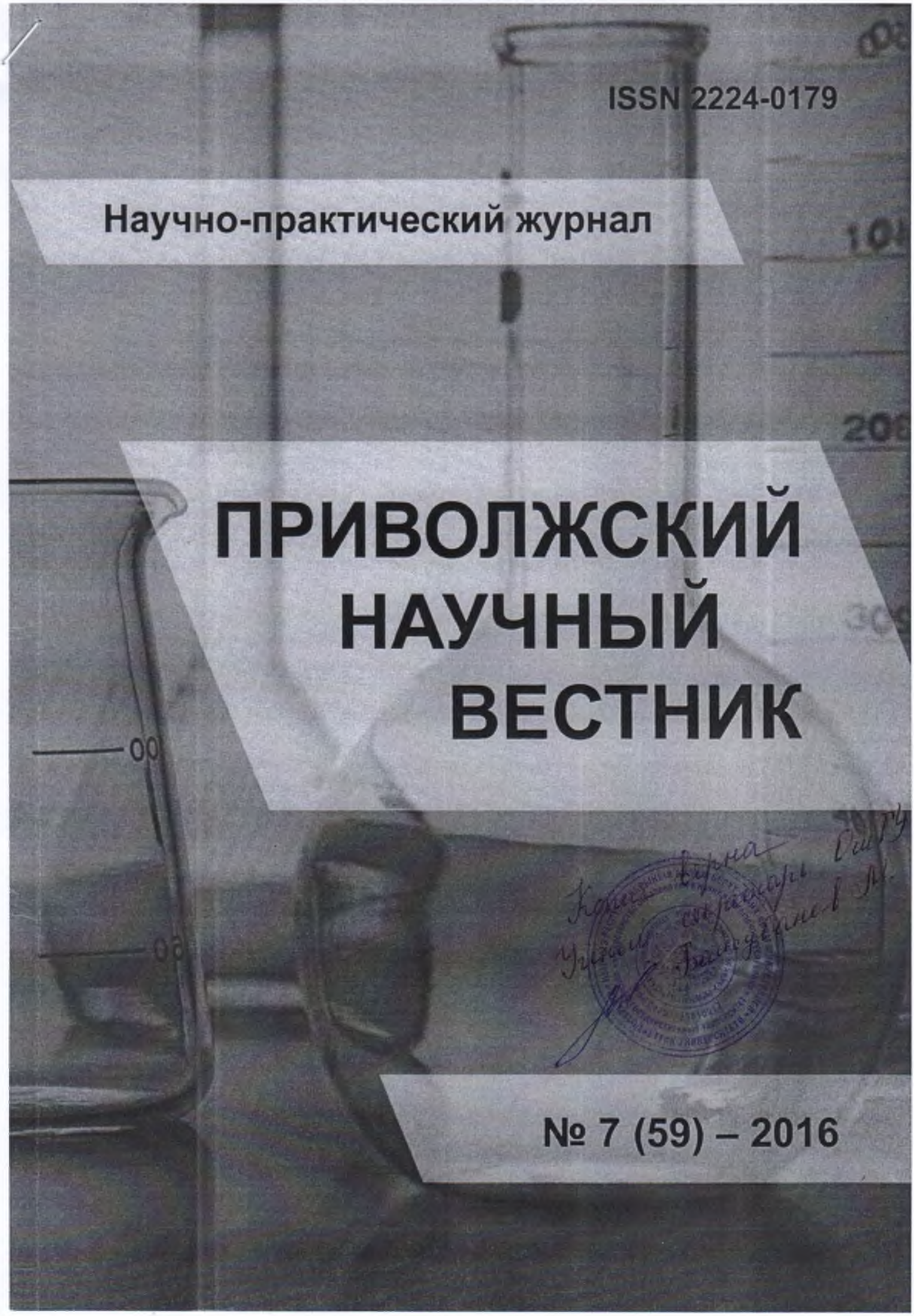

ISSN 2224-0179

Научно-практический журнал

ПРИВОЛЖСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

Копия верна
Ученый секретарь ОмГУ
Бондаренко В.Л.

№ 7 (59) – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ И АРХЕОЛОГИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

ФИЛОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Копия верна
Ученый секретарь ОшГУ Байсубанов

УДК 517.956.6

А. Сопуев
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ошский государственный университет,
г. Ош, Киргизия
E-mail: sopuev@mail.ru

У.Д. Молдояров
ст. преподаватель,
кафедра информационных технологий
и автоматизированных систем,
Ошский государственный университет,
г. Ош, Киргизия
E-mail: ular_osh@list.ru

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Методом функции Римана, Грина и интегральных уравнений доказано существование и единственность решения задачи сопряжения для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Ключевые слова: задача сопряжения, функция Римана, функция Грина, граничные условия, интегральное уравнение типа Фредгольма, единственность решения, существование решения.

A. Sopuev, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
U.D. Moldoiarov, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

ON CONJUGATION PROBLEM FOR THE PSEUDO-PAROBOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Abstract. By the method of the function of Riemann, Green and integral equations the existence and uniqueness of the solution of the conjugation problem for pseudo-parabolic equations of the third order has been proved.

Keywords: conjugation problem, the Riemann zeta function, Green's function, boundary conditions, integral equation of Fredholm type, uniqueness of solutions, existence of solutions.

1. Постановка задачи. К задачам сопряжения для уравнений различных типов, приводятся задачи, возникающие при изучении явлений теплообмена в смешанной среде [3], механических и электрических явлений в разнородных средах с резко отличающимися физическими свойствами [6], а также при исследовании задачи неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах [4].

Пусть ℓ, ℓ_1 и h – любые положительные числа. Через AA_0 обозначим простую гладкую кривую $x=\chi(y)$, соединяющие точки $A(-\ell_1,0)$ и $A_0(-\ell_2,h)$, где $\ell_1=-\chi(0)$, $\ell_2=-\chi(h)$, причем $-\ell_1<-\ell_2<0$. Пусть $A(-\ell_1,0)B(\ell,0)$, $B(\ell,0)B_0(\ell,h)$, $B_0(\ell,h)A_0(-\ell_2,h)$) – отрезки прямых $y=0$, $x=\ell$, $y=h$ соответственно. В области D, ограниченной линиями AB, BB_0, B_0A_0, A_0A рассмотрим задачу сопряжения для уравнений:

$$L_1(u)\equiv u_{xxy}-x^p u_{yy}+d(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+\beta(x,y)u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

где $D_1=D\cap(x>0)$, $D_2=D\cap(x<0)$, $p=const>-1$. Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s (r=0,1,...,n, s=0,1,...m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^2(D_1)\cap C^{2+1}(D_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D_1, начальным условиям

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{3}$$

граничному условию

$$u(\ell,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h \tag{4}$$

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ
Байгубанов

и функцию $u(x,y)\in C(\overline{D_2})\cap C^{2+1}(D_2)$, удовлетворяющую уравнении (2) в области D_2, начальному условию

$$u(x,0)=\psi_3(x),\ -\ell_1\le x\le 0, \tag{5}$$

граничному условию

$$u(\chi(y),y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{6}$$

а также условиям сопряжения

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ 0\le y\le h, \tag{7}$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2)$, $\psi_j(x)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_i(y)\in C^1[0,h](i=1,2),\ \psi_1(x)\in C^2[0,\ell],\ \psi_2(x)\in C^1[0,\ell],\ \psi_3(x)\in C^1[-\ell_1,0], \tag{8}$$

$$\psi_1(0)=\psi_3(0),\ \psi_1'(0),=\psi_3'(0),\ \psi_1(-\ell_1)=\varphi_2(0),\ \psi_1(\ell)=\varphi_1(0). \tag{9}$$

Относительно коэффициентов уравнений (1) и (2) предполагаем следующее:

$$\begin{gathered} d\in C(\overline{D}_1),\ \beta\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\ a\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2),\\ b\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2),\ c\in C(\overline{D}_2). \end{gathered} \tag{10}$$

Для решения задачи 1 будем использовать метод Трикоми, используемые в теории уравнений смешанного типа [8]. Пусть

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\ 0\le y\le h, \tag{11}$$

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y),\ 0\le y\le h, \tag{12}$$

где $\tau(y)$ и $\nu(y)$ – пока неизвестные функции. Тогда, очевидно, что условия (7) соблюдается. Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4) и (12).

Задача 2. Найти решение уравнения (2) с начальным условием (5) и граничными условиями (11) и (12).

2. Сведение решение задачи 2 к интегральному уравнению. Интегрируя уравнения (1) по y в пределах от 0 до y и учитывая при этом начальные условия (3) придем к уравнению

$$u_{xx}-x^p u_y=\omega(x)-\int_0^y d(x,\eta)u(x,\eta)d\eta, \tag{13}$$

где $\omega(x)=\psi_1''(x)-x^p\psi_2(x)$ – известная функция.

Вырождающиеся параболические уравнение второго порядка вида (13) изучены в работах [1], [11].

Методом функции Грина уравнение (13) сведем к интегральному уравнению типа Вольтерра. С этой целью рассмотрим функцию Грина $G_2(x,y;\xi,\eta)$ [7]

$$G_2(x,y;\xi,\eta)=U_2(x,y;\xi,\eta)-w(x,y;\xi,\eta),$$

где $U_2(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{(x\xi)^{1/2}}{q(y-\eta)}I_{-1/q}\left(2\dfrac{x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2(y-\eta)}\right)e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}$, $q=p+2$, $w(x,y;\xi,\eta)$ – решение следующей сопряженной задачи

$$w_{\xi\xi}+\xi^p w_\eta=0,$$

$$w_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=0}=0,\ w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=l}=U_2(x,y;\xi,\eta),\ w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0,$$

а $I_{1/q}(z)$ – функция Бесселя первого рода мнимого аргумента [6, с. 650].

Тогда решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (4), (12) и первому условию из (3) эквивалентно сводится к решению интегрального уравнения

$$u(x,y)=-\int_0^y G_2(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K_1(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)d\xi+\Phi_1(x,y), \tag{14}$$

где

$$K_1(x,y;\xi,\eta)=d(\xi,\eta)\int_\eta^y G_2(x,y;\xi,\eta_1)d\eta_1,\quad \Phi_1(x,y)=\int_0^\ell \xi^p G_2(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^y G_{2\xi}(x,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^\ell G_2(x,y;\xi,\eta)\,\omega(\xi)d\xi\ .$$

Из (14) с учетом условия (11) получим соотношение

$$\tau(y)=-\kappa\int_0^y\frac{\nu(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}d\eta+\int_0^y w(0;y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K_1(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+\Phi_1(0,y),\ \kappa=\frac{1}{q^{p/q}\Gamma\left(1-1/q\right)}. \tag{15}$$

3. Представление решения задачи 3. Для получения представления решение задачи 3 будем использовать метод функции Римана, которая впервые рассмотрена в работе [10]. В работах [2], [9] разработаны различные варианты построения функции Римана для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Пусть $\forall(x,y)\in D_2$. В области $D_2^*=\{(\xi,\eta): x<\xi<0,\ 0<\eta<h\}$ рассмотрим тождество

$$\vartheta L_2(\omega)-u\,L_2^*(\vartheta)=\{\vartheta u_{\xi\eta}+[\vartheta_{\xi\eta}-(\beta\vartheta)_\eta+a\vartheta]u\}_\xi-\{[\vartheta_\xi-\beta\vartheta]u_\xi-b\vartheta u\}_\eta, \tag{16}$$

где

$$L_2^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\xi\eta}+(\beta\vartheta)_{\xi\eta}-(a\vartheta)_\xi-(b\vartheta)_\eta+c\vartheta\ .$$

Функцией Римана назовем функцию $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, которая однозначно определяется как решение уравнения

$$L_2^*(\vartheta)=0,\ \ (\xi,\eta)\in D_2^*, \tag{17}$$

удовлетворяющая условиям

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\ \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=1,\ \ \vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\theta(x,y;\xi), \tag{18}$$

где $\theta(x,y;\xi)$ – является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}[\beta(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)]-b(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ \ x<\xi<0,\\ \vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1.\end{gathered} \tag{19}$$

В результате вычисления интеграла $\iint\limits_{D_2^*}[\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)]d\xi\,d\eta$ с учетом формулы Грина и условий (17)-(19) получим представление решение задачи 3 через функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,n)$ в виде

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\mathrm{A}(x,y)\tau(y)-\vartheta(x,y;0,y)\nu(y)+\\ &+\int_0^y[B(x,y;\eta)\tau(\eta)+\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)\nu(\eta)]d\eta+\Psi_1(x,y),\ (x,y)\in D_2,\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\mathrm{A}(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;0,y)-\beta(0,y)\vartheta(x,y;0,y),$$

$$\mathrm{B}(x,y;\eta)=-\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)+\beta(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)-[a(0,\eta)-\beta_\eta(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$$

$$\Psi_1(x,y)=[\vartheta_\xi(x,y;x,0)-\beta(x,0)\vartheta(x,y;x,0)]\psi_3(x)+\vartheta(x,y;0,0)\psi_3'(0)-$$
$$-[\vartheta_\xi(x,y;0,0)-\beta(0,0)\vartheta(x,y;0,0)]\psi_3(0)-$$
$$-\int_0^x\{\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\beta(\xi,0)\vartheta_\xi(x,y;\xi,0)+[b(\xi,0)-\beta_\xi(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0)\}\psi_3(\xi)d\xi.$$

Методом интегрирования из уравнения (17) с учетом условий (18) для $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ получаем интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\int_x^\xi[\beta(\xi_1,\eta)-(\xi-\xi_1)b(\xi_1,\eta)]\vartheta(x,y;\xi_1,\eta)d\xi_1-$$
$$-\int_x^\xi d\xi_1\int_y^\eta[a(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)c(\xi_1,\eta_1)]\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1, \tag{21}$$

допускающее единственное решение. При $\eta=y$ из (21) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_x^\xi[\beta(\xi_1,y)-(\xi-\xi_1)b(\xi_1,y)]\vartheta(x,y;\xi_1,y)d\xi_1\,, \tag{22}$$

решение которого эквивалентно решению задачи Коши (19).

Имеет место следующая

Лемма 1. Если

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_2:\beta(x,y)\ge 0,b(x,y)\le 0\,, \tag{23}$$

тогда имеет место неравенство

$$(\forall(x,y)\in\overline{D}_2)\wedge(\forall\xi\in[x,0]):\vartheta(x,y;\xi,y)\ge\xi-x\ge 0. \tag{24}$$

Доказательство. Представим обращение уравнения (22) в виде

$$\vartheta(x,y;\xi,y)=\xi-x+\int_x^\xi R(y,\xi,\xi_1)(\xi_1-x)d\xi_1,\ \forall\xi\in[x,0], \tag{25}$$

где

$$R(y;\xi,\xi_1)=K_1(y;\xi,\xi_1)+K_2(y;\xi,\xi_1)+\ldots+K_n(y;\xi,\xi_1)+\ldots,$$
$$K_1(y;\xi,\xi_1)=\beta(\xi_1,y)-(\xi-\xi_1)b(\xi_1,y),$$
$$K_n(y;\xi,\xi_1)=\int_{\xi_1}^\xi K_1(y;\xi,\xi_2)K_{n-1}(y;\xi_2,\xi_1).d\xi_2,\ n=2,3,\ldots$$

При выполнении условия (23) имеет место неравенство

$$(\forall g\in[0,h])\wedge(\forall\xi_1\in[x,\xi]):\ K_1(y;\xi,\xi_1)\ge 0\,.$$

Тогда $\forall n\in N:K_n(y;\xi,\xi_1)\ge 0$. Следовательно, интеграл, находящейся в правой части равенство (25) неотрицателен. Поэтому имеет место неравенство (24).

Заметим, что из (24) вытекает неравенство

$$\forall y\in[0,h]:\ \vartheta(\chi(y),y;0,y)\ge-\chi(y)\ge\ell_2>0. \tag{26}$$

4. Соотношение между $\tau(y)$ и $v(y)$, полученное из области D_2. Используя (6) и (20) получаем функциональное соотношение:

$$A(\chi(y),y)\tau(y)-\vartheta(\chi(y),y;0,\eta)v(y)+$$
$$+\int_0^y[B(\chi(y),y;\eta)\tau(\eta)+\vartheta_\eta(\chi(y),y;0,\eta)v(\eta)]d\eta=\varphi_2(y)-\Psi_1(\chi(y),y). \tag{27}$$

Если учесть неравенство (26), то соотношение (27) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $v(y)$, обращение которого имеет вид

$$\nu(y) = A_1(y)\tau(y) + \int_0^y H_1(y,\eta)\tau(\eta)d\eta + \nu_0(y), \tag{28}$$

где

$$A_1(y) = \frac{A(\chi(y),y)}{\vartheta(\chi(y),y;\,0,y)},\ H_1(y,\eta) = \frac{B(\chi(y),y;\eta)}{\vartheta(\chi(y),y;\,0,y)} + \frac{A(\chi(\eta),\eta)}{\vartheta(\chi(\eta),\eta;\,0,\eta)}R_1(y,\eta) +$$

$$+\int_\eta^y \frac{B(\chi(\eta_1),\eta_1;\,\eta)}{\vartheta(\chi(\eta),\eta_1;\,0,\eta_1)}R_1(y,\eta_1)d\eta_1,$$

$$\nu_0(y) = \frac{\Psi_1(\chi(y),y) - \varphi_2(y)}{\vartheta(\chi(y),y;0,y)} + \int_0^y \frac{\Psi_1(\chi(\eta),\eta) - \varphi_2(\eta)}{\vartheta(\chi(\eta),\eta;0,\eta)}R_1(y,\eta)d\eta,$$

$R_1(y;\eta)$ – резольвента ядра $\dfrac{\vartheta_\eta(\chi(y),y;\,0,\eta)}{\vartheta(\chi(y),y;\,0,y)}$.

5. Сведение задачи к системе интегральных уравнений. Исключая $\nu(y)$ из (15) и (28) будем иметь

$$\tau(y) = \int_0^y H(y,\eta)\tau(\eta)d\eta + \int_0^y d\eta \int_0^l K_1(0,y;\,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi + \Phi_2(y), \tag{29}$$

где

$$H(y,\eta) = A_1(\eta)w(0,y;0,\eta) - \frac{\kappa A_1(\eta)}{(y-n)^{1-1/q}} + \int_\eta^y [w(0,y;0,s) - \frac{\kappa}{(y-s)^{1-1/q}}]H_1(s,\eta)ds\,,$$

$$\Phi_2(y) = \Phi_1(0,y) + \int_0^y w(0,y;\,0,\eta)\nu_0(\eta)d\eta - \kappa\int_0^y \frac{\nu_0(\eta)}{(y-\eta)^{1-1/q}}d\eta\,.$$

Обращая уравнение (29) относительно $\tau(y)$ как интегральное уравнение Вольтерра второго рода получим

$$\tau(y) = \Phi_3(y) + \int_0^y d\eta \int_0^l K_2(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{30}$$

где

$$K_3(y;\xi,\eta) = K_1(0,y;\xi,\eta) + \int_\eta^y \Gamma_1(y,s)K_1(0,s;\xi,\eta)ds,\ \ \Phi_3(y) = \Phi_2(y) + \int_0^y \Gamma_1(y,s)\Phi_2(s)ds.$$

Далее исключая $\tau(y)$ из (28) и (30) имеем

$$\nu(y) = \Phi_4(y) + \int_0^y d\eta \int_0^l K_3(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\,, \tag{31}$$

где

$$K_3(y;\xi,\eta) = K_2(y;\xi,\eta)\Phi_3(\eta) + \int_\eta^y H_1(y,s)K_2(s;\xi,\eta)ds,$$

$$\Phi_4(y) = \nu_0(y) + A_1(y)\Phi_3(y) + \int_0^y H_1(y,\eta)\Phi_3(\eta)ds\,.$$

Подставляя значение $\nu(y)$ из (31) в (14) приходим к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, допускающее единственное решение:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \int_0^y d\eta \int_0^l K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\,, \tag{32}$$

где

$$K(x,y;\xi,\eta) = K_1(x,y;\xi,\eta) - \int_{\eta}^{y} G_2(x,y;0,s) K_3(s;\xi,\eta) ds\,,$$

$$u_0(x,y) = \Phi_1(x,y) - \int_{0}^{y} G_2(x,y;0,\eta) \Phi_4(\eta) d\eta\,.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если выполняются условия (8), (9), (10) и (23), то решение задачи 1 существует и единственно.

Список литературы:

1. Базалий Б.В, Дегтярёв С.П. Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – Вып. 3. – С. 6–13.

2. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. – Казань: Изд. Казанского математического общества, 2001. – 226 с.

3. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11–34.

4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

7. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 1996. – 249 с.

8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

9. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

10. Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. – 1972. – 12. – P. 559–565.

11. Pagani C.D. On the parabolic equation and a related one // Ann. Mat. Pure ed Appl. – 1974. – V. 99. – P. 333–399.

12. Showalter R.E., Ting T. Pseudoparabolic partial differential equations // Siam. J. Math. Anal. – 1970. – 1. – P. 1–26.