ISSN 2224-0179

Научно-практический журнал

ПРИВОЛЖСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

№ 3 (55) – 2016

Көчүрмө окшош!

М. Байгубатов

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ И АРХЕОЛОГИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.957

Д.А. Искендерова
д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой естественно-научных дисциплин,
Международная академия управления, права, финансов и бизнеса,
г. Бишкек, Кыргызстан
E-mail: iskenja_2005@mail.ru

А.М. Токторбаев
преподаватель,
кафедра программирования,
Ошский государственный университет,
г. Ош, Кыргызстан
E-mail: ain7@list.ru

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИКИ

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель электрогазодинамики (ЭГД), описывающая двухкомпонентную среду, состоящую из нейтрального газа и положительных ионов $q>0$. Исследуется однозначная разрешимость в «целом» по времени одномерных уравнений, описывающих ЭГД – течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля в случае, когда коэффициент теплопроводности является переменной. Доказательство теоремы существования единственного обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

Ключевые слова: скорость, плотность, температура, магнитное поле, электрическое поле, обобщенное решение, априорные оценки, существование.

D.A. Iskenderova, International Academy of management, right, finances and business, Bishkek, Kyrgyzstan

A.M. Toktorbaev, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

SOLVABILITY OF ONE MODEL OF THE MAGNETIC ELECTROGASDYNAMICS

Abstract. In the article the mathematical model elektrogasdynamics (EGD), which describes a two-component medium consisting of neutral gas and positive ions $q>0$. We study the unique solvability in the "whole" for the time of one-dimensional equations describing EGD – flow for viscous heat-conducting gas, taking into account the magnetic field in the case when a coefficient of heat conductivity is a variable. The proof of existence of a unique generalized solution is carried out by a priori estimates.

Keywords: speed, density, temperature, magnetic field, electric field, generalized solution, apriori estimates, existence.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность теоретического исследования моделей механики сплошной среды и, в частности, гидродинамики, газодинамики, обусловлена их широким применением в решении важных практических задач.

Исследуемые уравнения нелинейные и имеют составной вид. Поэтому наиболее приемлемым способом их решения, в настоящее время, являются численные методы. Построение эффективных численных алгоритмов невозможно без проведения достаточно подробных теоретических исследований. Поэтому, прежде всего, возникает необходимость провести строгий математический анализ разрешимости краевых задач. Кроме того, решение математических задач, возникающих при изучении проблем механики, представляет самостоятельный научный интерес, который стимулируется дальнейшим развитием теории дифференциальных уравнений.

Нелинейность уравнений диктует необходимость разрабатывать для каждой конкретной системы соответствующую методику исследования. Своеобразие отдельных моделей проявляется при получении априорных оценок для решения краевых задач.

Разрешимость одномерных уравнений, описывающих ЭГД-течение вязкого теплопроводного газа при отсутствии магнитного поля, были изучены в [6]. Начально-краевая задача для

[illegible] ОшМУ [illegible] катчысы М. Байызбаков уравнений магнитной газовой динамики при отсутствии электрического поля исследовались в [4]. Причем коэффициент теплопроводности – положительная постоянная.

В настоящей работе доказывается однозначная разрешимость в «целом» по времени одномерных уравнений, описывающих ЭГД – течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля. Рассматриваются случаи, когда коэффициент теплопроводности зависит от плотности или температуры.

Известно, что в одномерных нестационарных задачах вязкой газовой динамики априорные оценки удобнее всего получать в лагранжевых координатах. Введение их описано в [1, с. 46].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Система уравнений магнитной ЭГД в массовых лагранжевых координатах имеет вид [2; 3]:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad v=\frac{1}{\rho}, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_e H\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon E\frac{\partial E}{\partial x}, \quad p=r\frac{\theta}{v}, \tag{1.b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(\theta,v)}{v}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-p\frac{\partial u}{\partial x}++\frac{\mu}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\mu_e\mu_H\frac{\mu_e\mu_H}{v}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+b\varepsilon vE^2\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}vH=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_H}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{1.d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-bE\frac{\partial E}{\partial x}. \tag{1.e}$$

Здесь u, ρ, v, θ, p, H, E – соответственно скорость, плотность, удельный объем, температура, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля; $\mu,\varepsilon,\mu_e,\mu_H,b, r$ – положительные постоянные.

Рассмотрим задачу о движении вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля в области: $Q=\{\,(x,t):\ 0<x<1,\ \ 0<t<T\,\}$ с непроницаемым диэлектрическими стенками.

Граничные условия имеют вид:

$$u=H=\frac{\partial \theta}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=0 \text{ и } x=1, \qquad E\big|_{x=0}=\frac{\partial E}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0. \tag{2}$$

В начальный момент времени $t=0$ распределение скорости, удельного объема, температуры и напряженностей предполагается известным:

$$u\big|_{t=0}=u_0(x), \quad v\big|_{t=0}=v_0(x), \quad \theta\big|_{t=0}=\theta_0(x), \quad E\big|_{t=0}=E_0(x), \quad H\big|_{t=0}=H_0(x), \tag{3}$$

причем $0<m_0\le\left(v_0(x),\theta_0(x)\right)\le M_0<\infty, \quad x\in\Omega$.

Можно считать, что начальный удельный объем обладает свойством:

$$\int_0^1 v_0(x)dx=1. \tag{4}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задач (1)–(3) называется совокупность функций (v,u,θ,H,E),

$$\left(v(t),\ E(t)\right)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), \qquad (v_t,\ u_t,\ \theta_t,\ H_t,\ E_t\ )\in L_2(Q),$$

$$\left(u(t),\ \theta(t),\ H(t)\ \right)\ \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad Q=\Omega\times(0,T),\ \Omega=(0,1),$$

удовлетворяющих уравнениям (1.a)–(1.e) почти всюду в Q и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

ТЕОРЕМА. Пусть начальные данные (3) обладают следующими свойствами гладкости:

$$(\,\mathrm{v}_0,\ u_0,\ \theta_0,\ H_0,\ E_0\,)\in W_2^1(\Omega),$$

$$u_0(0)=u_0(1)=0,\ H_0(0)=H_0(1)=0,\ E_0(0)=E_0'(0)=0,\ E_0'(x)\geq 0$$

и выполнено одно из двух условий:

1) $\lambda(\theta,\mathrm{v})=\chi\,\theta$, 2) $\lambda(\theta,\mathrm{v})=\chi\,\mathrm{v}$, $\chi=const>0$.

Тогда в области $Q=\Omega\times(0,T)$ с любым конечным T существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), причем $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проводится методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. Локальная теорема существования доказывается аналогично [1, с. 68; 5, с. 346]. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0<T<\infty$.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Предположим, что существует решение задачи (1)–(3).

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны. Из [6, с. 129] имеем, что

$$E_x\geq 0,\ \forall(x,t)\in Q. \tag{5}$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\int_0^1 \mathrm{v}(x,t)\,dx=1, \tag{6}$$

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\left[\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}+\frac{\mathrm{v}E^2E_x}{\theta}\right]dx\,d\tau\leq N_1. \tag{7}$$

Доказательство. Непосредственно из уравнения неразрывности системы (1.a) и (4) вытекает (6). Умножим уравнение (1.a) на $\left(\frac{1}{2}E^2+1-\frac{1}{\mathrm{v}}\right)$, (1.b) на u, (1.c) на $\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$, (1.d) на H, (1.e) на $E\mathrm{v}$.

$$\frac{E^2}{2}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)=\frac{1}{2}E^2u_x+u_x-\frac{1}{\mathrm{v}}u_x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uu_x}{\mathrm{v}}\right)-\frac{1}{\mathrm{v}}u_x^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)+\frac{\theta}{\mathrm{v}}u_x-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{2}u\right)+\frac{H^2}{2}u_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}E^2\right)-\frac{E^2}{2}u_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta-\ln\theta-1)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x}{\mathrm{v}}-\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x}{\mathrm{v}\theta}\right)-\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}-\frac{\theta}{\mathrm{v}}u_x+$$

$$+\frac{u_x}{v}+\frac{u_x^2}{v}-\frac{u_x^2}{v\theta}+\frac{H_x^2}{v}-\frac{H_x^2}{v\theta}+vE^2E_x-\frac{vE^2E_x}{\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}vH^2\right)=-\frac{H^2}{2}u_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}H\cdot H_x\right)-\frac{H_x^2}{v},$$

$$\frac{1}{2}v\frac{\partial E^2}{\partial t}=-vE^2E_x.$$

Сложим и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,t)$:

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}vH^2+\frac{1}{2}vE^2+(v-\ln v-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\left[\frac{u_x^2}{v\theta}+\frac{H_x^2}{v\theta}+\frac{\lambda(\theta,v)\theta_x^2}{v\theta^2}+\frac{E_xE^2v}{\theta}\right]dxd\tau=$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u_0^2+\frac{1}{2}v_0H_0^2+\frac{1}{2}v_0E_0^2+(v_0-\ln v_0-1)+(\theta_0-\ln\theta_0-1)\right\}dx.$$

Учитывая условия теоремы, получим оценку (7). Лемма 1 доказана.

Из (7) следует оценка [1, с. 78]

$$\int_0^1\theta\ (x,t)\,dx\le N_2,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{8}$$

Из (6) вытекает, что существует ограниченная измеримая функция $a(t)$ такая, что $v(a(t),t)=1$, $\forall t\in[0,T]$.

Умножим уравнение напряженности электрического поля системы (1.e) на E и проинтегрируем по Ω, а затем по t. Имеем оценку [6, с. 131].

$$\frac{1}{2}\int_0^1E^2\ dx+\frac{1}{3}\int_0^tE^3\Big|_{x=1}d\tau\le N_3. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (1.e) по Ω и по t, находим

$$\int_0^tE^2\Big|_{x=1}d\tau\le C_1.$$

Отсюда и из (5) следует

$$\max_x E^2\in L_1(0,T). \tag{10}$$

Из уравнений системы (1.a) и (1.b), рассуждая аналогично [6, с. 133], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями

$$v(x,t)=I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[v_0(x)+\int_0^t\left(\theta+\frac{1}{2}vH^2\right)(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau], \tag{11}$$

где

$$B(x,t)=\exp\left\{\int_{a(t)}^x(u_0(\xi)-u(\xi,t))\,d\xi+\int_0^t\frac{E^2}{2}(x,t)dt\right\},$$

$$I(t)=v_0(a(t))\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\theta}{v}+\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{2}E^2\right)(a(t),t)\,dt\right\}.$$

Из оценок (7), (10) вытекает

$$0<C_2^{-1}\le B(x,t)\le C_2,\quad \forall(x,t)\in Q. \tag{12}$$

Из (11) после интегрирования по Ω и применения леммы Гронуолла [1, с. 33] с учетом оценок (7), (12), аналогично [6, с. 134], выводится оценка

$$0 < C_3^{-1} \le I(t) \le C_3, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{13}$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{0\le x\le 1} h(x,t), \quad m_h(t) = \min_{0\le x\le 1} h(x,t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$m_v(t) \ge N_4, \quad m_\theta(t) \ge N_5, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{14}$$

Доказательство. Из (11)–(13) выводим ограниченность снизу удельного объема. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности (1.c). Лемма 2 доказана.

Имеют место оценки

$$\int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau)\right) d\tau \le N_6, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{15}$$

Действительно, используя (6)–(8), получим

$$M_\theta(t) \le C_4 \left(1 + \int_0^1 \frac{\lambda(\theta, v)\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right),$$

так как $M_\theta^{1/2}(t) \le N_2^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\theta_x}{\theta^{1/2}}\right| dx \le N_2^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\lambda(\theta,v)\theta_x^2}{v\theta^2} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{\theta v}{\lambda(\theta,v)} dx\right)^{1/2}$.

$$M_H^2(t) \le 2\int_0^1 |H\, H_x|\, dx \le 2\left(\int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 vH^2 dx\right)^{1/2} M_\theta^{1/2}(t) \le C_5\left(\int_0^1 \frac{H_x^2}{v\theta} dx + M_\theta(t)\right).$$

Интегрируя по t, с учетом (7) выводим (15).

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$M_v(t) \le N_7, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{16}$$

Доказательство. Представление (11) с учетом оценок (12), (13) дает неравенство

$$M_v(t) \le C_6 \left[1 + \int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau) M_v(\tau)\right) d\tau \right].$$

Применяя лемму Гронуолла, с учетом оценок (15) выводим ограниченность удельного объема сверху. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$\int_0^t\int_0^1 \left(\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{v E^2 E_x}{\theta^{1/2}} \right) dx d\tau \le N_8. \tag{17}$$

Доказательство. Умножим уравнение теплопроводности (1.c) на $\frac{1}{\theta^{1/2}}$ и проинтегрируем по Ω.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{v E^2 E_x}{\theta^{1/2}} \right) dx = 2\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^{1/2}\, dx + \int_0^1 \frac{\theta^{1/2}}{v} u_x\, dx. \tag{18}$$

Оценим последний интеграл в правой части (18), используя неравенства Коши, Юнга, (8), (14).

$$\int_0^1 \frac{\theta^{1/2}}{v} u_x\, dx \le \left(\int_0^1 \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{\theta}{v} dx\right)^{1/2} M_\theta^{1/4}(t) = \delta_1 \int_0^1 \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + C_7\left(M_\theta(t) + 1\right).$$

Полученное из (18) неравенство проинтегрируем по t. Выбирая $0 < \delta_1 < 1$, с учетом (7), (15) выводим (17). Лемма 4 доказана.

ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Продифференцируем (1.e) по x, умножим на E_x и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,T)$. После некоторых преобразований [6, с. 136] получим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\| E_x(t)\|^2+\int_0^T\int_0^1 E_x^3\,dx\,d\tau+\int_0^T EE_x^2\big|_{x=1}d\tau\le N_9. \tag{19}$$

Оценим $M_E^2(t)$.

$$M_E^2(t)\le 2\int_0^1|EE_x|\,dx\le 2\left(\int_0^1 E_x^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 E^2dx\right)^{1/2}\le\| E(t)\|^2+\| E_x(t)\|^2.$$

Отсюда, используя оценки (9), (19), находим

$$M_E^2(\tau)\le N_{10},\ \forall t\in[0,T] \tag{20}$$

Проинтегрируем уравнение (1.c) по Ω.

$$\int_0^1\left(\frac{H_x^2}{\mathrm{v}}+\frac{u_x^2}{\mathrm{v}}+\mathrm{v}E^2E_x\right)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1\theta\,dx+\int_0^1\frac{\theta}{\mathrm{v}}u_xdx.$$

После интегрирования по t с учетом оценок (8), (14)–(16) и

$$\int_0^1\frac{\theta}{\mathrm{v}}u_xdx\le\delta_2\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}u_x^2dx+C_8M_\theta,\ \ 0<\delta_2<1,$$

выводим

$$\int_0^t\int_0^1\left(H_x^2+u_x^2+E^2E_x\right)dxd\tau\le N_{11},\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{21}$$

Уравнение (1.b), преобразованное с учетом (1.a),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\ \ln\mathrm{v}}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}H^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}E^2\right),$$

умножим на $(\ln\mathrm{v})_x$ и проинтегрируем по Ω.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(\ln\mathrm{v})_x^2dx+\int_0^1\frac{\theta}{\mathrm{v}}(\ln\mathrm{v})_x^2dx=\\&=\frac{d}{dt}\int_0^1u(\ln\mathrm{v})_xdx+\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}u_x^2dx+\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}\theta_x(\ln\mathrm{v})_xdx+\int_0^1HH_x(\ln\mathrm{v})_xdx-\int_0^1EE_x(\ln\mathrm{v})_xdx.\end{aligned} \tag{22}$$

Оценим интегралы в правой части (22), используя неравенства Юнга, Коши, неравенства вложения, оценки (8), (14), (16).

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}\theta_x(\ln\mathrm{v})_xdx\right|\le\left(\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1\frac{(\ln\mathrm{v})_x^2}{\lambda(\theta,\mathrm{v})}dx\right)^{1/2}\frac{M_\theta^{3/4}(t)}{m_{\mathrm{v}}^{1/2}(t)}\le\\&\le C_9\left(\left(\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx\right)\|(\ln\mathrm{v}\psi)_x\|^2+M_\theta^{3/2}(t)\right)\le C_{10}\left(\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx+1\right)\left(\|(\ln\mathrm{v}\psi)_x\|^2+1\right).\end{aligned}$$

Остальные интегралы оцениваются аналогично. С учетом полученных оценок из (22) имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(\ln\mathrm{v})_x^2dx+\int_0^1\frac{\theta}{\mathrm{v}}(\ln\mathrm{v})_x^2dx\le\frac{d}{dt}\int_0^1u(\ln\mathrm{v})_xdx+\int_0^1\frac{1}{\mathrm{v}}u_x^2dx+\\&+C_{11}\left(\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^{3/2}}dx+\| H_x\|^2+\| E_x\|^2+1\right)\left(\|(\ln\mathrm{v}\psi)_x\|^2+1\right)+M_H^2(t)+M_E^2(t).\end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное неравенство по t с учетом (7), (15), (17), (19)–(21) и условий теоремы. Применяя лемму Гронуолла, с учетом (16) выводим

$$\max_{0\le t\le T}\| v_x\|^2 \le N_{12}. \tag{23}$$

Умножим уравнение (1.d)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\frac{1}{v^3}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{1}{v}H\frac{\partial u}{\partial x}$$

на H_{xx} и проинтегрируем по $Q=\Omega\times(0,T)$. После некоторых преобразований находим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\| H_x(t)\|^2+\int_0^T \| H_{xx}(t)\|^2\,dt\le N_{13}. \tag{24}$$

Оценки (7), (16), (24) и неравенство $M_H^2(t)\le \| H(t)\|^2+\| H_x(t)\|^2$ дают оценку

$$M_H^2(\tau)\le N_{14},\quad \forall t\in[0,T]. \tag{25}$$

Умножим уравнения импульса (1.b) и теплопроводности (1.c) системы на u_{xx} и θ соответственно и проинтегрируем по Ω.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_x\|^2+\int_0^1\frac{u_{xx}^2}{v}dx=\int_0^1\left(\frac{v_x}{v^2}u_x+\frac{\theta_x}{v}+\frac{v_x}{v^2}\theta+HH_x-EE_x\right)u_{xx}\,dx,\\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2+\int_0^1\frac{\lambda(\theta,v)\,\theta_x^2}{v}\,dx=\int_0^1\left(-\frac{\theta}{v}u_x+\frac{1}{v}u_x^2+\frac{1}{v}H_x^2+vE^2E_x\right)\theta\,dx.
\end{aligned} \tag{26}$$

Правые части равенств системы (26) оценим по неравенствам Юнга, Коши, Гельдера и вложения с учетом полученных выше оценок.

Поскольку u_x обращается в нуль при каждом $t\in[0,T]$ хотя бы в одной точке из Ω, то $u_x^2(x,t)\le 2\| u_x(t)\|\| u_{xx}(t)\|$.

$$\left|\int_0^1\frac{v_x}{v^2}u_xu_{xx}dx\right|\le N_4^{-2}\max_{\Omega}|u_x|\| v_x\|\ \| u_{xx}\|\le C_{12}\| u_x\|^{1/2}\| u_{xx}\|^{3/2}\le\varepsilon_1\| u_{xx}\|^2+C_{\varepsilon_1}\| u_x\|^2,$$

$$\left|\int_0^1\frac{\theta_x}{v}u_{xx}\,dx\right|\le\frac{1}{N_4^{1/2}m_\lambda^{1/2}(t)}\left(\int_0^1\frac{\lambda(\theta,v)\,\theta_x^2}{v}\,dx\right)^{1/2}\|u_{xx}\|\le\varepsilon_2\|u_{xx}\|^2+C_{\varepsilon_2}\int_0^1\frac{\lambda(\theta,v)\,\theta_x^2}{v}\,dx,$$

$$\left|\int_0^1\frac{\theta}{v^2}v_xu_{xx}dx\right|\le N_4^{-2}M_\theta(t)\ \| v_x\|\ \| u_{xx}\|\le\varepsilon_3\| u_{xx}\|^2+C_{\varepsilon_3}M_\theta^2(t),$$

$$M_\theta^2(t)\le\varepsilon_4\int_0^1\frac{\lambda(\theta,v)\,\theta_x^2}{v}\,dx+C_{\varepsilon_4}(M_\theta(t)+1),$$

$$\left|\int\frac{1}{v}\theta^2\ u_xdx\right|\le\frac{1}{2}\|u_x\|^2\|\theta\|^2+\varepsilon_5\int_0^1\frac{\lambda(\theta,v)\,\theta_x^2}{v}\,dx+C_{\varepsilon_5}(M_\theta(t)+1),$$

$$\left|\int_0^1 vE^2E_x\theta\,dx\right|\le M_E^2(t)\|E_x\|\|\theta\|\le\|\theta\|^2+C_{13},$$

$$\left|\int_0^1\frac{1}{v}u_x^2\theta\,dx\right|\le C_{14}(M_\theta(t)+1)\|u_x\|^2,$$

где $\varepsilon_i>0\ \left(i=\overline{1,5}\right)$ – достаточно малые числа. Остальные интегралы в правой части (26) оцениваются аналогично. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2\le C_{15}\left(\|u_x\|^2+M_\theta(t)+1\right)+\varepsilon_4\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\ \theta_x^2}{\mathrm{v}}\,dx,\\
&\frac{d}{dt}\|\theta\|^2+C_{16}\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\ \theta_x^2}{\mathrm{v}}\,dx\le C_{17}M_\theta(t)\left(\|u_x\|^2+1\right)+C_{18}\left(\|u_x\|^2+1\right)\left(\|\theta\|^2+1\right).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Выбирая $\varepsilon_4 < C_{16}$, сложим два неравенства системы (27).

$$
\frac{d}{dt}\left(\|\theta\|^2+\|u_x\|^2\right)+\|u_{xx}\|^2+\int_0^1\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\ \theta_x^2}{\mathrm{v}}\,dx\le
$$

$$
\le C_{19}\left(M_\theta(t)+1\right)\left(\|u_x\|^2+1\right)+C_{20}\left(\|u_x\|^2+1\right)\left(\|\theta\|^2+1\right).
$$

С учетом (14)–(16), (21), после применения леммы Гронуолла, заключаем

$$
\max_{0\le t\le T}\left(\|\theta\|^2+\|u_x(t)\|^2\right)+\int_0^T\left(\|u_{xx}(t)\|^2+\|\theta_x(t)\|^2\right)dt\le N_{15}.
$$

Рассуждая аналогично, можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Единственность показывается стандартным методом – составлением однородного уравнения для разности двух возможных решений.

Теорема полностью доказана.

Список литературы:

1. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
2. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
3. Ватажин А.Б.и др. Электрогазодинамические течения. – М.: Наука, 1983. – 344 с.
4. Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. Корректность и приближенные методы для модели магнитной газовой динамики // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1986. – № 6. – С. 82–84.
5. Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 337–348.
6. Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа // Динамика сплошной среды. – 1990. – Вып. 97. – С. 124–145.

Көчүрмө анык:
ОшМУнун окумуштуу
катчысы М. Бакубанов