ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ТРУДЫ ШЕСТОГО СОВЕЩАНИЯ РОССИЙСКО-КАЗАХСТАНСКОЙ РАБОЧЕЙ ГРУППЫ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ И ИНФОРМАЦИОННЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ

(16-18 марта 2009 г.)

А Л М А Т Ы 2 0 0 9

Көчүрмө анык:
ОшМУ окумуштуу
катчы М. Байсубанов

Ю. Байсубанов

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Искендерова Д.А., Токторбаев А.М.
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, ОшГУ
E-mail iskenja_2005@mail.ru

The Cauchy problem for the equations describing flow of a reacting mixture of gases is considered. At the initial time all medium characteristics are know and have various limits at infinity. The proof of the theorems existence of a unique generalized solution is based on the method of a priori estimates.

1. Постановка задачи и основной результат. Исследуется система уравнений, описывающая движение реагирующей смеси газов, в массовых лагранжевых координатах [1,2]:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho},$$
$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial x}\right)-c\,g,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right), \tag{1}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_1}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_2}{\mathrm{v}}\theta\frac{\partial c}{\partial x}\right)-r\frac{\theta}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\delta c\,g,$$

где

$$c=c_1,\ \theta=c_{\mathrm{v}}T,\ g=\frac{\omega}{\rho c},\ r=\frac{R}{c_{\mathrm{v}}},\ c_{\mathrm{v}}=(c_{\mathrm{v}1}-c_{\mathrm{v}2})c+c_{\mathrm{v}2},\ R=(R_1-R_2)c+R_2,$$
$$\chi=\rho D,\ D_1=D_2=D,\ \omega_2=-\omega_1=\omega\ge 0,\ \delta=\delta_1-\delta_2\ge 0,$$
$$\lambda_1=\frac{\lambda}{c_{\mathrm{v}}},\ \lambda_2=\frac{\chi}{c_{\mathrm{v}}}[(c_{\mathrm{v}1}-c_{\mathrm{v}2})+(R_1-R_2)-\lambda].$$

Здесь ρ, u, θ плотность, скорость, температура смеси, c_i - массовые концентрации компонент, δ_i - теплота образования i - ой компоненты при стандартных условиях, R_i - газовые постоянные, $c_{\mathrm{v}i}$ - удельные теплоемкости при постоянном объеме компонент, ω_i - скорости химических реакций; D_i, μ, λ - коэффициенты диффузии, вязкости, теплопроводности. В предположении постоянства положительных коэффициентов χ, μ, λ, $c_{\mathrm{v}i}$, R_i система уравнений (1) является замкнутой относительно функций ρ, c, u, θ.

Рассмотрим движение смеси в полосе: $\Pi=\{(x,t): x\in R,\ 0<t<T\}$, $R=(-\infty,\infty)$.

Начальные условия записываются в виде:

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \theta|_{t=0}=\theta_0(x),\ c|_{t=0}=c_0(x),\ \mathrm{v}|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x), \tag{2}$$

$0<c_0(x)\le 1$, $0<m_0\le(\mathrm{v}_0(x),\theta_0(x))\le M_0<\infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty} u_0(x)=u_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty} u_0(x)=u_0^2,\quad u_0^1<u_0^2,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_0^2,\quad \mathrm{v}_0^1\neq \mathrm{v}_0^2, \tag{3}$$
$$\lim_{x\to-\infty} c_0(x)=c_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty} c_0(x)=c_0^2,\quad c_0^1\neq c_0^2,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \theta_0(x)=\theta_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty} \theta_0(x)=\theta_0^2,\quad \theta_0^1\neq \theta_0^2.$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x)$, $f(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$, обладающие свойствами:

$$0<C_1^{-1}<\psi(x)<C_1,\quad \lim_{|x|\to\infty} \mathrm{v}_0(x)\psi(x)=1,\quad \psi'(x)\in W_2^1(R),$$
$$|f(x)|<C_2<\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=u_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=u_0^2,$$
$$0<f'(x)\le C_3,\ f'(x)\in W_2^1(R),\ f'(x)\in L_1(R), \tag{4}$$
$$0<C_4^{-1}<\varphi(x)<C_4,\quad \lim_{|x|\to\infty} \theta_0(x)\varphi(x)=1,\quad \varphi'(x)\in W_2^1(R),$$
$$1\le\gamma(x)<C_5<\infty,\quad \lim_{|x|\to\infty} c_0(x)\gamma(x)=1,\quad \gamma'(x)\in W_2^1(R).$$

$$(\varphi'(x))^2<\delta f'(x),\quad 0<\delta<1. \tag{5}$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

ТЕОРЕМА. *Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и*

$$(u_0-f,\ \mathrm{v}_0\psi-1,\ \theta_0\varphi-1,\ c_0\gamma-1)\in W_2^1(R).$$

Функция $g(\rho,c,\theta)$ *является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по* $(\varphi\theta)^{1/2}$, *кроме того, удовлетворяет условию Липшица и* $g(\rho,c,1)=0$.

Тогда в полосе $\Pi=R\times(0,T)$ *с произвольной конечной высотой* T, $0<T<\infty$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), причем*

$$(\mathrm{v}\psi-1)\in L_\infty\left(0,T;W_2^1(R)\right),\quad \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial \theta}{\partial t},\frac{\partial c}{\partial t}\right)\in L_2(\Pi),$$
$$(u-f,\ \theta\varphi-1,\ c\gamma-1)\in L_\infty\left(0,T;W_2^1(R)\right)\cap L_2\left(0,T;W_2^2(R)\right),$$

$0<c(x,t)\le 1$, $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ - *строго положительные, ограниченные функции.*

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме: а) выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C, C_i, N_i, K_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения; б) доказывается локальная теорема существования аналогично [3, 6]; в) на основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0<T<\infty$.

2. Априорные оценки. Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны и $0 < c(x,t) \le 1$.

Выведем закон сохранения. Сделаем замену, полагая $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{1}{\varphi(x)\gamma(x)}$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad v = \frac{1}{\rho},\\
&\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma v}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) - c\,g,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma v}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad p = \frac{\theta}{v},\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma v}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma v}\theta\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{\varphi\gamma}p\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi^2\gamma^2 v}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + cg,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$
U(t) + \int_0^t W(\tau)\,d\tau \le E = const > 0, \quad t \in [0,T] \tag{7}
$$

где $$U(t) = \int\left\{\frac{1}{2}(u-f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma-1)^2 + (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) + (v\psi - \ln v\psi - 1)\right\}dx,$$

$$W(t) = \int\left\{\frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{c_x^2}{v} + \frac{\theta}{v}f' + g\varphi(c\gamma-1)^2\right\}dx.$$

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (6) на $\gamma\left(\psi - \dfrac{1}{v}\right)$, второе на $\gamma(c\gamma-1)$, третье на $\varphi\gamma(u-f)$, третье на $\gamma\left(\varphi - \dfrac{1}{\theta}\right)$, сложим и проинтегрируем по R:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{2}\varphi\gamma(u-f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma-1)^2 + \gamma(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) + \gamma(v\psi - \ln v\psi - 1)\right\}d\xi +\\
&+\int\left\{\frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2\gamma} + \frac{u_\xi^2}{v\theta\varphi\gamma} + \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2\gamma} + \frac{\theta}{v}f' + g(c\gamma-1)^2\right\}d\xi =\\
&= \int\frac{\psi}{\varphi\gamma}u_\xi d\xi + \int\frac{1}{\varphi v\gamma}u_\xi(f' + \gamma - 1)d\xi - \int\frac{\theta_\xi\varphi'}{v\theta\varphi^3\gamma}d\xi - \int\frac{c_\xi c\gamma'}{v\varphi^2\gamma}d\xi + \int\frac{c_\xi c\varphi'}{v\varphi^3}d\xi +\\
&+\int\frac{c_\xi\theta_\xi}{v\theta\varphi^2\gamma}d\xi + \int\frac{c_\xi\varphi'}{v\varphi^3\gamma}d\xi - \int g(c\gamma-1)d\xi + \int cg\gamma\frac{\varphi\theta-1}{\theta}d\xi = \sum_{k=1}^{9} I_k
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Оценим каждое I_k, используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, Гельдера, вложения.

$$I_1 = \int \frac{\psi}{\varphi\gamma}(u-f)_\xi\, d\xi + \int \frac{\psi}{\varphi\gamma} f'\, d\xi \le C_6\left(\left\| \sqrt{\varphi\gamma}(u-f)\right\|^2 + 1\right),$$

$$I_2 = \int (f' + \gamma - 1)\frac{\partial \ln v\psi}{\partial t} d\xi = -\int (f' + \gamma - 1)\frac{\partial}{\partial t}(v\psi - \ln v\psi - 1) d\xi +$$

$$+ \int (f' + \gamma - 1)\frac{\partial v\psi}{\partial t} d\xi \le -\frac{d}{dt}\int (f' + \gamma - 1)(v\psi - \ln v\psi - 1)\, d\xi + C_7\left(\left\| \sqrt{\varphi\gamma}(u-f)\right\|^2 + 1\right).$$

Заметим, что

$$\frac{\left|(v\psi)^{1/2} - 1\right|}{(v\psi)^{1/2}\sqrt{v\psi - \ln v\psi - 1}} \le C_8, \quad \forall (x,t) \in \Pi .$$

Тогда

$$I_3 = \int \frac{\theta_\xi \varphi' \psi^{1/2}}{v^{1/2}\,\theta\varphi^3\gamma} d\xi - \int \frac{\theta_\xi \varphi' \psi^{1/2}\left((v\psi)^{1/2} - 1\right)}{v^{1/2}\,\theta\varphi^3\gamma (v\psi)^{1/2}\sqrt{v\psi - \ln v\psi - 1}}\sqrt{v\psi - \ln v\psi - 1}\, d\xi \le$$

$$\le \left(\int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2\gamma} d\xi\right)^{1/2}\left(\int \frac{\varphi'^2\psi}{\varphi^4\gamma} d\xi\right)^{1/2} +$$

$$+ C_8\left(\int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2\gamma} d\xi\right)^{1/2}\left(\int \frac{\varphi'^2\psi}{\varphi^4\gamma}(v\psi - \ln v\psi - 1) d\xi\right)^{1/2} \le$$

$$\le \delta_1 \int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2\gamma} d\xi + C_{\delta 1}\left(\int (v\psi - \ln v\psi - 1) d\xi + 1\right).$$

Рассуждая аналогично, можно оценить остальные интегралы.

$$I_4 \le \delta_2 \int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} d\xi + C_{\delta 2}\left(\int (v\psi - \ln v\psi - 1) d\xi + 1\right),$$

$$I_5 \le \delta_3 \int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} d\xi + C_{\delta 3}\left(\int (v\psi - \ln v\psi - 1) d\xi + 1\right),$$

$$I_6 \le \frac{1}{2}\int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2\gamma} d\xi + \frac{1}{2}\int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} d\xi ,$$

$$I_7 \le \delta_4 \int \frac{c_\xi^2}{v\varphi^2} d\xi + C_{\delta 4}\left(\int (v\psi - \ln v\psi - 1) d\xi + 1\right).$$

I_8, I_9 оцениваются с учетом липшицевости функции $g(\rho, c, \theta)$ по $(\varphi\theta)^{1/2}$ и неравенства

$$\frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right|}{\sqrt{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1}} \le C_9, \quad \forall (x,t) \in \Pi . \qquad (9)$$

$$I_8 \le N_1 \int \left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right| \cdot |c\gamma - 1| d\xi \le N_1 \int \frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right|}{\sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1} \cdot |c\gamma - 1| d\xi \le$$

$$\le N_1 C_9 \left(\int (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) d\xi \right)^{1/2} \left(\int (c\gamma - 1)^2 d\xi \right)^{1/2} \le$$

$$\le N_2 \left[\int \gamma (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) d\xi + \frac{1}{2} \int (c\gamma - 1)^2 d\xi \right].$$

Далее, разобьем числовую ось R на области $\Omega_i(t)$, $i = 1,2$ следующим образом:

$\Omega_1(t) = \{x \in R : \varphi(x)\theta(x,t) \le 1\}$, $\qquad \Omega_2(t) = \{x \in R : \varphi(x)\theta(x,t) > 1\}$.

Тогда

$$I_9 = \int cg\,\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta} dx = \int_{\Omega_1(t)} cg\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta} dx + \int_{\Omega_2(t)} cg\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta} dx \le \int_{\Omega_2(t)} cg\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta} dx$$

в силу положительности функций $g(\rho, c, \theta)$ и $c(x,t)$.

Заметим, что в $\Omega_2(t)$ выполняется неравенство:

$$\frac{\left((\varphi\theta)^{1/2} - 1\right)(\varphi\theta - 1)}{\varphi\theta(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)} < C_{10}, \quad \forall (x,t) \in \Pi.$$

Возвращаясь к I_9, имеем

$$I_9 \le N_3 \int_{\Omega_2(t)} \frac{\left((\varphi\theta)^{1/2} - 1\right)(\varphi\theta - 1)}{\varphi\theta(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)} (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) d\xi \le C_{10} N_3 \int (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) dx.$$

Интегрируя по времени полученное из (8) неравенство и применяя лемму Гронуолла, переходя к исходным переменным, выводим оценку (7). Лемма доказана.

*3. **Вспомогательное соотношение между искомыми функциями.*** Следуя [3], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники:

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \overline{\Omega}_N, \quad \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \overline{Q}_N,$$

$$\Omega_N = \{x \mid N < x < N+1\}, \; Q_N = \Omega_N \times (0,T), \; N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (7) функции $(\nu\psi - \ln\nu\psi - 1)$, $(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)$ неотрицательны при $\nu > 0$, $\theta > 0$, то

$$U_N(t) + \int_0^t W_N(\tau)\, d\tau \le E,$$

где интегралы в определении U_N и W_N берутся по Ω_N.

Отсюда, согласно [3], существуют положительные постоянные $n(E)$, $M(E)$, не зависящие от N, такие что

$$\frac{n(E)}{C_1} \le \int_N^{N+1} \nu(x,t)\, dx \le M(E) C_1, \quad \frac{n(E)}{C_4} \le \int_N^{N+1} \theta(x,t)\, dx \le M(E) C_4, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что при любом $t \in [0,T]$ в каждой области $\overline{\Omega}_N$ существуют точки $a(t) = a_N(t) \in [N, N+1]$, $a_1(t) = a_{1N}(t) \in [N, N+1]$ такие, что

$$\frac{n(E)}{C_1} \le \mathrm{v}(a(t),t) \le M(E)C_1, \quad \frac{n(E)}{C_4} \le \theta(a_1(t),t) \le M(E)C_4. \qquad (12)$$

Из первого и третьего уравнений системы (1) выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников $\overline{Q}_N$.

$$\mathrm{v}(x,t) = I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)\left[\mathrm{v}_0(x) + \int_0^t \theta(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau\right], \qquad (13)$$

где $\quad I(t) = I_N(t) = \dfrac{\mathrm{v}_0(a(t))}{\mathrm{v}(a(t),t)}\exp\left\{\int_0^t \theta(a(t),\tau)\,d\tau\right\},$

$$B(x,t) = B_N(x,t) = \exp\left\{\int_{a(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi,t))d\xi\right\}.$$

Справедливы оценки:

$$0 < K_1^{-1} \le B(x,t) \le K_1, \quad 0 < K_2^{-1} \le I(t) \le K_2, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}_N, \ \forall t \in [0,T] \qquad (14)$$

Доказательство следует из оценок (7) и представления (13).

4. Оценки для плотности (удельного объема) и температуры. Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{|x|<\infty} h(x,t), \quad m_h(t) = \min_{|x|<\infty} h(x,t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$m_{\mathrm{v}}(t) \ge N_4, \quad m_\theta(t) \ge N_5, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Строгая положительность удельного объема следует из представления (13) с учетом условий теоремы и (7), а температуры из уравнения теплопроводности системы (1).

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$M_{\mathrm{v}}(t) \le N_3 \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Доказательство. Имеют место следующие оценки [3]:

$$M_\theta(t) \le C_\varepsilon\, A(t) M_{\mathrm{v}}(t) + C, \quad \text{где} \quad A(t) = \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}dx. \qquad (15)$$

Применяя к (13) лемму Гронуолла, с учетом оценок (14), (15), получим ограниченность удельного объема сверху.

Из леммы 3, с учетом оценок (7) и (15), вытекает оценка

$$\int_0^t M_\theta(t)dt \le K_3, \qquad \forall t \in [0,T]. \qquad (16)$$

5. Оценки для производных от искомых функций. Умножим второе уравнение системы (1) на $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)$ и проинтегрируем по R:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\frac{1}{\mathrm{v}}c_x^2dx+\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{v}^2}c_x^2u_xdx+\int cg\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_xdx=I_1+I_2. \qquad (17)$$

Используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, вложения, (9), липшицевость функции g по $(\varphi\theta)^{1/2}$, оценим I_k, $k=1,2$.

$$I_1=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{v}^2}c_x^2u_xdx=\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x(u-f)dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{v}^2}c_x^2f'dx\le$$

$$\le\max_{x\in R}\left|\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right|\left(\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dx\right)^{1/2}\left(\int(u-f)^2dx\right)^{1/2}+\frac{C_3}{2N_4}\int\frac{1}{\mathrm{v}}c_x^2dx.$$

Поскольку

$$\max_{x\in R}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)^2\le2\int\left|\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x\right|dx\le\frac{2}{N_4^{1/2}}\left(\int\frac{1}{\mathrm{v}}c_x^2dx\right)^{1/2}\left(\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dx\right)^{1/2},$$

то

$$I_1\le\delta_1\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dx+C_{\delta1}\int\frac{1}{\mathrm{v}}c_x^2dx.$$

Оценим I_2 с учетом (9).

$$I_2=\int cg\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_xdx\le N_1\int\left|(\varphi\theta)^{1/2}-1\right|\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_xdx=$$

$$=N_1\int\frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2}-1\right|}{\sqrt{\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1}}\sqrt{\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_xdx\le$$

$$\le N_1C_9\left(\int(\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1)dx\right)^{1/2}\left(\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dx\right)^{1/2}\le\delta_2\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dx+C_{\delta2}.$$

Выбираем δ_i достаточно малыми. Интегрированием (17) по t, с учетом (7), находим:

$$\int\frac{1}{\mathrm{v}}c_x^2dx+\int_0^t\int\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x^2dxd\tau\le N_7,\quad\forall t\in[0,T]. \qquad (18)$$

Умножим четвертое уравнение системы (1) на $(u-f)$ и проинтегрируем по R:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int(u-f)^2dx+\int\left\{\frac{u_x^2}{\mathrm{v}}+\frac{\theta}{\mathrm{v}}f'\right\}dx=\int\frac{1}{\mathrm{v}}u_xf'dx+\int\frac{\theta}{\mathrm{v}}u_xdx=J_1+J_2. \qquad (19)$$

Оценим каждое J_k, $k=1,2$, по неравенству Коши, используя оценки (7), (9).

$$J_1\le-\frac{d}{dt}\int f'(\mathrm{v}\psi-\ln\mathrm{v}\psi-1)\,d\xi+C,$$

$$J_2 = \int \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi \nu} u_x dx + \int \frac{1}{\varphi \nu} u_x dx \le -\frac{d}{dt} \int \frac{1}{\varphi} (\nu\psi - \ln \nu\psi - 1)\, d\xi + \delta \int \frac{1}{\nu} u_x^2 dx + C\big(1 + M_\theta(t)\big).$$

Здесь

$$\left| \int \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi \nu} u_x dx \right| \le \frac{1}{C_4} \int \frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right|\left((\varphi\theta)^{1/2} + 1\right)}{\sqrt{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1} \cdot \frac{|u_x|}{\nu} dx \le$$

$$\le \delta \int \frac{1}{\nu} u_x^2 dx + C\big(1 + M_\theta(t)\big), \quad \delta < 1.$$

Из (19). после интегрирования по t, с учетом (4), (7), (16), выводим:

$$\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le N_8, \quad \forall t \in [0.T].$$

Рассуждая аналогично, можно получить все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решенийаналогично [4, 5].

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Петров А.Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. – 1982. – Вып. 56. – С.105–121.
2. Петров А.Н. Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // Там же. – 1993. – Вып.107. – С.112–123.
3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319с.
4. Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29, № 2. – С.337–348.
5. Искендерова Д.А. Задача Коши для уравнений течения реагирующей смеси газов // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. – 1998. – № 9. – С.77–92.
6. Искендерова Д.А. Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Там же. – 2001. – № 3(26) – С.62–67.