ISSN 2309-3560
9 772309 356546

СибАК

www.sibac.info

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО МАТЕРИАЛАМ XLVI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

СБОРНИК ВКЛЮЧЕН В НАУКОМЕТРИЧЕСКУЮ БАЗУ РИНЦ

№ 9(44)

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ [illegible] Н.

г. НОВОСИБИРСК, 2016

СЕКЦИЯ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ»

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Молдояров Уларбек Дуйшобекович

ст. преподаватель кафедры ИТАС,
Ошский государственный университет,
Кыргызская Республика, г. Ош
E-mail: ular_osh@list.ru

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR EQUATION OF PARTIAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER

Ularbek Moldoiarov

senior lecture, Chair of Information Technology and Automatization System
Osh State University,
Kyrgyzstan, Osh

АННОТАЦИЯ

Методом интегральных уравнений доказано существование и единственность решения нелокальной задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка, когда связываются значения искомого решения на границе и во внутренних точках области.

ABSTRACT

The method of integral equations proved the existence and uniqueness of solutions of a nonlocal problem for non-linear partial differential equation of the third order, when the bind value of the required solution at the border and in the interior point.

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ Байсубанов М.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегро-дифференциальное уравнение, принцип сжатых отображений, единственность решения, существование решения.

Keywords: a nonlocal problem, integro-differential equation, the principle of contraction mapping, uniqueness of solution, the existence of solutions.

При математическом моделировании, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекание с помощью непосредственных измерений, возникают нелокальные задачи. К таким задачам относится, например, задача Бицадзе-Самарского, задачи со смещением [1; 4]. Классификация нелокальных задач для дифференциальных уравнений приведена в [5].

В настоящее время нелокальные задачи активно исследуются для линейных уравнений третьего порядка [3; 6]. Нелокальные задачи для нелинейных уравнений второго порядка изучены в [7; 2].

В работе рассматриваются краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка с нелокальным условием, когда связываются значения искомого решения на границе и во внутренних точках области.

В области $D=\{(x,y): 0<x<l, 0<y<h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxy}=F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy}), \tag{1}$$

где: F – заданная функция. Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r=0,1,...,n; s=0,1,...,m)$.

Задача 1. Найти, в области D, решение уравнения (1) из класса $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \qquad u_x(0,y)=\varphi_2(y), \qquad 0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u(x,0)+\int_0^h T(x,y)\ u(x,y)\ dy=\psi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{3}$$

где: $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $T(x,y)$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Сделаем следующие предположения относительно заданных функций:

1) $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \in C^1\left[0,h\right],\ \psi(x)\in C^2\left[0,l\right];$

2) $T(x,y)\in C^1(\overline{D}),\ T_{xx}(x,y)\in C(\overline{D}),$

$max\left\{max\left|T\right|, max\left|T_x\right|, max\left|T_y\right|, max\left|T_{xx}\right|\right\}\leq T_0;$

3) $F(x,y,u,p,q,r,s)\in C\left(D\times R^5\right),\qquad max\left|F(x,y,u,p,q,r,s)\right|\leq H,$

R^5 – пятимерное пространство переменных $(u,p,q,r,s);$

4) $\left|F(x,y,u,p,q,r,s)-F(x,y,\overline{u},\overline{p},\overline{q},\overline{r},\overline{s})\right|\leq L(\left|u-\overline{u}\right|+$

$+\left|p-\overline{p}\right|+\left|q-\overline{q}\right|+\left|r-\overline{r}\right|+\left|s-\overline{s}\right|);$

5) $\varphi_1(0)+\int\limits_0^h T(0,y)\ \varphi_1(y)\ dy=\psi(0).$

Нетрудно заметить, что задача (1) – (3) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)-\int\limits_0^h T(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y (x-\xi)F(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta, \tag{4}$$

где: $\Phi_0(x,y)=\psi(x)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0)+x\varphi_2(y)-x\varphi_2(0).$ Дифференцируя (4), имеем

$$u_x\left(x,y\right)=\Phi_{0x}\left(x,y\right)-\int\limits_0^h T_x\left(x,\eta\right)u\left(x,\eta\right)d\eta-\int\limits_0^h T\left(x,\eta\right)u_x\left(x,\eta\right)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y F\left(\xi,\eta,u\left(\xi,\eta\right),u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta}\right)d\eta, \tag{5}$$

$$u_y\left(x,y\right)=\Phi_{0y}\left(x,y\right)+\int\limits_0^x\left(x-\xi\right)F\left(\xi,y,u\left(\xi,y\right),u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y}\right)d\xi, \tag{6}$$

$$u_{xx}(x,y)=\Phi_{0xx}(x,y)-\int_0^h T_{xx}(x,\eta)u(x,y)d\eta-2\int_0^h T_x(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^h T(x,\eta)u_{xx}(x,\eta)d\eta+\int_0^y F\left(x,\eta,u(x,\eta),u_x,u_\eta,u_{xx},u_{x\eta}\right)d\eta, \qquad (7)$$

$$u_{xy}(x,y)=\Phi_{0xy}(x,y)+\int_0^x F\left(\xi,y,u(\xi,y),u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y}\right)d\xi. \qquad (8)$$

Система уравнений (4) – (8) является замкнутой системой интегральных уравнений второго рода. Покажем, что для этой системы уравнений в области D имеет место принцип сжатых отображений.

Введем вектор-функцию

$$g(x,y)=\left(g_1(x,y),g_2(x,y),g_3(x,y),g_4(x,y),g_5(x,y)\right),$$

где: $g_1(x,y)=u(x,y),g_2(x,y)=u_x(x,y),g_3(x,y)=u_y(x,y),$
$g_4(x,y)=u_{xx}(x,y),g_5(x,y)=u_{xy}(x,y),$ и оператор А, определенный на множестве функций $g(x,y)\in C(\overline{D})$ и имеющий вид $\mathrm{A}=\left(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3,\mathrm{A}_4,\mathrm{A}_5\right)$:

$$\mathrm{A}_1 g=g_{01}(x,y)-\int_0^h T(x,\eta)g_1(x,\eta)d\eta+\int_0^x d\xi\int_0^y (x-\xi)F\left(\xi,\eta,g_1(\xi,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\eta,$$

$$\mathrm{A}_2 g=g_{02}(x,y)-\int_0^h T_x(x,\eta)g_1(x,\eta)d\eta-\int_0^h T(x,\eta)g_2(x,\eta)d\eta+ \qquad (9)$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y F\left(\xi,\eta,g_1(\xi,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\eta,$$

$$\mathrm{A}_3 g=g_{03}(x,y)+\int_0^x (x-\xi)F\left(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5\right)d\xi,$$

$$A_4 g = g_{04}(x,y) - \int_0^h T_{xx}(x,\eta) g_1(x,\eta) d\eta - 2\int_0^h T_x(x,\eta) g_2(x,\eta) d\eta - \int_0^h T(x,\eta) g_4(x,\eta) d\eta +$$

$$+\int_0^y F(x,\eta,g_1(x,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5) d\eta,$$

$$A_5 g = g_{05}(x,y) + \int_0^x F(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5) d\xi,$$

где: $g_{01} = \Phi_0(x,y), g_{02} = \Phi_{0x}(x,y), g_{03} = \Phi_{0y}(x,y), g_{04} = \Phi_{0xx}(x,y)$, $g_{05} = \Phi_{0xy}(x,y)$ – компоненты вектор-функции $g_0(x,y) = (g_{01}, g_{02}, g_{03,} g_{04}, g_{05})$. Тогда система уравнений (4) – (8) запишется в виде одного векторного равенства

$$g = Ag \tag{10}$$

Пусть оператор А осуществляет сжатое отображение шара $S(g_o, M) = \{g : \|g - g_o\| \le M\}$ в себя, где M – некоторое заданное число.

Норму g определим равенством $\|g\| = \max\limits_{1\le i\le 5} \max\limits_{(x,y)\in\bar{D}} |g_i(x,y)|$. Для элементов g, принадлежащих шару $S(g_0, M)$, имеет место оценка $\|g\| \le \|g_0\| + M = K$.

Пусть $g \in S(g_0, M)$. Тогда $Ag \in C(D)$ и, кроме того, для всех $(x,y) \in \bar{D}$ справедливы неравенства

$$|A_1 g - g_{01}| \le T_0 hK + \frac{1}{2} hl^2 H \le T_0 dK + \frac{1}{2} Hd^3,\ d = \max\{l,h\},$$
$$|A_2 g - g_{02}| \le 2T_0 hK \le hlH \le 2T_2 Kd + Hd^2, |A_5 g - g_{05}| \le lH \le dH,$$
$$|A_3 g - g_{03}| \le \frac{1}{2} l^2 H \le d^2 H, |A_4 g - g_{04}| \le 4T_0 hK + hH \le 4T_0 Kd + Hh.$$

Отсюда следует, что если

$$d \le d_1^* = \min\left\{ \frac{M}{4T_0 K + H}, \frac{M}{T_0 K + \sqrt{T_0^2 K^2 + MH}}, d_1 \right\}, \tag{11}$$

где: d_1 – положительный корень уравнения $\frac{1}{2}Hd^3 + T_0Kd - M = 0$, то $\forall g \in S(g_0, M)$: $\|Ag - g_0\| \le M$, т. е. $Ag \in S(g_0, M)$. Это означает, что при выполнении условия (11) оператор А отображает шар $S(g_0, M)$ в себя. Пусть $\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M)$. Тогда

$$\left|A_1 g^{(1)} - A_1 g^{(2)}\right| \le \left(T_0 h + \frac{5}{2} l^2 hL\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le \left(T_0 d + \frac{5}{2} Ld^3\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_2 g^{(1)} - A_2 g^{(2)}\right| \le \left(2T_0 h + 5lhL\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le \left(2T_0 d + 5Ld^2\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_3 g^{(1)} - A_3 g^{(2)}\right| \le \frac{5}{2} l^2 L\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le 5Ld^2\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_4 g^{(1)} - A_4 g^{(2)}\right| \le \left(4T_0 h + 5Lh\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le \left(4T_0 d + 5Ld\right)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

$$\left|A_5 g^{(1)} - A_5 g^{(2)}\right| \le 5lL\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\| \le 5Ld^2\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|.$$

Отсюда заключаем, что если

$$d < d_2^* = \min\left\{\frac{1}{4T_0 + 5L}, \frac{1}{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 5L}}, d_2\right\}, \tag{12}$$

где: d_2 – положительный корень уравнения $\frac{5}{2}Ld^3 + T_0 d - 1 = 0$,

то

$$\left\|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\right\| \le \frac{d}{d_2^*}\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|. \tag{13}$$

Следовательно, при любом $d < d_2^*$ оператор А в силу (12), (13) осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. Тогда в силу теоремы Банаха в шаре $S(g_0, M)$ существует и притом только одна неподвижная точка отображения, т. е. существует только одно решение уравнения (10).

Решая систему уравнений (4) – (8) методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области

$D^* = \{(x,y) : 0 < x < d^*, 0 < y < d^*\}$ функции $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}$, где $d^* = \min\{d_1^*, d_2^*\}$, а d_1^*, d_2^* определены по формулам (11), (12) соответственно.

Теорема. Если выполняются условия 1) – 5) и (11), (12), то в области D^* существует единственное решение задачи 1 принадлежащее классу $C(\overline{D^*}) \cap C^{2+1}(\overline{D^*})$.

Аналогично исследуется задача 2.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 1, если вместо второго условия (2) берется условие

$$u(l,y) = \varphi_2(y),\ \ 0 \le y \le h.$$

Список литературы:

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185. – № 4. – С. 739–740.
2. Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Украинск. матем. журнал. – 1990. – Т. 42. – № 1. – С. 132–135.
3. Напсо А.Ф., Канчукоев В.З. Нелокальная задача с внутренним условием для нагруженного псевдопараболического уравнения // Владикавказский математический журнал. – 2002. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 44–49.
4. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. V. – № 1. – С. 44–59.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
6. Керефов А.А., Плотникова Е.В. Нелокальные задачи для одного уравнения третьего порядка. – Владикавказский математический журнал. – 2002. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 51–60.
7. Пулькина Л.С., Климова Е.Н. Нелокальная краевая задача для нелинейного уравнения колебаний струны // Мат. моделирование м краевые задачи: Тр. третьей всерос. научн. конф. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 192–195.

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ
Байсубанов М.