

# АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ

Информационно-аналитический журнал



*М. Байғұбанов*  
*М. Байғұбанов*

ISSN 1680-2721

ISSN 1680-2721



9 771680 272001 >



Математическая физика

Искендерова Д.А., доктор физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой Международной академии управления, права, финансов и бизнеса (Кыргызская Республика)

Токторбаев А.М. (Ошский государственный университет (Кыргызская Республика))

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В настоящей статье исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного и электрического полей [2, 3]. Изучается задача Коши.

Система уравнений магнитной ЭГД в массовых лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{1}{\rho}, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_e H \frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon E \frac{\partial E}{\partial x}, \quad p = r \frac{\theta}{v}, \tag{1.b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu_e \mu_H}{v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + b \epsilon v E^2 \frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v H = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_H}{v} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \tag{1.d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -b E \frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.e}$$

Здесь  $u(x,t)$ ,  $\rho(x,t)$ ,  $v(x,t)$ ,  $\theta(x,t)$ ,  $p(x,t)$ ,  $H(x,t)$ ,  $E(x,t)$  соответственно скорость, плотность, удельный объем, температура, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля. Коэффициенты  $\mu, \epsilon, \lambda, \mu_e, \mu_H, b, r$  – положительные постоянные.

В начальный момент времени  $t = 0$  значения функций  $v, u, \theta, H, E$  предполагаются известными:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad E|_{t=0} = E_0(x), \quad H|_{t=0} = H_0(x), \quad |x| < \infty, \tag{2}$$

причем  $(v_0, u_0, \theta_0, H_0, E_0)$  – непрерывные,  $0 < m_0 \leq (v_0, \theta_0) \leq M_0 < \infty$  и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) &= 0, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} E_0(x) &= 0, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} H_0(x) &= 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v_0(x) &= v_\infty = 1, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x) &= \theta_\infty = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

(не нарушая общности можно принять  $v_\infty, \theta_\infty$  равными единице)

Ошский государственный университет  
 Канчип  
 Ошский государственный университет  
 М. Байсубанов



ТЕОРЕМА. Пусть начальные данные (2) обладают следующими свойствами гладкости:  
 $(v_0 - 1, u_0, \theta_0 - 1, H_0, E_0) \in W_2^1(R)$ .

Тогда в полосе  $\dot{I} = R \times (0, T)$ ,  $R = (-\infty, \infty)$  с произвольной конечной высотой  $T$ ,  $0 < T < \infty$  существует единственное обобщенное решение задачи (1),(2), удовлетворяющее уравнениям и начальным данным почти всюду, причем

$$(v(t), E(t)) \in L_\infty(0, T; W_2^1(R)), \quad (v_t, u_t, \theta_t, H_t, E_t) \in L_2(\dot{I}),$$

$$(u(t), \theta(t), H(t)) \in L_\infty(0, T; W_2^1(R)) \cap L_2(0, T; W_2^2(R)), \quad \dot{I} = R \times (0, T), \quad R = (-\infty, \infty)$$

$v(x, t), \theta(x, t)$  – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проводится методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные  $C_i, N_i$  в которых зависят только от данных задачи и величины  $T$  интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. Локальная теорема существования доказывается аналогично [1, с.68; 5, с.346]. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени  $[0, T]$ ,  $0 < T < \infty$ .

Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Предположим, что существует решение задачи (1)-(3).

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции  $v(x, t), \theta(x, t)$  неотрицательны. Из [6, с. 129] следует

$$E_x \geq 0, \quad \forall (x, t) \in Q. \tag{4}$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы имеет место оценка:

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) d\tau \leq N_1, \quad \forall t \in [0, T], \tag{5}$$

где  $U(t) = \int \left\{ \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v H^2 + \frac{1}{2} v E^2 + (v - \ln v - 1) + (\theta - \ln \theta - 1) \right\} dx,$

$$W(t) = \int \left\{ \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} + \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{v E^2 E_x}{\theta} \right\} dx.$$

Интегралы по  $x$  берутся в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Доказательство. Умножим уравнение (1.a) на  $\left(\frac{1}{2} E^2 + 1 - \frac{1}{v}\right)$ , (1. b) на  $u$ , (1.c) на  $\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$ , (1.d) на  $H$ , (1.e) на  $E v$  [4, с. 26]. Затем сложим.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (v - \ln v - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\theta - \ln \theta - 1) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v H^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v E^2 \right) = \\ & = u_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u u_x}{v} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\theta}{v} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H^2}{2} u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{2} E^2 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\theta_x}{v} - \frac{\theta_x}{v\theta} \right) - \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} - \frac{u_x^2}{v\theta} - \frac{H_x^2}{v\theta} - \frac{v E^2 E_x}{\theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v} H H_x \right) \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство по  $\dot{I} = R \times (0, T)$ ,  $R = (-\infty, \infty)$ .

$$\int \left\{ \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v H^2 + \frac{1}{2} v E^2 + (v - \ln v - 1) + (\theta - \ln \theta - 1) \right\} dx +$$

$$+ \int_0^t \left[ \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} + \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{E_x E^2 v}{\theta} \right] dx d\tau =$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{2} u_0^2 + \frac{1}{2} v_0 H_0^2 + \frac{1}{2} v_0 E_0^2 + (v_0 - \ln v_0 - 1) + (\theta_0 - \ln \theta_0 - 1) \right\} dx$$

Учитывая условия теоремы, выводим оценку (5). Лемма 1 доказана.

Следуя [1, с.77], разобьем числовую ось  $R$  и соответственно полосу  $\dot{I}$  на конечные отрезки и прямоугольники при  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_N, \quad \dot{I} = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{Q}_N, \quad \Omega_N = \{x \mid N < x < N+1\}, \quad Q_N = \Omega_N \cdot (0, T).$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (5) функции  $(v - \ln v - 1)$ ,  $(\theta - \ln \theta - 1)$  неотрицательны при  $v > 0$ ,  $\theta > 0$ , то

$$U_N(t) + \int_0^t W_N(\tau) d\tau \leq N_1, \tag{6}$$

где интегралы в определении  $U_N$  и  $W_N$  берутся по  $\Omega_N$ .

Из (6) следуют оценки [1, с.78]

$$\int_N^{N+1} v(x, t) dx \leq N_2, \quad \int_N^{N+1} \theta(x, t) dx \leq N_3, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что при любом  $t \in [0, T]$  в каждой области  $\bar{\Omega}_N$  существуют точки  $a(t) = a_N(t) \in [N, N+1]$ ,  $a_1(t) = a_{1N}(t) \in [N, N+1]$  такие, что

$$\tilde{N}_1^{-1} \leq v(a(t), t) \leq \tilde{N}_1, \quad \tilde{N}_2^{-1} \leq \theta(a_1(t), t) \leq \tilde{N}_2. \tag{8}$$

Умножим уравнение напряженности электрического поля (1.e) на  $E$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial E^3}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

После интегрирования по  $\dot{I} = R \cdot (0, T)$ , из условий теоремы вытекает оценка

$$\int E^2(x, t) dx \leq N_4. \tag{10}$$

Проинтегрируем уравнение (9) по  $\delta$  от  $-\infty$  до произвольного  $\delta \in R$ , а затем по  $t$ . Используя (10), находим

$$\int_0^t E^3(x, \tau) d\tau \leq N_5.$$

Применяя неравенство Гельдера, выводим

$$\int_0^t E^2(x, \tau) d\tau \leq N_6, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{11}$$

Из уравнений системы (1.a) и (1.b), рассуждая аналогично [6, с.133], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников  $\bar{Q}_N$ .

$$B(x,t) = \exp \left\{ \int_{a(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi,t)) d\xi + \int_0^t \frac{E^2}{2}(x,\tau) d\tau \right\}, \quad (12)$$

$$\text{где } I(t) = v_0(a(t)) \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\theta}{v} + \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) (a(t), \tau) d\tau \right\}.$$

Из оценок (5), (11) следует

$$0 < C_3^{-1} \leq B(x,t) \leq C_3, \quad \forall (x,t) \in Q_N. \quad (13)$$

Из (12) после интегрирования по  $\Omega_N$  и применения леммы Гронуолла [1, с.33] с учетом оценок (5), (13), аналогично [6, с.134], выводится оценка

$$0 < C_4^{-1} \leq I(t) \leq C_4, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (14)$$

Пусть  $h(x,t)$  – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{|x| < \infty} h(x,t), \quad m_h(t) = \min_{|x| < \infty} h(x,t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$m_\theta(t) \geq N_7, \quad m_\theta(t) \geq N_8, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Доказательство.* Из (12) – (14) выводим ограниченность снизу удельного объема. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности (1.c). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$\int_0^t \int \left( \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{vE^2 E_x}{\theta^{1/2}} \right) dx d\tau \leq N_9, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (15)$$

*Доказательство.* Справедливо неравенство

$$\frac{|\theta^{1/2} - 1|}{\sqrt{\theta - \ln\theta - 1}} < \tilde{N}_5, \quad \forall (x,t) \in \Pi. \quad (16)$$

Умножим уравнение (1.c) на  $\left( \frac{1}{\theta^{1/2}} - \frac{1}{\theta} \right)$  и проинтегрируем по  $R$ .

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{2} \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{vE^2 E_x}{\theta^{1/2}} \right) dx &= 2 \frac{d}{dt} \int (\theta^{1/2} - \ln\theta^{1/2} - 1) dx + \\ &+ \int \left\{ \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} + \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{vE^2 E_x}{\theta} \right\} dx + \int \frac{\theta^{1/2} - 1}{v} u_x dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим последний интеграл в правой части (17). Для этого разобьем числовую ось на две области  $R = \sigma_1(t) \cup \sigma_2(t)$ , где

$$\sigma_1(t) = \{x \in R : v(x,t) \geq C_5^2 N_1 N_2\}, \quad \sigma_2(t) = \{x \in R : N_7 \leq v(x,t) < C_5^2 N_1 N_2\}.$$

Заметим, что если  $\tilde{N}_5^2 N_1 N_2 \leq N_7$ , то  $R$  совпадает с областью  $\sigma_1(t)$ .

$$\int \frac{\theta^{1/2}-1}{v} u_x dx = \int_{\sigma_1(t)} \frac{\theta^{1/2}-1}{v} u_x dx + \int_{\sigma_2(t)} \frac{\theta^{1/2}-1}{v} u_x dx = I_1 + I_2.$$

Оценим каждое  $I_k$  ( $k=1,2$ ).

$$I_1 = \int_{\sigma_1(t)} \frac{\theta^{1/2}-1}{\sqrt{\theta-\ln\theta-1}} \sqrt{\theta-\ln\theta-1} \frac{\theta^{1/4} u_x}{\theta^{1/4} v} dx \leq \tilde{N}_5 \frac{M_\theta^{1/4}(t)}{\min_{\sigma_1(t)} v^{1/2}(x,t)} \left( \int (\theta - \ln\theta - 1) dx \right)^{1/2} \left( \int \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \leq \frac{M_\theta^{1/4}(t)}{N_2^{1/2}} \left( \int \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим отрезок  $\bar{\Omega}_N = [N, N+1]$ . Возьмем точки  $a_1(t)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_N$ , учитывая (8).

$$\theta^{1/4}(x,t) = \theta^{1/4}(a_1(t),t) + \frac{1}{4} \int_N^{N+1} \frac{\theta_x}{\theta^{3/4}} dx \leq \tilde{N}_2^{1/4} + \frac{1}{4} \left( \int_N^{N+1} \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \left( \int_N^{N+1} v dx \right)^{1/2}$$

Отсюда, используя (7), получим

$$\max_{\bar{\Omega}_N} \theta^{1/4}(x,t) \leq \tilde{N}_2^{1/4} + \frac{1}{4} N_2^{1/2} \left( \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \tag{18}$$

Возвращаясь к  $I_1$  и применяя неравенства Коши и Юнга с  $0 < \delta < 1$ , имеем

$$I_1 \leq \left( \delta + \frac{1}{8} \right) \int \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + \frac{1}{8} \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + C_6.$$

Теперь рассмотрим область  $\sigma_2(t)$ . Применим неравенства Коши, Юнга и (7).

$$\max_{\sigma_2(t) \cap \bar{\Omega}_N} \theta^{1/4} \leq \tilde{N}_2^{1/4} + \left( \int_N^{N+1} \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \left( \int_N^{N+1} v\theta^{1/2} dx \right)^{1/2} \leq C_7 \left[ 1 + \left( \int_N^{N+1} \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \right].$$

$$I_2 \leq \frac{C_5 N_1^{1/2}}{N_7^{1/2}} \max_{\sigma_2(t)} \theta^{1/4}(x,t) \left( \int \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \leq \delta \int \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + C_\delta \left[ \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx + 1 \right].$$

Справедливо неравенство [5, с.345].

$$\int (\theta^{1/2} - \ln\theta^{1/2} - 1) dx \leq C_8 \int (\theta - \ln\theta - 1) dx.$$

Оценки для  $I_k$  подставим в (17). Полученное неравенство проинтегрируем по  $t$ . После не-

которых преобразований, выбирая  $\delta < \frac{7}{16}$  и учитывая условия теоремы, оценку (5), выводим (15). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$M_v(t) \leq N_{10}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. С учетом (7), (8) имеем

$$\max_{\Omega_N} \theta(x, t) \leq \tilde{N}_2 + \int_N^{N+1} |\theta_x| dx \leq \tilde{N}_2 + \left( \int_N^{N+1} \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \left( \int_N^{N+1} v\theta^2 dx \right)^{1/2}$$

или  $M_\theta(t) \leq \tilde{N}_2 + N_3^{1/2} A^{1/2}(t) M_\theta^{1/2}(t) M_v^{1/2}(t)$ , где  $A(t) = \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx$ .  
Применяя неравенство Юнга с  $0 < \varepsilon < 1$ , находим

$$M_\theta(t) \leq C_\varepsilon A(t) M_v(t) + C_9. \quad (19)$$

Оценим  $M_H^2(t)$ , используя (6), (18).

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_N} H^2(x, t) &\leq C_{10} + 2 \int_N^{N+1} |HH_x| dx \leq C_{10} + 4N_1^{1/2} \left( \int_N^{N+1} \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \max_{\Omega_N} \theta^{1/4}(x, t) \leq \\ &\leq C_{10} + 4N_1^{1/2} \left( \int \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \left( C_2^{1/4} + \frac{N_2^{1/2}}{4} \left( \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши, выводим

$$M_H^2(t) \leq C_{11} \left[ \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + \int \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + 1 \right]. \quad (20)$$

Из представления (12), с учетом (13), (14), (19), вытекает неравенство

$$M_v(t) \leq C_{12} \left[ 1 + \int_0^t (A(\tau) + M_H^2(\tau)) M_v(\tau) d\tau \right].$$

Применение леммы Гронуолла с учетом (5), (15), (20) дает ограниченность удельного объема. Лемма 4 доказана.

Рассуждая аналогично, можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Единственность показывается стандартным методом – составлением однородного уравнения для разности двух возможных решений. Теорема полностью доказана.

### Литература

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319с.
2. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301с.
3. Ватажин А.Б. и др. Электрогазодинамические течения. – М.: Наука, 1983. – 344с.
4. Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Краевая задача для уравнений магнитной газовой динамики с учетом электрического поля // Инновации в науке, Новосибирск. – 2016. – № 2(51) – С.22–35.
5. Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29, № 2. – С.337–348.
6. Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа // Дифференц. уравнения. – 1990. – Вып.97. – С.124–145.