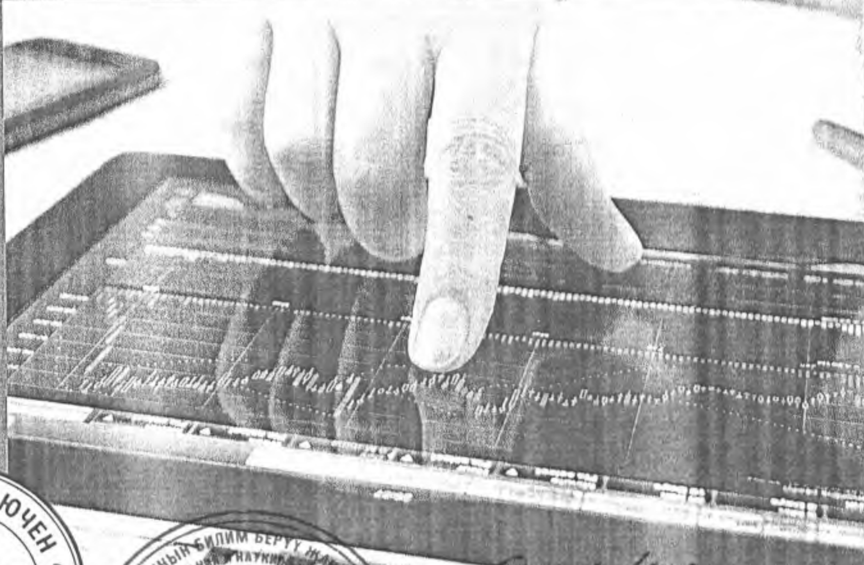
СибАК
www.sibac.info

ISSN 2308-6009
9 772308 600541 >

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО МАТЕРИАЛАМ LIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ИННОВАЦИИ В НАУКЕ



СБОРНИК ВКЛЮЧЕН В НАУКОМЕТРИЧЕСКУЮ БАЗУ РИНЦ

№ 2 (51)

Оглавление

СЕКЦИЯ

«МАТЕМАТИКА»

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Искендерова Джамиля Абыкаевна

д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой естественно-научных дисциплин, доц. Международной академии управления, права, финансов и бизнеса, Кыргызская Республика, г. Бишкек

E-mail: iskenja_2005@mail.ru

Токторбаев Айбек Мамадалиевич

преподаватель кафедры программирования Ошского государственного университета, Кыргызская Республика, г. Ош

E-mail: ain7@list.ru

BOUNDARY PROBLEM FOR EQUATIONS OF MAGNETIC GAS DYNAMICS WITH ELECTRIC FIELD

Dzhamilia Iskenderova

doctor of Sciences, Head of natural-science disciplines department, assistant professor of International Academy of management, right, finances and business, Kyrgyzstan, Bishkek

Aibek Toktorbaev

teacher of programming department of Osh State University, Kyrgyzstan, Osh

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается математическая модель электро-газодинамики (ЭГД), описывающая двухкомпонентную среду,

состоящую из нейтрального газа и положительных ионов q>0 [2; 3]. Исследуется однозначная разрешимость в «целом» по времени одномерных уравнений, описывающих ЭГД – течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля. Доказательство теоремы существования единственного обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

ABSTRACT

In the article the mathematical model elektrogazodinamics (EGD), which describes a two-component medium consisting of neutral gas and positive ions q> 0, [2; 3]. We study the unique solvability in the "whole" for the time of one-dimensional equations describing EGD – flow for viscous heat-conducting gas, taking into account the magnetic field. The proof of the theorems existence of a unique generalized solution is based on the method of a priori estimates.

Ключевые слова: скорость; плотность; температура; магнитное поле; электрическое поле; обобщенное решение; априорные оценки; существование.

Keywords: speed; density; temperature; magnetic field; electric field; generalized solution; apriori estimates; existence.

Введение.

Актуальность теоретического исследования моделей механики сплошной среды и, в частности, гидродинамики, газодинамики, обусловлена их широким применением в решении важных практических задач.

Математическая особенность изучаемых систем уравнений, помимо их нелинейности, связана с тем, что это системы составного типа. Данное обстоятельство диктует необходимость разрабатывать для каждой конкретной системы соответствующую методику исследования, так как общая теория уравнений составного типа, даже линейных, развита еще недостаточно полно. Своеобразие отдельных моделей проявляется при получении априорных оценок для решения краевых задач.

Разрешимость одномерных уравнений, описывающих ЭГД-течение вязкого теплопроводного газа при отсутствии магнитного поля, были изучены в [6]. Начально-краевая задача для уравнений магнитной газовой динамики при отсутствии электрического поля исследовались в [4].

В настоящей работе доказывается однозначная разрешимость в «целом» по времени одномерных уравнений, описывающих ЭГД – течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля.

Известно, что в одномерных нестационарных задачах вязкой газовой динамики априорные оценки удобнее всего получать в массовых лагранжевых координатах. Введение их описано в [1, с. 46].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Система уравнений магнитной ЭГД в массовых лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad v=\frac{1}{\rho}, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_e H\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon E\frac{\partial E}{\partial x}, \quad p=r\frac{\theta}{v}, \tag{1. b}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{v}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\\ +\mu_e\mu_H\frac{\mu_e\mu_H}{v}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+b\varepsilon vE^2\frac{\partial E}{\partial x},\end{gathered} \tag{1.c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}vH=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_H}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{1.d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-bE\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.e}$$

Здесь u, ρ, v, θ, p, H, E – соответственно скорость, плотность, удельный объем, температура, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля. Коэффициенты $\mu,\varepsilon,\lambda,\mu_e,\mu_H,b, r$ – положительные постоянные.

Рассмотрим задачу о движении вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного и электрического полей в области $Q=\{\ (x,t):\ 0<x<1,\ \ 0<t<T\ \}$ с непроницаемым диэлектрическими стенками.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{gathered}u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,\ H\big|_{x=0}=H\big|_{x=1}=\\ =0,\ \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ E\big|_{x=0}=\left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_{x=0}=0\end{gathered} \tag{2}$$

В начальный момент времени $t=0$ распределение скорости, удельного объема, температуры и напряженностей предполагается известным:

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad \mathrm{v}\big|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x),\quad \theta\big|_{t=0}=\theta_0(x),$$
$$E\big|_{t=0}=E_0(x),\quad H\big|_{t=0}=H_0(x),\tag{3}$$

причем $0<m_0\le\left(\mathrm{v}_0(x),\theta_0(x)\right)\le M_0<\infty,\quad x\in\Omega$.

Можно считать, что начальный удельный объем обладает свойством:

$$\int_0^1 \mathrm{v}_0(x)dx=1.\tag{4}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1) – (3) называется совокупность функций $(\mathrm{v},u,\theta,H,E)$,

$$\left(\mathrm{v}(t),\,E(t)\right)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),\qquad (\mathrm{v}_t,\ u_t,\ \theta_t,\ H_t,\ E_t\ )\in L_2(Q),$$
$$\left(u(t),\ \theta(t),\ H(t)\ \right)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega)),$$
$$Q=\Omega\times(0,T),\ \Omega=(0,1),$$

удовлетворяющих уравнениям (1.a) –(1.e) почти всюду в Q и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

ТЕОРЕМА. Пусть начальные данные (3) обладают следующими свойствами гладкости:

$$(\ \mathrm{v}_0,\ u_0,\ \theta_0,\ H_0,\ E_0\ )\in W_2^1(\Omega),$$
$$u_0(0)=u_0(1)=0,\ H_0(0)=H_0(1)=0,\ E_0(0)=E_0'(0)=0,\ E_0'(x)\ge 0.$$

Тогда в области $Q=\Omega\times(0,T)$ с любым конечным T существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3), причем $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проводится методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. Локальная теорема существования доказывается аналогично [1, с. 68; 5, с. 346]. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ.

Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Предположим, что существует решение задачи (1) – (3).

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны. Из [6, с. 129] имеем, что

$$E_x \geq 0,\ \forall (x,t) \in Q. \tag{5}$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\int_0^1 \mathrm{v}(x,t)dx = 1, \tag{6}$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\mathrm{v}H^2 + \frac{1}{2}\mathrm{v}E^2 + (\mathrm{v} - \ln \mathrm{v} - 1) + (\theta - \ln\theta - 1) \right\} dx +$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \left[\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta} + \frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta} + \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} + \frac{\mathrm{v}E^2 E_x}{\theta} \right] dx d\tau \leq N_1. \tag{7}$$

Доказательство. Непосредственно из уравнения неразрывности системы (1.a) и (4) вытекает (6). Умножим уравнение (1.a) на $\left(\frac{1}{2}E^2 + 1 - \frac{1}{\mathrm{v}}\right)$, (1. b) на u, (1.c) на $\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$, (1.d) на H, (1.e) на $E\mathrm{v}$.

$$\frac{E^2}{2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{v} - \ln \mathrm{v} - 1) = \frac{1}{2}E^2 u_x + u_x - \frac{1}{\mathrm{v}}u_x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u u_x}{v}\right) - \frac{1}{v}u_x^2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\theta}{v}\right) + \frac{\theta}{v}u_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{2}u\right) + \frac{H^2}{2}u_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}E^2\right) - \frac{E^2}{2}u_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta - \ln\theta - 1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_x}{v} - \frac{\theta_x}{v\theta}\right) - \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} - \frac{\theta}{v}u_x + \frac{u_x}{v} + \frac{u_x^2}{v} - \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v} - \frac{H_x^2}{v\theta} + vE^2E_x - \frac{vE^2E_x}{\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}vH^2\right) = -\frac{H^2}{2}u_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}HH_x\right) - \frac{H_x^2}{v},$$

$$\frac{1}{2}v\frac{\partial E^2}{\partial t} = -vE^2E_x.$$

Сложим и проинтегрируем по $Q = \Omega \times (0,t)$.

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}vH^2 + \frac{1}{2}vE^2 + (v - \ln v - 1) + (\theta - \ln\theta - 1) \right\} dx +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 \left[\frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} + \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{E_x E^2 v}{\theta} \right] dx d\tau =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}u_0^2 + \frac{1}{2}v_0 H_0^2 + \frac{1}{2}v_0 E_0^2 + (v_0 - \ln v_0 - 1) + (\theta_0 - \ln\theta_0 - 1) \right\} dx.$$

Учитывая условия теоремы, получим оценку (7). Лемма 1 доказана.

Из (7) следует оценка [1, с. 78].

$$\int_0^1 \theta\ (x,t)dx \le N_2, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (8)$$

Из (6) вытекает, что существует ограниченная измеримая функция $a(t)$ такая, что $v(a(t),t) = 1$, $\forall t \in [0,T]$.

Умножим уравнение напряженности электрического поля системы (1.e) на E и проинтегрируем по $Q = \Omega \times (0,T)$ [6, с. 131].

$$\frac{1}{2}\int_0^1 E^2\,dx+\frac{1}{3}\int_0^t E^3\Big|_{x=1}\,d\tau\le N_3\,. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (1.e) по Ω и по t, находим

$$\int_0^t E^2\Big|_{x=1}\,d\tau\le C_1\,.$$

Отсюда, с учетом (5), вытекает

$$\max_x E^2\in L_1(0,T)\,. \tag{10}$$

Из уравнений системы (1.a) и (1.b), рассуждая аналогично [6, с. 133], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями

$$\mathrm{v}(x,t)=I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[\mathrm{v}_0(x)+\int_0^t\left(\theta+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2\right)(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau]\,, \tag{11}$$

где:

$$B(x,t)=\exp\left\{\int_{a(t)}^{x}\left(u_0(\xi)-u(\xi,t)\right)d\xi+\int_0^t\frac{E^2}{2}(x,t)dt\right\},$$

$$I(t)=\mathrm{v}_0\left(a(t)\right)\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\theta}{\mathrm{v}}+\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{2}E^2\right)\left(a(t),t\right)dt\right\}.$$

Из оценок (7), (10) следует

$$0<C_2^{-1}\le B(x,t)\le C_2,\quad \forall(x,t)\in Q\,. \tag{12}$$

Из (11) после интегрирования по Ω и применения леммы Гронуолла [1, с. 33] с учетом оценок (7), (12), аналогично [6, с. 134], выводится оценка

$$0<C_3^{-1}\le I(t)\le C_3,\quad \forall t\in[0,T]\,. \tag{13}$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{0 \le x \le 1} h(x,t)\,, \; m_h(t) = \min_{0 \le x \le 1} h(x,t)\,.$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы справедливы оценки:

$$m_v(t) \ge N_4, \quad m_\theta(t) \ge N_5, \quad \forall\, t \in [0,T]\,. \tag{14}$$

Доказательство. Из (11) – (13) выводим ограниченность снизу удельного объема. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности (1.c). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{v\,E^2E_x}{\theta^{1/2}}\right)dx\,d\tau \le N_6\,. \tag{15}$$

Доказательство. Умножим уравнение теплопроводности (1.c) на $\frac{1}{\theta^{1/2}}$ и проинтегрируем по Ω.

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{v\,E^2E_x}{\theta^{1/2}}\right)dx = 2\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^{1/2}\,dx + \int_0^1 \frac{\theta^{1/2}}{v}\,u_x\,dx\,. \tag{16}$$

Оценим последний интеграл в правой части (16), используя неравенства Коши, Юнга. Для этого разобьем числовую ось на две области $\Omega = \sigma_1(t) \cup \sigma_2(t)$, где

$$\sigma_1(t) = \{x \in \Omega \,:\, v(x,t) \ge N_2\}, \;\; \sigma_2(t) = \{x \in \Omega \,:\, N_4 \le v(x,t) < N_2\}.$$

Заметим, что если $N_2 \le N_4$, то Ω совпадает с областью $\sigma_1(t)$.

$$\int_0^1 \frac{\theta^{1/2}}{v}u_x\,dx = \int_{\sigma_1(t)} \frac{\theta^{1/2}}{v}\,u_x\,dx + \int_{\sigma_2(t)} \frac{\theta^{1/2}}{v}\,u_x\,dx = I_1 + I_2\,.$$

Оценим каждое I_k ($k = 1,2$).

$$I_1 \le \left(\int\limits_{\sigma_1(t)} \frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\sigma_1(t)} \frac{\theta}{\mathrm{v}} dx \right)^{1/2} \max_{x\in\sigma_1(t)} \theta^{1/4}(x,t),$$

$$\max_{x\in\sigma_1(t)} \theta^{1/4}(x,t) \le N_2^{1/4} + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left| \frac{\theta_x}{\theta^{3/4}} \right| dx \le N_2^{1/4} + \frac{1}{4} \left(\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 \mathrm{v} dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда, с учетом (6), (8) имеем

$$I_1 \le \left[N_2^{1/4} + \frac{1}{4} \left(\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \right] \left(\int\limits_0^1 \frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\delta_1 + \frac{1}{8} \right) \int\limits_0^1 \frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta^{1/2}} dx + \frac{1}{8} \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx + C_4, \quad 0 < \delta_1 < \frac{1}{2}.$$

Теперь рассмотрим область $\sigma_2(t)$, используя (8).

$$\max_{\sigma_2(t)} \theta^{1/4}(x,t) \le N_2^{1/4} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 \mathrm{v}\theta^{1/2} dx \right)^{1/2} \le C_5 \left[1 + \left(\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} dx \right)^{1/2} \right].$$

Тогда

$$I_2 \le \delta_2 \int \frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta^{1/2}} dx + C_6 \left(\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} dx + 1 \right), \quad 0 < \delta_2 < \frac{1}{4}.$$

Оценки для I_k подставим в (16). Полученное неравенство проинтегрируем по t. С учетом (7) выводим (15). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$M_{\mathrm{v}}(t) \le N_7, \quad \forall\, t \in [0,T]. \qquad (17)$$

Доказательство. Из соотношения

$$M_\theta^{1/2}(t) \le N_2^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\theta_x}{\theta^{1/2}}\right| dx \le N_2^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \theta\, dx\right)^{1/2} M_v^{1/2}(t)$$

и (8) вытекает оценка

$$M_\theta(t) \le A(t)\, M_v(t) + C_7, \text{ где } A(t) = \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx. \tag{18}$$

Представление (11) с учетом оценок (12), (13), (18) дает неравенство

$$M_v(t) \le C_8\left[1 + \int_0^t \left(A(\tau) + M_H^2(\tau)\right) M_v(\tau)\, d\tau\right]. \tag{19}$$

Теперь оценим $M_H^2(t)$.

$$M_H^2(t) \le 2\int_0^1 |H\ H_x|\, dx \le 2\left(\int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v dx\right)^{1/2} M_\theta^{1/4}(t) \le$$

$$\le 2\left(\int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v dx\right)^{1/2} \left(N_2^{1/4} + \left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v dx\right)^{1/2}\right).$$

Используя (6) и неравенство Коши, находим

$$M_H^2(t) \le C_9\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + \int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + 1\right). \tag{20}$$

Подставим (20) в (19).

$$M_v(t) \le C_{10}\left[1 + \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx + \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + \int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + 1\right) M_v(\tau)\, d\tau\right].$$

Применяя лемму Гронуолла, с учетом оценок (7), (15) выводим ограниченность удельного объема сверху. Лемма 4 доказана.

Из (18), (20) с учетом (15), (17) вытекает оценка

$$\int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau) \right) d\tau \le N_8, \ \forall t \in [0,T]. \tag{21}$$

ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Продифференцируем (1.e) по x, умножим на E_x и проинтегрируем по $Q = \Omega \times (0,T)$. После некоторых преобразований [6, с. 136] получим оценку

$$\max_{0 \le t \le T} \| E_x(t) \|^2 + \int_0^t \int_0^1 E_x^3 \, dx \, d\tau + \int_0^T E E_x^2 \Big|_{x=1} d\tau \le N_9. \tag{22}$$

Оценим $M_E^2(t)$, используя оценку (9), (22).

$$M_E^2(t) \le 2 \int_0^1 |E E_x| \, dx \le \| E(t) \|^2 + \| E_x(t) \|^2 \le N_{10}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{23}$$

Проинтегрируем уравнение (1.c) по Ω.

$$\int_0^1 \left(\frac{H_x^2}{\mathrm{v}} + \frac{u_x^2}{\mathrm{v}} + \mathrm{v} E^2 E_x \right) dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta \, dx + \int_0^1 \frac{\theta}{\mathrm{v}} u_x dx.$$

После интегрирования по t с учетом оценок (8), (14), (17), (21) и

$$\int_0^1 \frac{\theta}{\mathrm{v}} u_x dx \le \delta_3 \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 dx + C_{11} M_\theta, \quad 0 < \delta_3 < 1$$

выводим

$$\int_0^t \int_0^1 \left(H_x^2 + u_x^2 + E^2 E_x \right) dx d\tau \le N_{11}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{24}$$

Уравнение (1. b), преобразованное с учетом (1.a),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \ln \mathrm{v}}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}H^{2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}E^{2}\right),$$

умножим на $(\ln \mathrm{v})_x$ и проинтегрируем по Ω.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(\ln \mathrm{v})_x^2\,dx+\int_0^1\frac{\theta}{\mathrm{v}}(\ln \mathrm{v})_x^2\,dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 u(\ln \mathrm{v})_x\,dx+$$

$$+\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}u_x^2\,dx+\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}\theta_x(\ln \mathrm{v})_x\,dx+\int_0^1 H H_x(\ln \mathrm{v})_x\,dx-\int_0^1 E E_x(\ln \mathrm{v})_x\,dx. \tag{25}$$

Оценим интегралы в правой части (25), используя неравенства Юнга, Коши, неравенства вложения, оценки (8), (14), (17).

$$\left|\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}\theta_x(\ln \mathrm{v})_x\,dx\right|\le\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1(\ln \mathrm{v})_x^2\,dx\right)^{1/2}\frac{M_\theta^{3/4}(t)}{m_{\mathrm{v}}^{1/2}(t)}\le$$

$$\le C_{12}\left(\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx\right)\|(\ln \mathrm{v}\psi)_x\|^2+M_\theta^{3/2}(t)\right)\le C_{13}\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx+1\right)\left(\|(\ln \mathrm{v}\psi)_x\|^2+1\right).$$

Здесь

$$M_\theta^{3/2}(t)\le C_{14}\left(1+\int_0^1\frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx\right),$$

так как

$$M_\theta^{3/4}(t)\le N_2^{3/4}+\frac{3}{4}\int_0^1\left|\frac{\theta_x}{\theta^{1/4}}\right|dx\le C_{15}\left(1+\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx\right)^{1/2}\right).$$

Далее,

$$\left|\int H H_x(\ln \mathrm{v})_x\,dx\right|\le\frac{1}{2}M_H^2(t)+\frac{1}{2}\|H_x\|^2\|(\ln \mathrm{v}\psi)_x\|^2,$$

$$\left|\int E E_x (\ln v)_x \, dx\right| \le \frac{1}{2} M_E^2(t) + \frac{1}{2} \| E_x \|^2 \|(\ln v\psi)_x\|^2 .$$

С учетом полученных оценок из (25) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\ln v)_x^2 \, dx + \int_0^1 \frac{\theta}{v}(\ln v)_x^2 \, dx \le \frac{d}{dt}\int_0^1 u(\ln v)_x dx + \int_0^1 \frac{1}{v} u_x^2 \, dx +$$

$$+ C_{16}\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + \| H_x \|^2 + \| E_x \|^2 + 1\right)\left(\|(\ln v\psi)_x\|^2 + 1\right) + M_H^2(t) + M_E^2(t).$$

Проинтегрируем полученное неравенство по t с учетом (7), (15), (21)-(24), условий теоремы и оценки

$$\int u(\ln v)_x \, dx \le C_\gamma + \gamma \| (\ln v)_x \|^2, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}.$$

После применения леммы Гроноулла получим

$$\max_{0\le t\le T} \| (\ln v)_x \|^2 \le N_{12}.$$

Отсюда, с учетом (17), выводим оценку

$$\max_{0\le t\le T} \| v_x \|^2 \le N_{13}.$$

Умножим уравнение (1.d)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{v^3}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{v} H \frac{\partial u}{\partial x}$$

на H_{xx} и проинтегрируем по $Q = \Omega \times (0,T)$. После некоторых преобразований находим оценку

$$\max_{0\le t\le T} \| H_x(t) \|^2 + \int_0^T \| H_{xx}(t) \|^2 dt \le N_{14}.$$

Рассуждая аналогично, можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Единственность показывается стандартным методом – составлением однородного уравнения для разности двух возможных решений.

Теорема полностью доказана.

Список литературы:

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
2. Бай Ши – и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
3. Ватажин А.Б. и др. Электрогазодинамические течения. – М.: Наука, 1983. – 344 с.
4. Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. Корректность и приближенные методы для модели магнитной газовой динамики // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1986. – № 6. – С. 82–84.
5. Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 337–348.
6. Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа // Динамика сплошной среды. – 1990. – Вып. 97. – С. 124–145.