

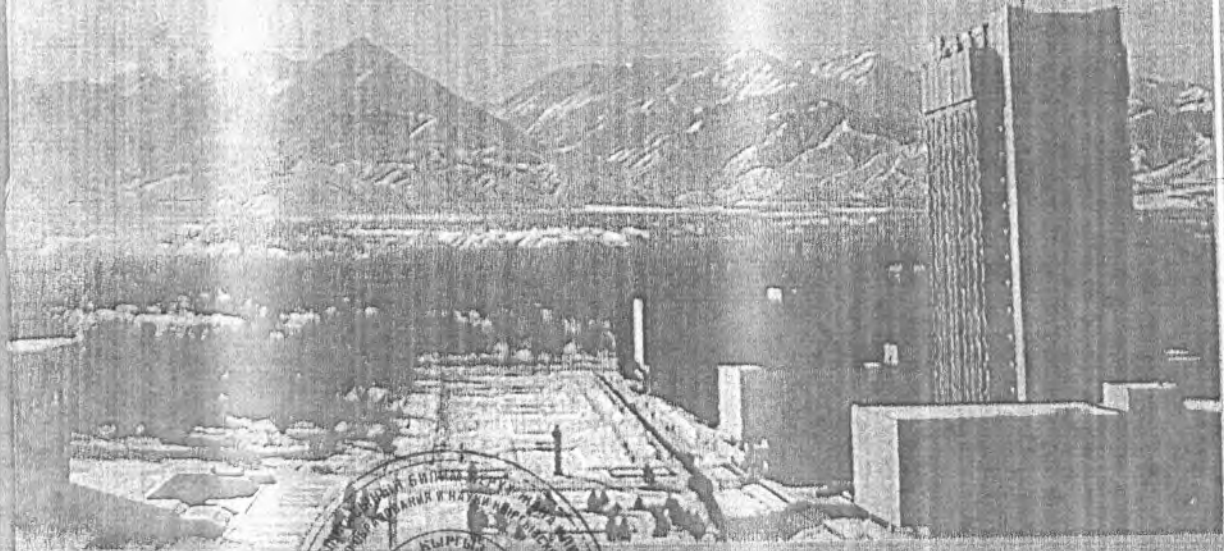
1563-0285
индекс 75872
25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ХАБАРШЫСЫ ВЕСТНИК

- математика,
- механика,
- информатика сериясы

- серия математика,
- механика,
- информатика



О.И. М.
кампан

Алматы
М. Жаңабайов

АЛМАТЫ

№ 1 (68)
2011

Математический анализ

4. С.А. Айсагалиев, А.П. Белозуров, И.В. Севрюгин К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных 21
5. Е.С. Алимжанов Модельная задача Веригина с малым параметром 30
6. Л.В. Роговой Задача Трикоми и ее сопряженная для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров одного класса 38

Дифференциальные уравнения

7. А.Н. Азанова Трехточечная краевая задача для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений 46
8. Ж.Х. Жунусова Двухсолитонное решение одного нелинейного уравнения 51
9. Ж.А. Искендерова, А.М. Токторбаев Задача Коши для модели реагирующей смеси газов в пористой среде 57
10. Ж. Сулейменов Метод построения периодического решения линейных дифференциальных уравнений 63
11. Н.Е. Токмагамбетов, А.Е. Толеустанов О граничных условиях объемного теплового потенциала для полипараболического уравнения 67
12. А.Е. Толеустанов, Н.Е. Токмагамбетов Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами 71
13. В.Х. Турметов, Б.Т. Торебек О гладкости решения некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в классах Гельдера 79
14. В.Э. Эшматов, Д.С. Мамутова Вольтерровость задачи с условием Бицадзе-Самарского для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка 87

Теория управления

15. С.А. Айсагалиев, Е.Б. Злобина Абсолютная устойчивость регулируемых систем с ограниченными ресурсами в основном случае 93

Механика и математическое моделирование

16. Н.С. Абдраимова Механизмы с двумя особыми положениями с наибольшим коромыслом l_3 и наибольшим шаром для ударных машин 108
17. А.А. Исатов Математическое моделирование распространения вещества на поверхности воды 113

Жамал
Осман
Камчиен

М. Байсубанов



Задача Коши для модели реагирующей смеси газов в пористой среде

Ж.А. ИСКЕНДЕРОВА, А.М. ТОКТОРБАЕВ
 КНУ им.Ж.Баласагына, Ошский государственный университет,
 Бишкек, Ош, Кыргызстан
 e-mail: ain7@list.ru

Аннотация

Исследуется задача Коши для уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов в пористой среде. В начальный момент времени все характеристики среды известны и имеют разные пределы на бесконечности. Доказательство теоремы существования и единственности обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

1. Постановка задачи и основной результат. Исследуется система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad v = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\chi}{v} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - cg, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\theta}{v} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_1(\theta)}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_2(\theta)}{v} \theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) - r \frac{\theta}{v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \delta cg. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим движение смеси в полосе: $\Pi = \{(x, t) : x \in R, 0 < t < T\}$, $R = (-\infty, \infty)$
 Начальные условия записываются в виде:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \theta|_{t=0} = \theta_0(x), c|_{t=0} = c_0(x), v|_{t=0} = v_0(x), \quad (2)$$


$0 < c_0(x) \leq 1, 0 < m_0 \leq (v_0(x), \theta_0(x)) \leq M_0 < \infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) &= u_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = u_0^2, \quad u_0^1 < u_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v_0(x) &= v_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v_0(x) = v_0^2, \quad v_0^1 \neq v_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} c_0(x) &= c_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_0(x) = c_0^2, \quad c_0^1 \neq c_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta_0(x) &= \theta_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta_0(x) = \theta_0^2, \quad \theta_0^1 \neq \theta_0^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x)$, $f(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$, обладающие свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < C_1^{-1} < \psi(x) < C_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v_0(x)\psi(x) &= 1, \quad \psi'(x) \in W_2^1(R), \\ |f(x)| < C_2 < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= u_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = u_0^2, \\ 0 < f'(x) &\leq C_3, \quad f'(x) \in W_2^1(R), \quad f'(x) \in L_1(R), \\ 0 < C_4^{-1} < \varphi(x) < C_4, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x)\varphi(x) &= 1, \quad \varphi'(x) \in W_2^1(R), \\ 1 \leq \gamma(x) < C_5 < \infty, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma(x) &= 1, \quad \gamma'(x) \in W_2^1(R). \end{aligned} \quad (4)$$

Член комиссии
 Д.М.У. К. Байсуданов
 Канцелярия
 М. Байсуданов.



$$(\varphi'(x))^2 < \eta f'(x), 0 < \eta < 1. \quad (5)$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

ТЕОРЕМА. Пусть $\lambda_1(\theta) = \alpha\theta$, $\lambda_2(\theta) = \beta\theta^{1/2}$, $\alpha, \beta = \text{const} > 0$, начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и $(u_0 - f, v_0\psi - 1, \theta_0\varphi - 1, c_0\gamma - 1) \in W_1^2(R)$. Функция $g(p, c, \theta)$ является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, и по $(\varphi\theta)^{1/2}$, кроме того, удовлетворяет условию Липшица и $g(p, c, 1) = 0$. Тогда в полосе $\Pi = R \times (0, T)$ с произвольной конечной высотой $T, 0 < T < \infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), причем

$$(v\psi - 1) \in L_\infty(0, T; W_1^2(R)), \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\right) \in L_2(\Pi),$$

$$(u - f, \theta\varphi - 1, c\gamma - 1) \in L_\infty(0, T; W_1^2(R)) \cap L_2(0, T; W_2^2(R)),$$

$0 < c(x, t) \leq 1$, $v(x, t)$, $\theta(x, t)$ - строгоположительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме: а) выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C, C_i, N_i, K_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения; б) доказывается локальная теорема существования аналогично [2, 3, 4]; в) на основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0, T], 0 < T < \infty$. Известно, что в одномерных нестационарных задачах вязкой газовой динамики априорные оценки удобнее всего получать в лагранжевых координатах. Введение их описано в [2].

Следуя [2, 3], разобьем числовую ось и соответственно полосу на конечные отрезки и прямоугольники:

2. Априорные оценки. Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(x, t)$, $\theta(x, t)$ неотрицательны и $0 < c(x, t) \leq 1$.

Выведем закон сохранения. Сделаем замену, полагая $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)\gamma(x)}$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varphi\gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad v = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varphi\gamma v} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) - cg,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varphi\gamma v} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\varphi\gamma} \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad p = \frac{0}{v}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\theta}{\varphi\gamma v} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\varphi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\theta^{3/2}}{\varphi\gamma v} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\varphi\gamma} p \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi^2 \gamma^2 v} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + cg.$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) \partial \tau \leq E = \text{const} > 0, t \in [0, T] \quad (7)$$

где

$$U(t) = \int \left\{ \frac{1}{2}(u - f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma - 1)^2 + (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) + (v\psi - \ln v\psi - 1) \right\} \partial x,$$

$$W(t) = \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v\theta} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{c_x^2}{v} + \frac{\theta}{v} f' + g\varphi(c\gamma - 1)^2 \right\} \partial x.$$

Доказательство: Умножим первое уравнение системы (6) на $\gamma(\psi - \frac{1}{v})$, второе на $\gamma(c\gamma - 1)$, третье на $\varphi\gamma(u - f)$, третье на $\gamma(\varphi - \frac{1}{\theta})$, сложим и проинтегрируем по R :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \left\{ \frac{1}{2} \varphi \gamma (u - f)^2 + \frac{1}{2} (c\gamma - 1)^2 + \gamma(\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1) + \gamma(v\psi - \ln v\psi - 1) \right\} \partial\xi, + \\ & + \int \left\{ \frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma} + \frac{u_\xi^2}{v\theta\varphi\gamma} + \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} + \frac{\theta}{v} f' + g(c\gamma - 1)^2 \right\} \partial\xi = \quad (8) \\ & = \int \frac{\psi}{\varphi\gamma} \eta_\xi \partial\xi + \int \frac{1}{\varphi v\gamma} u_\xi (f + \gamma - 1) \partial\xi - \int \frac{\theta_\xi \varphi'}{v\varphi^3\gamma} \partial\xi - \int \frac{c_\xi c\gamma'}{v\varphi^2\gamma} \partial\xi + \int \frac{c_\xi (c\gamma - 1) \varphi'}{v\varphi^3\gamma} \partial\xi + \\ & + \int \frac{c_\xi \theta_\xi}{v\varphi^2\gamma\theta^{1/2}} \partial\xi + \int \frac{\theta^{1/2} c_\xi \varphi'}{v\varphi^3\gamma} \partial\xi - \int g(c\gamma - 1) \partial\xi + \int c\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta} \partial\xi = \sum_{k=1}^9 I_k \end{aligned}$$

Оценим каждое I_k , используя интегрирование по частям, (4), (5), неравенства Юнга, Коши, Гельдера, вложения.

$$I_3 \leq \delta_1 \int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma} \partial\xi + C_{\delta_1} \int \frac{\delta\theta f'}{v\theta\varphi^4\gamma} \partial\xi \leq \delta_1 \int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma} \partial\xi + C_{\delta_1} \eta C_4^4 \int \frac{\theta}{v} f' \partial\xi;$$

Заметим, что

$$\frac{|(v\psi)^{1/2} - 1|}{(v\psi)^{1/2} \sqrt{v\psi - \ln v\psi - 1}} \leq C_8, \forall (x, t) \in \Pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_4 & = \int \frac{c_\xi \gamma' c\psi^{1/2}}{v^{1/2} \varphi^2 \gamma} \partial\xi - \int \frac{c_\xi \gamma' c\psi^{1/2} ((v\psi)^{1/2} - 1)}{v^{1/2} \varphi^2 \gamma (v\psi)^{1/2} \sqrt{v\psi - \ln v\psi - 1}} \sqrt{v\psi - \ln v\psi - 1} \partial\xi \leq \\ & \leq \delta_2 \int \frac{C_\xi^2}{v\varphi^2} \partial\xi + C_{\delta_2} \int (v\psi - \ln v\psi - 1) \partial\xi + 1; \\ I_5 & \leq \delta_3 \int \frac{C_\xi^2}{v\varphi^2} \partial\xi + C_{\delta_3} \int (v\psi - \ln v\psi - 1) \partial\xi + \int \frac{1}{2} (c\gamma - 1)^2 \partial\xi + 1; \\ I_6 & = + \int \frac{c_\xi \theta_\xi}{v\varphi^2 \gamma \theta^{1/2}} \partial\xi \leq \frac{1}{2} \int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma} \partial\xi + \frac{1}{2} \int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} \partial\xi; \\ I_7 & = \int \frac{\theta^{1/2} c_\xi \varphi'}{v\varphi^3\gamma} \partial\xi \leq \delta_4 \int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} \partial\xi + C_{\delta_4} \int \frac{\varphi'^2 \theta}{v\varphi^4} \partial\xi \leq \delta_4 \int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} \partial\xi + C_{\delta_4} \eta C_4^4 \int \frac{\theta}{v} f' \partial\xi. \end{aligned}$$

Остальные интегралы оцениваются аналогично [5]. Здесь $\delta_i > 0 (i = \overline{1, 4})$ - произвольные положительные числа, $\sum_{i=1}^4 \delta_i < \frac{1}{2}$. Так как в (5) $0 < \eta < 1$ - произвольное число, выбираем его так, чтобы выполнялись неравенства $\eta < \frac{1}{4C_{\delta_1} C_4^4}$, $\eta < \frac{1}{4C_{\delta_4} C_4^4}$. Интегрируя по времени полученное из (8) неравенство и применяя лемму Гронуолла, переходя к исходным переменным, выводим оценку (7). Лемма доказана.

3. Вспомогательное соотношение между искомыми функциями. Следуя [2, 3], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники:

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_N, \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{Q}_N,$$

$$\Omega_N = x \mid N < x < N + 1, Q_N = \Omega_N \times (0, T), N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (7) функции $(v\psi - \ln v\psi - 1), (\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1)$ неотрицательны при $v > 0, \theta > 0$, то

$$U_N(t) + \int_0^t W_N(\tau) \partial \tau \leq E \tag{9}$$

где интегралы в определении U_N и W_N берутся по Ω_N .

Отсюда, согласно [2], существуют положительные постоянные $n(E), M(E)$, не зависящие от N , такие что

$$\frac{n(E)}{C_1} \leq \int_N^{N+1} v(x, t) \partial x \leq M(E)C_1, \frac{n(E)}{C_4} \leq \int_N^{N+1} \theta(x, t) \partial x \leq M(E)C_4, \forall t \in [0, T]. \tag{10}$$

Из первого и третьего уравнений системы (1) выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников \bar{Q}_N .

$$v(x, t) = I^{-1}(t)B^{-1}(x, t)[v_0(x) + \int_0^t \theta(x, \tau)I(\tau)B(x, \tau)\partial \tau], \tag{11}$$

где

$$I(t) = I_N(t) = \frac{v_0(a(t))}{v(a(t), t)} \exp\left\{ \int_0^t \theta(a(t), \tau) \partial \tau \right\}.$$

$$B(x, t) = B_N(x, t) = \exp \int_{a(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi, t)) \partial \xi.$$

Справедливы оценки:

$$0 < K_1^{-1} \leq B(x, t) \leq K_1, 0 < K_2^{-1} \leq I(t) \leq K_2, \forall x \in \bar{\Omega}_N, \forall t \in [0, T] \tag{12}$$

Доказательство следует из оценок (7) и представления (11).

4. Оценки для плотности (удельного объема) и температуры. Пусть $h(x, t)$ - непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{|x| < \infty} h(x, t), m_h(t) = \min_{|x| < \infty} h(x, t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$m_v(t) \leq N_4, m_\theta(t) \leq N_5, \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Строгая положительность удельного объема следует из представления (11) с учетом условий теоремы и (7), а температуры из уравнения теплопроводности системы (1).

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$M_v(t) \leq N_6, \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t M_\theta(t) \partial t \leq K_3, \forall t \in [0, T]. \tag{13}$$

Действительно, (13) следует из оценок (7), (9) и соотношения

$$\max_{\bar{\Omega}_N} \theta^{1/2} \leq (M(E)C_4)^{1/2} + \int_N^{N+1} \left| \frac{\theta_x}{\theta^{1/2}} \right| \partial x \leq C + \left(\int_N^{N+1} \frac{\theta_x^2}{v\theta} \partial x \right)^{1/2} \left(\int_N^{N+1} v \partial x \right)^{1/2}.$$

Из (11) с учетом оценок (12), (13) и условий теоремы, получим ограниченность удельного объема сверху.

5. Оценки для производных от искомых функций. Умножим второе уравнение системы (1) на $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \right) c_x$ и проинтегрируем по R :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{v} c_x^2 \partial x + \int \left(\frac{1}{v} c_x \right)_x^2 \partial x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{v^2} c_x^2 u_x \partial x + \int c g \left(\frac{1}{v} c_x \right)_x \partial x.$$

Используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, вложения, (9), липшицевость функции g по $(\varphi\theta)^{1/2}$, после некоторых преобразований выводим [8]:

$$\int \frac{1}{v} c_x^2 \partial x + \int_0^t \int \left(\frac{1}{v} c_x \right)_x^2 \partial x \partial \tau \leq N_7, \forall t \in [0, T]. \quad (14)$$

Умножим четвертое уравнение системы (1) на $(u - f)$ и проинтегрируем по R :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (u - f)^2 \partial x + \int \left\{ \frac{u_x^2}{v} + \frac{\theta}{v} f' \right\} \partial x = \int \frac{1}{v} u_x f' \partial x + \int \frac{\theta}{v} u_x \partial x.$$

Оценивая правую часть по неравенству Коши, после интегрирования по t , с учетом (4), (7), (9), (13) выводим:

$$\int_0^t \|u_x\|^2 \partial \tau \leq N_8, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (15)$$

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_x(t)\| \leq N_9 \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Второе уравнение системы (1) $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ln v \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial(u-f)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta}{v} \right)$ умножим на $(\ln v \psi)_x$ и проинтегрируем по R :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\ln v \psi)_x^2 \partial x + \int \frac{\theta}{v} (\ln v \psi)_x^2 \partial x &= \frac{\partial}{\partial t} \int (u-f) \frac{\partial \ln v \psi}{\partial x} \partial x + \int \frac{1}{v} u_x^2 \partial x + \\ &\int \frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \ln v \psi}{\partial x} \partial x - \int \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} f_x \partial x + \int \frac{\theta}{v} \frac{\partial \ln v \psi}{\partial x} \frac{\psi_x}{\psi} \partial x. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим интегралы в правой части (16), используя неравенства Гельдера, Юнга, Коши, неравенства вложения, полученные выше оценки. После некоторых преобразований и применения к полученному из (16) неравенству леммы Гронуолла имеем оценку

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|(\ln v \psi)_x\|^2 \leq C_{12}.$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы. Умножим уравнения импульса и теплопроводности системы (1) на u_{xx} и $\psi(\psi\theta - 1)$ соответственно и проинтегрируем по R :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_x\|^2 + \int \frac{u_{xx}^2}{v} \partial x = \int \left(\frac{v_x}{v^2} u_x + \frac{\theta_x}{v} - \frac{v_x}{v^2} \theta \right) u_{xx} \partial x,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\varphi\theta - 1\|^2 + \int \frac{\theta\theta_x^2\varphi^2}{v} \partial x = \int \left(\frac{\theta\varphi_x\theta_x}{v} - \frac{2\varphi\varphi_x\theta^2\theta_x}{v} \right) \partial x + \\ & + \int \left(\frac{\theta^{3/2}\varphi_x c_x}{v} - \frac{2\varphi\varphi_x\theta^{5/2}c_x}{v} + \frac{\theta^{3/2}\theta_x c_x \varphi^2}{v} \right) \partial x + \int \left(-\frac{\varphi\theta}{v} u_x + \frac{\varphi}{v} u_x^2 + cg \right) (\varphi\theta - 1) \partial x. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим интегралы в правой части первого равенства системы (17), используя известные неравенства и результаты. Тогда из (17) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq C_{13}(\|u_x\|^2 + (M_\theta + 1) + 1) + C_{14} \int \frac{\theta\theta_x^2\phi^2}{v} \partial x, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \|\varphi\theta - 1\|^2 + C_{15} \int \frac{\theta\theta_x^2\varphi^2}{v} \partial x \leq C_{16} M_\theta (\|u_x\|^2 + 1) + \|u_x\|^2 (\|\varphi\theta - 1\|^2 + 1) + 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая первое уравнение (18) на $\gamma = C_{15}C_{14}^{-1}$ и складывая со вторым, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\|\varphi\theta - 1\|^2 + \gamma \|u_x\|^2) + \gamma \|u_{xx}\|^2 \leq C_{17} \{ M_\theta (\|u_x\|^2 + 1) + \|u_x\|^2 (\|\varphi\theta - 1\|^2 + 1) + 1 \}.$$

С учетом полученных ранее оценок, после применения леммы Гронуолла, заключаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} (\|\varphi\theta - 1\|^2 + \|u_x(t)\|^2) + \int_0^T \|u_{xx}(t)\|^2 \partial t \leq N_{10} \quad (19)$$

Из второго неравенства (18) и (19) вытекает оценка:

$$\int_0^T \|\theta_x(t)\|^2 \partial t \leq N_{11}$$

Рассуждая аналогично, можно получить все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично [3, 5].

Теорема полностью доказана.

Список литературы

- [1] Петров А.Н. Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // Там же. - 1993. - Вып.107. - С.112-123.
- [2] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Моляхов В.И. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 319 с.
- [3] Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. - 1993. - Т.29, № 2. - С. 337-348.
- [4] Искендерова Д.А. Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Там же. - 2001. - № 3(26) - С. 62-67.
- [5] Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Разрешимость уравнений реагирующей смеси газов в неограниченной области // Труды шестого совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительной математике и информационным технологиям. - Алматы, 2009. - С.183 - 190.

Кочуров
 Диев М.
 Камчишев
 М. Бабсудайев