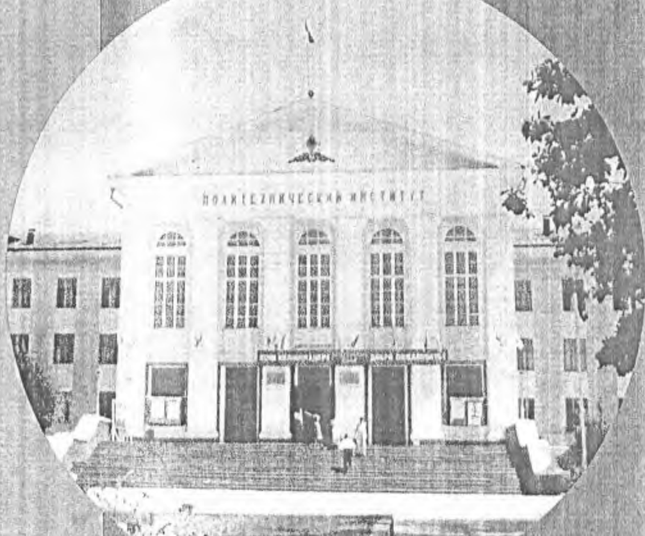
Теоретический и прикладной научно-технический журнал

ISSN 1694-5557

ИЗВЕСТИЯ

Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова

№ 3 (39), часть I



БИШКЕК 2016

№ п/п

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

2. Барышников В.С. Механизм ионизации F_2-центров в лазерных средах на ос
кристаллов LiF / В.С.Барышников, Т.А.Колесников, С.В.Дорохов //Спектроскопия твер
тела.- 2000.- т.89.- №1.- С.70-75.

3. Исследование радиационных дефектов фторида натрия, активированных цери
ураном. Лозовских А. А.. Дис. канд. физ-мат. наук. Бишкек.- 2003.- С.130.

4. Chandra A. Impurity effects on the ionization states of F- aggregate color cent
sodium fluoride. J. Chem.Phys., 1969, v. 51, N4, p.1499-1509.

5. Forbzentrenassoziate mit (100)- symmetrie (F und B-zentren) / Luti F. // Z. Phy
1961. - Bd.165. - №1. – S.17-33.

6. Kinetics and mechanisms of room temperature F- light bleaching in irradiated N
Jaque F, Agullo-Lopez F. // Crystal Lattice Def. – 1974. - V.5. - №1. - P.65-71.

7. Kinetics and mechanisms of room temperature F- light bleaching in irradiated N
Jaque F, Agullo-Lopez F. // Crystal Lattice Def. – 1974. - V.5. - №1. - P.65-71.

8. Optical spectra of M-, F_3^+- singlet, F_3^+- triplet centers in NaF / Elsasser K., Seide
Phys. Stat. sol (b). - 1971. - V.43. - №1. -P.301-305.

УДК 517.957

НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗО ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Искендерова Джамиля Абыкаевна. *Д. ф.-м.н., профессор Международной академии управления, права, финансов и бизнеса, г.Бишкек, Кыргызстан.*
e-mail: iskenja_2005@mail.ru
Токторбаев Айбек Мамадалиевич. *Преподаватель кафедры программирования Ошског государственного университета, г.Ош, Кыргызстан. e-mail: ain7@list.ru*

Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одноме нестационарное течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитног электрического полей. Изучается начально-краевая задача с неоднородными гранич значениями для температуры. Доказательство теоремы существования единствен обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

Ключевые слова: скорость; плотность; температура; магнитное поле; электриче поле; обобщенное решение; априорные оценки; существование.

INHOMOGENEOUS PROBLEM FOR EQUATIONS OF MAGNETIC GAS DYNAMI WITH ELECTRIC FIELD

Iskenderova Dzhamilia. *Doctor of Sciences, professor of International Academy of manage right, finances and business, Bishkek, Kyrgyzstan*
Toktorbaev Aibek. *Teacher of programming department of Osh State University, Osh, Kyrgyzs*

The system of differential equations describing one-dimensional nonstationary flow viscous heat-conducting gas in the magnetic and electric fields is considered. An initial-bou value problem with inhomogeneous boundary values for temperature is study. The proof o theorem existence of a unique generalized solution is based on the method of a priori estimates.

Keywords: speed; density; temperature; magnetic field; electric field; generalized solu a priori estimates; existence.

Верно акк:
кулуктуу
М. Байсубанов

Система уравнений магнитной электрогазодинамики в массовых лагранжевых [координ]атах имеет вид [2, 3]:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho},\tag{1.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_e H\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon E\frac{\partial E}{\partial x},\quad p=r\frac{\theta}{\mathrm{v}},\tag{1.b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu_e\mu_H}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+b\varepsilon \mathrm{v}E^2\frac{\partial E}{\partial x},\tag{1.c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{v}H=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_H}{\mathrm{v}}\frac{\partial H}{\partial x}\right),\tag{1.d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-bE\frac{\partial E}{\partial x},\tag{1.e}$$

Здесь u, ρ, v, θ, p, H, E – соответственно скорость, плотность, удельный объем, [тем]пература, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического [поля]. Коэффициенты $\mu,\varepsilon,\lambda,\mu_e,\mu_H,b,r$ – положительные постоянные.

Рассмотрим движение смеси в области: $Q=\{(x,t):x\in\Omega,\ 0<t<T\}$, $\Omega=(0;1)$. [Искомые] функции удовлетворяют граничным условиям:

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=H\big|_{x=0}=H\big|_{x=1}=0,\quad E\big|_{x=0}=\frac{\partial E}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0\tag{2}$$

$$\frac{\lambda}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_0(t),\qquad \frac{\lambda}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=1}=q_1(t),$$

$$q_i(t)\in W_2^1(0,T),\quad q_0(t)\le 0,\quad q_1(0)\ge 0,\quad i=0,1.$$

В начальный момент $t=0$ все характеристики среды известны:

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad \mathrm{v}\big|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x),\quad \theta\big|_{t=0}=\theta_0(x),\quad E\big|_{t=0}=E_0(x),\quad H\big|_{t=0}=H_0(x),\tag{3}$$

[причем] $0<m_0\le(\mathrm{v}_0(x),\theta_0(x))\le M_0<\infty,\quad x\in\Omega.$

Можно считать, что начальный удельный объем обладает свойством:

$$\int_0^1 \mathrm{v}_0(x)dx=1.\tag{4}$$

[ОП]РЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется совокупность функций $(\mathrm{v},u,\theta,H,E)$,

$$(\mathrm{v}(t),\,E(t))\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),$$

$$(u(t),\theta(t),\,H(t))\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega)),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t},\frac{\partial \theta}{\partial t},\frac{\partial H}{\partial t},\frac{\partial E}{\partial t}\right)\in L_2(Q),\qquad \Omega=(0,1),\ \ Q=\Omega\times(0,T),$$

[удов]летворяющих уравнениям (1.a) – (1.e) почти всюду в Q и принимающих заданные [гра]ничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

[ТЕ]ОРЕМА. Пусть начальные данные (3) обладают следующими свойствами гладкости:

$$(\mathrm{v}_0,u_0,\theta_0,H_0,\,E_0)\in W_2^1(\Omega),$$

$$u_0(0)=u_0(1)=0,\ H_0(0)=H_0(1)=0,\ E_0(0)=E_0'(0)=0,\ E_0'(x)\ge 0.$$

Тогда в области $Q=\Omega\times(0,T)$ с любым конечным T существует единстве обобщенное решение задачи (1)-(3), причем $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ – строго положител ограниченные функции.

Доказательство теоремы проводится методом априорных оценок. Выво; глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых за только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промеж существования локального решения. Локальная теорема существования доказыв аналогично [1, 6]. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное реш продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0<T<\infty$.

Приступим к выводу глобальных априорных оценок. Не ограничивая общн примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Предположим существует решение задачи (1)-(3).

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что фун $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны. Из [6] имеем, что

$$E_x\ge 0,\ \forall(x,t)\in Q.$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\int_0^1 \mathrm{v}(x,t)dx=1,$$

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+\theta\right\}dx\le N_1.$$

Доказательство. Непосредственно из уравнения неразрывности системы (1.a) и (4) выт (6). Умножим уравнение (1.a) на $\frac{1}{2}E^2$, (1. b) на u, (1.d) на H, (1.e) на $E\mathrm{v}$.

$$\frac{E^2}{2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}=\frac{1}{2}E^2u_x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u u_x}{\mathrm{v}}\right)-\frac{1}{\mathrm{v}}u_x^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)+\frac{\theta}{\mathrm{v}}u_x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{2}u\right)+\frac{H^2}{2}u_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}E^2\right)-\frac{1}{2}E^2u$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2\right)=-\frac{H^2}{2}u_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}HH_x\right)-\frac{H_x^2}{\mathrm{v}},$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}\frac{\partial E^2}{\partial t}=-\mathrm{v}E^2E_x.$$

Сложим с (1.c) и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,t)$.

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+\theta\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}_0H_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}_0E_0^2+\theta_0\right\}dx+\int_0^t(q_1(\tau)-q_0(\tau))d\tau.$$

Учитывая условия теоремы, получим оценку (7). Лемма 1 доказана.

Из (6) вытекает, что существует ограниченная измеримая функция $a(t)$ такая, что $v(a(t),t)=1,\ \forall t\in[0,T]$.

Умножим уравнение напряженности электрического поля системы (1.е) на E и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,T)$.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 E^2\,dx+\frac{1}{3}\int_0^t E^3\Big|_{x=1}\,d\tau\le N_2. \qquad (8)$$

Интегрируя уравнение (1.е) по Ω и по t, находим

$$\int_0^t E^2\Big|_{x=1}\,d\tau\le C_1.$$

Отсюда, с учетом (5), вытекает [6]:

$$\max_x E^2\in L_1(0,T). \qquad (9)$$

Из уравнений системы (1.а) и (1.b), рассуждая аналогично [1, 6], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями

$$v(x,t)=I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[v_0(x)+\int_0^t\left(\theta+\frac{1}{2}vH^2\right)(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau], \qquad (10)$$

где

$$B(x,t)=\exp\left\{\int_{a(t)}^x(u_0(\xi)-u(\xi,t))d\xi+\int_0^t\frac{E^2}{2}(x,t)dt\right\},$$

$$I(t)=v_0(a(t))\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\theta}{v}+\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{2}E^2\right)(a(t),t)dt\right\}.$$

Из оценок (7), (9) следует

$$0<C_2^{-1}\le B(x,t)\le C_2,\quad \forall(x,t)\in Q. \qquad (11)$$

Из (10) после интегрирования по Ω и применения леммы Гронуолла [1] с учетом оценок (7), (11), аналогично [6], выводится оценка

$$0<C_3^{-1}\le I(t)\le C_3,\ \ \forall t\in[0,T]. \qquad (12)$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t)=\max_{0\le x\le 1}h(x,t),\ \ m_h(t)=\min_{0\le x\le 1}h(x,t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы справедливы оценки:

$$m_v(t)\ge N_3,\quad m_\theta(t)\ge N_4,\quad \forall\, t\in[0,T]. \qquad (13)$$

Доказательство. Из (11) – (13) выводим ограниченность снизу удельного объема. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности (1.с). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}vH^2+\frac{1}{2}vE^2+(v-\ln v-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\left[\frac{u_x^2}{v\theta}+\frac{H_x^2}{v\theta}+\frac{\theta_x^2}{v\theta^2}+\frac{vE^2E_x}{\theta}\right]dxd\tau\le N_5. \qquad (14)$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.a) на $\left(\frac{1}{2}E^2+1-\frac{1}{v}\right)$, (1. b) на u, (1.c) на $\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$, (1.d) на H, (1.e) на $E\,v$. Сложим и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,T)$. Учитывая условия теоремы и ограниченность снизу температуры (13), получим оценку (14). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}+\frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}}+\frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}}+\frac{vE^2E_x}{\theta^{1/2}}\right)dxd\tau\le N_6. \quad (15)$$

Доказательство. Умножим уравнение теплопроводности (1.c) на $\frac{1}{\theta^{1/2}}$ и проинтегрируем по Ω.

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}+\frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}}+\frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}}+\frac{vE^2E_x}{\theta^{1/2}}\right)dx=$$

$$=2\frac{d}{dt}\int_0^1\theta^{1/2}\,dx+\int_0^1\frac{\theta^{1/2}}{v}u_x\,dx+\frac{q_1(t)}{\theta^{1/2}(1,t)}-\frac{q_0(t)}{\theta^{1/2}(0,t)}. \quad (16)$$

Оценим второй интеграл в правой части (16), используя неравенства Коши, Юнга. Для этого разобьем числовую ось на две области $\Omega=\sigma_1(t)\cup\sigma_2(t)$, где

$$\sigma_1(t)=\{x\in\Omega: v(x,t)\ge N_7\},\ \sigma_2(t)=\{x\in\Omega: N_3\le v(x,t)<N_7\}.$$

Заметим, что если $N_2\le N_4$, то Ω совпадает с областью $\sigma_1(t)$.

$$\int_0^1\frac{\theta^{1/2}}{v}u_x\,dx=\int_{\sigma_1(t)}\frac{\theta^{1/2}}{v}u_x\,dx+\int_{\sigma_2(t)}\frac{\theta^{1/2}}{v}u_x\,dx=I_1+I_2.$$

Оценим каждое I_k ($k=1,2$).

$$I_1\le\left(\int_{\sigma_1(t)}\frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_{\sigma_1(t)}\frac{\theta}{v}dx\right)^{1/2}\max_{x\in\sigma_1(t)}\theta^{1/4}(x,t),$$

$$\max_{x\in\sigma_1(t)}\theta^{1/4}(x,t)\le N_7^{1/4}+\frac{1}{4}\int_0^1\left|\frac{\theta_x}{\theta^{3/4}}\right|dx\le N_7^{1/4}+\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 vdx\right)^{1/2}.$$

Отсюда, с учетом (6), (7) имеем

$$I_1\le\left[N_7^{1/4}+\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx\right)^{1/2}\right]\left(\int_0^1\frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}}dx\right)^{1/2}\le$$

$$\le\left(\delta_1+\frac{1}{8}\right)\int_0^1\frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}}dx+\frac{1}{8}\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx+C_4,\quad 0<\delta_1<\frac{1}{2}.$$

Теперь рассмотрим область $\sigma_2(t)$, используя (7).

$$\max_{\sigma_2(t)}\theta^{1/4}(x,t)\le N_7^{1/4}+\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 v\theta^{1/2}dx\right)^{1/2}\le C_5\left[1+\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx\right)^{1/2}\right]$$

$$I_2 \le \delta_2 \int \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}}\,dx + C_6\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx + 1\right), \quad 0 < \delta_2 < \frac{1}{4}.$$

Оценки для I_k подставим в (16). Полученное неравенство проинтегрируем по t. С ...им (7), (13) выводим (15). Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$M_v(t) \le N_8, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{17}$$

Доказательство. Из соотношения

$$M_\theta^{1/2}(t) \le N_1^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\theta_x}{\theta^{1/2}}\right| dx \le N_1^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \theta\,dx\right)^{1/2} M_v^{1/2}(t)$$

...вытекает оценка

$$M_\theta(t) \le A(t)\,M_v(t) + C_7, \text{ где } A(t) = \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx. \tag{18}$$

Представление (10) с учетом оценок (11), (12), (18) дает неравенство

$$M_v(t) \le C_8\left[1 + \int_0^t \left(A(\tau) + M_H^2(\tau)\right)M_v(\tau)d\tau\right]. \tag{19}$$

Теперь оценим $M_H^2(t)$.

$$M_H^2(t) \le 2\int_0^1 |H\,H_x|\,dx \le 2\left(\int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 v dx\right)^{1/2} M_\theta^{1/4}(t) \le$$

$$\le 2\left(\int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 v dx\right)^{1/2}\left(N_2^{1/4} + \left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 v dx\right)^{1/2}\right).$$

Используя (6) и неравенство Коши, находим

$$M_H^2(t) \le C_9\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx + \int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}}dx + 1\right). \tag{20}$$

Подставим (20) в (19).

$$M_v(t) \le C_{10}\left[1 + \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx + \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx + \int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}}dx + 1\right)M_v(\tau)d\tau\right].$$

Применяя лемму Гронуолла, с учетом оценок (7), (15) выводим ограниченность ...льного объема сверху. Лемма 5 доказана.

Из (18), (20) с учетом (15), (17) вытекает оценка

$$\int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau)\right)d\tau \le N_9, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{21}$$

Продифференцируем (1.е) по x, умножим на E_x и проинтегрируем по ...$= \Omega \times (0,T)$. После некоторых преобразований [6] получим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\| E_x(t)\|^2 + \int_0^T\int_0^1 E_x^3\,dx\,d\tau + \int_0^T EE_x^2\Big|_{x=1}d\tau \le N_9. \tag{22}$$

Оценим $M_E^2(t)$, используя оценку (9), (22).

$$M_E^2(t) \le 2\int_0^1 |E\,E_x|\,dx \le \|E(t)\|^2 + \|E_x(t)\|^2 \le N_{10}, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (23)$$

Проинтегрируем уравнение (1.c) по Ω.

$$\int_0^1 \left(\frac{H_x^2}{\mathrm{v}} + \frac{u_x^2}{\mathrm{v}} + \mathrm{v}E^2 E_x \right) dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta\, dx + \int_0^1 \frac{\theta}{\mathrm{v}} u_x dx + q_1(t) - q_0(t).$$

После интегрирования по t с учетом оценок (7), (13), (17), (21) и

$$\int_0^1 \frac{\theta}{\mathrm{v}} u_x dx \le \delta_3 \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 dx + C_{11} M_\theta, \quad 0 < \delta_3 < 1$$

выводим

$$\int_0^t \int_0^1 \left(H_x^2 + u_x^2 + E^2 E_x \right) dx d\tau \le N_{11}, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (24)$$

Уравнение (1. b), преобразованное с учетом (1.a),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \ln \mathrm{v}}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta}{\mathrm{v}} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} H^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} E^2 \right),$$

умножим на $(\ln \mathrm{v})_x$ и проинтегрируем по Ω.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\ln \mathrm{v})_x^2\, dx + \int_0^1 \frac{\theta}{\mathrm{v}} (\ln \mathrm{v})_x^2\, dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 u (\ln \mathrm{v})_x dx +$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2\, dx + \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{v}} \theta_x (\ln \mathrm{v})_x dx + \int_0^1 H H_x (\ln \mathrm{v})_x\, dx - \int_0^1 E E_x (\ln \mathrm{v})_x\, dx.$$

(25)

Оценим интегралы в правой части (25), используя неравенства Юнга, Коши, неравенства вложения, оценки (7), (13), (17).

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{v}} \theta_x (\ln \mathrm{v})_x dx \right| \le \left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (\ln \mathrm{v})_x^2 dx \right)^{1/2} \frac{M_\theta^{3/4}(t)}{m_{\mathrm{v}}^{1/2}(t)} \le$$

$$\le C_{12}\left(\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx \right) \|(\ln \mathrm{v}\psi)_x\|^2 + M_\theta^{3/2}(t) \right) \le C_{13}\left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx + 1 \right)\left(\|(\ln \mathrm{v}\psi)_x\|^2 + 1 \right).$$

Здесь

$$M_\theta^{3/2}(t) \le C_{14}\left(1 + \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx \right),$$

так как

$$M_\theta^{3/4}(t) \le N_2^{3/4} + \frac{3}{4}\int_0^1 \left| \frac{\theta_x}{\theta^{1/4}} \right| dx \le C_{15}\left(1 + \left(\int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2} \right).$$

Далее,

$$\left| \int H H_x (\ln \mathrm{v})_x\, dx \right| \le \frac{1}{2} M_H^2(t) + \frac{1}{2}\|H_x\|^2 \|(\ln \mathrm{v}\psi)_x\|^2,$$

$$\left|\int E\,E_x(\ln v)_x\,dx\right| \le \frac{1}{2}M_E^2(t)+\frac{1}{2}\|E_x\|^2\|(\ln v\psi)_x\|^2.$$

етом полученных оценок из (25) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(\ln v)_x^2\,dx+\int_0^1\frac{\theta}{v}(\ln v)_x^2\,dx \le \frac{d}{dt}\int_0^1 u(\ln v)_x dx+\int_0^1\frac{1}{v}u_x^2\,dx+$$

$$+C_{16}\left(\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}}dx+\|H_x\|^2+\|E_x\|^2+1\right)\left(\|(\ln v\psi)_x\|^2+1\right)+M_H^2(t)+M_E^2(t).$$

Проинтегрируем полученное неравенство по t с учетом (7), (15), (21)-(24), условий мы и оценки

$$\int u(\ln v)_x\,dx \le C_\gamma+\gamma\|(\ln v)_x\|^2,\quad 0<\gamma<\frac{1}{2}.$$

После применения леммы Гронуолла получим

$$\max_{0\le t\le T}\|(\ln v)_x\|^2 \le N_{12}.$$

Отсюда, с учетом (17), выводим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|v_x\|^2 \le N_{13}.$$

Умножим уравнение (1.d)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\frac{1}{v^3}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{1}{v}H\frac{\partial u}{\partial x}$$

H_{xx} и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,T)$. После некоторых преобразований находим ку

$$\max_{0\le t\le T}\|H_x(t)\|^2+\int_0^T\|H_{xx}(t)\|^2\,dt \le N_{14}.$$

Рассуждая аналогично, можно получить все априорные оценки, необходимые для зательства теоремы. Единственность показывается стандартным методом – шением однородного уравнения для разности двух возможных решений.

ема полностью доказана.

Выводы. Исследована задача, которая возникает непосредственно из приложений. льтаты могут быть использованы при исследовании качественных свойств решений нений газовой динамики. Полученные оценки могут быть полезны в дальнейшем при роении численных методов.

Список литературы

1. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / Антонцев, А.В Кажихов, В.Н. Монахов.– Новосибирск: Наука,1983. – 319с.
2. Бай Ши - и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
3. Ватажин А.Б.и др. Электрогазодинамические течения. – М.: Наука, 1983. – 344с.
4. Искендерова Д.А. Краевая задача для уравнений магнитной газовой динамики с том электрического поля / Д.А Искендерова, А.М. Токторбаев // Инновации в науке. бАК. 2016.- №2(51)– С. 22-35.
5. Смагулов Ш.С. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики / Смагулов, А.А. Дурмагамбетов, Д.А. Искендерова // Дифференциальные уравнения. – – Т.29.- № 2. – С.337–348.

6. Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа /Н.Т. Файзуллина // Динамика сплошной среды. – 1990. – Вып.97. – С.124–145.

УДК 519.63; 519.684

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА В РЕСПИРАТОРНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

***Исахов Алибек Абдиашимович**, доктор PhD, доцент, Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71*
e-mail: alibek.issakhov@gmail.com
***Абылкасымова Айжан Болатовна**, докторант 1-го курса, Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71*

Исследование течения воздуха в носовой полости человека представляет значительный интерес, поскольку дыхание осуществляется в основном с помощью носа. Носовое дыхание важно для поддержания внутренней среды легких, так как окружающий воздух переходит в альвеолярные условия при достижении носоглотки. В данной работе проводилось двухмерное численное исследование течения воздуха в модельных поперечных сечениях носовой полости для нормального человеческого носа на основе системы уравнений Навье-Стокса. Для решения системы уравнений Навье-Стокса применена схема расщепления по физическим параметрам. Полученные данные численного моделирования аэродинамики носовой полости человека сверялись с известными численными результатами в виде профилей скорости и температуры. Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что при дыхании с помощью нормального человеческого носа есть достаточно времени для нагрева и водообмена, чтобы достичь внутриальвеолярного состояния. Носовая полость ускоряет теплообмен путем сужения проходов для воздуха и завихрений от носовых раковин стенок внутренней полости.

Ключевые слова: течение воздуха в респираторной системе человека, альвеолярное состояние, двухмерное компьютерное моделирование, теплообмен в носовой полости, уравнение Навье-Стокса, метод конечных объемов.

THE STUDY OF AIR FLOW IN THE HUMAN RESPIRATORY SYSTEM BY USING MATHEMATICAL MODELING METHODS

***Issakhov A.A.**, PhD, associate professor, al-Farabi Kazakh National University named after, Republic of Kazakhstan, 050040, c. Almaty, av.al-Farabi, 71,*
e-mail: alibek.issakhov@gmail.com
***Abylkassymova A.B.**, 1st year Phd student, al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, 050040, c. Almaty, av.al-Farabi, 71*

Abstract. Nasal inspiration is important for maintaining the internal milieu of the lung since ambient air is conditioned to nearly alveolar conditions on reaching the nasopharynx. We conducted a two-dimensional computational study of transport phenomena in model transverse cross sections of the nasal cavity of normal human noses based on the Navier-Stokes equation. For solution of the Navier-Stokes equations applied projection method. The results suggest that during breathing via the normal human nose there is ample time for heat and water exchange to enable equilibration to near intraalveolar conditions. A normal nose can maintain this equilibrium under extreme environments. The turbinates increase the rate of local heat and moisture transport