16+

№ 5
2017 год

Научно-методический журнал «НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ: новое время»

Science and education: modern time

Современная наука

Научные исследования

Модернизация образования

Высшее образование

Профессиональное образование

Средняя школа

Начальная школа

Дошкольное образование

Дополнительное образование

Специальная педагогика

Библиотечный мир

Научный резерв

cognitus
Когнитус

Содержание

Современная наука

01.00.00. Физико-математические науки

03.02.08. Экология

05.00.00. Технические науки

08.00.00. Экономические науки

10.00.00. Филологические науки

Modern Science

01.00.00. Physical and Mathematical Sciences

03.02.08. Ecology

05.00.00. Engineering Sciences

08.00.00. Economic Sciences

10.00.00. Philological Sciences

УДК 517.957

Искендерова Джамиля Абыкаевна, Токторбаев Айбек Мамадалиевич

РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИКИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация

Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного и электрического полей [2, 3]. Изучается задача Коши с переменным коэффициентом теплопроводности среды. Доказательство теоремы существования единственного обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

Ключевые слова: скорость, плотность, температура, магнитное поле, электрическое поле, обобщенное решение, априорные оценки, существование.

Dzhamilia A. Iskenderova, Aibek M. Toktorbaev

SOLVABILITY OF THE MODEL OF THE MAGNETIC ELECTROGAZODINAMICS IN UNBOUNDED DOMAIN

Abstract

The system of differential equations describing one-dimensional nonstationary flow of a viscous heat-conducting gas in the magnetic and electric fields is considered. The Cauchy problem with variable coefficient of thermal conductivity of the medium is study. The proof of the theorem existence of a unique generalized solution is based on the method of a priori estimates.

Keywords: speed, density, temperature, magnetic field, electric field, generalized solution, apriori estimates, existence.

Система уравнений магнитной ЭГД в массовых лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho}, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_e H\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon E\frac{\partial E}{\partial x}, \quad p=r\frac{\theta}{\mathrm{v}}, \tag{1.b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu_e\mu_H}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+b\varepsilon \mathrm{v}E^2\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{v}H=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_H}{\mathrm{v}}\frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{1.d}$$

$$\text{(1.e)}\quad \frac{\partial E}{\partial t}=-bE\frac{\partial E}{\partial x},$$

здесь $u(x,t)$, $\rho(x,t)$, $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$, $p(x,t)$, $H(x,t)$, $E(x,t)$ соответственно: скорость, плотность, удельный объем, температура, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля.

Коэффициенты $\mu,\varepsilon,\lambda,\mu_e,\mu_H,b,r$ – положительные постоянные.

В начальный момент времени $t=0$ значения функций v,u,θ,H,E предполагаются известными:

$$u|_{t=0}=u_0(x)\;\; \mathrm{v}|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x)\;\; \theta|_{t=0}=\theta_0(x)\;\; E|_{t=0}=E_0(x)\;\; H|_{t=0}=H_0(x)\;\; |x|<\infty \tag{2}$$

причем $(\mathrm{v}_0,u_0,\theta_0,H_0,E_0)$ – непрерывные, $0<m_0\le(\mathrm{v}_0,\theta_0)\le M_0<\infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x)=0 \ , \lim_{|x|\to\infty} E_0(x)=0 \ , \lim_{|x|\to\infty} H_0(x)=0$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_\infty=1, \ \lim_{|x|\to\infty} \theta_0(x)=\theta_\infty=1. \tag{3}$$

(не нарушая общности, можно принять v_∞, θ_∞ равными единице)

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\lambda(\theta,\mathrm{v})=\chi\theta$ или $\lambda(\theta,\mathrm{v})=\chi\mathrm{v}$, $\chi=const>0$, *начальные данные (2) обладают следующими свойствами гладкости:*

$$(\mathrm{v}_0-1, u_0, \theta_0-1, H_0, E_0)\in W_2^1(R).$$

Тогда в полосе $\Pi=R\times(0,T)$, $R=(-\infty,\infty)$ *с произвольной конечной высотой* T, $0<T<\infty$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1),(2), удовлетворяющее уравнениям и начальным данным почти всюду, причем*

$(\mathrm{v}(t), E(t))\in L_\infty(0,T;W_2^1(R)),\ (\mathrm{v}_t,\ u_t,\ \theta_t, H_t, E_t)\in L_2(\Pi),$

$(u(t), \theta(t), H(t))\in L_\infty(0,T;W_2^1(R))\cap L_2(0,T;W_2^2(R)),\quad \Pi=R\times(0,T),\ R=(-\infty,\infty),$

$\mathrm{v}(x,t),\ \theta(x,t)$ – *строго положительные, ограниченные функции.*

Доказательство теоремы проводится методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. Локальная теорема существования доказывается аналогично [1, с. 68; 5, с. 346]. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0<T<\infty$.

Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Предположим, что существует решение задачи (1)-(3).

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны. Из [6, с. 129] следует:

$$E_x\geq 0,\ \forall (x,t)\in Q. \tag{4}$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$U(t)+\int_0^t W(\tau)\,d\tau\leq N_1,\quad \forall t\in[0\ T], \tag{5}$$

где $U(t)=\int\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx,$

$$W(t)=\int\left\{\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}+\frac{\mathrm{v}E^2E_x}{\theta}\right\}dx.$$

Интегралы по x берутся в пределах от $-\infty$ до ∞.

Доказательство. Умножим уравнение (1.a) на $\left(\frac{1}{2}E^2+1-\frac{1}{\mathrm{v}}\right)$, (1. b) на u, (1.c) на $\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$, (1.d) на H, (1.e) на $E\mathrm{v}$ [4, с. 26]. Затем сложим.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)+\frac{1}{2}u^2+(\theta-\ln\theta-1)+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2\right\}=$$

$$=u_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uu_x}{\mathrm{v}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{2}u\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}E^2\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x}{\mathrm{v}}-\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x}{\mathrm{v}\theta}\right)-\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}-\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}-\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}-\frac{\mathrm{v}E^2E_x}{\theta}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}HH_x\right).$$

Проинтегрируем полученное равенство по $\Pi=R\times(0,T)$, $R=(-\infty,\infty)$.

$$\int\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx+$$

$$+\int_0^t\int\left[\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}+\frac{E_xE^2\mathrm{v}}{\theta}\right]dxd\tau=$$

$$=\int\left\{\frac{1}{2}u_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}_0H_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}_0E_0^2+(\mathrm{v}_0-\ln\mathrm{v}_0-1)+(\theta_0-\ln\theta_0-1)\right\}dx.$$

Учитывая условия теоремы, выводим оценку (5). Лемма 1 доказана.

Следуя [1, с.77], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники при $N=0,\pm1,\pm2,\ldots$:

$$R=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\overline{\Omega}_N,\quad \Pi=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\overline{Q}_N,\ \Omega_N=\{x\,|\,N<x<N+1\},\ \ Q_N=\Omega_N\times(0,T).$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (5) функции (v-ln v-l), (θ-ln θ-l) неотрицательны при $\mathrm{v}>0,\ \theta>0$, то

$$U_N(t)+\int_0^t W_N(\tau)\,d\tau\le N_1, \tag{6}$$

где интегралы в определении U_N и W_N берутся по Ω_N.

Из (6) следуют оценки [1, с. 78]

$$\int_N^{N+1}\mathrm{v}(x,t)dx\le N_2,\quad \int_N^{N+1}\theta(x,t)dx\le N_3,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что при любом $t\in[0,T]$ в каждой области $\overline{\Omega}_N$ существуют точки

$$a(t)=a_N(t)\in[N,N+1],\ a_1(t)=a_{1N}(t)\in[N,N+1]$$

такие, что

$$\mathrm{v}(a(t),t)\le C_1,\ \ \theta(a_1(t),t)\le C_2\ . \tag{8}$$

Умножим уравнение напряженности электрического поля (1.e) на E

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{3}\frac{\partial E^3}{\partial x}=0. \tag{9}$$

После интегрирования по $\Pi=R\times(0,T)$, из условий теоремы вытекает оценка

$$\|E(t)\|^2\le N_4. \tag{10}$$

Проинтегрируем уравнение (9) по x от $-\infty$ до произвольного $x\in R$, а затем по t. Применяя неравенство Гельдера, выводим:

$$\int_0^t E^2(x,\tau)d\tau\le N_5,\ \forall t\in[0,T], \tag{11}$$

Из уравнений системы (1.a) и (1.b), рассуждая аналогично [6, с.133], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников $\overline{Q}_N$.

$$\mathrm{v}(x,t)=I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[\mathrm{v}_0(x)+\int_0^t\left(\theta+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2\right)(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau], \tag{12}$$

где $B(x,t)=\exp\left\{\int_{a(t)}^x(u_0(\xi)-u(\xi,t))d\xi+\int_0^t\frac{E^2}{2}(x,\tau)d\tau\right\}$,

$$I(t)=\mathrm{v}_0(a(t))\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\theta}{\mathrm{v}}+\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{2}E^2\right)(a(t),\tau)d\tau\right\}.$$

Из оценок (5), (11) следует

$$0 < C_3^{-1} \le B(x,t) \le C_3, \quad \forall (x,t) \in Q_N. \tag{13}$$

Из (12) после интегрирования по Ω_N и применения леммы Гронуолла [1, с. 33] с учетом оценок (5), (13), аналогично [6, с. 134], выводится оценка

$$0 < C_4^{-1} \le I(t) \le C_4, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{14}$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{|x|<\infty} h(x,t), \quad m_h(t) = \min_{|x|<\infty} h(x,t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$m_v(t) \ge N_6, \quad m_\theta(t) \ge N_7, \quad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Из (12) – (14) выводим ограниченность снизу удельного объема. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности (1.c). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau) \right) d\tau \le N_8, \forall t \in [0,T]. \tag{15}$$

Доказательство. Используя (8), получим

$$\max_{\overline{\Omega}_N} \theta^{1/2}(t) \le C_2^{1/2} + \frac{1}{2} \int_N^{N+1} \left| \frac{\theta_x}{\theta^{1/2}} \right| dx \le C_2^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\int_N^{N+1} \frac{\lambda(\theta,v)}{v\theta^2} \theta_x^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_N^{N+1} \frac{v\theta\, dx}{\lambda(\theta,v)} \right)^{1/2}.$$

Отсюда, с учетом (7) находим

$$M_\theta(t) \le C_5 \left(1 + \int \frac{\lambda(\theta,v)\theta_x^2}{v\theta^2}\, dx \right).$$

Далее, применяя неравенство Коши и (5), имеем

$$M_H^2(t) \le 2\int | HH_x | dx \le 4 \left(\int \frac{H_x^2}{v\theta} dx \right)^{1/2} \left(\int \frac{1}{2} vH^2 dx \right)^{1/2} M_\theta^{1/2}(t) \le$$

$$\le 4N_1^{1/2} C_5^{1/2} \left(\int \frac{H_x^2}{v\theta} dx \right)^{1/2} \left(1 + \int \frac{\lambda(\theta,v)\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \le C_6 \left(\int \frac{H_x^2}{v\theta} dx + \int \frac{\lambda(\theta,v)\theta_x^2}{v\theta^2} dx + 1 \right).$$

Интегрируя $M_\theta(t)$, $M_H^2(t)$ по t с учетом (5), выводим оценку (15). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$M_v(t) \le N_9, \quad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Из представления (12), с учетом (13), (14), вытекает неравенство

$$M_v(t) \le C_7 \left[1 + \int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau) M_v(\tau) \right) d\tau \right].$$

Применение леммы Гронуолла с учетом (5), (15) дает ограниченность удельного объема. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\max_{0\le t\le T} \| E_x(t) \|^2 + \int_0^T \int E_x^3\, dx\, dt \le N_{10}\,. M_E^2(t) \le N_{11}. \quad \forall t \in [0,T]. \tag{16}$$

Доказательство. Продифференцируем (1.e) по x и умножим на E_x.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_x^2 + E_x^3 = -E E_x E_{xx}.$$

Проинтегрируем по $\Pi = R \times (0, T)$. После некоторых преобразований [4, с. 13] получим оценки (16). Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\int_0^T \left(\| u_x(t) \|^2 + \| H_x(t) \|^2 \right) dt \le N_{12}. \tag{17}$$

Доказательство. Умножим уравнения (1.b) на u и (1.d) на H, проинтегрируем по R и сложим.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| u \|^2 + \int \mathrm{v} H^2 dx \right) + \int \frac{1}{\mathrm{v}} \left(u_x^2 + H_x^2 \right) dx = \int \left(\frac{\theta - 1}{\mathrm{v}} u_x + \frac{1}{\mathrm{v}} u_x - \frac{1}{2} E^2 u_x \right) dx. \tag{18}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (18) разобьем числовую прямую на области $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t)$ следующим образом:

$$\sigma_1(t) = \{ x \in R:\ \theta(x,t) > C_8 \}, \quad C_8 = const > 1,$$

$$\sigma_2(t) = \{ x \in R: N_7 \le \theta(x,t) \le C_8,\ \ \theta(x,t) \ne 1 \}, \quad \sigma_3(t) = \{ x \in R: \theta(x,t) = 1 \}.$$

Заметим, что если $C_8 \le N_7$, то R совпадает с областью $\sigma_1(t)$.

Нетрудно проверить, что

$$\text{в } \sigma_1(t): \frac{\theta - 1}{\theta - \ln\theta - 1} < C_9, \text{ а в } \sigma_2(t): \frac{|\theta - 1|}{\sqrt{\theta - \ln\theta - 1}} < C_{10}.$$

Применяя неравенства Коши и Юнга с ε и учитывая ограниченность удельного объема, (5), имеем где $0 < \varepsilon_1 < 1/2$. Преобразуем второе сла- гаемое в правой части (18).

$$\int \frac{\theta - 1}{\mathrm{v}} u_x dx = \int_{\sigma_1(t)} (\theta - \ln\theta - 1) \frac{\theta - 1}{\theta - \ln\theta - 1} \frac{u_x}{\mathrm{v}} dx + \int_{\sigma_2(t)} \sqrt{\theta - \ln\theta - 1} \frac{\theta - 1}{\sqrt{\theta - \ln\theta - 1}} \frac{u_x}{\mathrm{v}} dx \le$$

$$\le C_{11} \left(\int (\theta - \ln\theta - 1) dx \right)^{1/2} \left(\int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 dx \right)^{1/2} \left(M_\theta^{1/2}(t) + 1 \right) \le \varepsilon_1 \int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2\, dx + C_\varepsilon \left(M_\theta(t) + 1 \right),$$

Оценим третье слагаемое в (18) с учетом (10), (16).

$$\int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x dx = \int \frac{\partial \ln \mathrm{v}}{\partial t} dx = -\frac{d}{dt} \int (\mathrm{v} - \ln \mathrm{v} - 1)\, dx + \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{d}{dt} \int (\mathrm{v} - \ln \mathrm{v} - 1)\, dx.$$

где $0 < \varepsilon_2 < 1/2$. Подставляя полученные соотношения в (18), после интегрирования по t, с учетом (5), (15) выводим оценку (17). Лемма 6 доказана.

$$\int \left| \frac{1}{2} E^2 u_x \right| dx \le C_{12} \left(\int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int E^2 dx \right)^{1/2} \le \varepsilon_2 \int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2\, dx + C_{13},$$

Рассуждая аналогично, можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Единственность показывается стандартным методом – составлением однородного уравнения для разности двух возможных решений. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.*
2. *Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301с.*
3. *Ватажин А.Б.и др. Электрогазодинамические течения. – М.: Наука, 1983. – 344с.*
4. *Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Разрешимость одной модели магнитной электрогазодинамики // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016. – № 3(55) – С. 8-15.*
5. *Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 337-348.*
6. *Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа // Динамика сплошной среды. – 1990. – Вып. 97. – С. 124-145.*

Ош ... университету
Кол ... М. Байедбаев