_\eta = 0,$$

$$w_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=0} = U_2(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=0},\ \ w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=l} = U_2(x,y;\xi,\eta),\ w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = 0,$$

ал эми $I_{-1/q}(z)$ – бул Бесселдин белгилүү функциясы.

Анда (2.3.13) теңдемесинин (2.3.4), (2.3.12) шарттарын жана (2.3.3) төгү биринчи шартты канааттандыруучу чечими эквиваленттүү түрдө

$$u(x,y) = -\int_0^y G_2(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta + \int_0^y d\eta\int_0^\ell K_1(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)d\xi + \Phi_1(x,y), \tag{2.3.14}$$

интегралдык теңдемесине келтирилет, мында

$$K_1(x,y;\xi,\eta) = d(\xi,\eta)\int_\eta^y G_2(x,y;\xi,\eta_1)d\eta_1,\ \ \Phi_1(x,y) = \int_0^\ell \xi^p G_2(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^y G_{2\xi}(x,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y d\eta\int_0^\ell G_2(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi\ .$$

(2.3.14) төн (2.3.11) шарттарын эсепке алуу менен төмөндөгү катышты алабыз

$$\begin{gathered}\tau(y) = -\kappa\int_0^y \frac{\nu(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}d\eta + \int_0^y w(0;y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta + \\ + \int_0^y d\eta\int_0^\ell K_1(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi + \Phi_1(0,y),\end{gathered} \tag{2.3.15}$$

мында $\kappa = \dfrac{1}{q^{p/q}\Gamma\left(1-1/q\right)}$.

2.3.3. 2.3.3-маселесинин чечиминин көрсөтүлүшү. 2.3.3-маселенин чечиминин көрсөтүлүшүн алуу үчүн [68] эмгегинде каралган Римандын функциясы усулунан пайдаланабыз. [20], [62] эмгектеринде үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн Римандын функциясын тургузуунун ар түрдүү варианттары иштелип чыгылган.

Мейли $\forall(x,y)\in D_2$ болсун. $D_2^* = \{(\xi,\eta): x<\xi<0,\ 0<\eta<h\}$ аймагында төмөнкү теңдештикти карайбыз

$$\vartheta L_2(\omega) - uL_2^*(\vartheta) = \{\vartheta u_{\xi\eta} + [\vartheta_{\xi\eta} - (\beta\vartheta)_\eta + a\vartheta]u\}_\xi - \{[\vartheta_\xi - \beta\vartheta]u_\xi - b\vartheta u\}_\eta, \tag{2.3.16}$$

мында

$$L_2^*(\vartheta) \equiv -\vartheta_{\xi\xi\eta} + (\beta\vartheta)_{\xi\eta} - (a\vartheta)_\xi - (b\vartheta)_\eta + c\vartheta.$$

$\vartheta(x,y;\xi,n)$ функциясы

$$L_2^*(\vartheta) = 0,\ \ (\xi,\eta)\in D_2^*, \tag{2.3.17}$$

теңдемесинин,

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = 0,\ \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = 1,\ \vartheta(x,y;\xi,n)\big|_{\eta=y} = \theta(x,y;\xi), \tag{2.3.18}$$

шарттарын канааттандырган чечими катары бир маанилүү түрдө аныкталат, мында $\theta(x,y;\xi)$ – төмөнкү маселесинин чечими:

$$\begin{gathered}\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\xi}[\beta(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)] - b(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y) = 0,\ \ x<\xi<0, \\ \vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = 0, \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = 1.\end{gathered} \tag{2.3.19}$$

$\iint\limits_{D_2^*}[\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)]d\xi\, d\eta$ интегралын эсептөөнүн натыйжасында (2.3.17)-(2.3.19) шарттарын эсепке алуу менен 2.3.3-маселенин чечиминин $\vartheta(x,y;\xi,n)$ функциясы аркылуу болгон көрсөтүлүшүн төмөнкү көрүнүштө алабыз

$$u(x,y)=A(x,y)\tau(y)-\vartheta(x,y;0,y)\nu(y)+$$
$$+\int_0^y[B(x,y;\eta)\tau(\eta)+\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\nu(\eta)]d\eta+\Psi_1(x,y),(x,y)\in D_2, \tag{2.3.20}$$

мында

$$A(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;0,y)-\beta(0,y)\vartheta(x,y;0,y),$$

$$B(x,y;\eta)=-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)+\beta(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)-[a(0,\eta)-\beta_\eta(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$$

$$\Psi_1(x,y)=[\vartheta_\xi(x,y;x,0)-\beta(x,0)\vartheta(x,y;x,0)]\psi_3(x)+\vartheta(x,y;0,0)\psi_3'(0)-$$

$$-[\vartheta_\xi(x,y;0,0)-\beta(0,0)\vartheta(x,y;0,0)]\psi_3(0)-$$

$$-\int_o^x\{\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\beta(\xi,0)\vartheta_\xi(x,y;\xi,0)+[b(\xi,0)-\beta_\xi(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0)\}\psi_3(\xi)d\xi.$$

Интегралдоо ыкмасы менен (2.3.17) теңдемесинен (2.3.18) щарттарын эске алып $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ үчүн жалгыз чечимге ээ боло турган интегралдык теңдемени алабыз

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\int_x^\xi[\beta(\xi_1,\eta)-(\xi-\xi_1)b(\xi_1,\eta)]\vartheta(x,y;\xi_1,\eta)d\xi_1-$$
$$-\int_x^\xi d\xi_1\int_y^\eta[a(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)c(\xi_1,\eta_1)]\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1. \tag{2.3.21}$$

Анан $\eta=y$ болгондо (2.3.21) ден төмөндөгү интегралдык теңдемесин алабыз:

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_x^\xi[\beta(\xi_1,y)-(\xi-\xi_1)b(\xi_1,y)]\vartheta(x,y;\xi_1,y)d\xi_1, \tag{2.3.22}$$

мунун чечими (2.3.19) маселесинин чечимине эквиваленттүү.

Төмөндөгү лемма орун алат.

2.3.1-лемма. Эгерде

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_2:\beta(x,y)\geq 0,b(x,y)\leq 0, \tag{2.3.23}$$

болсо, анда

$$(\forall(x,y)\in\overline{D}_2)\wedge(\forall\xi\in[x,0]):\vartheta(x,y;\xi,y)\geq\xi-x\geq 0. \qquad (2.3.24)$$

барабарсыздыгы орун алат.

Далилдөө. (2.3.22) теңдемесинин кайрылмасы төмөндөгүдөй көрүнүштө көрсөтөбүз

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_x^{\xi}R(y,\xi,\xi_1)(\xi_1-x)d\xi_1,\ \forall\xi\in[x,0], \qquad (2.3.25)$$

мында

$$R(y;\xi,\xi_1)=K_1(y;\xi,\xi_1)+K_2(y;\xi,\xi_1)+...+K_n(y;\xi,\xi_1)+...,$$

$$K_1(y;\xi,\xi_1)=\beta(\xi_1,y)-(\xi-\xi_1)b(\xi_1,y),$$

$$K_n(y;\xi,\xi_1)=\int_{\xi_1}^{\xi}K_1(y;\xi,\xi_2)K_{n-1}(y;\xi_2,\xi_1).d\xi_2,\ n=2,3,...$$

(2.3.23) шарты аткарылган учурда

$$(\forall g\in[0,h])\wedge(\forall\xi_1\in[x,\xi]):\ K_1(y;\xi,\xi_1)\geq 0$$

барабарсыздыгы орун алат.

Анда $\forall n\in N:K_n(y;\xi,\xi_1)\geq 0.$ болот. Демек анда, (2.3.25) барабардыгынын оң жагында турган интеграл терс эмес. Ошондуктан (2.3.24) барабарсыздыгы орун алат.

(2.3.24) төн төмөндөгү барабарсыздыктын келип чыгарын байкайбыз

$$\forall y\in[0,h]:\ \vartheta(\chi(y),y;0,y)\geq-\chi(y)\geq\ell_2>0. \qquad (2.3.26)$$

2.3.4. D_2 **аймагынан алынган** $\tau(y)$ **менен** $\nu(y)$ **тин ортосундагы катыш.** (2.3.6) жана (2.3.20) ны пайдаланып мындай функционалдык катышты алабыз:

$$\begin{aligned}&A(\chi(y),y)\tau(y)-\vartheta(\chi(y),y;0,\eta)\nu(y)+\\&+\int_0^y[B(\chi(y),y;\eta)\tau(\eta)+\vartheta_\eta(\chi(y),y;0,\eta)\nu(\eta)]d\eta=\varphi_2(y)-\Psi_1(\chi(y),y).\end{aligned} \qquad (2.3.27)$$

Эгерде (2.3.26) барабарсыздыгын эске алсак, анда (2.3.27) катышын $\nu(y)$ ке карата интегралдык теңдеме катары кароого болот, анын кайрылмасы төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ болот

$$v(y)=A_1(y)\tau(y)+\int_0^y H_1(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+v_0(y), \qquad (2.3.28)$$

мында

$$A_1(y)=\frac{A(\chi(y),y)}{\vartheta(\chi(y),y;\,0,y)},\ H_1(y,\eta)=\frac{B(\chi(y),y;\eta)}{\vartheta(\chi(y),y;\,0,y)}+\frac{A(\chi(\eta),\eta)}{\vartheta(\chi(\eta),\eta;\,0,\eta)}R_1(y,\eta)+$$

$$+\int_\eta^y\frac{B(\chi(\eta_1),\eta_1;\,\eta)}{\vartheta(\chi(\eta),\eta_1;\,0,\eta_1)}R_1(y,\eta_1)d\eta_1,$$

$$v_0(y)=\frac{\Psi_1(\chi(y),y)-\varphi_2(y)}{\vartheta(\chi(y),y;0,y)}+\int_0^y\frac{\Psi_1(\chi(\eta),\eta)-\varphi_2(\eta)}{\vartheta(\chi(\eta),\eta;0,\eta)}R_1(y,\eta)d\eta,$$

$R_1(y;\eta)$ - бул $\dfrac{\vartheta_\eta(\chi(y),y;\,0,\eta)}{\vartheta(\chi(y),y;\,0,y)}$ ядросунун резольвентасы.

2.3.5. Маселени интегралдык теңдемелердин системасына келтирүү. $v(y)$ ти жоготуп (2.3.15) жана (2.3.28) ден төмөнкүгө ээ болобуз

$$\tau(y)=\int_0^y H(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K_1(0,y;\,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+\Phi_2(y) \qquad (2.3.29)$$

мында

$$H(y,\eta)=A_1(\eta)w(0,y;0,\eta)-\frac{\kappa A_1(\eta)}{(y-n)^{1-1/q}}+\int_\eta^y[w(0,y;0,s)-\frac{\kappa}{(y-s)^{1-1/q}}]H_1(s,\eta)ds,$$

$$\Phi_2(y)=\Phi_1(0,y)+\int_0^y w(0,y;\,0,\eta)v_0(\eta)d\eta-\kappa\int_0^y\frac{v_0(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}d\eta.$$

(2.3.29) теңдемесин интегралдык теңдеме катары $\tau_1(y)$ ке карата кайрылмасын алып төмөндөгүнү алабыз

$$\tau(y)=\Phi_3(y)+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K_2(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (2.3.30)$$

мында

$$K_3(y;\xi,\eta)=K_1(0,y;\xi,\eta)+\int_\eta^y\Gamma_1(y,s)K_1(0,s;\xi,\eta)ds,\ \ \Phi_3(y)=\Phi_2(y)+\int_0^y\Gamma_1(y,s)\Phi_2(s)ds.$$

Андан ары $\tau(y)$ ти жоготуп (2.3.28) жана (2.3.30) дан төмөндөгүгө ээ болобуз

$$v(y)=\Phi_4(y)+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K_3(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \qquad (2.3.31)$$

мында

$$K_3(y;\xi,\eta)=K_2(y;\xi,\eta)\Phi_3(\eta)+\int\limits_{\eta}^{y}H_1(y,s)K_2(s;\xi,\eta)ds,$$

$$\Phi_4(y)=\nu_0(y)+A_1(y)\Phi_3(y)+\int\limits_{0}^{y}H_1(y,\eta)\Phi_3(\eta)ds\,.$$

(2.3.31) ден $\nu(y)$ тин маанисин (2.3.14) кө коюп төмөндөгүдөй интегралдык теңдемеге келебиз

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{0}^{\ell}K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\,, \qquad (2.3.32)$$

мында $$K(x,y;\xi,\eta)=K_1(x,y;\xi,\eta)-\int\limits_{\eta}^{y}G_2(x,y;0,s)K_3(s;\xi,\eta)ds\,,$$

$$u_0(x,y)=\Phi_1(x,y)-\int\limits_{0}^{y}G_2(x,y;0,\eta)\Phi_4(\eta)d\eta\,.$$

Изилдөөлөрдүн натыйжасында төмөнкү теорема далилденди.

2.3.1-теорема. Эгерде (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) жана (2.3.23) шарттары аткарылса, анда 2.3.1-маселенин чечими жашайт жана жалгыз.

2.4. Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелер

2.4.1. Маселенин коюлушу. $D=\{(x,y):0<x<\ell,-h_2<y<h_1\}$ $(\ell,h_1,h_2>0)$ аймагында

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}+a_1u_{xx}+b_1u_x+c_1u_y+d_1u=0,\ (x,y)\in D_1, \qquad (2.4.1)$$

$$L_2(u)\equiv u_{xyy}+a_2u_{yy}+b_2u_x+c_2u_y+d_2u=0,\ (x,y)\in D_2, \qquad (2.4.2)$$

теңдемелери үчүн чектик маселелерди карайбыз, бул жерде $a_i,b_i,c_i,d_i\ (i=1,2)$ – x жана y тен болгон берилген функциялар, ал эми $\mathrm{D}_1=\mathrm{D}\bigcap(\mathrm{y}>0),\ \mathrm{D}_2=\mathrm{D}\bigcap(\mathrm{y}<0)$.

(2.4.1) жана (2.4.2) теңдемелери чечимдердин касетинин мүнөзү боюнча көбүнчө псевдопараболалык деп аталышат [50]. Каралуучу теңдемелердин жекече учурлары кыртыштагы нымдын өсүмдүктөр тарабынан жутулушун окуп үйрөнүүдө кездешет [49].

Мейли (2.4.1) жан (2.4.2) теңдемелеринин коэффиенттери үчүн төмөнкү шарттар аткарылган болсун

$$\begin{aligned}&a_1\in C^{2+0}(D_1),b_1,c_1\in C^{1+0}(D_1),d_1\in C(D_1),\\&a_2\in C^{0+2}(D_2),b_2,c_2\in C^{1+0}(D_2),d_2\in C(D_2).\end{aligned} \qquad (2.4.3)$$

2.4.1-маселе. *D_1 жана D_2 аймактарында тиешелүү түрдө (2.4.1) жана (2.4.2) теңдемелерин,*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h_1, \qquad (2.4.4)$$

$$u(0,y)=\chi(y),-h_2\le y\le 0, \qquad (2.4.5)$$

$$u(x,h_0)=\psi(x),0\le x\le \ell,-h_2\le h_0<0 \qquad (2.4.6)$$

чектик шарттарын жана

$$u(x,-0)=u(x,+0),u_y(x,-0)=u_y(x,+0),0\le x\le \ell, \qquad (2.4.7)$$

жалгаштыруу шарттарын канааттандырган

$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)]$ *функциясын табуу керек, мында* $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \chi(y), \psi(x)$ *– берилген жылмакай функциялар,* h_0 *- каалагандай чыныгы сан, болгондо да*

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0,h_1],\ \chi(y) \in C^2[-h_2,0],\ \psi(x) \in C^2[0,\ell] \tag{2.4.8}$$

$$\varphi_1(0) = \chi(0),\ \varphi_1'(0) = \chi'(0),\ \chi(h_0) = \psi(0). \tag{2.4.9}$$

(2.4.1) жана (2.4.2) теңдемелери (2.4.7) жалгаштыруу шарттары менен чогуу D аймагында аралаш типтеги теңдемелер болуп эсептелишет [58].

Римана функциясы усулу менен D_1 аймагында (2.4.1) теңдемеси үчүн чектик маселелер изилденеген.

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \tau(x), u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{2.4.10}$$

мында $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – азырынча белгисиз функциялар.

2.4.2. D_2 **аймагында 2.4.1–маселенин чечиминин көрсөтүлүшү.** 2.4.1-маселенин D_2 аймагындагы чечиминин көрсөтүлүшүн алуу үчүн төмөнкү жардамчы маселени карайбыз.

2.4.2-маселе. D_2 *аймагында (*2.4.*2) теңдемесин жана*

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_y(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \ell,\ u(0,y) = \chi(y),\ -h_2 \le y \le 0$$

чектик шарттарын канааттандыруучу $u(x,y) \in C^1(\overline{D}_2) \cap C^{1+2}(D_2)$ *функциясын табуу керек.*

2.4.2 маселесин чечүү үчүн жардамчы функция усулун пайдаланабыз. Төмөнкү теңдештик орун алат:

$$\begin{aligned} &\upsilon L_2(u) - u L_2^*(\upsilon) = (-\upsilon_\eta u_\eta + b_2 \upsilon u)_\xi - \\ &-(-\upsilon u_{\xi\eta} - \upsilon_{\xi\eta} u + (a_2\upsilon)_\eta u - a_2 \upsilon u_\eta - c_2 \upsilon u)_\eta, \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

мында $L_2^*(\upsilon) = -\upsilon_{\xi\eta\eta} + (a_2\upsilon)_{\eta\eta} - (b_2\upsilon)_\xi - (c_2\upsilon)_\eta + d_2\upsilon$ – $L_2(u)$ операторуна түйүндөш оператор. (2.4.11) теңдештигин $D_2^* = \{(x,y) : 0 < \xi < x, y < \eta < 0\}$ аймагы боюнча интегралдап төмөндөгүнү алабыз:

$$\iint\limits_{D_2^*}[\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}(-\upsilon u_{\xi\eta}-\upsilon_{\xi\eta}u+(a_2\upsilon)_\eta u- \\ -a_2\upsilon u_\eta-c_2\upsilon u)d\xi+(-\upsilon_\eta u_\eta+b_2\upsilon u)d\eta. \tag{2.4.12}$$

Мейли $\upsilon(\xi,\eta)=\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ функциясы түйүндөш $L_2^*(\upsilon)=0$ теңдемесинин,

$$\upsilon(x,y;\xi,y)=0,\ 0\le\xi\le x, \tag{2.4.13}$$

$$\upsilon_\eta(x,y;\xi,y)=exp\left(-\int\limits_\xi^x a_2(s,y)ds\right),\ 0\le\xi\le x, \tag{2.4.14}$$

$$\upsilon(x,y;x,\eta)=\omega(x,y;\eta),\ y\le\eta\le 0, \tag{2.4.15}$$

шарттарын канааттандырган чечими болсун, мында $\omega(x,y;\eta)$ – төмөнкү маселенин чечими:

$$\begin{gathered}\upsilon_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)+b_2(x,\eta)\upsilon(x,y;x,\eta)=0,\ y<\eta<0, \\ \upsilon(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \upsilon_\eta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=1.\end{gathered} \tag{2.4.16}$$

D_2^* аймагынын чек аралары боюнча интегралдоону жүргүзүп төмнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D_2^*}[\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)]d\xi d\eta=\int\limits_0^x\big[-\upsilon(x,y;\xi,y)u_{\xi\eta}(\xi,y)-\upsilon_{\xi\eta}(x,y;\xi,y)u(\xi,y)- \\ &-a_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)u_\eta(\xi,y)+a_{2\eta}(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)u(\xi,y)+ \\ &+a_2(\xi,y)\upsilon_\eta(x,y;\xi,y)u(\xi,y)-c_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)u(\xi,y)\big]d\xi- \\ &-\upsilon_\eta(x,y;x,0)u(x,0)+\upsilon_\eta(x,y;x,y)u(x,y)+ \\ &+\int\limits_y^0[\upsilon_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)+b_2(x,\eta)\upsilon(x,y;x,\eta)]d\eta+ \\ &+\upsilon(x,y;x,0)u_y(x,0)-\upsilon(x,y;0,0)u_y(0,0)- \\ &-\int\limits_0^x[\upsilon_\xi(x,y;\xi,0)-a_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0)]u_\eta(\xi,0)d\xi- \\ &-\int\limits_0^x\{-\upsilon_{\xi\eta}(x,y;\xi,0)+a_2(\xi,0)\upsilon_\eta(x,y;\xi,0)+ \\ &+[a_{2\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\upsilon_\eta(x,y;\xi,0)\}u(\xi,0)d\xi- \\ &-\int\limits_0^y[\upsilon_\eta(x,y;0,\eta)u_\eta(0,\eta)-b_2(0,\eta)\upsilon(x,y;0,\eta)u(0,\eta)]d\eta\end{aligned}$$

(2.4.14) формуласы боюнча аныкталуучу функция,

$$\upsilon_{\xi\eta}(x,y;\xi,y)+a_2(\xi,y)\upsilon_\eta(x,y;\xi,y)=0$$

теңдемесин жана $\upsilon_\eta(x,y;x,y)=1$

шартын канааттандыраарын байкоо кыйын эмес.

Анда (2.4.12) ден (2.4.13)-(2.4.15) терди эсепке алуу менен 2.4.2-маселенин чечими төмөнкү көрүнүштө көрсөтүлөрүн алабыз:

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\upsilon_\eta(x,y;x,0)\tau(x)-\upsilon(x,y;x,0)\nu(x)+\\&+\int_0^x A(x,y;\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x B(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi_1(x,y),\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

мында $A(x,y;\xi)=\upsilon_\xi(x,y;\xi,0)-a_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$

$$B(x,y;\xi)=-\upsilon_{\eta\xi}(x,y;\xi,0)+a_{2\eta}(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0)+a_2(\xi,0)\upsilon_\eta(x,y;\xi,0)-c_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$$

$$\Phi_1(x,y)=\upsilon(x,y;0,0)\varphi_2'(0)+\int_0^y[\upsilon_\eta(x,y;0,\eta)\chi'(\eta)-b_2(0,\eta)\upsilon(x,y;\xi,0)\chi(\eta)]d\eta.$$

Төмөнкү лемма орун алат.

2.4.1-лемма. *Эгерде*

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_2:b_2(x,y)\le 0,\tag{2.4.18}$$

болсо, анда

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_2\wedge\forall\eta\in[-h_2,0]:\upsilon(x,y;x,\eta)\ge\eta-y,\ \upsilon_\eta(x,y;x,\eta)\ge 1\tag{2.4.19}$$

барабарсыздыктары аткарылат.

Далилдөө. (2.4.16) маселесинин чечими төмөнкү интегралдык теңдеменин чечимине эквиваленттүү экендигин далилдөө кыйын эмес:

$$\upsilon(x,y;x,\eta)=\eta-y+\int_y^\eta[-(\eta-\beta)b_2(x,\beta)]\upsilon(x,y;x,\beta)d\beta,\ y\le\eta\le 0.$$

Эгерде (2.4.18) шарттары аткарылса, анда интегралданган ядролор усулу менен $\forall(x,y)\in\overline{D}_2\wedge\forall\eta\in[-h_2,0]:\upsilon(x,y;x,\eta)\ge\eta-y$ болоруна ишенебиз.

Андан ары, η боюнча туундуну эсептеп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\upsilon_\eta(x,y;x,\eta)=1+\int_y^\eta[-b_2(x,t)]\upsilon(x,y;x,t)\,dt,\ y\le\eta\le 0,$$

андан, жогорудагыга окшош, $\forall(x,y)\in\overline{D}\wedge\forall\eta\in[-h_2,0]:\ \upsilon_\eta(x,y;x,\eta)\geq 1$ экендигине ээ болобуз. Мындан, айрым учур катары төмөндөгүнү алабыз

$$\upsilon_\eta(x,h_0;x,\eta)\geq 1. \tag{2.4.20}$$

2.4.1-лемма далилденди.

2.4.3. D_2 **аймагынан алынган функционалдык катыш.** (2.4.6) шартын пайдаланып (2.4.17) ден төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\begin{aligned}&\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)\tau(x)\text{-}\upsilon(x,h_0;x,0)\nu(x)+\\&+\int_0^x A(x,h_0;\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x B(x,h_0;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi_1(x,h_0)=\psi(x).\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

(2.4.20) барабарсыздыгын эске алып жана теңдеменин эки жагын тең $\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)$ гө бөлүп, (2.4.21) ден $\tau(x)$ менен $\nu(x)$ тин ортосундагы D_2 аймагынан алынып келинген катышты алабыз:

$$\tau(x)=C(x)\nu(x)+\int_0^x A_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x B_1(x,\xi))\tau(\xi)d\xi+\Phi_2(x), \tag{2.4.22}$$

мында $$C(x)=\frac{\upsilon(x,h_0;x,0)}{\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)},\ A_1(x,\xi)=-\frac{A(x,h_0;\xi)}{\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)},$$

$$B_1(x,\xi)=-\frac{B(x,h_0;\xi)}{\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)},\ A_1(x,\xi)=\frac{\psi(x)-\Phi_1(x,h_0)}{\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)}.$$

2.4.3. D_1 **аймагынан алынган функционалдык катыш.** 2.4.1-маселенин коюлушунан u(x, y) функциясынын (2.4.1) теңдемесине кирген туундулары D_1 аймагында $y=0$ сызыгына чейин тыкыс (вплоть) үзгүлтүксүз экендиги келип чыгат. Ошондуктан, (2.4.1) теңдемесинде $y\to+0$ болгон учурдагы пределге өтүп жана (2.4.10) белгилөөлөрүн эсепке алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз

$$\begin{aligned}&\nu''(x)+a_1(x,0)\tau''(x)+b_1(x,0)\tau'(x)+c_1(x,0)\nu(x)+\\&+d_1(x,0)\tau(x)=0,\,0<x<\ell.\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

(2.4.23) теңдемесин мындай көрүнүштө жазып алабыз

$$\nu''(x)+c_1(x,0)\nu(x)=F_1(x), \tag{2.4.24}$$

мында $F_1(x)=-a_1(x,0)\tau''(x)-b_1(x,0)\tau'(x)-d_1(x,0)\tau(x)$. $v(x)$ үчүн төмөнкү чектик шарттар аткарылаарын белгилеп кетебиз:

$$v(0)=\varphi_1'(0),\ v(\ell)=\varphi_2'(0)\,. \qquad (2.4.25)$$

Ошентип, $v(x)$ ти аныктоо үчүн (2.4.24), (2.4.25) маселесине келебиз.

2.4.2-лемма. *Эгерде*

$$\forall x\in[0,\ell]: c_1(x,0)\le 0\,, \qquad (2.4.26)$$

болсо, анда бир тектүү (2.4.24), (2.4.25) чектик маселеси тривиалдык гана чечимге ээ болот.

Далилдөө. Төмөндөгү бир тектүү маселени карайбыз

$$v''(x)+c_1(x,0)v(x)=0,\ v(0)=0,\ v(\ell)=0. \qquad (2.4.27)$$

Теңдемени $v(x)$ ке көбөйтүп

$$[v(x)v'(x)]'-[v'(x)]^2+c_1(x,0)[v(x)]^2=0$$

теңдештигин алабыз.

Муну $0\le x\le\ell$ пределдеринде интегралдап төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\int_0^\ell\{[v'(x)]^2+c_1(x,0)[v(x)]^2\}dx=0\,.$$

Мындан $\forall x\in[0,\ell]: v(x)\equiv 0$ деген бүтүмгө келебиз.

(2.4.26) шарты олутту мааниге ээ болот, анткени бул шарттын аткарылбастыгы маселенин чечиминин жалгыздыгын бузат. Мисалы, эгерде $c_1(x,0)=\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2>0, n=1,2,...$ болсо, анда бир тектүү (2.4.27) маселеси санаттык сандагы $v_n(x)=C\sin\frac{\pi n}{\ell}x,\ C=const,\ n=1,2,...$ көрүнүшүндөгү тривиалдык эмес чечимдердин көптүгүнө ээ болот. 2.4.2 –лемма далилденди.

Эгерде бир тектүү маселе тривиалдык гана чечимге ээ болсо, анда тиешелүү бир тектүү эмес (2.4.24), (2.4.25) маселеси $G(x,\xi)$ функциясы аркылуу көрсөтүлүүчү жалгыз чечимге ээ болот [47]:

$$v(x)=\int_0^\ell G(x,t)F_1(t)dt+\alpha_1(x), \qquad (2.4.28)$$

мында $\alpha_1(x)=\alpha(x)-\int\limits_0^\ell G(x,t)\alpha(t)dt,\ \alpha(x)=\varphi_1(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right].$

Андан ары, $F_1(x)$ тин маанисин (2.4.28) ге коюп жана бөлүктөп интегралдоону ишке ашырып D_1 аймагынан алынган $\tau(x)$ менен $\nu(x)$ тин ортосундагы катышты алабыз:

$$\nu(x)=\int\limits_0^\ell K_1(x,t)\tau(t)dt+\beta(x), \tag{2.4.29}$$

мында $K_1(x,t)=-[G(x,t)a_1(t,0)]_{tt}+[G(x,t)b_1(t,0)]_t-G(x,t)d_1(t,0),$

$$\beta(x)=\alpha_1(x)+G_t(x,\ell)a_1(\ell,0)\varphi_2(0)-G_t(x,0)a_1(0,0)\varphi_1(0).$$

2.4.4. 2.4.1–маселени интегралдык теңдемеге келтирүү. (2.4.29) жана (2.4.22) ден $\nu(x)$ ти жоготуп мыны бул интегралдык теңдемени алабыз

$$\tau(x)=\int\limits_0^x B_1(x,t)\tau(t)dt+\int\limits_0^\ell C_1(x,t)\tau(t)dt+\Phi_3(x), \tag{2.4.30}$$

мында $$C_1(x)=C(x)K_1(x,t)+\int\limits_0^x A_1(x,\xi)K_1(\xi,t)d\xi,$$

$$\Phi_3(x)=C(x)\beta(x)+\int\limits_0^x A_1(x,\xi)\beta(\xi)d\xi+\Phi_2(x).$$

Мындан, (2.4.30) теңдемесинин волтеррдик бөлүгүнүн кайрылмасын алуу менен (обращая)

$$\tau(x)=\int\limits_0^\ell K(x,t)\tau(t)dt+\Phi(x), \tag{2.4.31}$$

интегралдык теңдемесине келебиз, мында

$$K(x,t)=C_1(x,t)+\int\limits_0^x R(x,\xi)C_1(\xi,t)d\xi,\ \Phi(x)=\Phi_3(x)+\int\limits_0^x R(x,\xi)\Phi_3(\xi)d\xi,$$

(2.4.3) жана (2.4.8) ден $\forall(x,t)\in\overline{D}_2 : K(x,t)\in C(\overline{D}_2),\quad \Phi(t)\in C[0,\ell]$ болот деген корутунду чыгарабыз.

Эгерде

$$\|K\|\ell < 1, \tag{2.4.32}$$

болсо, мында $\|K\| = \max\limits_{0 \le x,t \le \ell} |K(x,t)|$, анда (2.4.31) теңдемеси жалгыз чечимге ээ болот.

2.4.5. 2.4.1-маселенин D_1 аймагындагы чечими. (2.4.31) ден $\tau(x)$ ти аныктагандан кийин 2.4.1-маселесинин D_1 аймагындагы чечими төмөнкү жардамчы маселенин чечими катары аныкталат.

2.4.3-маселе. *D_1 аймагында (2.4.1) теңдемесин, (2.4.4) чектик шарттарын жана*

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell \tag{2.4.33}$$

баштапкы шартын канаатандыруучу $u(x,y) \in C^1(\overline{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1)$ функциясын аныктоо керек.

Мейли

$$u_x(0,y) = g(y),\ 0 \le y \le h_1, \tag{2.4.34}$$

болсун, мында $g(y)$ – азырынча белгисиз функция. Анда (2.4.1) теңдемесинин (2.4.33), (2.4.34) жана $u(0,y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le h_1$ шарттарын канаатандыруучу чечими

$$u(x,y) = -\upsilon_1(x,y;0,y)g(y) + \int_0^y H_1(x,y;\eta)g(\eta)d\eta + T_1(x,y), \tag{2.4.35}$$

көрүнүшүндө көрсөтүлөт, мында

$$H_1(x,y;\eta) = \upsilon_{1\eta}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\upsilon_1(x,y;0,\eta),$$

$$T_1(x,y) = \upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(y) + \upsilon_1(0,y;0,0)\tau'(0) -$$

$$-\int_0^y [\upsilon_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta) - a_{1\xi}(0,\eta)\upsilon_1(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)] +$$

$$+ b_1(0,\eta)\upsilon_1(x,y;0,\eta)]\varphi_1(y)d\eta + \int_0^x [\upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)\tau'(\xi) -$$

$$- c_1(\xi,0)\upsilon_1(x,y;\xi,0)\tau(\xi)] - \int_0^x d\xi \int_0^y \upsilon_1(x,y;\xi,\eta) f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Бул жерде $\upsilon_1(x,y;\xi,\eta)$ – (2.4.1) теңдемесинин төмөнкү маселенин чечими катары аныкталат:

$$L_1^*(\upsilon_1) = -\upsilon_{1\xi\xi\eta} + (a_1\upsilon_1)_{\xi\xi} - (b_1\upsilon_1)_{\xi} - (c_1\upsilon_1)_{\eta} + e_1\upsilon_1 = 0,$$

$$\upsilon_1(x,y;x,\eta) = 0,\ 0 \le \eta \le y,$$

$$\upsilon_{1\xi}(x,y;x,\eta) = \exp\left(-\int_{\eta}^{y} a_1(x,t)dt\right),\ 0 \le \eta \le y,$$

$$\upsilon_1(x,y;\xi,y) = \omega(x,y;\xi),\ 0 \le \xi \le x,$$

мында $\omega(x,y;\xi)$ – төмөнкү маселенин чечими:

$$\begin{aligned} &\upsilon_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y) + c_1(\xi,y)\upsilon_1(x,y;\xi,y) = 0,\ 0 < \xi < x, \\ &\upsilon_1(x,y;x,y) = 0,\ \upsilon_{1\xi}(x,y;x,y) = 1. \end{aligned} \qquad (2.4.36)$$

2.4.3-лемма. *Эгерде*

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : c_1(x,y) \le 0, \qquad (2.4.37)$$

болсо, анда

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 \wedge \forall \xi \in [0,\ell] : \upsilon_1(x,y;\xi,y) \le \xi - x \qquad (2.4.38)$$

барабарсыздыгы орун алат.

2.4.3-лемманын далилдөөсү (2.4.36) маселесин

$$\upsilon_1(x,y;\xi,y) = \xi - x + \int_{\xi}^{x} [-(t-\xi)]c_1(t,y)\upsilon_1(x,y;t,y)dt,\ 0 \le \xi \le x \qquad (2.4.39)$$

интегралдык теңдемесине эквиваленттүү түрдө келтирүү менен ишке ашырылат.

Мындын, 2.4.2 леммасындагыдай эле, (2.4.37) барабарсыздыгын эске алуу менен (2.4.39) дан (2.4.38) барабарсыздыгын алабыз. Айрым учур катары, (2.4.38) барабарсыздыгынан

$$\upsilon_1(\ell,y;0,y) \le -\ell \qquad (2.4.40)$$

дегенге ээ болобуз.

(2.4.35) те $x = \ell$ деп алып

$$g(y) = \int_0^y H(y,\eta)g(\eta)d\eta + T(y), \qquad (2.4.41)$$

мында $H(y,\eta)=\dfrac{H_1(\ell,\eta)}{\upsilon_1(\ell,y;0,y)}$, $T(y)=\dfrac{\varphi_2(y)-T_1(\ell,\eta)}{\upsilon_1(\ell,y;0,y)}$, интегралдык теңдемесине ээ болобуз, ал жалгыз үзгүлтүксүз чечимге ээ болот. (2.4.41) ден $g(y)$ ти аныктап жана анын маанисин (2.4.35) ке коюп 2.4.1 маселесинин D_1 аймагындыгы чечимин алабыз.

Ошентп, төмөнкү теорема орун алат.

2.4.1-теорема. Эгерде (2.4.3), (2.4.8), (2.4.9), (2.4.18), (2.4.26), (2.4.32) жана (2.4.37) шарттары орун алса, анда 2.4.1 маселесинин чечими жашайт жана жалгыз.

2.4.1-мисал. Эгерде $a_i, b_i, c_i, d_i \equiv 0(i = 1,2).$ болсо, анда 2.4.1 маселесинин чечими табылсын.

Бул учурда (2.4.1) жана (2.4.2) теңдемелери тиешелеш түрдө төмөнкүчө жазылышат

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} = 0, \ (x, y) \in D_1, \tag{2.4.42}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} = 0, \ (x, y) \in D_2, \tag{2.4.43}$$

$$L_2^*(\upsilon) \equiv -\upsilon_{\xi\eta\eta} = 0, \ (\xi, \eta) \in D_2^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, \ y < \eta < 0\},$$

мында $(x, y) - D_2$ аймагынын каалагандай чекити, теңдемесин жана

$$\begin{aligned} &\upsilon(x, y; \xi, y) = 0, \ 0 \le \xi \le x, \\ &\upsilon_\eta(x, y; \xi, y) = 1, \ 0 \le \xi \le x, \\ &\upsilon(x, y; x, \eta) = \omega(x, y; \eta), \ y \le \eta \le 0, \end{aligned} \tag{2.4.44}$$

шарттарын канаатандыруучу, мында $\omega(x, y; \eta)$ – төмөндөгү маселенинин чечими:

$$\begin{aligned} &\upsilon_{\eta\eta}(x, y; x, \eta) = 0, \ y < \eta < 0, \\ &\upsilon(x, y; x, \eta)\,|_{\eta=y} = 0, \ \upsilon_\eta(x, y; x, \eta)\,|_{\eta=y} = 1, \end{aligned} \tag{2.4.45}$$

$\upsilon(\xi, \eta) = \upsilon(x, y; \xi, \eta)$ функциясы Римандын функциясы болот.

(2.4.45) маселесинин чечими төмөндөгүдөй көрүнүштө болорун аныктоо кыйын эмес:

$$\upsilon(x, y; x, \eta) = \eta - y \tag{2.4.46}$$

Ошондуктан $\omega(x, y; \eta) \equiv \omega(y; \eta) = \eta - y$. (2.4.46) ны эске алуу менен (2.4.43), (2.4.44) маселесинин чечими төмөнкүчө көрсөтүлөт

$$\upsilon(x, y; \xi, \eta) = \eta - y. \tag{2.4.47}$$

Ушундай кылып, Римандын функциясы (2.4.47) формуласы боюнча аныкталат. (2.4.17) формуласына ылайык, 2.4.1 маселесинин D_2 аймагындагы чечими Римандын функциясы аркылуу төмөнкү көрүнүштө көрсөтүлөт

$$\begin{aligned} &u(x,y) = \upsilon_\eta(x, y; x, 0)\tau(x) - \upsilon(x, y; x, 0)\nu(x) + \\ &+ \int_0^x \upsilon_\xi(x, y; \xi, 0)\nu(\xi)d\xi - \int_0^x \upsilon_{\eta\xi}(x, y; \xi, 0)\tau(\xi)d\xi + \Phi_1(x, y), \end{aligned} \tag{2.4.48}$$

$$\Phi_1(x,y)=\upsilon(x,y;0,0)\varphi_1'(0)+\int_0^y \upsilon_\eta(x,y;0,\eta)\chi'(\eta)d\eta .$$

Төмөнкү катыштарды эске алуу менен

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\eta-y,\ \upsilon(x,y;x,0)=-y,\ \upsilon(x,y;0,0)=-y,$$
$$\upsilon_\eta(x,y;\xi,\eta)=1,\quad \upsilon_\eta(x,y;0,\eta)=1,\ \upsilon_\eta(x,y;x,y)=1,$$
$$\upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)=0,\quad \upsilon_{\eta\xi}(x,y;\xi,0)=0,\ \upsilon_\eta(x,y;x,y)=1,$$
$$\upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)=0,$$

(2.4.48) ден 2.4.1 маселесинин D_1 аймагындагы чечиминин көрсөтүлүшүн төмөндөгүдөй көрүнүштө алабыз

$$u(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)+\chi(y)-y\varphi_1'(0)-\chi(0),\ (x,y)\in D_2 \tag{2.4.49}$$

Тикеден – тике коюп көрүү менен (2.4.17) формуласы менен аныкталган функция (2.4.43) теңдемесин жана

$$\tau(0)=\chi(0),\ \nu(0)=\chi'(0)=\varphi_1'(0).$$

макулдашуу шарттары аткарылган учура

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell,\ u(0,y)=\chi(y),\ -h_2\le y\le 0$$

шарттарын канааттандыра тургандыгына ишенебиз.

(2.4.18) ден (2.4.6) шартын пайдаланып D_2 аймагынан алынган функционалдык катышты алабыз:

$$\tau(x)+h_0\,\nu(x)=\psi(x)-\chi(h_0)+h_0\varphi_1'(0)+\chi(0). \tag{2.4.50}$$

Ушундай эле катышты (2.4.21) ден алабыз. Чындыгында эле, эгерде

$$\upsilon_\eta(x,h_0;x,0)=1,\ \upsilon(x,h_0;x,0)=-h_0,\ \upsilon(x,y;0,0)=-y,\ \upsilon_{\eta\xi}(x,y;\xi,\eta)=0,$$

экендигин эске алсак, анда $A(x,h_0;\xi)\equiv 0,$ $B(x,h_0;\xi)\equiv 0,$ $\Phi_1(x,y)=-y\varphi_1'(0)+\chi(y)-\chi(0)$. Анда болсо бул маанилерди (2.4.21) ге коюпжана айрым бир жөнөкөйлөтүүлөрдү ишке ашырып (2.4.50) катышын алабыз.

$\tau(x)$ менен $\nu(x)$ тин ортосундагы экинчи функционалдык катышты (2.4.1) теңдемесинен $y\to+0$ дагы пределге өтүү менен алабыз

$$\nu''(x)=0,\ 0<x<\ell. \tag{2.4.51}$$

$\nu(x)$ үчүн төмөнкү чектик шарттар аткарыларын белгилейбиз:

$$\nu(0)=\varphi_1'(0),\, \nu(\ell)=\varphi_2'(0). \tag{2.4.52}$$

Ошентип, $\nu(x)$ ти аныктоо үчүн (2.4.51), (2.4.52) маселесине келебиз. (2.4.51), (2.4.52) маселеси төмөнкү көрүнүштө көрсөтүлүүчү жалгыз чечимге ээ болот:

$$\nu(x)=\varphi_1(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right] \tag{2.4.53}$$

Андан ары, $\nu(x)$ тин мааанисин (2.4.50) ге коюп төмөндөгүнү табабыз

$$\tau(x)=h_0\,\varphi_1(0)+\frac{h_0 x}{\ell}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]+\psi(x)-\chi(h_0)+h_0\varphi_1'(0)+\chi(0).$$

2.4.1 маселесинин D_1 аймагындагы чечимин алуу үчүн жогорудагыдай эле жардамчы маселени карайбыз: D_1 *аймагында (2.4.42) маселесинин*

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\varphi_1(y),\, u(\ell,y)=\varphi_2(y),\, 0\le y\le h_1,\\ &u(x,0)=\tau(x),\, 0\le x\le \ell.\end{aligned} \tag{2.4.54}$$

шарттарын канааатандырган чечимин табуу керек.

Мейли

$$u_x(0,y)=g(y),\, 0\le y\le h_1, \tag{2.4.34}$$

болсун, мында $g(y)$ – азырынча белгисиз функция. Анда (2.4.42) теңдемесинин

$$u(0,y)=\varphi_1(y), 0\le y\le h_1,\; u_x(0,y)=g(y),\, 0\le y\le h_1,\; u(x,0)=\tau(x),\, 0\le x\le \ell$$

шарттарын канааттандырган чечими төмөндөгүдөй көрүнүштө көрсөтүлөт

$$u(x,y)=-\upsilon_1(x,y;0,y)g(y)+\int_0^y H_1(x,y;\eta)g(\eta)d\eta+T_1(x,y), \tag{2.4.35}$$

мында $\quad H_1(x,y;\eta)=\upsilon_{1\eta}(x,y;0,\eta),$

$$T_1(x,y)=\upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(y)+\upsilon_1(0,y;0,0)\tau'(0)-$$
$$-\int_0^y \upsilon_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta)\varphi_1(y)d\eta+\int_0^x \upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)\tau'(\xi)d\xi.$$

Бул жерде $\upsilon_1(x,y;\xi,\eta)$ – төмөнкү маселенин чечими катары аныкталат:

$$L_1^*(\upsilon_1) = -\upsilon_{1\xi\xi\eta} = 0,$$

$$\upsilon_1(x,y;x,\eta) = 0,\ 0 \le \eta \le y,$$

$$\upsilon_{1\xi}(x,y;x,\eta) = 1,\ 0 \le \eta \le y,$$

$$\upsilon_1(x,y;\xi,y) = \omega(x,y;\xi),\ 0 \le \xi \le x,$$

мында $\omega(x,y;\xi)$ – төмөндөгү маселенин чечими:

$$\begin{aligned} &\upsilon_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y) = 0,\ 0 < \xi < x, \\ &\upsilon_1(x,y;x,y) = 0,\ \upsilon_{1\xi}(x,y;x,y) = 1. \end{aligned} \qquad (2.4.36)$$

2.4.3 - лемманын далилдениши (2.4.36) маселесин эквиваленттүү түрдө төмөндөгү интегралдык теңдемеге келтирүү менен ишке ашырылат

$$\upsilon_1(x,y;\xi,y) = \xi - x, 0 < \xi < x\,. \qquad (2.4.39)$$

Мындан, 2.4.2 леммасындагыдай, (2.4.37) барабарсыздыгын эсепке алуу менен (2.4.39) дан (2.4.38) барабарсыздыгын алабыз. Айрым учур катары, (2.4.38) барабарсыздыгынан төмөндөгүгө ээ болобуз

$$\upsilon_1(\ell,y;0,y) \le -\ell\,. \qquad (2.4.40)$$

(2.4.35) те $x = \ell$ деп алып төмөндөгү интегралдык теңдемени алабыз

$$g(y) = \int_0^y H(y,\eta)g(\eta)d\eta + T(y), \qquad (2.4.41)$$

мында $H(y,\eta) = \dfrac{H_1(\ell,\eta)}{\upsilon_1(\ell,y;0,y)}, T(y) = \dfrac{\varphi_2(y) - T_1(\ell,\eta)}{\upsilon_1(\ell,y;0,y)},$ ал жалгыз үзгүлтүксүз чечимге ээ болот. (2.4.41) ден $g(y)$ ти аныктап жана анын маанисин (2.4.35) ке коюп 2.4.1 маселесинин D_1 аймагындагы чечимин алабыз.

2-БАП БОЮНЧА КОРУТУНДУ

Бул бапта интегралдык теңдемелер усулу менен үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн интегралдык кошулуучуну кармап турган, жалгаштыруунун локалдык эмес шарттарына ээ болгон чектик маселелер, качан мүнөздөмөлүк теңдеме аймактын бир бөлүгүндө эки ар түрдүү эки эселүү чыныгы тамырга, ал эми аймактын башка бөлүгүндө – бир үч эселүү жана бир жөнөкөй тамырга ээ болгон учурда изилденди.

Тик бурчтуу жана ийри сызыктуу аймактар, жана ошондой эле чектелбеген аймактар үчүн корректтүү чектик маселелер чыгарылды.

Бир эле убакта эки теңдемеге тең мүнөздөмөлүк болгон сызыкта берилген жалгаштыруу шарттары менен аныкталуучу жалгыз чечимдин жашашынын жетиштүү шарттары табылды.

Тик бурчтуу аймактардын капталдарынын берилиштерди алып жүрүүчүлөр катары тең укуктуулугу далилденди.

3-БАП. ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЛОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕЛЕР

3.1. Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес теңдеме үчүн классикалык эмес чек аралык шарттуу чектик маселе

Классикалык эмес чек аралык шарттуу чектик маселелер көз каранды эмес эки өзгөрүлмөлүү параболалык теңдемелер үчүн [22, 23, 71] эмгектеринде каралган. Интегралдык чектик шарттар менен болгон ар түрдүү локалдык эмес маселелер [54, 55, 56] эмгектеринде да каралган.

Бул эмгекте жекече туундулардагы үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес теңдеме үчүн классикалык эмес чек аралык шарттуу чектик маселе каралат.

$D=\{(x,y):0<x<\ell,\,0<y<h\}$ аймагында

$$u_{xxy}(x,y)=F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y),u_{xx}(x,y),u_{xy}(x,y)), \qquad (3.1.1)$$

мында F – берилген функция, теңдемесин карайбыз.

3.1.1-маселе. D аймагында (3.1.1) теңдемесинин

$$\int_0^{\chi(y)} T(x,y)u(x,y)dx=E(y),\ \ u(\ell,y)=\varphi(y),\ \ 0\le y\le h, \qquad (3.1.2)$$

$$u(x,0)=\tau(x),\,0\le x\le \ell, \qquad (3.1.3)$$

шарттарын канааттандыруучу чечимин табуу керек, мында $T(x,y),\ E(y),\ \varphi(y),\ \tau(x),\ \chi(y)$ – берилген функциялар.

3.1.1 маселесинин чечимин функциялардын $U=\{u(x,y):u(x,y)\in$ $\in C^1(\overline{D})\ \ u_{xx},u_{xy}\in C(\overline{D}),u_{xxy}\in C(D)\}$ классында издейбиз. Берлиген функцияларга карата төмөндөгүлөр аткарылат деп эсептейбиз:

1) $\chi(y),E(y),\varphi(y)\in C^1[0,h],\,\tau(x)\in C^2[0,\ell],\,0<\chi(y)\le\ell$;

2) $T(x,y),T_y(x,y)\in C(\overline{D}),\quad \int_0^{\chi(y)}(x-\ell)T(x,y)dx\ne 0$;

3) $F(x,y,u,p,q,z,s)\in C(D\times R^5),\ \max|F(x,y,u,p,q,z,s)|\le H),\ R^5$ - бул (u,p,q,z,s); өзгөрүлмөлөрүнүн беш ченемдүү мейкиндиги.

4) $|F(x,y,u,p,q,z,s)-F(x,y,\bar{u},\bar{p},\bar{q},\bar{z},\bar{s})|\le L(|u-\bar{u}|+|p-\bar{p}|+|q-\bar{q}|+|z-\bar{z}|+|s-\bar{s}|)$;

5) $\int\limits_0^{\chi(0)} T(x,0)\tau(x)dx=E(0)\ ,\ \tau(\ell)=\varphi(0)$.

(3.1.1)-(3.1.3) маселеси

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y T_1(x,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{\chi(y)} d\xi\int\limits_0^y T_2(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta+ \qquad (3.1.4)$$

$$+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y T_3(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta,$$

интегралдык-дифференциалдык теңдемесине эквиваленттүү экендигин байкоо кыйын эмес, бул жерде

$$u_0(x,y)=\Phi(x,y)+(x-\ell)\left[E(y)-\int\limits_0^{\chi(y)}T(s,y)\Phi(s,y)ds\right]\left[\int\limits_0^{\chi(y)}(s-\ell)T(s,y)ds\right]^{-1},$$

$$\Phi(x,y)=\tau(x)+\varphi(y)-\tau'(0)(x-\ell)-\tau(\ell),$$

$$T_1(x,\xi)=x-\xi,\ T_2(x,y,\xi)=(\ell-x)\int\limits_\xi^{\chi(y)}(s-\xi)T(s,y)ds\left[\int\limits_0^{\chi(y)}(s-\ell)T(s,y)ds\right]^{-1},$$

$$T_3(x,y,\xi)=\xi-\ell-(x-\ell)\int\limits_0^{\chi(y)}(\ell-\xi)T(s,y)ds\left[\int\limits_0^{\chi(y)}(s-\ell)T(s,y)ds\right]^{-1}.$$

Тикеден-тике текшерүү менен (3.1.4) аркылуу аныкталуучу $u(x,y)$ функциясы (3.1.1) теңдемесин канааттандыраарына ишенебиз. (3.1.4) тө $y=0$ деп алып жана 5) макулдашуу шарттарын эсепке алуу менен $u(x,0)=u_0(x,0)=\tau(x)$ экендигине ээ болобуз. (3.1.4) тө $x=\ell$ деп жана $T_2(\ell,y,\xi)=0, u_0(\ell,y)=\varphi(y)$ барабардыгын эсепке алуу менен $u(\ell,y)=\varphi(y)$ экендигине ээ болобуз. Акырында, (3.1.4) теңдемесинин эки жагын тең $T(x,y)$ ке көбөйтүп, анан алынган барабардыкты 0 дөн $\chi(y)$ ке чейин интегралдайбыз. Ошондо F функциясын кармаган кошулуучулар өз ара жок болушат. Эгерде $\int\limits_0^{\chi(y)} T(x,y)u_0(x,y)dx = E(y)$ болсо, анда барабардыктын оң жагында $E(y)$ гана калат. Ошону менен (3.1.2) деги биринчи шарттын аткарылышы далилденет.

u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} туундуларын таап (3.1.4) төн төмөндөгүлөргө ээ болобуз

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= u_{0x}(x,y) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^y F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta + \\ &+ \int\limits_0^{\chi(y)} d\xi \int\limits_0^y T_{2x}(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta + \\ &+ \int\limits_0^{\ell} d\xi \int\limits_0^y T_{3x}(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned} u_y(x,y) &= u_{0y}(x,y) + \int\limits_0^x T_1(x,\xi)\,F(\xi,y,u,u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi + \\ &+ \int\limits_0^{\chi(y)} T_2(x,y,\xi)F(\xi,y,u,u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi + \\ &+ \int\limits_0^{\ell} T_3(x,y,\xi)F(\xi,y,u,u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi, \\ &+ \int\limits_0^{\chi(y)} d\xi \int\limits_0^y T_{2y}(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta + \\ &+ \int\limits_0^{\ell} d\xi \int\limits_0^y T_{3y}(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$u_{xx}(x,y) = u_{0xx}(x,y) + \int\limits_0^y F(x,\eta,u,u_x,u_\eta,u_{xx},u_{x\eta})d\eta; \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned} u_{xy}(x,y) &= u_{0xy}(x,y) + \int_0^x F(\xi,y,u,u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi + \\ &+ \int_0^{\chi(y)} T_{2x}(x,y,\xi)F(\xi,y,u,u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi + \\ &+ \int_0^{\ell} T_{3x}(x,y,\xi)F(\xi,y,u,u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi + \\ &+ \int_0^{\chi(y)} d\xi \int_0^y T_{2xy}(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta + \\ &+ \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y T_{3xy}(x,y,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$g(x,y)=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)$, функциясын карайбыз, мында $g_1=u(x,y)$, $g_2=u_x(x,y)$, $g_3=u_y(x,y)$, $g_4=u_{xx}(x,y)$, $g_5=u_{xy}(x,y)$, жана компоненттери төмөндөгүчө аныкталуучу $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ операторун киргизебиз

$$\begin{aligned} A_i g &= g_{0i} + \int_0^x K_{i1}\,F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi + \int_0^y K_{i2}\,F(x,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta + \\ &+ \int_0^{\chi(y)} K_{i3}\,F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi + \int_0^{\ell} K_{i4}\,F(\xi,y,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi + \\ &+ \int_0^x d\xi \int_0^y K_{i5}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta + \int_0^{\chi(y)} d\xi \int_0^y K_{i6}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta + \\ &+ \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y K_{i7}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta, \quad i=\overline{1,5}. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Бул жерде $K_{i1}=0,\ K_{i2}=0,\ K_{i3}=0,\ K_{i4}=0\ (i=1,2),\ K_{15}=T_1(x,\xi),\ K_{16}=T_2(x,y,\xi)$,

$K_{17}=T_3(x,y,\xi), K_{25}=1, K_{26}=T_{2x}(x,y,\xi), K_{27}=T_{3x}(x,y,\xi), K_{31}=T_1(x,\xi),\ K_{32}=0$,

$K_{33}=T_2(x,y,\xi),\ \ K_{34}=T_3(x,y,\xi),\ K_{35}=0,\ K_{36}=T_{2y}(x,y,\xi), K_{37}=T_{3y}(x,y,\xi)$,

$K_{41}=0,\ K_{42}=1,\ K_{43}=0,\ K_{44}=0,\ K_{45}=0, K_{46}=0, K_{47}=0, K_{51}=1, K_{52}=0$,

$K_{53}=T_{2x}(x,y,\xi),\ K_{54}=T_{3x}(x,y,\xi), K_{55}=0, K_{56}=T_{2xy}(x,y,\xi), K_{57}=T_{3xy}(x,y,\xi)$,

$g_{01}=u_0(x,y),\ g_{02}=u_{0x}(x,y),\ g_{03}=u_{0y}(x,y),\ g_{04}=u_{0xx}(x,y), g_{05}=u_{0xy}(x,y)$.

Анда теңдемелердин (3.1.4)-(3.1.8) системасынын ордуна төмөнкү теңдемеге ээ болобуз

$$g = Ag. \qquad (3.1.10)$$

Оболу (3.1.10) теңдемеси үчүн D аймагында кысып чагылдыруулар принциби орун аларын далилдейбиз. Мейли A оператору $S(g_o, M) = \{g : \|g - g_o\| \le M\}$, шарын өзүнө кысып чагылдырууну ишке ашырсын дейли, мында M кандайдыр бир берилген сан.

g нын нормасын $\|g\| = \max\limits_{1 \le i \le 5} \max\limits_{(x,y) \in \overline{D}} |g_i(x,y)|$ барабардыгы менен аныктайбыз. Мейли $\max\limits_{i=\overline{1,5},\, j=\overline{1,7}} |K_{ij}| \le N$ болсун. $S(g_o, M)$ шарына таандык болгон g элементтери үчүн $\|g\| \le \|g_0\| + M = K$ баалоосу орун аларын байкоо кыйын эмес. Мейли $g \in S(g_0, M)$ болсун. Анда $Ag \in C(D)$ болот жана, андан сырткары, бардык $(x,y) \in \overline{D}$ үчүн $|A_i\, g - g_{0i}| \le q,\, i = \overline{1,5},$ барабарсыздыктары туура болот, мында $q = NH(3\ell + 3\ell h + h)$. Мындан $\|Ag - g_0\| \le q$ экендиги келип чыгат. Ошондуктан, эгерде

$$q \le M\,, \qquad (3.1.11)$$

болсо, анда $\forall g \in S(g_0, M)$ үчүн $\|Ag - g_0\| \le M$ ге ээ болобуз. Анда демек, $Ag \in S(g_0, M)$ болот. Бул деген, (3.1.11) шарты аткарылган учурда А оператору $S(g_0, M)$ шарын өзүнө чагылтарын билдирет.

Мейли $\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M)$ болсун. Анда 4) шартын пайдаланып (3.1.9) дан $\left|A_i g^{(1)} - A_i g^{(2)}\right| \le d \left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|$ экендигин алабыз, мында $d = LN(3\ell + 3\ell h + h)$. Анда демек $\left\|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\right\| \le d \left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|$. Мындан, эгерде

$$d < 1 \qquad (3.1.12)$$

болсо, анда A оператору (3.1.11), (3.1.12) лердин негизинде $S(g_0, M)$ шарын өзүнө кысып чагылтууну ишке ашырат деген корутундуга келебиз. Анда С. Банахтын теоремасынын негизинде $S(g_0, M)$ шарында чагылтуунун жалгыз гана кыймылсыз чекити жашайт, б.а. (3.1.10) теңдемесинин бир гана чечими жашайт.

$S(g_0, M)$ шарында (3.1.10) теңдемесинин чечимин удаалаш жакындаштыруу усулу менен аныктап, биз теңдемелердин (3.1.4)–(3.1.8) системасынын чечимин, жана ошону менен 3.1.1 маселесинин чечимин бир маанилүү түрдө тургузабыз.

3.1.1-теорема. Эгерде 1) - 5) жана (3.1.11), (3.1.12) шарттары аткарылса, анда 3.1.1 маселеси жалгыз чечимге ээ болот.

3.2. Сызыктуу эмес үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн локалдык эмес чектик маселелер

Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес теңдеме үчүн, изделүүчү чечимдин чек арадагы маанилери менен аймактын ички чекиттериндеги маанилерин байланышыруучу локалдык эмес шарттарга ээ болгон чектик маселелерди интегралдык теңдемелер усулу менен изилдейбиз.

$D=\{(x,y):0<x<l,0<y<h\}$ аймагында

$$u_{xxy}=F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy}), \qquad (3.2.1)$$

теңдемесин карайбыз, мында $F-$ берилген функция.

3.2.1-маселе. D аймагында (3.2.1) теңдемесинин

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u_x(0,y)=\varphi_2(y), \quad 0\le y\le h, \qquad (3.2.2)$$

$$u(x,0)+\int_0^h T(x,y)u(x,y)dy=\psi(x), \; 0\le x\le l, \qquad (3.2.3)$$

шарттарын канааттандырган чечимин табуу керек, мында $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ T(x,y),\ \psi(x)-$ берилген функциялар.

Берилген функцияларга карата төмөндөгүдөй боолгоолорду жасайбыз:

1) $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \in C^1[0,h],\ \psi(x)\in C^2[0,l]$;

2) $T(x,y)\in C^1(\overline{D}),\ T_{xx}(x,y)\in C(\overline{D}),\ max\{max|T|,max|T_x|,max|T_y|,max|T_{xx}|\}\le T_0$;

3) $F(x,y,u,p,q,z,s)\in C\left(D\times R^5\right), \quad max|F(x,y,u,p,q,z,s)|\le H, \quad R^5-$бул (u,p,q,z,s); өзгөрүлмөлөрүнүн беш ченемдүү мейкиндиги;

4) $|F(x,y,u,p,q,z,s)-F(x,y,\overline{u},\overline{p},\overline{q},\overline{z},\overline{s})|\le L(|u-\overline{u}|+|p-\overline{p}|+|q-\overline{q}|+|z-\overline{s}|+|s-\overline{s}|)$;

5) $\varphi_1(0)+\int_0^h T(0,y)\varphi_1(y)dy=\psi(0).$

(3.2.1)-(3.2.3) маселеси төмөнкү интегралдык-дифференциалдык теңдемеге эквиваленттүү болорун байкоо кыйын эмес

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)-\int_0^h T(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+\int_0^x d\xi\int_0^y (x-\xi)F(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta, \quad (3.2.4)$$

мында $\Phi_0(x,y)=\psi(x)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0)+x\varphi_2(y)-x\varphi_2(0)$.

(3.2.4) тү дифференцирлеп төмөндөгүгө ээ болобуз

$$u_x(x,y)=\Phi_{0x}(x,y)-\int_0^h T_x(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-\int_0^h T(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y F(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta, \quad (3.2.5)$$

$$u_y(x,y)=\Phi_{0y}(x,y)+\int_0^x (x-\xi)F(\xi,y,u(\xi,y),u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi, \quad (3.2.6)$$

$$u_{xx}(x,y)=\Phi_{0xx}(x,y)-\int_0^h T_{xx}(x,h)u(x,y)d\eta-2\int_0^h T_x(x,\eta)u_x(x,y)d\eta-$$

$$-\int_0^h T(x,\eta)u_{xx}(x,\eta)d\eta+\int_0^y F(x,\eta,u(x,\eta),u_x,u_\eta,u_{xx},u_{x\eta})d\eta, \quad (3.2.7)$$

$$u_{xy}(x,y)=\Phi_{0xy}(x,y)+\int_0^x F(\xi,y,u(\xi,y),u_\xi,u_\xi,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi. \quad (3.2.8)$$

Теңдемелердин (3.2.4)-(3.2.8) системасы экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин туюк системасы болуп саналат. Теңдемелердин ушул системасы үчүн D аймагында кысып чагылдыруу принциби орун аларын көрсөтөбүз.

Төмөндөгүдөй вектор-функцияны

$$q(x,y)=(g_1(x,y),\ g_2(x,y),\ g_3(x,y),\ g_4(x,y),\ g_5(x,y)),$$

мында $g_1=u(x,y),\ g_2=u_x(x,y),\ g_3=u_y(x,y), g_4=u_{xx}(x,y),\ g_5=u_{xy}(x,y),$ жана функциялардын $g(x,y)\in C(\overline{D})$ көптүгүндө аныкталган жана $\mathrm{A}=(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_5)$: көрүнүшүнө ээ болгон А операторун киргизебиз:

$$\mathrm{A}_1 g=g_{01}(x,y)-\int_0^h T(x,\eta)g_1(x,\eta)d\eta+\int_0^x d\xi\int_0^y (x-\xi)F(\xi,\eta,g_1(\xi,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta,$$

$$\mathrm{A}_2 g=g_{02}(x,y)-\int_0^h T_x(x,\eta)g_1(x,\eta)d\eta-\int_0^h T(x,\eta)g_2(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi \int_0^y F\left(\xi,\eta,g_1(\xi,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\eta, \qquad (3.2.9)$$

$$\mathrm{A}_3 g = g_{03}(x,y)+\int_0^x (x-\xi)F\left(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\xi,$$

$$\mathrm{A}_4 g = g_{04}(x,y)-\int_0^h T_{xx}(x,\eta)g_1(x,\eta)d\eta-2\int_0^h T_x(x,\eta)g_2(x,\eta)d\eta-\int_0^h T(x,\eta)g_4(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y F\left(x,\eta,g_1(x,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\eta,$$

$$\mathrm{A}_5 g = g_{05}(x,y)+\int_0^x F\left(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\xi,$$

мында $g_{01}=\Phi_0(x,y), g_{02}=\Phi_{0x}(x,y), g_{03}=\Phi_{0y}(x,y), g_{04}=\Phi_{0xx}(x,y), g_{05}=\Phi_{0xy}(x,y)$ тер $g_0(x,y)=(g_{01},\ g_{02},\ g_{03},\ g_{04},\ g_{05})$. вектор-функциясынын компоненттери.

Анда теңдемелердин (3.2.4)-(3.2.8) системасы бир вектордук барабардык көрүнүшүндө жазылат

$$g=\mathrm{A}g \qquad (3.2.10)$$

Мейли *A* оператору $S(g_o,M)=\{g:\|g-g_o\|\le M\}$ шарын өзүнө кысып чагылдырууну ишке ашырсын дейли, мында *M* – кандайдыр бир берилген сан.

g нын нормасын $\|g\|=\max\limits_{1\le i\le 5}\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}|g_i(x,y)|$ барабардыгы менен аныктайбыз. g нын *S(g,M)* шарына таандык болгон элементтери үчүн $\|g\|\le\|g_0\|+M=K$ баалоосу орун алат.

Мейли $g\in S(g_0,M)$ болсун. Анда $Ag\in C(D)$ болот жана, андан сырткары, бардык $(x,y)\in\overline{D}$ үчүн төмөнкү баалоолор туура болот

$$|A_1g-g_{01}|\le T_0hK+\frac{1}{2}he^2H\le T_0dK+\frac{1}{2}Hd^3,\ d=\max\{l,h\}$$
$$|A_2g-g_{02}|\le 2T_0hK+heH\le 2T_0Kd+Hd^2,\ |A_5g-g_{05}|\le lH\le dH,$$
$$|A_3g-g_{03}|\le\frac{1}{2}l^2H\le d^2H,\ |A_4g-g_{04}|\le 4T_0hK+hH\le 4T_0Kd+Hd.$$

Мындан, эгерде

$$d \le d_1^* = \min\left\{\frac{M}{4T_0K + H}, \frac{M}{T_0K + \sqrt{T_0^2K^2 + MH}}, d_1\right\}, \qquad (3.2.11)$$

болсо, мында d_1 – бул $\frac{1}{2}Hd^3 + T_0Kd - M = 0$ теңдемесинин жалгыз оң тамыры, анда $\forall g \in S(g_0, M)$ үчүн $\|Ag - g_0\| \le M,\ Ag \in S(g_0, M)$. ге ээ болобуз. Бул деген (3.2.11) шарты аткарылган учурда А оператору $S(g_0, M)$ шарын өзүнө чагылдырат дегендикти билдирет. Мейли $\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M)$ болсун. Анда

$$\left|A_1g^{(1)} - A_1g^{(2)}\right| \le \left(T_0h + \frac{5}{2}l^2hL\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le \left(T_0d + \frac{5}{2}Ld^3\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_2g^{(1)} - A_2g^{(2)}\right| \le \left(2T_0h + 5lhL\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le \left(2T_0d + 5Ld^2\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_3g^{(1)} - A_3g^{(2)}\right| \le \frac{5}{2}l^2L\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le 5Ld^2\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_4g^{(1)} - A_4g^{(2)}\right| \le \left(4t_0h + 5Lh\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le \left(4T_0d + 5Ld\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_5g^{(1)} - A_5g^{(2)}\right| \le 5lL\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le 5Ld^2\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|.$$

Мындан, эгерде

$$d < d_2^* = \min\left\{\frac{1}{4T_0 + 5L}, \frac{1}{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 5L}}, d_2\right\}, \qquad (3.2.12)$$

болсо, мында d_2 – деген $\frac{5}{2}Ld^3 + T_0d - 1 = 0$, теңдемесинин оң тамыры, анда

$$\left\|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\right\| \le \frac{d}{d_2^*}\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|. \qquad (3.2.13)$$

Демек анда, каалагандай $d < d_2^*$ учурунда A оператору (3.2.12), (3.2.13) негизинде $s(g_0, M)$ шарын өзүнө кысылган чагылдырууну ишке ашырат. Анда С. Банахтын теоремасынын негизинде $S(g_0, M)$ шарында чагылдыруунун жалгыз гана кыймылсыз чекити жашайт, б.а. (3.2.10) теңдемесинин бир гана чечими жашайт.

Теңдемелердин (3.2.4)-(3.2.8) системасын удаалаш жакындаштыруу усулу менен чечебиз. Мейли төмөндөгүдөй болсун

$$g_1^{(0)} = g_{01}(x,y),\ g_2^{(0)} = g_{02}(x,y),\ g_3^{(0)} = g_{03}(x,y),\ g_4^{(0)} = g_{04}(x,y),\ g_5^{(0)} = g_{05}(x,y).$$

Удаалаш жакындаштырууларды мындайча аныктайбыз:

$$g_1^{(n)} = A_1\left(g_1^{(n-1)}, g_2^{(n-1)}, g_3^{(n-1)}, g_4^{(n-1)}, g_5^{(n-1)}\right) \equiv g_1^{(0)} - \int_0^h T(x,\eta) g_1^{(n-1)}(x,\eta) d\eta +$$

$$+\int_0^x d\xi \int_0^y (x-\xi) F\left(\xi,\eta, g_1^{(n-1)}(\xi,\eta), g_2^{(n-1)}, g_3^{(n-1)}, g_4^{(n-1)}, g_5^{(n-1)}\right) d\eta,$$

(3.2.4)-(3.2.8) системасын удаалаш жакындаштыруулар усулу менен чечип $D^* = \{(x,y): 0 < x < d^*,\ 0 < y < d^*\}$ аймагында биз $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}$, функцияларын бир маанилүү түрдө тургузабыз, мында $d^* = \min\{d_1^*, d_2^*\}$, ал эми d_1^*, d_2^* тиешелүү түрдө (3.2.11), (3.2.12) формулалары менен аныкталат.

3.2.1-теорема. Эгерде 1) - 5) и (3.2.11), (3.2.12) шарттары аткарылса, анда 3.2.1 маселеси D^* аймагында жалгаз чечимге ээ болот.

Төмөнкү маселе ушуга эле окшош изилденет.

3.2.2-маселе. (3.2.2) де экинчи шарттын ордуна

$$u(l,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h$$

шарты алынган учурда 3.2.1-маселесинин бардык шарттарын канааттандырган $u(x,y)$ функцияны табуу керек.

3.3. Сызыктуу эмес үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн интегралдык шарттарга ээ болгон локалдык эмес маселе

3.3.1. Маселенин коюлушу.

$D=\{(x,y): 0<x<\ell, 0<y<h\}$ аймагында

$$u_{xxy}=F(x,y,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy}) \qquad (3.3.1)$$

теңдемесин карайбыз, мында F – берилген функция.

(3.3.1) теңдемеси [7] эмгегиндеги классификация боюнча жекече туундулардагы үчүнчү тартиптеги теңдеменин, качан мүнөздөмөлөр теңдемеси бир эки эселүү жана бир жөнөкөй чыныгы мүнөздөмөгө ээ болгон учурдагы, чоң туундуларга карата каноникалык көрүнүшү болуп эсептелет.

3.3.1-маселе. (3.3.1) маселесинин

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h \qquad (3.3.2)$$

$$u_x(0,y)+\int_0^{\ell}T_1(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y), 0\le y\le h, \qquad (3.3.3)$$

$$u(x,0)+\int_0^{h}T_2(x,y)u(x,y)dy=\psi(x), 0\le x\le l, \qquad (3.3.4)$$

шарттарын канааттандырган $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$ чечимин табуу керек, бул жерде $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x), T_1(x,y), T_2(x,y)-$ берилген функциялар.

Качан $T_1(x,y)\equiv 0$ болгон учурда 3.3.1–маселе [8] эмгегинде изилденген.

Мейли төмөнкү шарттар аткарылган болсун:

1) $\varphi_i(y)\in= C^1[0,h](i=1,2), \psi(x)\in C^2[0,\ell]$;

2) $T_i(x,y)\in C(\overline{D})(i=1,2), T_1(x,y)\in C^{0+1}(D), T_2(x,y)\in C^{2+0}(D)$;

3) $\varphi_1(0)+\int_0^{h}T_2(0,y)\varphi_1(y)dy=\varphi(0)$;

4) $F(x,y,u,p,q,r,s)\in C(\overline{D}\times R^5), \max|F(x,y,u,p,q,r,s)|\le H$, R^2 - бул

(u,p,q,r,s) өзгөрүлмөлөрүнүн беш ченемдүү мейкиндиги;

5) $\left|F(x,y,u,p,q,r,s)-F(x,y,\bar{u},\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s})\right|\le L(|\,u-\bar{u}\,|+|\,p-\bar{p}\,|+|\,q-\bar{q}\,|+$

$+|\,r-\bar{r}\,|+|\,s-\bar{s}\,|)$.

3.3.2. 3.3.1-маселесин интегралдык теңдемелердин сиситемасына келтирүү. Мындай белгилөөнү киргизебиз

$$\tau(x)=\psi(x)-\int_0^h T_2(x,y)u(x,y)dy,\;\; g(y)=\varphi_2(y)-\int_0^l T_1(x,y)u(x,y)dx.$$

Анда (3.3.1) маселесинин (3.3.2) шартын жана

$$u_x(0,y)=g(y),u(x,0)=\tau(x)$$

шартын канааттандырган чечими төмөндөгүдөй көрүнүштө көрсөтүлөт

$$u(x,y)=\tau(x)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0)+[g(y)-g(0)]x+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta(x,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta\,,$$

мында $\vartheta(x,\xi)=x-\xi$.

$\tau(x)$ жана $g(y)$ тин маанилерин коюп төмөндөгүдөй интегралдык-дифференциалдык теңдемени алабыз

$$u(x,y)=\Phi(x,y)-\int_0^\ell xT_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-\int_0^h T_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^\ell d\xi\int_0^h xT_1(\xi,0)T_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta(x,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta \qquad (3.3.5)$$

мында

$$\Phi(x,y)=\psi(x)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0)+[\varphi_2(y)-\varphi_2(0)]x+\int_0^\ell xT_1(\xi,0)\psi(\xi)d\xi\,.$$

(3.3.5) тен теңдемелердин туюк системасын алуу үчүн төмөндөгү туундуларды табабыз

$$u_x(x,y)=\Phi_x(x,y)-\int_0^{\ell}T_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-\int_0^{h}T_{2x}(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^{h}T_2(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta+\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{h}T_1(\xi,0)T_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+ \qquad (3.3.6)$$
$$+\int_0^{x}d\xi\int_0^{y}F(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta},u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta,$$

$$u_y(x,y)=\Phi_y(x,y)-\int_0^{\ell}xT_{1y}(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-\int_0^{\ell}xT_1(\xi,\eta)u_y(\xi,y)d\xi+$$
$$+\int_0^{x}\vartheta(x,\xi)F(\xi,y,u(\xi,y),u_{\xi},u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi; \qquad (3.3.7)$$

$$u_{xx}(x,y)=\Phi_{xx}(x,y)-\int_0^{h}T_{2xx}(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-2\int_0^{h}T_{2x}(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^{h}T_2(x,\eta)u_{xx}(x,\eta)d\eta+\int_0^{y}F(x,\eta,u(x,\eta),u_x,u_{\eta},u_{xx},u_{x\eta})d\eta+ \qquad (3.3.8)$$
$$+\int_0^{x}F(\xi,y,u(\xi,y),u_{\xi},u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi;$$

$$u_{xy}(x,y)=\Phi_{xy}(x,y)-\int_0^{\ell}T_{1y}(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-\int_0^{\ell}T_1(\xi,y)u_y(\xi,y)d\xi+$$
$$+\int_0^{x}F(\xi,y,u(\xi,y),u_{\xi},u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi. \qquad (3.3.9)$$

Ошентип 3.3.1-маселесинин чечилиши теңдемелердин (3.3.5)-(3.3.9) системасынын чечилишине келтирилди.

3.3.3. Теңдемелердин системасын кысып чагылдыруу ыкмасы менен чечүү. Ушул максатта теңдемелердин системасын төмөндөгүдөй көрүнүштө жазып алабыз

$$g=Ag, \qquad (3.3.10)$$

мында $g=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)$ - бул $g_1=u(x,y)$, $g_2=u_x(x,y)$, $g_3=u_y(x,y)$, $g_4=u_{xx}(x,y)$, $g_5=u_{xy}(x,y)$ компоненттерине ээ болгон вектор-функция, ал эми $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ оператору функциялардын $g\in C(\overline{D})$ көптүгүндө аныкталат жана анын компоненттери (3.3.5)-(3.3.9) барабардыктарынын жардамында аныкталышат:

$$
\begin{aligned}
A_i g \equiv g_{0i} &+ \int_0^{\ell} K_{i1} g_1(\xi,y)d\xi + \int_0^{\ell} K_{i2} g_3(\xi,y)d\xi + \int_0^{h} K_{i3} g_1(x,\eta)d\eta + \int_0^{h} K_{i4} g_2(x,\eta)d\eta + \\
&+ \int_0^{h} K_{i5} g_3(x,\eta)d\eta + \int_0^{h} K_{i6} g_4(x,\eta)d\eta + \int_0^{x} K_{i7} F(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi + \\
&+ \int_0^{y} K_{i8} F(x,\eta,g_1(x,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^{h} K_{i9} g_1(\xi,\eta)d\eta + \\
&+ \int_0^{x} d\xi \int_0^{y} K_{i0} F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta ,
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

мында $K_{11} = -xT_1(\xi,y)$, $K_{12} \equiv 0$, $K_{13} = -T_2(x,\eta)$, $K_{14} \equiv 0$, $K_{15} \equiv 0$, $K_{16} \equiv 0$, $K_{17} \equiv 0$, $K_{18} \equiv 0$, $K_{19} = -xT(\xi,0)T_2(\xi,\eta)$, $K_{10} = \vartheta(\xi,\eta)$, $K_{21} = -T_1(\xi,y)$, $K_{22} \equiv 0$, $K_{23} = -T_{2x}(x,\eta)$, $K_{24} = -T_2(x,\eta)$, $K_{25} \equiv 0$, $K_{26} \equiv 0$, $K_{27} \equiv 0$, $K_{28} \equiv 0$, $K_{29} = T_1(\xi,0)T_2(\xi,\eta)$, $K_{20} \equiv 1$, $K_{31} = -xT_{1y}(\xi,y)$, $K_{32} = -xT_1(\xi,y)$, $K_{33} \equiv K_{34} \equiv K_{35} \equiv K_{36} \equiv 0$, $K_{37} = \vartheta(x,\xi)$, $K_{38} \equiv K_{39} \equiv K_{30} \equiv 0$, $K_{41} \equiv K_{42} \equiv 0$, $K_{43} = -T_{2xx}(x,\eta)$, $K_{44} = -2T_{2x}(x,\eta)$, $K_{45} \equiv 0$, $K_{46} = -T_2(x,\eta)$, $K_{47} \equiv 0$, $K_{48} = 1$, $K_{49} \equiv 0$, $K_{40} \equiv 0$, $K_{51} = -T_{1y}(\xi,y)$, $K_{52} = -T_1(\xi,y)$, $K_{53} \equiv K_{54} \equiv K_{55} \equiv K_{56} \equiv 0$, $K_{57} = 1$, $K_{58} \equiv K_{59} \equiv K_{50} \equiv 0$, ал эми $g_{01} = \Phi(x,y)$, $g_{02} = \Phi_x(x,y)$, $g_{03} = \Phi_y(x,y)$, $g_{04} = \Phi_{xx}(x,y)$, $g_{05} = \Phi_{xy}(x,y)$ - булар $g_0 = (g_{01},g_{02},g_{03},g_{04},g_{05})$ векторунун компоненттери.

g нын нормасын $\|g\| = \max\limits_{1\le i\le 5} \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} (g_i(x,y))$ барабардыгы менен аныктайбыз. Берилген 1), 2) функцияларынын касиеттеринин негизинде мындай бүтүмгө келебиз

$$\exists M > 0 \ \forall (x,y) \in \overline{D} : \|g_0\| \le M .$$

Мейли A оператору $S(g_0,M) = \{ g : \|g - g_0\| \le \ M \}$ шарын чагылтууну ишке ашырсын. Анда $\forall g \in S(g_0,M) : \|g\| \le 2M$ болот. Берилген 1) – 4) функцияларынын касиеттеринин негизинде мындай дагы бүтүмгө келебиз

$$\exists T > 0 \ \ \forall (x,y) \in \overline{D} : max\left|K_{ij}\right| \le T , \ T = const , \ i = \overline{1,5} , \ j = \overline{0,9} .$$

Мейли төмөнкү шарт аткарылсын

$$Q(l,h)=T(2l+4h+lh)(2+5L+\frac{H}{M})<1. \qquad (3.3.12)$$

(3.3.12) щарты аткарылган учурда A оператору $S(g_0,M)$ шарын өзүнө кысып чагылтууну ишке ашыраарын көрсөтөбүз. Мейли $g\in S(g_0,M)$ болсун. Анда (3.3.11) ден $Ag\in C(\overline{D})$ экендиги жана, андан сырткары, төмөнкү барабарсыздыктын туура болору келип чыгат

$$|A_i g-g_{0i}|\le\int_0^{\ell}|K_{i1}||g_1(\xi,y)|d\xi+\int_0^{\ell}|K_{i2}||g_3(\xi,y)|d\xi+\int_0^{h}|K_{i3}||g_1(x,\eta)|d\eta+$$

$$+\int_0^{h}|K_{i4}||g_2(x,\eta)|d\eta+\int_0^{h}|K_{i5}||g_3(x,\eta)|d\eta+\int_0^{h}|K_{i6}||g_4(x,\eta)|d\eta+$$

$$+\int_0^{x}|K_{i7}||F(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5)|d\xi+\int_0^{y}|K_{i8}||F(x,\eta,g_1(x,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5)|d\eta+$$

$$+\int_0^{\ell}d\xi\int_0^{h}|K_{i9}||g_1(\xi,\eta)|d\eta+\int_0^{x}d\xi\int_0^{y}|K_{i0}||F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)|d\eta<T(2M+H)(2\ell+4h+\ell h)$$

Анда

$$\|Ag-g_0\|=\max_{1\le i\le 5}\max_{(x,y)\in\overline{D}}|A_i g-g_{0i}|<$$

$$<T(2M+H)(2\ell+4h+\ell h)=T(2+\frac{H}{M})(2\ell+4h+\ell h)<Q(\ell,h)M.$$

Мындан (3.3.12) шарты аткарылган учурда төмөнкү барабарсыздык орун алат деген тыянак чыгарабыз

$$\|Ag-g_0\|<Q(\ell,h)M<M.$$

Бул деген, A оператору шарды өзүнө чагылдырат, б.а. $Ag\in S(g_0,M)$ болот дегендикти билдирет.

Эми A оператору (3.3.12) шарты аткарылган учурда кысып чагылдыруу болорун көрсөтөбүз. Мейли $g^{(1)}=(g_1^{(1)},g_2^{(1)},g_3^{(1)},g_4^{(1)},g_5^{(1)})$, $g^{(2)}=(g_1^{(2)},g_2^{(2)},g_3^{(2)},g_4^{(2)},g_5^{(2)})$ дегендер $S(g_0,M)$ шарына таандык болгон каалагандай эки вектор болсун. Анда 5) шартынан төмөндөгү келип чыгат $\forall g^{(1)},\ \forall g^{(2)}\in S(g_0,M)$:

$$\left|F(x,y,g_1^{(1)},g_2^{(1)},g_3^{(1)},g_4^{(1)},g_5^{(1)})-F(x,y,g_1^{(2)},g_2^{(2)},g_3^{(2)},g_4^{(2)},g_5^{(2)})\right|\leq$$

$$\leq L\sum_{i=1}^{5}\left|g_i^{(1)}-g_i^{(2)}\right|\leq 5L\left\|g^{(1)}-g^{(2)}\right\|.$$

Ушул шартты пайдаланып (3.3.11) ден төмөндөгүнү алабыз

$$\left|A_i g^{(1)}-A_i g^{(2)}\right|\leq T(2\ell+4h+\ell h)(1+5L)\left\|g^{(1)}-g^{(2)}\right\|,\ i=\overline{1,5}\,,\quad .$$

Анда

$$\left\|Ag^{(1)}-Ag^{(2)}\right\|\leq T(2\ell+4h+\ell h)(1+5L)\left\|g^{(1)}-g^{(2)}\right\|<Q(\ell,h)\left\|g^{(1)}-g^{(2)}\right\|.$$

(3.3.12) барабарсыздыгынын негизинде $Q(\ell,h)<1$ болгондуктан, анда A оператору $S(g_0,M)$ шарын өзүнө кысып чагылдырууну ишке ашырат. Анда С. Банахтын теоремасынын [9] негизинде $S(g_0,M)$ шарында жалгыз гана кыймылсыз чекит жашайт, б.а. (3.3.10) теңдемесинин жалгыз гана чечими жашайт. Ушул теңдемени, мисалы, удаалаш жакындаштыруулар усулу менен, чечип биз g векторунун бардык компоненттерин бир маанилүү түрдө аныктайбыз жана ошону менен 3.3.1-маселесинин D аймагындагы чечимин аныктап, тургузулган чечим $C^{2+1}(D)$ классына таандык болорун көрсөтөбүз.

Ошентип төмөнкү теорема далилденди.

3.3.1-теорема. Эгерде 1) – 5) жана (3.3.12) шарттары аткарылса. Анда теңдемелрдин (3.3.5)–(3.3.9) системасы $D^*=\{(x,y):0<x<\ell^*,0<y<h^*\}$ аймагында 3.3.1 маселесинин $C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$ классына таандык болгон жалгыз чечимин аныктайт.

3-БАП БОЮНЧА КОРУТУНДУ

Бул бапта үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес теңдемелер үчүн интегралдык кошулуучуну кармап турган локалдык эмес шарттуу чектик маселелер интегралдык теңдемелер усулу менен изилденген.

Тик бурчтуу аймак үчүн корректтүү чектик маселелер түзүлгөн.

Жалгыз чечимдин жашашынын бир мезгилде эки теңдеме үчүн тең мүнөздүү болуп эсептелген сызыкта берилген жалгаштыруу шарттары менен аныкталуучу жетишерлик шарттары табылган.

ТЫЯНАКТАР

Диссертацияда тик бурчтуу жана ийри сызыктуу аймактарда үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы изилденген.

Сингулярдык коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн локалдык эмес маселени изилдөөдө жылуулук потенциалдары усулу пайдаланылган. Кош катмар жылуулук потенциалдарынын касиеттери изилденген.

$x = 0$ сызыгында кубулуучу үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн жалгаштыруу маселелеринде Гриндин функциясы тургузулду жана анын касиеттери изилденди, ошону менен катар чечимдин Гриндин функциясы аркылуу көрсөтүлүшү алынган.

Римандын функциясын тургузуу менен ар түрдүү чыныгы мүнөздөмөлөргө ээ болгон үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чечимге ээ болушунун жетиштүү шарттары алынган. Римандын функциясынын маселенин чечилишинде олуттуу пайдаланылган бир катар касиеттери изилденген.

Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес псевдопараболалык теңдемелер үчүн интегралдык шарттарга ээ болгон локалдык эмес маселелердин бир маанилүү чечилишинин жетиштүү шарттары табылды. Маселенин локалдык эмес шарттарына интегралдык мүчөлөрдүн киришинин ар түрдүү варианттарын каралды.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН БУЛАКТАРДЫН ТИЗМЕСИ

1. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст]: / Б.С. Аблабеков // автореф. дис. … д.ф.-м.н.: 01.01.02. – Бишкек, 2012. - 32 с.
2. Акилов, Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей [Текст] / Ж.А. Акилов // Ташкент: Фан, 1982. – 104 с.
3. Атаманов, Э.Р., Мамаюсупов, М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Э.Р. Атаманов, М.Ш. Мамаюсупов // Фрунзе: Илим, 1990. – 100 с.
4. Базалий, Б.В. Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений [Текст] / Б.В. Базалий, С.П. Дегтярёв // Нелин. граничн. задачи. - 1991. Вып. 3. - С. 6 - 13.
5. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах[Текст] / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. матем. и механика, 1960, т. 24, № 5, С. 58 – 73.
6. Бейлина, Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения [Текст] / Н.В. Бейлина // Вестник СамГУ. Естественно научная серия – 2008. - V 2(61). – С. 22 - 28.
7. Берс, Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. [Текст] / Л. Берс // – Москва: ИЛ, 1961. – 208 с.
8. Бештоков, М.Х. Разностные методы решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / М.Х. Бештоков // автореф. дис. к.ф.-м.н.: 01.01.07 / Москва, 2009. – 19 с.
9. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике. [Текст] / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов // М.: Наука, 1980. – 688 с.
10. Виноградова, М.Б. Теория волн. [Текст] / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков // М.: Наука, 1990. – 432 с.
11. Водахова, А.А. Краевые задачи для уравнений третьего порядка

смешанного псевдо – параболо – гиперболического типа [Текст] / А.А. Водахова // Дис. … канд. физ. – мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1983. – 97 с.

12. Горьков, Ю.П. Формула решения одной краевой задачи для стационарного уравнения Броуновского движения [Текст] / Ю.П. Горьков // Докл. АН СССР. – 1975. - Т. 223. - № 3. – С. 525 - 528.

13. Горьков, Ю.П. Построение фундаментального решения параболического уравнения с вырождением [Текст] / Ю.П. Горьков // Вычислительные методы и программирование. – 2005. - Т. 6. – С. 66 - 70.

14. Глазатов, С.Н. О некоторых задачах для нелинейных псевдопараболических уравнений в нецилиндрических областях / С.Н. Глазатов // Сибирский матем. журнал. - 2007. – Т. 48. - №2. – С. 272 - 289.

15. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. [Текст] / Т.Д. Джураев // Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

16. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов // Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

17. Джураев, Т.Д. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, Я. Попелек // Дифф. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734 - 1745.

18. Джураев, Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев // Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

19. Егоров, И.Е. Об одной краевой задаче для системы сингулярных параболических уравнений [Текст] / И.Е. Егоров // СО АН СССР. Динамика сплошной среды. – 1973. – Вып. 14. – С. 100 - 105.

20. Жегалов, В.И. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Изв. вузов. Математика.

– 1999. – № 10. – С. 73 - 76.

21. Жегалов, В.И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. [Текст] / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Казань: Изд. Казанского математического общества, 2001. – 226 с.

22. Жестков, С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями [Текст] / С.В. Жестков // Украинский математический журнал. - 1990. Т.42, № 1. - С. 132 - 135.

23. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим граничным условием [Текст] / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. - 1977. Т.13, № 2. – С. 294 - 304.

24. Исянгильдин, А.Х. Краевая задача для одного вырождающегося параболо-гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / А.Х. Исянгильдин // Исследования по дифференциальным уравнениям. – Куйбышев, 1982. - С. 62 - 66.

25. Камынин, Л.И. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами [Текст] / Камынин Л.И. // Сибирский матем. журнал. – 1963. Т. IV. № 5. – С. 1071-1105.

26. Камынин, Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями [Текст] / Л.И. Камынин // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1064, Т. 4. № 6. – С. 1006 – 1024.

27. Канчукоев, В.З. Краевая задача для уравнения третьего порядка смешанного гиперболо–псевдопараболического типа [Текст] / В.З. Канчукоев // Дифф. уравнения. – 1980. – 16, № 1. – С. 177 – 178.

28. Карсанова, Ж.Т. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка [Текст] / Ж.Т. Карсанова, Ф.М. Нахушева // Владикавказский математический журнал. - 2002. Т.4. Вып. 2. - С. 31 - 37.

29. Керефов, А.А. Нелокальные задачи для одного уравнения третьего порядка [Текст] / А.А. Керефов, Е.В. Плотникова // Владикавказский мате-

матический журнал. - 2002. Т.4. Вып. 2. - С. 51 - 60.

30. Кожанов, А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера [Текст] / А.И. Кожанов // Дифференц. уравнения. – 2004. - Том 40. - № 6. - С. 763 – 774.

31. Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений / А. И. Кожанов, Н. С. Попов // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2010/ - Том 10. - Выпуск 3. - С. 46 – 62.

32. Кожобеков, К.Г. Краевые задачи для линейных и нелинейных уравнений смешанного типа третьего порядка [Текст] / К.Г. Кожобеков // автореф. дис. к.ф-м.н. (01.01.02) – Ош, 2009. – 22 с.

33. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин // М.: Наука, 1968. - 496 с.

34. Ловитт, У.В. Линейные интегральные уравнения [Текст] / У.В. Ловитт // М.: Едиториал УРСС, 2009. – 232 с.

35. Лыков, А.В. Теория тепло и массопереноса. [Текст] / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов // М.– Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.

36. Миронов, А.Н. Краевые задачи для уравнений с доминирующей частной производной [Текст] / А.Н. Миронов // автореф. дис. … д.ф.-м.н.: 01.01.02. – Казань, 2011. – 25 с.

37. Молдояров, У.Д. Нелокальная задача с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] / У.Д. Молдояров // Известия томского политехнического университета. Математика, физика и механика. – Томск, (РФ) 2012, Т.321, №2. – С. 14 – 17.

38. Молдояров, У.Д. Краевая задача для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка с неклассическим граничным условием [Текст] / У.Д. Молдояров // Естественные и математические

науки в современном мире СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международный научно-практической конференции» (РФ), 2016 – С. 124 - 131.

39. Молдояров, У.Д. О задаче сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / У.Д. Молдояров // Естественные и математические науки в современном мире СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международный научно-практической конференции» (РФ), 2016. – С. 131 - 138.

40. Молдояров, У.Д. Нелокальные краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка [Текст] / У.Д. Молдояров // Естественные и математические науки в современном мире СибАК, «Сборник статей по материалам XLVI международный научно-практической конференции» (РФ), 2016. – С. 46 - 52.

41. Молдояров, У.Д. Краевые задачи для уравнения в частных производных третьего порядка с сингулярным коэффициентом [Текст] / А.Сопуев, У.Д. Молдояров // Исследования по интегро-дифференциальном уравнениям, НАКР. – Бишкек, 2009. – С.198 - 204.

42. Молдояров, У.Д. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Неклассические уравнения математикой физики и их приложения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. – Ташкент: НУУ им. М. Улукбека, 2014. – С.164 – 165.

43. Молдояров, У.Д. О задаче сопряжения для вырождающегося псевдопараболического и гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, У.Д. Молдояров // Тезисы докладов международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики». – Алматы, 2015. – С.109 - 110.

44. Молдояров, У.Д. Краевые задачи для псевдопараболических урав-

нений третьего порядка [Текст] / А.Сопуев, У.Д. Молдояров // Научно-практический журнал, Приволжский научный вестник (РФ), №10(62) 2016. – С. 14 - 20.

45. Молдояров, У.Д. О задаче сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А.Сопуев, У.Д. Молдояров // Научно-практический журнал, Приволжский научный вестник (РФ), №7(59) – 2016 – С. 27 - 33.

46. Мюнтц, Г. Интегральные уравнения. [Текст] / Г. Мюнтц // Т. 1. – Л. – М.: ГТТИ, 1934. – 330 с.

47. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы. [Текст] / М.А. Наймарк // М.: Наука, 1969. – 528 с.

48. Напсо, А.Ф. Нелокальная задача с внутренним условием для нагруженного псевдопараболического уравнения [Текст] / А.Ф. Напсо, В.З. Канчукоев // Владикавказский математический журнал. - 2002. Т.4. Вып. 2. - С. 44 - 49.

49. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод [Текст] / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т. 18. - №1 – С. 72 - 81.

50. Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии. [Текст] / А.М. Нахушев // М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

51. Нахушева, В.А. Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой [Текст] / В.А. Нахушева // Автореф. дисс. … докт. ф.-м. наук. – Таганрог. 2008. – 30 с.

52. Нахушева, В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом [Текст] / А.М. Нахушев // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11 - 34.

53. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков [Текст] / И.И. Ольховский // М.: МГУ, 1978. – 575 с.

54. Попов, Н.С. Нелокальные краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений [Текст] / Н.С. Попов // автореф. дис. … к.ф.-м.н.: 01.01.02. – Самара, 2000. – 20 с.

55. Пулькина, Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения [Текст] / Л.С. Пулькина // Математические заметки. - 2003. - Т. 74. - Вып. 3. – С. 435 - 445.

56. Пулькина, Л.С. Нелокальная краевая задача для нелинейного уравнения колебаний струны [Текст] / Л.С. Пулькина, Е.Н. Климова // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. третьей всерос. научн. конф. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2006. - С. 192 - 195.

57. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа [Текст] / М.С. Салахитдинов // Ташкент: Фан, 1974. – 156 с.

58. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа [Текст] / М.М. Смирнов // М.: Наука, 1970. – 296 с.

59. Смирнова, Г.Н. Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области [Текст] / Г.Н. Смирнова // Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. IV. - № 2. – С. 343 - 358.

60. Трикоми, Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа [Текст] / Ф. Трикоми // М. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 190 с.

61. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем // М.: Мир, 1977. – 624 с.

62. Уткина, Е.А. Новые варианты характеристических задач для псевдопараболических уравнений [Текст] / Е.А. Уткина // автореф. дис. … к.ф.-м.н.: 01.01.02. – Казань, 1999. – 20 с.

63. Уткина, Е.А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами [Текст] / Е.А Уткина // Известия ВУЗов. Математика. – 2006. - № 9. – С. 67 - 70.

64. Уткина, Е.А. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными [Текст] / Е.А. Уткина // автореф. дис. … д.ф.-м.н.: 01.01.02. – Казань, 2011. – 27 с.

65. Уфлянд, Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях [Текст] / Я.С. Уфлянд // Инж.-физ. журнал. - 1964. Т. 7, № 1. – С. 89 - 92.

66. Франкль, Ф.И. Избранные труды по газовой динамике [Текст] / Ф.И. Франкль // М.: Наука, 1973. – 712 с.

67. Чудновский, А.Ф. Теплофизика почв [Текст] / А.Ф. Чудновский // М.: Наука, 1976. – 352 с.

68. Шхануков, М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка [Текст] / М.Х. Шхануков // Дис. ... докт. физ.–мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

69. Alexiades, V. A singular parabolic initial-boundary value problem in a noncylindrical domain [Текст] / V. Alexiades // SIAM J. Math. anal. – 1980. V. 11. - № 2. - P. 348 - 357.

70. Arena, O. On a degenerate elliptic-parabolic equation [Текст] / O. Arena // Communications in partial differential equations. – 1978. - V. 3. – № 11. – P. 1007 - 1040.

71. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy [Текст] / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. - 1963. T. 21, № 2. – P. 155 - 160.

72. Colton, D. Pseudoparabolic equations in One Space variable [Текст] / D. Colton // J. Differential Equations. – 1972. - № 12. – P. 559 - 565.

73. Gevrey, M. Sur les equations aux derivees particlles du type parabolique [Текст] / M. Gevrey // J. math. pures et appl. Ser. 6. - 1914. - T. X, F. 11. – P. 105 - 148.

74. Greenberg, J.M. On existence, uniqueness and stability of solutions of

the equation $\sigma(u_x)u_{xx}+u_{xxt}=\rho_0 u_{tt}$ / J.M. Greenberg, R.C. MacCamy, V.J. Mizel // J. Math. Mech. - 1968. - V. 17. - № 77. - P. 707 – 728.

75. Kepinski, S. Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t}=0$ [Текст] / S. Kepinski // Math. Ann. - 1905. - T. 61. - №3. – P. 397 - 405.

76. Kepinski, S. Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial j}{\partial t}=0$ [Текст] / S. Kepinski // Krakau Anz. - 1905. – P. 198 - 205.

77. MacCamy, R.C. Existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $u_{tt}=(\sigma(u_x)+\lambda(u_x)u_{xt})_x$ / R.C. MacCamy // Indiana Univ. Math. J. 1970. - V. 20. - № 3. - P. 231 – 238.

78. Moldoyarov, U.D. On conjugation problem for the pseudoparobolic equations of the third order [Текст] / A. Sopuev, U.D. Moldoyarov // Abstracts of the V International Scientific Conference. Bishkek, Kyrgyzctan, 13 September, 2016. – P. 41.

79. Pagani, C.D. On a forward-backward parabolic equation [Текст] / C.D. Pagani, G. Talenti // Annali di matematica pure ed applicate. Ser. IV. - 1971. – T. XC. – P. 1 - 57.

80. Pagani, C.D. On the parabolic equation $sgn(x)|x|^p u_y-u_{xx}=0$ and a related one [Текст] / C.D. Pagani // Annali di matematica pure ed applicate. Ser. IV. – 1974. – T. IC. – P. 333 - 399.

81. Pagani, C.D. On forward-backward parabolic equations in bounded domains [Текст] / C.D. Pagani // Boll. della uniome mat. italiana. – Ser. 5. - 1976. – V. 13-B. № 2. – P. 336 - 354.

82. Rundell, W. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation [Текст] / W. Rundell, M. Stecher // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V.63. - №1. – P. 77 - 81.