Национальная Академия наук Кыргызской Республики

ISSN 0130-6553

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ВЫПУСК 40

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ
Байсубанов М.

Бишкек "Илим" 2009

А. СОПУЕВ, У.Д. МОЛДОЯРОВ (г. Ош)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

1. Постановка задачи. В работе [1] показано, что когда один из корней характеристического уравнения кратный, а другой - простой, общее линейное уравнение в частных производных третьего порядка может быть приведено к следующему каноническому виду

$$u_{xxy} + \alpha u_{xx} + \beta u_{xy} + \gamma u_{yy} + a u_x + b u_y + cu = f(x,y), \qquad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, f$ - заданные функции, зависящие от x и y.

Нетрудно заметить, что корректность постановки краевых задач для уравнения (1) существенно зависит от коэффициента γ. В случае, когда $\gamma \equiv 0$ задача Гурса и основные краевые задачи для уравнения (1) изучены в [2]. В случае, когда $\gamma \equiv -1$, основные краевые задачи рассмотрены в [3].

Отметим также, что заменой $u(x,y) = exp(-\int\limits_0^y \alpha(x,t)dt)z(x,y)$, где $z(x,y)$ - новая неизвестная функция, можно избавиться от слагаемого αu_{xx} в уравнении (1).

В работе рассмотрим случай, когда $\gamma = -\frac{1}{x}$, т.е. рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} - \frac{1}{x}u_{yy} + \beta u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x,y). \qquad (2)$$

В области $D = \{(x,y): 0 < x < \ell,\ 0 < y < h\}$ для уравнения (2) изучается

ЗАДАЧА 1. Найти функции $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D),\ u_{xxy} \in C(D)$,

удовлетворяющие в области D уравнения (2), краевым и начальным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \qquad (3)$$

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_y(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \ell, \qquad (4)$$

где $\beta, a, b, c, f, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x), \nu(x)$ - заданные функции, причем $\beta(x,y), a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y) \in C(\overline{D})$,

$$\varphi_i(y) \in C^2[0,h](i = 1,2),\ \tau(x) \in C^2[0,\ell],\ \nu(x) \in C^1[0,\ell],\ f(x,y) \in C(\overline{D}), \qquad (5)$$

$$\varphi_1(0) = \tau(0),\ \varphi_2(0) = \tau(\ell),\ \varphi_1'(0) = \nu(0),\ \varphi_2'(0) = \nu(\ell).$$

2. Сведение задачи 1 к первой краевой задаче. Введем обозначение

$$u_y(x,y) = z(x,y) \qquad (6)$$

где $z(x,y)$ - новая неизвестная функция. Тогда из (2) имеем

$$L(u) \equiv z_{xx} - \frac{1}{x}z_y = F, \qquad (7)$$

где $F = -\beta z_x - au_x - bz - cu + f(x,y)$.

Копия верно
Ученый секретарь
ОшГУ Байсуранов М

Из краевых условий (3)-(4) получим

$$z(0,y)=\varphi_1'(y),\ z(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ 0\le y\le h,$$
$$z(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{8}$$

В работе [5] построено фундаментальное решение уравнения

$$z_{xx}-\frac{1}{x}z_y=0, \tag{9}$$

представимое в виде

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2}\,z\,I_1(z)\,e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}},\ z=2\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{y-\eta}, \tag{10}$$

где $I_1(z)$ - функция Бесселя первого рода мнимого аргумента и показано, что решение уравнения (9), удовлетворяющее краевым условиям

$$z(0,y)=\varphi(y),\ 0\le y<\infty,\ z(x,0)=\psi(x),\ 0\le x<\infty,$$

имеет вид:

$$z(x,y)=\int_0^y\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\vartheta(x,y;\xi,0)\psi(\xi)d\xi .$$

3. Построение функции Грина. Для решения задачи 1, построим функцию Грина для уравнения (9) с использованием функции (10). С этой целью интегрируем тождество

$$\vartheta L(z)-zL^*(\vartheta)=(\vartheta z_\xi-\vartheta_\xi z)_\xi-(\frac{1}{\xi}\vartheta z)_\eta,\ L^*(\vartheta)\equiv\vartheta_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi}\vartheta_\eta$$

по области $D^*=\{(\xi,\eta):\varepsilon<\xi<\ell,\ 0<\eta<y-\delta\}$, где ε и δ - достаточно малые положительные числа:

$$\int_\varepsilon^\ell\int_0^{y-\delta}[\vartheta L(z)-zL^*(\vartheta)]d\xi d\eta=\int_{\partial D^*}\frac{1}{\xi}\vartheta z\,d\xi+(\vartheta z_\xi-\vartheta_\xi z)d\eta \tag{11}$$

Используя асимптотическое поведение функции Бесселя [6]

$$I_\nu(z)=\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}[1+O(z^{-1})],\ z\to\infty \tag{12}$$

имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\varepsilon^\ell\vartheta(x,y;\xi,y-\delta)z(\xi,y-\delta)d\xi=z(x,y).$$

Тогда, устремляя $\varepsilon\to 0,\ \delta\to 0$, из (11) получаем

$$\begin{aligned}z(x,y)&=\int_0^\ell\frac{1}{\xi}\vartheta(x,y;\xi,0)z(\xi,0)d\xi+\int_0^y\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)z(0,\eta)d\eta+\\&+\int_0^y[\vartheta(x,y;\ell,\eta)z_\xi(\ell,\eta)-\vartheta_\xi(x,y;\ell,\eta)z(\ell,\eta)]d\eta-\int_0^\ell d\xi\int_0^y\vartheta(x,y,\xi,\eta)F\,d\eta\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть теперь $\vartheta(\xi,\eta)=w(x,y;\xi,\eta)$ - регулярное решение сопряженного уравнения

$$L^*(w) \equiv w_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} w_\eta = 0, \tag{14}$$

удовлетворяющее условию

$$\vartheta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=y} = w(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\eta=y} = 0. \tag{15}$$

Тогда, проделав такие же вычисления, как и при получении равенства (13), имеем

$$\begin{gathered} 0 = \int_0^\ell \frac{1}{\xi} w(x,y;\xi,0) z(\xi,0)d\xi + \int_0^y [w_\xi(x,y;0,\eta) z(0,\eta) - w(x,y;\ell,\eta) z_\xi(\ell,\eta)]d\eta + \\ + \int_0^y [w(x,y;\ell,\eta) z_\xi(\ell,\eta) - w_\xi(x,y;\ell,\eta) z(\ell,\eta)]d\eta - \int_0^\ell d\xi \int_0^y w(x,y;\xi,\eta) F\, d\eta. \end{gathered} \tag{16}$$

Вычитая (16) из (13), получим

$$z(x,y) = \int_0^\ell \frac{1}{\xi} G(x,y;\xi,0) z(\xi,0)d\xi + \int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta) z(0,\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^y [G(x,y;\ell,\eta) z_\xi(\ell,\eta) - G_\xi(x,y;\ell,\eta) z(\ell,\eta)]d\eta - \int_0^\ell d\xi \int_0^y G(x,y;\xi,\eta) F\, d\eta.$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \vartheta(x,y;\xi,\eta) - w(x,y;\xi,\eta) \text{ -} \tag{17}$$

функция Грина.

Функцию $w(x,y;\xi,\eta)$ выберем так, чтобы выполнялись условия (15) и

$$w(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\xi=0} = 0, \quad w(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\xi=\ell} = \vartheta(x,y;\ell,\eta). \tag{18}$$

Тогда решение задачи (7)-(8) представимо в виде:

$$\begin{gathered} z(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2'(\eta)]d\eta + \\ + \int_0^\ell \frac{1}{\xi} G(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi - \int_0^\ell d\xi \int_0^y G(x,y;\xi,\eta) F\, d\eta. \end{gathered} \tag{19}$$

Функция $w(x,y;\xi,\eta)$ определяется как решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (15) и (18). Функцию $w(x,y;\xi,\eta)$ будем искать в виде суммы потенциалов двойного слоя [7]:

$$w(x,y;\xi,\eta) = W[\sigma_1](\xi,\eta) + W[\sigma_2](\xi,\eta). \tag{20}$$

где $W[\sigma_1](\xi,\eta) = \int_\eta^y \vartheta_x(0,t;\xi,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt$, $W[\sigma_2](\xi,\eta) = \int_\eta^y \vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta) \times$ $\times \sigma_2(t;x,y)dt$, а $\sigma_1(t;x,y)$, $\sigma_2(t;x,y)$ - неизвестные плотности. Пусть $AA_1 = \{(\xi,\eta) : \xi = 0, 0 < \eta < h\}$, $BB_1 = \{(\xi,\eta) : \xi = \ell, 0 < \eta < h\}$.

ЛЕММА 1. Если $\sigma_1(\eta;x,y) \in C[0,h]$, $\forall (x,y) \in D$, то имеет место предельное соотношение

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} W[\sigma_1](\xi,\eta)=\sigma_1(\eta_0;x,y), \text{ при } (\xi,\eta)\in D,\ (\xi_0,\eta_0)\in AA_1. \qquad (21)$$

Доказательство. Так как $\vartheta_x(0,t;\xi,\eta)=\dfrac{\xi}{(t-\eta)^2}exp(-\dfrac{\xi}{t-\eta})$, то

$W[\sigma_1](\xi,\eta)=\int\limits_{\eta}^{y}\dfrac{\xi}{(t-\eta)^2}exp(-\dfrac{\xi}{t-\eta})\sigma_1(t;x,y)dt$. Введя переменную $\dfrac{\xi}{t-\eta}=s$,

будем иметь $W[\sigma_1](\xi,\eta)=\int\limits_{\frac{\xi}{y-\eta}}^{+\infty}e^{-s}\sigma_1(\eta+\dfrac{\xi}{s};x,y)ds$. Отсюда, переходя к

пределу при $(\xi,\eta)\to(+0,\eta_0)$, получим соотношение (21).

ЛЕММА 2. Если $\sigma_2(\eta;x,y)\in C[0,h],\ \forall(x,y)\in D$, то имеет место предельное соотношение

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} W[\sigma_2](\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\sigma_2(\eta_0;x,y)+\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0), \qquad (22)$$

при $(\xi,\eta)\in D,\ (\xi_0,\eta_0)\in BB_1$, где $\overline{W}[\sigma_2](\xi_0,\eta_0)=\int\limits_{\eta}^{y}\vartheta_x(\ell,t;\xi_0,\eta_0)\sigma_2(t;x,y)dt$ - прямое значение потенциала двойного слоя $W[\sigma_2](\xi,\eta)$ на отрезке BB_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\vartheta_x(x,y;\xi,\eta)$ в виде:

$$\vartheta_x(x,y;\xi,\eta)=-\frac{\xi^{1/2}}{(y-\eta)^2}\{(x^{1/2}-\xi^{1/2})I_0(z)+x^{1/2}[I_1(z)-I_0(z)]\}exp(-\frac{x+\xi}{y-\eta}).$$

Тогда

$$W[\sigma_2](\xi,\eta)=\int\limits_{\eta}^{y}\vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt=\int\limits_{\eta}^{y}H_1(t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt+$$
$$+\int\limits_{\eta}^{y}H_2(t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt=A(x,y;\xi,\eta)+B(x,y;\xi,\eta), \qquad (23)$$

где

$$H_1(t;\xi,\eta)=-\frac{\xi^{1/2}}{(t-\eta)^2}(\ell^{1/2}-\xi^{1/2})I_0(z)exp(-\frac{\ell+\xi}{t-\eta}),$$

$$H_2(t;\xi,\eta)=-\frac{\xi^{1/2}\ell^{1/2}}{(t-\eta)^2}[I_1(z)-I_0(z)]exp(-\frac{\ell+\xi}{t-\eta}).$$

Из (12) при $\nu=0$ будем иметь

$$I_0(z)=\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}[1+O(\frac{1}{z})] \text{ при } z\to+\infty.$$

Тогда

$$\lim_{\xi \to \ell - 0} A(x,y;\xi,\eta) = \lim_{\xi \to \ell - 0} \int_{\eta}^{y} H_1(t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt = -\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y). \qquad (24)$$

Если учесть оценку

$$|I_1(z) - I_0(z)| \le cz^{-3/2}e^z, \; 0 < z < +\infty,$$

то для $H_2(t;\xi,\eta)$ имеем оценку

$$|H_2(t;\xi,\eta)| \le \frac{N}{\xi^{1/4}(t-\eta)^{1/2}}, \; N = const > 0.$$

Тогда $B(x,y;\xi,\eta)$ является непрерывной функцией и имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\xi \to \ell - 0} B(x,y;\xi,\eta) = B(x,y;\ell,\eta). \qquad (25)$$

Если учесть, что $H_1(t;\ell,\eta) = 0$, то из (24) и (25) заключаем, что для $W[\sigma_2](\xi,\eta)$ справедлива формула скачка (22). Лемма 2 доказана.

Теперь воспользуясь формулами (21), (22) и условиям (18) для определения $w(x,y;\xi,\eta)$ получим систему интегральных уравнений

$$\sigma_1(\eta;x,y) = 0, \quad -\frac{1}{2}\sigma_2(\eta;x,y) + \int_{\eta}^{y} \vartheta_x(0,t;\ell,\eta)\sigma_1(t;x,y)dt +$$

$$+ \int_{\eta}^{y} H_2(t;\ell,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt = \vartheta(x,y;\ell,\eta).$$

Отсюда для $\sigma_2(\eta;x,y)$ будем иметь интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\sigma_2(\eta;x,y) - 2\int_{\eta}^{y} H_2(t;\ell,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt = -2\vartheta(x,y;\ell,\eta), \qquad (26)$$

допускающее единственное непрерывное решение. Таким образом, регулярная часть функции Грина представима в виде:

$$w(x,y;\xi,\eta) = W[\sigma_2](\xi,\eta) = \int_{\eta}^{y} \vartheta_x(\ell,t;\xi,\eta)\sigma_2(t;x,y)dt,$$

где $\sigma_2(\eta;x,y)$ определяется как решение уравнения (26).

4. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Подставляя значение F в (19), будем иметь

$$z(x,y) = z_0(x,y) + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^{y} K_1(x,y;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_\xi(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta) +$$
$$+ b(\xi,\eta)z(\xi,\eta) + c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]d\eta, \qquad (27)$$

где $K_1(x,y;\xi,\eta)=G(x,y;\xi,\eta)$, $z_0(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta)d\eta-$

$$-\int\limits_0^y [G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2'(\eta)]d\eta+\int\limits_0^\ell \frac{1}{\xi}G(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.$$

Дифференцируя (27) по x, получим

$$z_x(x,y)=z_{0x}(x,y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K_2(x,y;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_\xi(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta)+ \tag{28}$$

$$+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]d\eta,$$

где $K_2(x,y;\xi,\eta)=K_{1x}(x,y;\xi,\eta)$.

Интегрируя по y уравнение (27), имеем

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K_3(x,y;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_\xi(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta)+ \tag{29}$$

$$+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]d\eta,$$

где $u_0(x,y)=\tau(x)+\int\limits_0^y z(x,t)dt$, $K_3(x,y;\xi,\eta)=\int\limits_0^y K_1(x,t;\xi,\eta)dt$.

Дифференцируя по x (29), найдем

$$u_x(x,y)=u_{0x}(x,y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K_4(x,t;\xi,\eta)[\beta(\xi,\eta)z_\xi(\xi,\eta)+a(\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta)+ \tag{30}$$

$$+b(\xi,\eta)z(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)]d\eta,$$

где $K_4(x,y;\xi,\eta)=K_{3x}(x,y;\xi,\eta)$. Таким образом, относительно функций $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $z(x,y)$, $z_x(x,y)$ получаем замкнутую систему интегральных уравнений (27)-(30).

В силу свойств заданных функций заключаем, что ядра уравнений (27)-(30) имеют слабую особенность, и поэтому для указанной системы уравнений применим метод последовательных приближений.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия (5), то задача 1 имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734-1745.
2. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. Kepinski S. Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial j}{\partial t} = 0$ / Krakau Anz., 1905. – S. 198-205.
6. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 424 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. – 736 с.

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ
Байсубанов М.

Копия верна
Ученый секретарь
ОшГУ Байсубанов М.