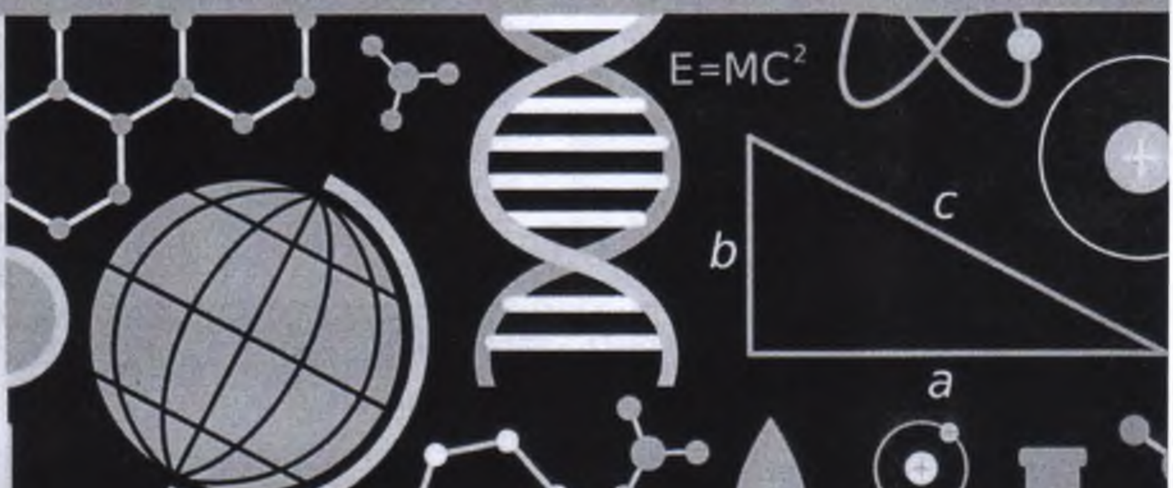
ISSN 2309-3560

СибАК

www.sibac.info

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО МАТЕРИАЛАМ XLII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ



СБОРНИК ВКЛЮЧЕН В НАУКОМЕТРИЧЕСКУЮ БАЗУ РИНЦ

Копия верна
Ученый секретарь
Байгубанов М.

№ 5(40)

г. НОВОСИБИРСК, 2016

Копия верно
Ученый секретарь
ОшГУ Байгубанов М.

6. Напсо А.Ф., Канчукоев В.З. Нелокальная задача с внутренним условием для нагруженного псевдопараболического уравнения // Владикавказский математический журнал. – 2002. Т. 4. Вып. 2. – С. 44–49.
7. Пулькина Л.С., Климова Е.Н. Нелокальная краевая задача для нелинейного уравнения колебаний струны // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. третьей всерос. научн. конф. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 192–195.
8. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. T. 21, № 2. – P. 155–160.

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Молдояров Уларбек Дуйшобекович
ст. преподаватель кафедры ИТАС,
Ошский государственный университет,
Кыргызская Республика, г. Ош,
E-mail: ular_osh@list.ru

ABOUT THE CONJUGATION PROBLEM FOR PSEUDOPOROBOLIC THIRD ORDER EQUATION

Ularbek Moldoyarov
senior lecture, Chair of Information Technology and Automatization System Osh State University,
Kyrgyzstan, Osh

АННОТАЦИЯ

Методом функции Грина и Римана доказана разрешимость задачи сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка, когда линия изменения типа уравнений является характеристической линией.

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ Байсубанов М.

ABSTRACT

The methods of Green and Riemann functions proved the solution of the conjugation problem for a pseudoparabolic third order equations, when the line of changing the type of equations is the characteristic line.

Ключевые слова: задача сопряжения, краевые условия, функции Римана и Грина, псевдопараболические уравнения, уравнение Вольтерра.

Keywords: Conjugation problem, boundary conditions, pseudoparabolic equations and Volterra equation.

1. **Постановка задачи.** В области D, ограниченная линиями $x=-\ell_2(\ell_2>0)$, $y=0$, $x=\chi(y), 0\le y\le h, y=h$, где $\chi(y)$ – монотонно невозрастающая кривая, причем $\chi(0)=\ell_1(\ell_1>0), \chi(h)=\ell_3, 0<\ell_3\le\ell_1$. Рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-x^p u_{yy}=0,(x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,(x,y)\in D_2, \tag{2}$$

где: $D_1=D\cap(x>0), D_2=D\cap(x<0), p=const>-1$.

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,1,...,n;\ \ s=0,1,...,m)$. Относительно коэффициентов и заданных функций предполагаем следующее

$$\begin{gathered}a\in C(\overline{D_2})\cap C^{1+0}(D_2), b\in C(\overline{D_2})\cap C^{0+1}(D_2), c\in C(\overline{D_2}),\\ \chi(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \forall y\in[0,h]:\ell_3\le\chi(y)\le\ell_1,\ \chi(y)\le 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Уравнения вида (1) и (2) часто называются псевдопараболическими по характеру свойств решений [6; 7]. Вырождающиеся параболические уравнения вида (1) рассмотрены в работах [1; 2; 6]. Частные случаи уравнений вида (1) и (2) встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [3].

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap[C^{2+1}(D_1)\cup C^2(D_1)\cup\ \ \cup C^{2+1}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнения (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно краевым условиям

$$u(-\ell_2, y) = \phi_2(y), \quad 0 \le y \le h \tag{4}$$

$$u_y(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le \ell_1, \tag{5}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \psi_3(x), \quad -\ell_2 \le x \le 0, \tag{6}$$

где: – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{gathered}\psi_1 \in C^2[0,\ell_1],\, \psi_2 \in C^1[0,\ell_1],\, \psi_3 \in C^1[-\ell_2,0],\, \phi_i \in C^1[0,h](i=1,2)\\ \psi_1(0) = \psi_3(0),\, \phi_2(0) = \psi_3(-\ell_2),\, \psi_1(\ell_1) = \phi_2(0).\end{gathered} \tag{7}$$

Введем следующие обозначения

$$u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = \nu(y), 0 \le y \le h, \tag{8}$$

где $\tau(y)$, $\nu(y)$ – пока неизвестные функции.

2. Соотношения, полученные из области D_1. Продифференцировав уравнение (1) по y будем иметь

$$u_{xx} - x^p u_y = \omega(x), \tag{9}$$

где: – известная функция.

Рассмотрим следующую смешанную задачу: найти в области D_1 решения уравнения (9), удовлетворяющие краевые условия

$$\begin{gathered}u_x(0,y) = \nu(y),\, u(\chi(y),y) = \phi_1(y),\, 0 \le y \le h,\\ u(x,0) = \psi_1(x),\, 0 \le x \le \ell_1.\end{gathered} \tag{10}$$

Решение задачи (9), (10) через функции Грина представимо в виде [4]

$$u(x,y)=\int_0^{\ell_1}\xi^p G_2(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y G_2(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y G_{2\xi}(x,y;\chi(\eta),\eta)\phi_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{\chi(\eta)} G_2(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi, \quad (11)$$

где:

$$G_2(x,y;\xi,\eta)=U_2(x,y;\xi,\eta)-w(x,y;\xi,\eta),$$

$$U_2(x,y;\xi,\eta)=\frac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)}I_{-1/q}\left(2\frac{x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right)e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}},\ q=p+2,$$

$w(x,y;\xi,\eta)$ – является решением следующей сопряженной задачи

$$w_{\xi\xi}+\xi^p w_\eta=0,$$
$$w_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=0}=0,\ w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=\chi(\eta)}=$$
$$=U_2(x,y;\chi(\eta),\eta),\ w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=0.$$

При $x=0$ из (11) получаем соотношение между и $\nu(y)$:

$$\tau(y)=-\kappa\int_0^y\frac{\nu(\eta)d\eta}{(y-\eta)^{1-1/q}}+\int_0^y w(0,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\tau_0(y), \quad (12)$$

(12)

где: $$\tau_0(y)=\int_0^{\ell_1}\xi^p G_2(0,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\phi_1(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y G_{2\xi}(0,y;\chi(\eta),\eta)\phi_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{\chi(\eta)} G_2(0,y;\xi,\eta)\omega(\xi)d\xi.$$

3. Соотношение между $\tau(y)$ и из области D_2. Составим тождество Лагранжа

$$\vartheta L_2(u)-u L_2^*(\vartheta)=\{\vartheta u_{\xi\eta}+[\vartheta_{\xi\eta}+a\vartheta]u\}_\xi-[\vartheta_\xi u_\xi-b\vartheta u]_\eta, \quad (13)$$

где $L_2^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\xi\eta}-(a\vartheta)_\xi-(b\vartheta)_\eta+c\vartheta$.

Пусть $M(x,y)$ произвольная точка области D_2. Осуществляя интегрирование тождества (13) по области

$D_2^* = \{(\xi,\eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\}$ и учитывая свойства функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, имеем представление

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_\xi(x,y;0,y)\tau(y) - \vartheta(x,y;0,y)\nu(y) - \\ &-\int_0^y [\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) + a(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta)]\tau(\eta)d\eta + \\ &+\int_0^y \vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta + u_0(x,y), \end{aligned} \tag{14}$$

где:

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \vartheta_\xi(x,y;x,0)\psi_3(x) + \vartheta(x.y;0,0)\psi_3^1(0) - \vartheta_\xi(x.y;0,0)\psi_3(0) - \\ &-\int_0^x [\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0) + b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)]\psi_3(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Функцией Римана назовем решение уравнения

$$L_2^*(\vartheta) = 0, \quad (\xi,\eta) \in D_2^*, \tag{15}$$

удовлетворяющее условия

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = 1 \qquad 0 \le \eta \le x, \tag{16}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y} = \omega(x,y;\xi), \qquad x \le \xi \le 0, \tag{17}$$

причем $\omega(x,y;\xi)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y) + b(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y) = 0, x < \xi < 0, \\ &\vartheta(x,y;\xi,y)_{\xi=x} = 0, \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)_{\xi=x} = 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Очевидно, что решение задачи (18) существует и в единственном виде. Разрешимость этой задачи эквивалентно сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\vartheta(x,y;\xi,y) = \xi - x + \int_y^\xi (\xi_1 - \xi)b(\xi_1,y)\vartheta(x,y;\xi_1,y)d\xi_1. \tag{19}$$

Решение интегрального уравнения (19) через резольвента представим в виде

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_y^{\xi}R(x,\xi_1)(\xi_1-x)d\xi_1,$$

где $R(x,\xi_1)$ –ядро резольвента $(\xi_1-\xi)b(\xi_1,y)$.

Из (15) – (18) для функции Римана получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned}&\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\xi-x-\int_x^{\xi}(\xi-\xi_1)b(\xi_1,\eta)\vartheta(x,y;\xi,\eta)d\xi_1-\\&-\int_x^{\xi}d\xi_1\int_y^{\eta}\left[a(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)c(\xi_1,\eta_1)\right]\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1.\end{aligned}\qquad(20)$$

Лемма 1. Если

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}:b(x,y)\le 0,\qquad(21)$$

То

$$\forall(x,y)\in\overline{D_2}\wedge\forall\xi\in[x,0]:\vartheta(x,y;\xi,y)\ge\xi-x\ge 0.\qquad(22)$$

Из (22) вытекает неравенство

$$\forall y\in[0,h]:\vartheta(\ell_2,y;0,y)\ge\ell_2>0.\qquad(23)$$

Используя второе условие (4) из (14), имеем

$$\begin{aligned}&\vartheta(-\ell_2,y;0,y)v(y)=\int_0^{y}\vartheta_\eta(-\ell_2,y;0,\eta)v(\eta)d\eta+\\&+\vartheta_\eta(-\ell_2,y;0,y)\tau(y)-\int_0^{y}\mathrm{A}(-\ell_2,y;\eta)\tau(\eta)d\eta+g_0(y),\end{aligned}\qquad(24)$$

где $g_0(y)=u_0(-\ell_2,y)-\phi_2(y)$.

Если учесть неравенство (23), то уравнение (24) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и ее обращение относительно имеет вид

$$v(y)=B(y)\tau(y)+\int_0^{y}H(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+v_0(y),\qquad(25)$$

где $B(y)=\dfrac{\vartheta_{\xi}(-\ell_2,y;0,y)}{\vartheta(-\ell_2,y;0,y)},\nu_0(y)=\dfrac{g_0(y)}{\vartheta(-\ell_2,y;0,y)}+\int_0^y\dfrac{g_0(\eta)R_1(y,\eta)}{\vartheta(-\ell_2,\eta;0,\eta)}d\eta,$

$$H(y,\eta)=-\frac{\mathrm{A}(-\ell_2,y;0,\eta)}{\vartheta(-\ell_2,y;0,y)}+\frac{\vartheta_{\xi}(-\ell_2,\eta;0,\eta)}{\vartheta(-\ell_2,\eta;0,\eta)}R_1(y,\eta)-$$

$$-\int_{\eta}^{y}\frac{\mathrm{A}(-\ell_2,\eta_1;\eta)}{\vartheta(-\ell_2,\eta_1;0,\eta_1)}R_1(y,\eta_1)d\eta_1.$$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Из (12) и (25) получим

$$\tau(y)=-\kappa\int_0^y\frac{B(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}\tau(\eta)d\eta+\int_0^y K(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\tau_0(y),\qquad(26)$$

где:

$$g(y)=\tau_0(y)-\int_0^y\left[\frac{\kappa}{(y-\eta)^{1-1/q}}-\omega(0,y;0,\eta)\right]\nu_0(\eta)d\eta.$$

Так, разрешимость задачи 1 эквивалентно редуцировалась к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода (26) имеющее слабое ядро, которое допускает единственное непрерывное решение.

Таким образом, доказана нижеследующая теорема.

Теорема. Если выполняются условия (3), (7) и (21), то решение задачи 1 существует и единственно.

Список литературы:

1. Базалий Б.В., Дегтярёв С.П. Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений // Нелин. граничн. задачи. – 1991. Вып. 3. – С. 6–13.
2. Исянгильдин А.Х. Краевые задачи нелокальными условиями сопряжения для дифференциальных уравнений смешанного типа: автереф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Уфа, 1996. – 11 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
4. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа // Дис. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 1996. – 249 с.
5. Colton D. Pseudo parabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. – 1972. № 12. – P. 559–565.

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ
Байсубанов М.