ISSN 2224-0179

Научно-практический журнал

ПРИВОЛЖСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

ИЦНП
5 лет

№ 10 (62) – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ И АРХЕОЛОГИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Копия верна
Ученый секретарь
Байсубанов М.

УДК 517.956.6

А.С. Сопуев
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ошский государственный университет,
г. Ош, Кыргызская Республика
E-mail: sopuev@mail.ru

У.Д. Молдояров
ст. преподаватель,
кафедра информационных технологий
и автоматизированных систем,
Ошский государственный университет,
г. Ош, Кыргызская Республика
E-mail: ular_osh@list.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Методом функции Римана и интегральных уравнений доказано существование и единственность решения краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова: краевая задача, функция Римана, интегральные уравнение, единственность решения, существование решения.

A.S. Sopuev, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
U.D. Moldoiarov, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

BOUNDARY PROBLEMS FOR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Abstract. The function of the method of the Riemann integral equations are proved the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for partial differential equations of the third order.

Keywords: boundary value, Riemann`s function, Integral equation, uniqueness of solution, the existence of solutions.

1. Постановка задачи. В области $D=\{(x,y): 0<x<\ell, -h_2<y<h_1\}$ $(\ell, h_1, h_2>0)$ рассмотрим краевые задачи для уравнений:

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} + a_1 u_{xx} + b_1 u_x + c_1 u_y + d_1 u = 0, \ (x,y) \in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} + a_2 u_{yy} + b_2 u_x + c_2 u_y + d_2 u = 0, \ (x,y) \in D_2, \tag{2}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i $(i=1,2)$ – заданные функции x и y, а $D_1 = D \,/\, (y>0)$, $D_2 = D \,/\, (y<0)$.

Уравнения (1) и (2) часто называются псевдопараболическими по характеру свойства решений [6; 7]. Частные случаи рассматриваемых уравнений встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [3].

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s \, (r=0,1,,\ldots,n; s=0,1,,\ldots,m)$. Пусть для коэффициентов уравнений (1) и (2) выполняются условия:

$$\begin{aligned} &a_1 \in C^{2+0}(D_1), b_1, c_1 \in C^{1+0}(D_1), d_1 \in C(D_1), \\ &a_2 \in C^{0+2}(D_2), b_2, c_2 \in C^{1+0}(D_2), d_2 \in C(D_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Задача 1. *Найти функции $u(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)]$, удовлетворяющие уравнениям (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно, краевым условиям:*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \ u(\ell,y) = \varphi_2(y), \ 0 \le y \le h_1, \tag{4}$$

$$u(0,y) = \chi(y), \ -h_2 \le y \le 0, \tag{5}$$

$$u(x,h_0) = \psi(x), \ 0 \le x \le \ell, \ -h_2 \le h_0 < 0 \tag{6}$$

и условиям сопряжения:

Копия верна
Ученый секретарь ОшГУ
Байсубанов М.

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \qquad (7)$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\chi(y),\psi(x)$ – заданные гладкие функции, h_0 – произвольное действительное число, причем

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^1[0,h_1],\ \chi(y)\in C^2[-h_2,0],\ \psi(x)\in C^2[0,\ell] \qquad (8)$$

$$\varphi_1(0)=\chi(0),\ \varphi_1'(0)=\chi'(0),\ \chi(h_0)=\psi(0). \qquad (9)$$

Уравнения (1) и (2) в совокупности с условиями сопряжения (7) является уравнением смешанного типа в области D [4].

Методом функции Римана изучены краевые задачи для уравнения (1) в области D_1 [5; 1].

Введем следующие обозначения:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=t(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=n(x),\ 0\ £\ x\ £\ l, \qquad (10)$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

2. Представление решения задачи 1 в области D_2. Для получения представления решения задачи 1 в области D_2 рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2. *Найти в области* D_2 *функцию* $u(x,y)\in C^1(\bar{D}_2)\cap C^{1+2}(D_2)$, *удовлетворяющую уравнению* (2) *в области* D_2 *и краевым условиям*

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell,\ \ u(0,y)=\chi(y),\ -h_2\le y\le 0.$$

Для решения задачи 2 будем использовать метод функции Римана [5]. Имеет место тождество:

$$\begin{aligned}&\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)=(-\upsilon_\eta u_\eta+b_2\upsilon u)_\xi-\\&-(-\upsilon u_{\xi\eta}-\upsilon_{\xi\eta}u+(a_2\upsilon)_\eta u-a_2\upsilon u_\eta-c_2\upsilon u)_\eta,\end{aligned} \qquad (11)$$

где $L_2^*(\upsilon)=-\upsilon_{\xi\eta\eta}+(a_2\upsilon)_{\eta\eta}-(b_2\upsilon)_\xi-(c_2\upsilon)_\eta+d_2\upsilon$ – сопряженный оператор оператору $L_2(u)$. Интегрируя тождество (11) по области $D_2^*=\{(x,y):0<\xi<x,y<\eta<0\}$ и учитывая формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned}&\iint_{D_2^*}[\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)]d\xi d\eta=\int_{\partial D_2^*}(-\upsilon u_{\xi\eta}-\upsilon_{\xi\eta}u+(a_2\upsilon)_\eta u-\\&-a_2\upsilon u_\eta-c_2\upsilon u)d\xi+(-\upsilon_\eta u_\eta+b_2\upsilon u)d\eta.\end{aligned} \qquad (12)$$

Пусть функция $\upsilon(\xi,\eta)=\upsilon(x,y;\xi,\eta)$, называемая функцией Римана, является решением сопряженного уравнения $L_2^*(\upsilon)=0$, удовлетворяющая условиям:

$$\upsilon(x,y;\xi,y)=0,\ 0\le\xi\le x, \qquad (13)$$

$$\upsilon_\eta(x,y;\xi,y)=\exp\left(-\int_\xi^x a_2(s,y)ds\right),\ 0\le\xi\le x, \qquad (14)$$

$$\upsilon(x,y;x,\eta)=\omega(x,y;\eta),\ y\le\eta\le 0, \qquad (15)$$

где $\omega(x,y;\eta)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned}&\upsilon_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)+b_2(x,\eta)\upsilon(x,y;x,\eta)=0,\ y<\eta<0,\\&\upsilon(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \upsilon_\eta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=1.\end{aligned} \qquad (16)$$

Тогда из (12) с учетом (13)–(15) получим, что решение задачи 2 представимо в виде:

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\upsilon_\eta(x,y;x,0)\tau(x)-\upsilon(x,y;x,0)\nu(x)+\\&+\int_0^x A(x,y;\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x B(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi_1(x,y),\end{aligned} \qquad (17)$$

где

$$A(x,y;\xi) = \upsilon_{\xi}(x,y;\xi,0)\text{-}a_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$$

$$B(x,y;\xi) = -\upsilon_{\eta\xi}(x,y;\xi,0) + a_{2\eta}(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0) + a_2(\xi,0)\upsilon_{\eta}(x,y;\xi,0)\text{-}c_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$$

$$\Phi_1(x,y) = \upsilon(x,y;0,0)\varphi_2'(0) + \int_0^y [\upsilon_{\eta}(x,y;0,\eta)\chi'(\eta) - b_2(0,\eta)\upsilon(x,y;\xi,0)\chi(\eta)]d\eta.$$

Имеет место **Лемма 1.**

Если

$$\forall(x,y) \in \bar{D}_2 : b_2(x,y) \le 0, \tag{18}$$

тогда выполняются неравенства

$$\forall(x,y) \in \bar{D}_2 \wedge \forall\eta \in [-h_2,0] : \upsilon(x,y;x,\eta) \ge \eta - y,\ \upsilon_{\eta}(x,y;x,\eta) \ge 1. \tag{19}$$

Доказательство. Нетрудно доказать, что решение задачи (16) эквивалентно решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\upsilon(x,y;x,\eta) = \eta - y + \int_y^{\eta} [-(\eta - \beta)b_2(x,\beta)]\upsilon(x,y;x,\beta)d\beta,\ y \le \eta \le 0.$$

Если выполняется условие (18), то методом итерированных ядер убеждаемся в том, что $\forall(x,y) \in \bar{D}_2 \wedge \forall\eta \in [-h_2,0] : \upsilon(x,y;x,\eta) \ge \eta - y$.

Далее, вычисляя производную по η, имеем:

$$\upsilon_{\eta}(x,y;x,\eta) = 1 + \int_y^{\eta} [-b_2(x,t)]\upsilon(x,y;x,t)dt,\ y \le \eta \le 0,$$

из которого, как и выше, будем иметь, что $\forall(x,y) \in \bar{D} \wedge \forall\eta \in [-h_2,0]$: $\upsilon_{\eta}(x,y;x,\eta) \ge 1$. Отсюда, в частности, получим

$$\upsilon_{\eta}(x,h_0;x,\eta) \ge 1. \tag{20}$$

Лемма 1 доказана.

3. Функциональное соотношение, полученное из области D_2. Используя условие (6) из (17), имеем

$$\begin{gathered} u_h(x,h_0;x,0)t(x) - u(x,h_0;x,0)n(x) + \\ + \int_0^x A(x,h_0;x)n(x)dx + \int_0^x B(x,h_0;x)t(x)dx + F_1(x,h_0) = y(x). \end{gathered} \tag{21}$$

Учитывая неравенство (20) и разделив обе части уравнения на $u_h(x,h_0;x,0)$, из (21) получим соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2:

$$t(x) = C(x)n(x) + \int_0^x A_1(x,x)n(x)dx + \int_0^x B_1(x,x))t(x)dx + F_2(x), \tag{22}$$

где

$$C(x) = \frac{u(x,h_0;x,0)}{u_h(x,h_0;x,0)},\ A_1(x,x) = -\frac{A(x,h_0;x)}{u_h(x,h_0;x,0)},$$

$$B_1(x,x) = -\frac{B(x,h_0;x)}{u_h(x,h_0;x,0)},\ A_1(x,x) = \frac{y(x) - F_1(x,h_0)}{u_h(x,h_0;x,0)}.$$

4. Функциональное соотношение, полученное из области D_1. Из постановки задачи 1 следует, что производные функции $u(x,y)$, входящие в уравнение (1), непрерывны в области D_1 вплоть до линии $y = 0$. Поэтому, переходя к пределу при $y \to +0$ в уравнении (1) и с учетом обозначений (10), будем иметь

$$v''(x)+a_1(x,0)\tau''(x)+b_1(x,0)\tau'(x)+c_1(x,0)v(x)+ \\ +d_1(x,0)\tau(x)=0,\ 0<x<\ell. \tag{23}$$

Уравнение (23) перепишем в виде

$$v''(x)+c_1(x,0)v(x)=F_1(x), \tag{24}$$

где $F_1(x)=-a_1(x,0)\tau''(x)-b_1(x,0)\tau'(x)-d_1(x,0)\tau(x)$. Отметим, что для $v(x)$ выполняются следующие краевые условия:

$$v(0)=\varphi_1'(0),\ v(\ell)=\varphi_2'(0). \tag{25}$$

Таким образом, для определения $v(x)$ приходим к задаче (24), (25).

Лемма 2. *Если*

$$\forall x\in[0,\ell]: c_1(x,0)\le 0, \tag{26}$$

тогда однородная краевая задача (24), (25) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу:

$$v''(x)+c_1(x,0)v(x)=0,\ v(0)=0,\ v(\ell)=0. \tag{27}$$

Умножая уравнение на $v(x)$, получим тождество

$$[v(x)v'(x)]'-[v'(x)]^2+c_1(x,0)[v(x)]^2=0.$$

Интегрируя его в пределах $0\le x\le\ell$, имеем

$$\int_0^\ell\{[v'(x)]^2+c_1(x,0)[v(x)]^2\}dx=0.$$

Отсюда заключаем, что $\forall x\in[0,\ell]: v(x)\equiv 0$.

Условие (26) имеет существенное значение, так как невыполнение этого условия приведет к нарушению единственности решения. Например, если $c_1(x,0)=\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2>0, n=1,2,\ldots$, то однородная задача (27) имеет счетное множество нетривиальных решений вида $v_n(x)=C\sin\frac{\pi n}{\ell}x,\ C=const,\ n=1,2,\ldots$.

Лемма 2 доказана.

Если однородная задача имеет только тривиальное решение, то соответствующая неоднородная задача (24), (25) имеет единственное решение, представимое через функции Грина $G(x,\xi)$ [7]:

$$v(x)=\int_0^\ell G(x,t)F_1(t)dt+\alpha_1(x), \tag{28}$$

где $\alpha_1(x)=\alpha(x)-\int_0^\ell G(x,t)\alpha(t)dt,\ \alpha(x)=\varphi_1(0)+\frac{x}{\ell}[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)]$.

Далее, подставляя значение $F_1(x)$ в (28) и осуществляя интегрирование по частям, получим соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, полученное из области D_1:

$$v(x)=\int_0^\ell K_1(x,t)\tau(t)dt+\beta(x), \tag{29}$$

где

$$K_1(x,t)=-[G(x,t)a_1(t,0)]_{tt}+[G(x,t)b_1(t,0)]_t-G(x,t)d_1(t,0),$$
$$\beta(x)=\alpha_1(x)+G_t(x,\ell)a_1(\ell,0)\varphi_2(0)-G_t(x,0)a_1(0,0)\varphi_1(0).$$

5. Сведение задачи 1 к интегральному уравнению. Исключая $\nu(x)$ из (29) и (22), получим интегральное уравнение

$$\tau(x)=\int_0^x B_1(x,t)\tau(t)dt+\int_0^l C_1(x,t)\tau(t)dt+\Phi_3(x), \tag{30}$$

где
$$C_1(x)=C(x)K_1(x,t)+\int_0^x A_1(x,\xi)K_1(\xi,t)d\xi,$$

$$\Phi_3(x)=C(x)\beta(x)+\int_0^x A_1(x,\xi)\beta(\xi)d\xi+\Phi_2(x).$$

Отсюда, обращая вольтерровскую часть уравнения (30), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\tau(x)=\int_0^l K(x,t)\tau(t)dt+\Phi(x), \tag{31}$$

где $K(x,t)=C_1(x,t)+\int_0^x R(x,\xi)C_1(\xi,t)d\xi$, $\Phi(x)=\Phi_3(x)+\int_0^x R(x,\xi)\Phi_3(\xi)d\xi$.

Из (3) и (8) заключаем, что $\forall(x,t)\in\bar{D}_2:K(x,t)\in C(\bar{D}_2)$, $\Phi(t)\in C[0,\ell]$.

Если

$$\|K\|\ell<1, \tag{32}$$

где $\|K\|=\max\limits_{0<x,t<\ell}|K(x,t)|$, то уравнение (31) имеет единственное решение.

6. Решение задачи 1 в области D_1. После определения $\tau(x)$ из (31) решение задачи 1 в области D_1 определяется как решение следующей вспомогательной задачи.

Задача 3. *Найти в области D_1 функцию $u(x,y)\in C^1(\bar{D}_1)\cap C^{2+1}(D_1)$, удовлетворяющую уравнению* (1) *в D_1, краевым условиям* (4) *и начальному условию:*

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell. \tag{33}$$

Пусть

$$u_x(0,y)=g(y),\ 0\le y\le h_1, \tag{34}$$

где $g(y)$ – пока неизвестная функция. Тогда решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (33), (34) и $u(0,y)=\varphi_1(y)$, $0\le y\le h_1$, представимо в виде

$$u(x,y)=-\upsilon_1(x,y;0,y)g(y)+\int_0^y H_1(x,y;\eta)g(\eta)d\eta+T_1(x,y), \tag{35}$$

где
$$H_1(x,y;\eta)=\upsilon_{1\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\upsilon_1(x,y;0,\eta),$$
$$T_1(x,y)=\upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(y)+\upsilon_1(0,y;0,0)\tau'(0)-$$
$$-\int_0^y[\upsilon_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)\upsilon_1(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)]+$$
$$+b_1(0,\eta)\upsilon_1(x,y;0,\eta)]\varphi_1(y)d\eta+\int_0^x[\upsilon_{1\xi}(x,y;0,\eta)\tau'(\xi)-$$
$$-c_1(\xi,0)\upsilon_1(x,y;\xi,0)\tau(\xi)]-\int_0^x d\xi\int_0^y \upsilon_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Здесь $\upsilon_1(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана уравнения (1), определяемая как решение следующей задачи [6]:

$$L_1^*(\upsilon_1) = -\upsilon_{1\xi\xi\eta} + (a_1\upsilon_1)_{\xi\xi} - (b_1\upsilon_1)_\xi - (c_1\upsilon_1)_\eta + e_1\upsilon_1 = 0,$$
$$\upsilon_1(x,y;x,\eta) = 0,\ 0 \le \eta \le y,$$
$$\upsilon_{1\xi}(x,y;x,\eta) = \exp\left(-\int_\eta^y a_1(x,t)dt\right),\ 0 \le \eta \le y,$$
$$\upsilon_1(x,y;\xi,y) = \omega(x,y;\xi),\ 0 \le \xi \le x,$$

где $\omega(x,y;\xi)$ – решение задачи:

$$\upsilon_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y) + c_1(\xi,y)\upsilon_1(x,y;\xi,y) = 0,\ 0 < \xi < x,$$
$$\upsilon_1(x,y;x,y) = 0,\ \upsilon_{1\xi}(x,y;x,y) = 1. \quad (36)$$

Лемма 3. *Если*

$$\forall(x,y) \in \bar{D}_1 : c_1(x,y) \le 0, \quad (37)$$

тогда имеет место неравенство

$$\forall(x,y) \in \bar{D}_1 \wedge \forall\xi \in [0,\ell] : \upsilon_1(x,y;\xi,y) \le \xi - x. \quad (38)$$

Доказательство леммы 3 осуществляется эквивалентным сведением задачи (36) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\upsilon_1(x,y;\xi,y) = \xi - x + \int_\xi^x [-(t-\xi)]c_1(t,y)\upsilon_1(x,y;t,y)dt,\ 0 \le \xi \le x. \quad (39)$$

Отсюда, как и в лемме 2, с учетом неравенства (37) из (39) получаем неравенство (38). В частности, из неравенства (38) имеем

$$\upsilon_1(\ell,y;0,y) \le -\ell. \quad (40)$$

Полагая $x = \ell$ в (35), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$g(y) = \int_0^y H(y,\eta)g(\eta)d\eta + T(y), \quad (41)$$

где $H(y,\eta) = \dfrac{H_1(\ell,\eta)}{\upsilon_1(\ell,y;0,y)}$, $T(y) = \dfrac{\varphi_2(y) - T_1(\ell,\eta)}{\upsilon_1(\ell,y;0,y)}$, допускающее единственное непрерывное решение. Определив $g(y)$ из (41) и подставляя ее значение в (35), получим решение задачи 1 в области D_1.

Таким образом, имеет место **Теорема 1**.

Если выполняются условия (3), (8), (9), (18), (26), (32) и (37), то решение задачи 1 существует и единственно.

Список литературы:

1. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. –296 с.

5. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

6. Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. – 1972. – № 12. – P. 559–565.

7. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63, № 1. – P. 77–81.

Копия верна
Ученый секретарь ОшГУ
Байсубанов М.