

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет»



ISSN 1684-8519

ИЗВЕСТИЯ

ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Копия верна


Секретари

Байсубанов М.

Том 321, № 2, 2012



Математика и механика. Физика

ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ
г. Томск

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

- МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ФИЗИКА**
- Классификация Коши-Римана многомерных поверхностей в евклидовом пространстве
Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А.
- Свойства поверхностей Коши-Римана в многомерном евклидовом пространстве
Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А.
- Нелокальная задача с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка
Молдоярлов У.Д.
- Развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач
Зимин В.П.
- Анализ распределения усилий в зацеплении циклоидальной передачи с учетом погрешностей изготовления звеньев
Кобза Е.Е., Ефременков Е.А., Демидов В.Н.
- Синтез пространственной передачи с промежуточными телами качения с улучшенными качественными характеристиками
Черемнов А.В., Ан И-Кан, Ивкина О.П.
- Определение радиального биения ротора по сигналу с датчика вращения
Зайцев Е.С., Домненко А.И., Астафуров В.Г.
- Прогнозирование циклического ресурса деталей с макротрещинами термографическим методом
Куриленко Г.А.
- Влияние отражающей поверхности на радиационный баланс дисперсной среды
Горячев Б.В., Могильницкий С.Б.
- Пути модернизации канального исследовательского реактора ИВГ1.М
Прозорова И.В.
- Сильноточный импульсно-периодический ускоритель электронов прямого действия как средство стерилизации медицинских изделий однократного применения
Ростов В.В., Алексеенко П.И., Выходцев П.В., Штейнле А.В., Мазин В.И., Красножонов Е.П., Мушатоватова Л.С., Солодкова Т.В., Постников П.С., Кутанова К.В., Штейнле Л.А., Шатохин А.А.
- Получение высокообогащенного ¹³C в каскаде газовых центрифуг с использованием изотопного обмена в диоксиде углерода
Орлов А.А., Совач В.П.
- Возможности лазерных методов исследования динамики микрочастиц в плазме
Казарян М.А., Морозова Е.А., Пляка П.С.
- Моделирование спектров энергодисперсионных рентгенофлуоресцентных измерений актиноидов на основе метода Монте-Карло
Берлизов А.Н., Бойко В.И., Шариков Д.А., Сарли Ф., Ван Белле П., Оттмар Х., Лютзенкирхен К.
- Оценка эффективности использования детекторов с неоднородной пространственной чувствительностью в сканирующих системах цифровой рентгенографии
Удод В.А., [Солодушкин В.И.], Клименов В.А., Темник А.К.
- Распространение в атмосфере излучения, генерируемого многоканальной лазерной системой с когерентным сложением. Ч. 1. Условия свободной дифракции
Канев Ф.Ю., Цыро Е.И., Мakenова Н.А., Куksенoк Д.С., Антипов О.Л.
- Распространение в атмосфере излучения, генерируемого многоканальной лазерной системой с когерентным сложением. Ч. 2. Влияние искажений и их компенсация
Канев Ф.Ю., Цыро Е.И., Мakenова Н.А., Куksенoк Д.С., Антипов О.Л.
- Исследование генерации электромагнитного излучения в коаксиальном вибраторе с расходящимся пучком
Жерлицын А.Г., Коваль Т.В., Канаев Г.Г., Нгуен Т.М.
- Электронно-лучевая наплавка износостойких и коррозионно-стойких покрытий на низкоуглеродистую сталь
Полетика И.М., Макаров С.А., Тетюцкая М.В., Крылова Т.А.
- MATHEMATICS AND MECHANICS. PHYSICS**
- 5 Cauchy-Riemann classification of multidimensional surfaces in Euclidean space
Ivlev E.T., Luchinin A.A., Moldavanova E.A.
- 9 Properties of Cauchy-Riemann surfaces in Multidimensional Euclidean space
Ivlev E.T., Luchinin A.A., Moldavanova E.A.
- 14 Non-local problem with integral conditions for non-linear equation in partial derivatives of the third order
Moldoyarov U.D.
- 17 The development of the phase plane method for analyzing the solutions of boundary value problems
Zimin V.P.
- 22 The analysis of cycloid drive force distribution considering link manufacturing tolerances
Kobza E.E., Efremenkov E.A., Demidov V.N.
- 26 Synthesis of space gear with intermediate rolling elements with the advanced qualitative characteristics
Cheremnov A.V., An I-Kan, Ivkina O.P.
- 31 Determining rotor radial run-out by the rotation sensor signal
Zaytsev E.S., Domnenko A.I., Astafurov V.G.
- 36 Forecasting the cycle life of components with macrocracks by the thermographic method
Kurilenko G.A.
- 39 The effect of reflective surface on dispersion media radiation balance
Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B.
- 42 The ways for modernization of channel-type research reactor IVG.1M
Prozorova I.V.
- 48 High-current pulsed-periodic electron accelerator of direct action as a possible means for sterilization of medical items
Rostov V.V., Alekseenko P.I., Vykhotdsev P.V., Steinle A.V., Mazin V.I., Krasnozhyonov E.P., Mushtovatova L.S., Solodkova T.V., Postnikov P.S., Kutanova K.V., Steinle L.A., Shatokhin A.A.
- 54 Obtaining enriched ¹³C in gas centrifuge cascade using isotope exchange in carbon dioxide
Orlov A.A., Sovach V.P.
- 58 The opportunities of laser methods for researching microparticle dynamics in plasma
Kazaryan M.A., Morozova E.A., Plyaka P.S.
- 62 Modeling spectra of energy-dispersive X-ray fluorescence measurements of actinides based on Monte-Carlo method
Berlizov A.N., Boyko V.I., Sharikov D.A., Sarli F., P. Van Belle, Ottmar Kh., Lyutzenkirchen K.
- 66 Estimating the efficiency of using detectors with inhomogeneous spatial sensitivity in scanning systems of digital radiography
Udod V.A., [Solodushkin V.I.], Klimenov V.A., Temnik A.K.
- 71 Propagation of radiation generated by multichannel laser system with coherent addition in atmosphere. P. 1. Free diffraction conditions
Kanev F.Yu., Tsyro E.I., Makenova N.A., Kuksenok D.S., Antipov O.L.
- 76 Propagation of radiation generated by multichannel laser system with coherent addition in atmosphere. P. 2. The effect of distortions and their compensation
Kanev F.Yu., Tsyro E.I., Makenova N.A., Kuksenok D.S., Antipov O.L.
- 81 Studying the generation of electromagnetic emission in coaxial vibrator with a divergent beam
Zherlitsyn A.G., Kovalev T.V., Kanayev G.G., Nguen T.M.
- 86 Electron-beam welding of wear and corrosion resistant coverings to low-carbon steel
Poletika I.M., Makarov S.A., Tetuytskaya M.V., Krylova T.A.



Верна
Крылова Т.А.
Зайцев Е.С.

соответствующей связности $C_1(\Delta_{m,2}^p)$ переходит в параллельную двумерную площадку.

4. Образы площадки L_1^p в точке $A \in S_{m,m+2}^p \subset E_{m+2}$, $m=2s$, при соответствующих аффинных отображениях

связности $C^p(\Delta_{m,2}^p)$ при каждом $p=\overline{1,s}$, $m=2s$, переходят в соответствующие точки. Если при фиксированном p кручение связности $C^p(\Delta_{m,2}^p)$ равно нулю, то эта связность локально плоская.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Классификация Коши–Римана многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 5–9.
2. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 5–8.
3. Ивлев Е.Т. О многообразии в n -мерном проективном пространстве P_n ($m>2$; $n<m(m+1)$) // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.

4. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
5. Евтушек Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
6. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,2}$ // Дифференциальная геометрия многообразия фигур: Межвуз. темат. сб. научн. трудов. – Калининград: Калининградский ун-т, 1982. – Вып. 15. – С. 32–37.

Поступила 02.12.2011 г.

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

У.Д. Молдоярлов

Ошский государственный университет, Кыргызстан
E-mail: ular_osh@rambler.ru

Методом интегральных уравнений и сжимающих отображений доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова:

Нелокальная задача, интегральные условия, интегро-дифференциальное уравнение, сжимающее отображение, неподвижная точка, однозначная разрешимость

Key words:

Non-local problem, the integral conditions, integro-differential equation, a contraction mapping, fixed point, a unique solution, the Riemann function, the norm of the operator.

1. Постановка задачи. Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непосредственных измерений. Например, математическое моделирование процессов распространения тепла [1, 2], процессы влагопереноса в капиллярно-пористых средах [3] приводятся к таким задачам. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [4–6].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < h\}$, где F – заданная функция.

Уравнение (1) представляет собой канонический вид уравнения в частных производных

третьего порядка относительно старших производных по классификации работы [7], когда уравнение характеристик имеет один двукратный и один простой действительные характеристики.

Пусть $C^{m+n}(D)$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \quad (i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n).$$

Задача 1. Требуется найти решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^{m+n}(D)$ ур. (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_x(0, y) = \int_0^h T(x, y, u(x, y)) \varphi_2(y) dy, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$



Верина
секретарь
Файсубанов М.

$$u(x, 0) + \int_0^h T_2(x, y)u(x, y)dy = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$ – заданные функции.

В случае, когда $T_1(x, y) \equiv 0$, задача 1 изучена в работе [8].

Пусть выполняются условия:

- 1) $\varphi_i(y) \in C^1[0, h]$ ($i=1, 2$), $\psi(x) \in C^1[0, l]$;
- 2) $T_i(x, y) \in C(\bar{D})$ ($i=1, 2$), $T_1(x, y) \in C^{0+1}(D)$, $T_2(x, y) \in C^{2+0}(D)$;
- 3) $\varphi_1(0) + \int_0^h T_2(0, y)\varphi_1(y)dy = \psi(0)$;
- 4) $F(x, y, u, p, q, r, s) \in C(\bar{D} \times R^5)$, $\max |F(x, y, u, p, q, r, s)| \leq H$, R^5 – пятимерное пространство переменных (u, p, q, r, s) ;
- 5) $|F(x, y, u, p, q, r, s) - F(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s})| \leq L(|u - \bar{u}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}| + |r - \bar{r}| + |s - \bar{s}|)$.

2. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Введем обозначение

$$\tau(x) = \psi(x) - \int_0^h T_2(x, y)u(x, y)dy,$$

$$g(y) = \varphi_2(y) - \int_0^l T_1(x, y)u(x, y)dx.$$

Тогда решение ур. (1), удовлетворяющее условию (2) и условиям

$$u_x(0, y) = g(y), \quad 0 < y < h, \quad u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < l,$$

представимо в виде

$$u(x, y) = \tau(x) + \varphi_1(y) - \varphi_1(0) + [g(y) - g(0)]x =$$

$$= \int_0^x d\xi \int_0^y v(x, \xi)F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta})d\eta,$$

где $v(x, \xi) = x - \xi$ – функция Римана.

Отсюда, подставляя значения $\tau(x)$ и $g(y)$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x, y) = \Phi(x, y) - \int_0^l xT_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi - \int_0^h T_2(x, \eta)u(x, \eta)d\eta - \int_0^l d\xi \int_0^h xT_1(\xi, 0)T_2(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x, \xi)F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta})d\eta, \quad (5)$$

где

$$\Phi(x, y) = \psi(x) + \varphi_1(y) - \varphi_1(0) + [\varphi_2(y) - \varphi_2(0)]x + \int_0^l xT_1(0, \xi)0\psi(\xi)d\xi.$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений из (5) найдем производные

$$u_x(x, y) = \Phi_x(x, y) - \int_0^l T_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi - \int_0^h T_{2x}(x, \eta)u(x, \eta)d\eta - \int_0^h T_2(x, \eta)u_x(x, \eta)d\eta + \int_0^l d\xi \int_0^h xT_1(\xi, 0)T_2(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta})d\eta; \quad (6)$$

$$u_y(x, y) = \Phi_y(x, y) - \int_0^l xT_{1y}(\xi, y)u(\xi, y)d\xi - \int_0^l xT_1(\xi, y)u_y(\xi, y)d\xi + \int_0^x \vartheta(x, \xi)F(\xi, y, u(\xi, y), u_\xi, u_y, u_{\xi\xi}, u_{\xi y})d\xi; \quad (7)$$

$$u_{xx}(x, y) = \Phi_{xx}(x, y) - \int_0^h T_{2xx}(x, \eta)u(x, \eta)d\eta - 2 \int_0^h T_{2x}(x, \eta)u_x(x, \eta)d\eta - \int_0^h T_2(x, \eta)u_{xx}(x, \eta)d\eta + \int_0^y F(x, \eta, u(x, \eta), u_x, u_\eta, u_{xx}, u_{x\eta})d\eta; \quad (8)$$

$$u_{xy}(x, y) = \Phi_{xy}(x, y) - \int_0^l T_{1y}(\xi, y)u(\xi, y)d\xi - \int_0^l T_1(\xi, y)u_y(\xi, y)d\xi + \int_0^x F(\xi, y, u(\xi, y), u_\xi, u_y, u_{\xi\xi}, u_{\xi y})d\xi. \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи 1 сведено к решению системы уравнений (5)–(9).

3. Решение системы уравнений методом сжимающих отображений. С этой целью систему уравнений запишем в виде

$$g = Ag, \quad (10)$$

где $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ – вектор-функция с компонентами $g_1 = u(x, y)$, $g_2 = u_x(x, y)$, $g_3 = u_y(x, y)$, $g_4 = u_{xx}(x, y)$, $g_5 = u_{xy}(x, y)$, а оператор $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ определяется на множестве функций $g \in C(\bar{D})$ и его компоненты определяются с помощью равенствами (5)–(9):

$$A_1 g = g_0 + \int_0^l K_{11}g_1(\xi, y)d\xi + \int_0^h K_{12}g_2(\xi, y)d\xi + \int_0^h K_{13}g_3(x, \eta)d\eta + \int_0^h K_{14}g_4(x, \eta)d\eta + \int_0^h K_{15}g_5(x, \eta)d\eta + \int_0^h K_{16}g_4(x, \eta)d\eta +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^x K_{17} F(\xi, y, g_1(\xi, y), g_2, g_3, g_4, g_5) d\xi + \\
 & + \int_0^y K_{18} F(x, \eta, g_1(x, \eta), g_2, g_3, g_4, g_5) d\eta + \\
 & \int_0^l d\xi \int_0^h K_{19} g_1(\xi, \eta) d\eta + \\
 & + \int_0^x d\xi \int_0^y K_{10} F(\xi, \eta, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) d\eta, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $K_{11} = -xT_1(\xi, y)$, $K_{12} = 0$, $K_{13} = -T_2(x, \eta)$, $K_{14} = 0$, $K_{15} = 0$, $K_{16} = 0$, $K_{17} = 0$, $K_{18} = 0$, $K_{19} = -xT_1(\xi, 0) T_2(\xi, \eta)$, $K_{10} = \nu(\xi, \eta)$, $K_{21} = -T_1(\xi, y)$, $K_{22} = 0$, $K_{23} = -T_{2x}(x, \eta)$, $K_{24} = -T_2(x, \eta)$, $K_{25} = 0$, $K_{26} = 0$, $K_{27} = 0$, $K_{28} = 0$, $K_{29} = T_1(\xi, 0) T_2(\xi, \eta)$, $K_{30} = 1$, $K_{31} = -xT_1(\xi, y)$, $K_{32} = -xT_1(\xi, y)$, $K_{33} = K_{34} = 0$, $K_{35} = K_{36} = 0$, $K_{37} = \nu(x, \xi)$, $K_{38} = K_{39} = K_{40} = 0$, $K_{41} = K_{42} = 0$, $K_{43} = -T_{2x}(x, \eta)$, $K_{44} = -2T_{2x}(x, \eta)$, $K_{45} = 0$, $K_{46} = -T_2(x, \eta)$, $K_{47} = 0$, $K_{48} = 1$, $K_{49} = 0$, $K_{50} = 0$, $K_{51} = -T_1(\xi, y)$, $K_{52} = -T_1(\xi, y)$, $K_{53} = K_{54} = K_{55} = K_{56} = 0$, $K_{57} = 1$, $K_{58} = 0$, $K_{59} = K_{60} = 0$, а $g_{01} = \Phi(x, y)$, $g_{02} = \Phi_x(x, y)$, $g_{03} = \Phi_y(x, y)$, $g_{04} = \Phi_{xx}(x, y)$, $g_{05} = \Phi_{yy}(x, y)$, компоненты вектора $g_0 = (g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{04}, g_{05})$.

Норму g определим равенством

$$\|g\| = \max_{1 \leq i \leq 5} \max_{(x,y) \in D} (g_i(x, y)).$$

В силу свойств заданных функций (1, 2) заключаем, что

$$\exists M > 0 \forall (x, y) \in \bar{D} : \|g_0\| \leq M.$$

Пусть оператор A осуществляет отображение шара $S(g_0, M) = \{g : \|g - g_0\| \leq M\}$.

Тогда

$$\forall g \in S(g_0, M) : \|g\| \leq 2M.$$

В силу свойств заданных функций (1)–(4) также заключаем, что

$$\begin{aligned}
 \exists T > 0 \forall (x, y) \in \bar{D} : \max |K_{ij}| &\leq T, \\
 T = \text{const}, i = \overline{1, 5}, j = \overline{0, 9}.
 \end{aligned}$$

Пусть выполняется условие

$$Q(\ell, h) = T(2\ell + 4h + \ell h) \left(2 + 5L + \frac{H}{M} \right) < 1. \quad (12)$$

Покажем, что при выполнении условия (12) оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. Пусть $g \in S(g_0, M)$. Тогда из (11) следует, что $Ag \in C(D)$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 |Ag - g_{0i}| &\leq \int_0^l |K_{11}| |g_1(\xi, y)| d\xi + \\
 & + \int_0^l |K_{12}| |g_2(\xi, y)| d\xi + \int_0^h |K_{13}| |g_1(x, \eta)| d\eta + \\
 & + \int_0^h |K_{14}| |g_2(x, \eta)| d\eta + \int_0^h |K_{15}| |g_3(x, \eta)| d\eta + \\
 & - \int_0^h |K_{16}| |g_4(x, \eta)| d\eta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^x |K_{17}| |F(\xi, y, g_1(\xi, y), g_2, g_3, g_4, g_5)| d\xi + \\
 & + \int_0^y |K_{18}| |F(x, \eta, g_1(x, \eta), g_2, g_3, g_4, g_5)| d\eta + \\
 & + \int_0^l d\xi \int_0^h |K_{19}| |g_1(\xi, \eta)| d\eta + \\
 & + \int_0^x d\xi \int_0^y |K_{10}| |F(\xi, \eta, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)| d\eta < \\
 & < T(2M + H)(2\ell + 4h + \ell h).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \|Ag - g_0\| &= \max_{1 \leq i \leq 5} \max_{(x,y) \in D} |Ag - g_{0i}| < \\
 &< T(2M + H)(2\ell + 4h + \ell h) = \\
 &= T \left(2 + \frac{H}{M} \right) (2\ell + 4h + \ell h) < Q(\ell, h)M.
 \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что при выполнении условия (12) имеет место неравенство

$$\|Ag - g_0\| < Q(\ell, h)M < M.$$

Это означает, что оператор A отображает шар в себя, т. е. $Ag \in S(g_0, M)$. Теперь покажем, что оператор A при выполнении условия (12) является сжимающим отображением. Пусть $g^{(1)} = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)})$, $g^{(2)} = (g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, g_3^{(2)}, g_4^{(2)}, g_5^{(2)})$ произвольные два вектора, принадлежащие шару $S(g_0, M)$. Тогда из условия (5) следует, что $\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M)$:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned} & F(x, y, g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)}) - \\ & - F(x, y, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, g_3^{(2)}, g_4^{(2)}, g_5^{(2)}) \end{aligned} \right| \leq \\
 & \leq L \sum_{i=1}^5 |g_i^{(1)} - g_i^{(2)}| \leq 5L \|g^{(1)} - g^{(2)}\|.
 \end{aligned}$$

Используя это условие из (11) получим

$$|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}| \leq T(2\ell + 4h + \ell h)(1 + 5L) \|g^{(1)} - g^{(2)}\|, i = \overline{1, 5}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\| &\leq T(2\ell + 4h + \ell h)(1 + 5L) \|g^{(1)} - g^{(2)}\| < \\
 &< Q(\ell, h) \|g^{(1)} - g^{(2)}\|.
 \end{aligned}$$

Так как, в силу неравенства (12) $Q(\ell, h) < 1$, то оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. Тогда в силу теоремы С. Банаха [9] в шаре $S(g_0, M)$ существует, и притом только одна, неподвижная точка отображения, т. е. существует только одно решение ур. (10). Решая это уравнение, например, методом последовательных приближений, $g^{(1)} = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)})$ можно однозначно определить все компоненты вектора g и тем самым определить решение задачи 1 в области D и установить, что построенное решение принадлежит классу $C^{2+1}(D)$. Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия (1)–(5) и (12), то система уравнений (5)–(9) определяет в области $D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ единственное решение задачи 1, принадлежащее классу C^{2+1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.* – 1963. – V. 21. – P. 155–160.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференциальные уравнения.* – 1977. – Т. 13. – № 2. – С. 294–304.
3. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // *Дифференциальные уравнения.* – 1982. – Т. 18. – № 1. – С. 72–81.
4. Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // *Украинский математический журнал.* – 1990. – Т. 42. – № 1. – С. 132–135.
5. Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // *Математические заметки.* – 2003. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 435–445.
6. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // *Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия.* – 2008. – № 2 (61). – С. 22–28.
7. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // *Дифференциальные уравнения.* – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
8. Сопуев А., Молдогаров У.Д. Нелокальные краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка // *Матер. Междунар. юбилейной научной конф., посвящ. 15-летию образования КРСУ.* – Бишкек: КРСУ, 2008. – С. 188–192.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Поступила 10.11.2011 г.

УДК 519.63

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.П. Зимин

Томский политехнический университет

E-mail: zimin@ido.tpu.ru

Предложено развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Такой анализ необходим на этапах алгоритмизации нелинейных краевых задач и верификации моделей. Обоснован выбор фазовых плоскостей для анализа решений краевой задачи о распределении параметров низкотемпературной плазмы термоэмиссионного преобразователя.

Ключевые слова:

Краевая задача, метод фазовой плоскости, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный преобразователь энергии.

Key words:

Boundary value problem, method of phase plane, low-temperature plasma, thermionic converter.

Введение

Первая фаза вычислительного эксперимента (ВЭ) состоит из нескольких этапов: создание и исследование модели; её алгоритмизация; программирование алгоритма; сравнение модельных и экспериментальных результатов – верификации модели [1]. Эффективность исследования и алгоритмизации модели зависит от выбора адекватных математических методов её анализа. Например, на этапе алгоритмизации традиционно применяют один из математических методов, который позволяет построить алгоритм преобразования непрерывной модели в дискретную, пригодную для анализа на ПЭВМ. Вместе с тем, на первых двух этапах ВЭ важным является определение области допустимых решений модели, выявление и изучение общих характерных свойств этих решений, которые необходимо учитывать при алгоритмизации.

Кроме этого, остается окончательно не решенной проблема выбора критериев сравнения модельных и экспериментальных результатов на этапе верификации модели. Этот этап ВЭ существен-

ным образом влияет как на фазу калибровки модели, так и на фазу прогноза: он должен давать направление модификации модели и определять обоснованность экстраполяции результатов моделирования.

Все это вместе взятое требует поиска новых и развитие имеющихся методов анализа математических моделей. Для анализа решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на разных этапах ВЭ широко применяется метод фазовой плоскости [2–7]. Данная статья посвящена развитию метода фазовой плоскости, его применению к анализу решений краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП).

Применение метода фазовой плоскости для краевых задач систем дифференциальных уравнений с частными производными

Понятия фазового пространства, связанных с ним структур, а также метод фазовой плоскости могут быть расширены и применены для краевой



*Верина
Феусуденов М.*