МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ
ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ
НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К.01.17.554

На правах рукописи
УДК 517.928

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЕНИЕМ МНОЖЕСТВ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ

Специальность 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош - 2019

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Прикладная математика» Ошского технологического университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, **Алыбаев К. С.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, Арипов М.М. (г.Ташкент, Узбекистан)

доктор физико-математических наук, профессор, Турсунов Д.А. (г.Ош, Кыргызстан)

Ведущая организация: Институт теоретической и прикладной математики НАН КР
Адрес: г.Бишкек, проспект Чуй 265 А.

Защита диссертации состоится «17» мая 2019г. в 14:30 часов на заседании диссертационного совета К 01.17.554 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Жалал-Абадском государственном университете и институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомится в Центральной библиотеке Ошского государственного университета и на сайте ВАК КРhttp//vak.kg

Автореферат разослан «___»____2019г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Сингулярно возмущенные уравнения (СВУ) возникают при решении задач физики, механики, электротехники, гидродинамики, автоматического регулирования и управления.

К примеру СВУ играют важную роль в квантовой механике. Для исследования таких классов уравнений Вентцель, Крамерс, Бриллюэн создали методы, не всегда достаточно строгие, которые позволяют исследовать поведение решений заданных СВУ. В их честь физики часто называют асимптотические методы, позволяющие исследовать поведение решений, методами ВКБ. СВУ также возникают при исследовании задач гидродинамики. Существует два типа течения вязкой жидкости: ламинарное и турбулентное. Первое течение описывается с помощью вектор-функции скорости, но изменяется так медленно и плавно, что прямое описание вектора поля является четкой и ясной задачей математической физики. Изменения происходящие в турбулентном потоке столь быстры и нерегулярны, что его можно описать только в статистических терминах. Переход от ламинарного состояния в турбулентное происходит так внезапно, когда скорость течения возрастает или вязкость жидкости уменьшается. Вследствие этого различия между этими состояниями является скорее качественным, чем количественным(состояния качественно разные).Общепринятым объяснением этого явления является то, что ламинарное течение «устойчиво» в том смысле, что возникающие в течении возмущения затухают со временем, в то время как в турбулентном течении определенные возмущения могут полностью разрушить предыдущее состояние.Для анализа этой ситуации была попытка, при малых возмущениях ламинарного потока, использовать линеаризованные уравнения Навье-Стокса. Такой подход восходит к Рэлею. В наиболее изученном варианте этой теории главную роль играет уравнение Орра-Зоммерфельда. В данном уравнение присутствуют параметры R, α. (число R-Рейнольдса и α- частота колебательных возмущений). При больших значениях $\alpha\cdot R$ происходит переход от ламинарного режима к турбулентному. Кроме этого уравнение в комплексной плоскости имеет точку поворота. Если ввести малый параметр $\varepsilon=(R\alpha)^{-\frac{1}{2}}$, то уравнение Орра – Зоммерфельда превращается в СВУ. Исследованием таких классов уравнений занимались Вазов, Рабенштейн, Линь,Лангер, Сибуйя. Асимптотическое разложение решений, для таких классов уравнений, развиты в работах Алымкулова К.А, получившее название обобщенный метод погранфункций.

В настоящее время исследованы различные классы СВУ. Мы в основном проанализируем работы посвященные исследованию СВУ, у которых понижается порядок при нулевом значении малого параметра $(\varepsilon=0)$.

К работам где исследованы решения СВУ с начальными и краевыми условиями можно отнести работы Л.С.Понтрягина, Е.Ф.Мищенко, Н.Х.Розова, А.Н.Тихонова, А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузова, М.И.Иманалиева, К.Алымкулова, П.С.Панкова, К. Какишова, С. Каримова, К.С. Алыбаева, Г.М. Кененбаевой, Д.Турсунова, К.Б.Тампагарова.

В работах Л.С.Понтрягина, Е.Ф.Мищенко, Н.Х.Розова описаны релаксационные колебания, а А.Н.Тихонов общем виде решил задачу о предельном переходе по ε, сформулировал достаточные условия при которых решения заданных СВУ(R) стремится к решению вырожденного уравнения по ε. А.Б.Васильева построила асимптотическое разложение решения по параметру ε и совместно с В.Ф.Бутузовым исследовали решения СВУ с краевыми условиями. СВУ с начальными скачками исследованы в работах М.И.Вишика, Л.А.Люстерника и К.А.Касымова. СВУ с краевыми условиями исследованы в работах К.Алымкулова с применением разработанного им метода. М.И.Иманалиев разработал более удобный метод разложения решений интегро-дифференциальных СВУ. М.И.Иманалиев и П.С.Панков, Г.М.Кененбаева в теории СВУ обнаружили ряд новых явлений. К. Какишов исследовал СВУ, правые части которых имеют разрывы при некоторых значениях независимой переменной и применяя метод М.И. Иманалиева получил асимптотическое разложение решений.

С.Каримов, К.С. Алыбаев, Д.Турсунов, К.Б. Тампагаров исследовали решения СВУ в комплексных областях.

Решения СВУ с дополнительными условиями исследованы при условии, что вырожденные уравнения (ВУ), соответствующие заданными СВУ, имеют единственные решения.

Для систематического поиска новых эффектов и явлений в теории систем СВУ в было предложено рассматривать множество решений вырожденной системы СВУ(R) (СВУ с действительным аргументом) как точечное, а для СВУ(C) (СВУ с комплексным аргументом) исследования не проводились. Следовательно исследование СВУ (R∨C), (ВУ) которых имеют более чем двух решений, с разделением решений (ВУ) является актуальной задачей и решение данной проблемы составляет основное содержание данной работы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами: Работа выполнена в связи с тематикой научных исследований кафедры «Прикладная математика» Ошского технологического университета.

Цели и задачи. 1. Исследовать асимптотическое приближение решений заданных СВУ к решениям соответствующих (ВУ). 2. Разработать единый метод исследования СВУ(R∨C) основанный на разделение главных множеств (ГМ). 3. Определить понятия: разделение (ГМ); множеств притяжений и других понятий связанных с ними. 4. Разработать метод деления (ГМ). 5. Доказать существование множеств и смежных множеств притяжений для решений (ВУ) (согласно принятых определений).6. Определить границы областей притяжений для СВУ(C).

Методы исследования: - разделение (ГМ) с использованием заданных (ОФ), (ОВФ) и множеств решений вырожденных уравнений;

- конформного отображения областей, приводящие исследуемую задачу к наиболее простому виду;- асимптотического представления интегралов;
- последовательных приближений для доказательства существования решений СВУ и множеств притяжений;- сравнения рядов, при доказательстве равномерной сходимости последовательных приближений.

Научная новизна: 1. Разработан единый метод исследования СВУ(R$\vee$C) основанный на деление (ГМ).2. Установлена взаимосвязь между частями (ГМ) и множеством решений (ВУ), с введением понятия множества притяжений для решений (ВУ). 3. Рассмотрены случаи, когда не для всех решений (ВУ), существуют множества притяжений; 4. Для СВУ(R) исследована взаимосвязь интервала притяжения и интервала устойчивости точки покоя присоединенной системы (по терминологии А.Н.Тихонова). 5. Доказано, зависимость областей притяжений от начальных значений и возможность расширения областей притяжений.6. Для доказательства существования областей притяжений, решения СВУ(С) представлены на некоторых линиях.7. Доказательство существование множеств притяжений осуществлена без привлечения условий устойчивости решений (ВУ).

Теоретическая значимость диссертационной работы. В работе разработан новый метод исследования СВУ, которые при вырождении имеют несколько решений. Основу метода составляют введенные новые понятия разделение (ГМ), множества притяжения и связанные с ними понятия.

Впервые решения заданных СВУ представлены на некоторых линиях рассматриваемых областях и римановых поверхностях.

Практическая ценность работы. Результаты полученные в работе могут быть применены при исследовании процессов, которые имеют несколько стационарных решений и под действием возмущений (внутренние и внешние) происходит мгновенный переход от одного состояния к другому (как в случае течения жидкости с вязкостью). Такие процессы наблюдаются в квантовой физике, в теории возмущений, колебаний, теории автоматического регулирования, управления, электротехнике, радиотехнике, в теории механизмов и машин. Также результаты можно использовать при чтении лекционных курсов по теории теории сингулярных возмущений для студентов, магистров и аспирантов по направлениям «Математика», а также для решений других теоретических задач, связанных с СВУ.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Для системного исследования СВУ теряющих единственность решений при вырождении разработан новый метод с введением понятий: главные множества, основные функции (ОФ), основные вектор функции (ОВФ), разделение (ГМ).
2. С использованием (ОФ) и (ОВФ) произведено разделение (ГМ).
3. Введено понятие множество притяжений решений (ВУ) разделяющее множество решений (ВУ).
4. Сформулированы наиболее общие условия существования множеств притяжений.

5. Расширение и определение границ областей притяжений.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях.

- на научном семинаре математиков Южного региона Кыргызстана (под руководством член корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова);

- на научном семинаре Жалал-Абадского государственного университета (под руководством д.ф.-м.н., проф. К.С. Алыбаева);

- на научно-методических семинарах кафедры «ПМ» Ошского технологического университета им.М.М.Адышева (г. Ош, Кыргызстан, 2008-2018 г.);

- на V конгрессе всемирного математического общества тюркоязычных стран (с. Булан-Соготту, Кыргызстан, июнь, 2014 г.) ;

- на Иссык-Кульском международном математическом форуме (с. Бозтери, Кыргызстан, июнь, 2015 г.) ;

- на V международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 85-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек, сентябрь, 2016 г.) ;

- на международной научной конференции «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании» посвященной 75-летию академика А. Жайнакова (г. Бишкек, Кыргызстан, октябрь, 2016 г.) ;

- на семинаре Ошского технологического университета «Научная сессия ОШТУ» (г.Ош, Кыргызстан, январь, 2016 г.)

- на международной научно-практической конференции «Инновации в науке» (г. Новосибирск, Россия, ноябрь, 2016 г.) ;

- на международной научно-практической конференции «Естественные и математические науки» (г. Новосибирск, Россия, декабрь, 2016 г.);

- на научно-практической конференции «Бекболотовские чтения» (г. Жалал-Абад, Кыргызстан, февраль, 2017 г.).

- на научно-практической конференции посвященной к дню науки (г. Жалал-Абад, Кыргызстан, ноябрь, 2017 г.)

- на международной научно-практической конференции «Итоги науки в теории и практике» (г. Москва, Россия, декабрь, 2017 г.);

- на международной научной конференции «II Борубаевские чтения» (Бишкек, март 2018) ;

- на международной научно-практической конференции посвящённой 95летие ЖАГУ(г.Жалал-Абад, Кыргызстан, апрель,2018 г.)

- на 8-международной конференции MADEA 8 «Математический анализ, дифференциальное уравнение и приложение», посвященной 80-летию академика А.М. Самойленко. (г.Бишкек-Чолпон-Ата**,** Кыргызстан, июнь, 2018 г**) .**

-на Международной научной конференции «International Conferenceon Analysisand Applied Mathematics» (ICAAM), (г. Лефкоса, Северный Кипр, 2018).

- на международной научно-практической конференции «Теоретические и практические вопросы современной науки» (г. Москва, Россия, июль, 2018 г);

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях и 6 тезисах докладов. В совместных работах Алыбаеву К.С принадлежит постановка задачи, а автору решение поставленной задачи в целом.

Всего опубликовано 11 работ в системе РИНЦ: из них в РИНЦ Кыргызстана – 4; в РИНЦ России – 6 из них с импакт фактором – 0,207; с импакт фактором – 0,149; одна статья опубликована в журнале индексируемой в базе данных Scopus с импакт фактором 0,22. В принятой ВАК КР шкале подсчета баллов по результатом публикаций набрано - 240 баллов.

Структура и объем работы. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, понятий и использованных кратких математических записей, сокращений, введения, базовых и доказательных частей. Базовую часть составляют глава 1 и глава 2. Доказательная часть состоит из глав 3-4. Главы разбиты на параграфы, а параграфы (при необходимости) на подпункты. После каждой главы приведены общие заключения по главе, а в конце выводы по работе.

Составлен список использованных источников из 94 наименований.

Общий объем диссертации 150 страниц машинописного текста, набранного шрифтом Times News Roman размером 14 пт. согласно инструкции утвержденного постановлением Президиума ВАК КР от 28.06.2018 №112. Объём диссертации без списка использованных источников составляет 139 страниц. В диссертационной работе 33 рисунка. Нумерация глав – сквозная. Номер параграфа состоит из двух цифр, которые разделены точкой. Первая цифра означает номер главы, а второй - номер параграфа. Теоремы, определения, формулы, рисунки и условия, пронумерованы тройными цифрами. Первая цифра означает номер главы, вторая - номер параграфа, а третья - номер теоремы, определения, формулы, рисунка и условия. Подпункты параграфов также пронумерованы тройными цифрами и первая указывает на номер главы, вторая на параграф, а третья означает номер подпункта.

В работе приняты следующие определения:

Определение 1. 1. Заданы (ОФ) или (ОВФ) и множество Δ, где определены (ОФ) и (ОВФ). 2. Сформулированы условия $\{(U)\}$ на (ОФ) и (ОВФ). 3. Условия $\{(U)\}$ делят множество Δ на части.

При выполнении условий 1-3 будем говорит, что произведено деление множество Δ относительно условий $\{(U)\}$.

Определение 2. Множество значений независимой переменной уравнений, назовём главным множеством и обозначим (ГМ).

Определение 3. Пусть $z(t,\varepsilon)$ – решение заданного СВУ (удовлетворяющие некоторому начальному условию) и $\xi(t)$ – решение (ВУ), соответствующее заданному СВУ, определенные в множестве Δ.
Если $\forall t \in \Delta\ (z(t,\varepsilon) \to \xi(t)$ по $\varepsilon)$, то Δ назовём множеством притяжения решения $\xi(t)$, и обозначим $\Delta\big(\xi(t)\big)$.
Более строгие и детальные определения даны в §2.1. Понятие «множество» используется в двояком смысле. Если $t \in R$, то «множество» ≡ «интервал»;
$t \in$ С, то «множество» ≡ «область».

Определение 4. Пусть: 1. $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. 2. $\Delta_1\big(\xi_1(t)\big)$, $\Delta_2\big(\xi_2(t)\big)$ где $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – решения (ВУ).
Если выполняются условия 1-2, то множества Δ_1 и Δ_2 назовём смежными множествами притяжений.

Краткое содержание работы.

Глава 1 содержит краткий обзор ранних исследований и состоит из трех параграфов.

В первом параграфе изложены результаты исследований предельного перехода проведённые А.Н. Тихоновым, пограничных слоев полученные А.Б. Васильевой, М.И. Иманалиева и их учениками, а также теория релаксационных колебании полученные Л.С. Понтрягином, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розовым и «эффекты» и «явления» в теории СВУ(R) проведенные М.И. Иманалиевым, П.С.Панковым и Г.М. Кененбаевой.

В теории предельного перехода и пограничных слоев (ВУ) соответствующие заданным СВУ(R) имеют единственные решения. При исследовании релаксационных колебаний использована устойчивость решений (ВУ). Для получения новых «эффектов» и «явлений» множество решения (ВУ) рассматривается как точечное, без выделения отдельных решений (ВУ).

§1.2содержит результаты исследований СВУ(C) полученные М.А.Шишковой, А.И. Нейштдатом, К.С. Алыбаевым, Г.М. Анарбаевой, Д.А. Турсуновым, М.А. Азимбаевым, К.Б. Тампагаровым. В перечисленных работах заданные СВУ(C) при вырождении также имеют единственные, изолированные решения. СВУ(C) имеющие несколько решений при вырождении ранее не рассматривались.

В §1.3приведены заключение по Главе 1.

Глава 2 содержит **о**бщую постановку задачи и используемые вспомогательные материалы и состоит из восьми параграфов. **В §2.1** изложена общая постановка задачи. Основным объектом исследования данной работы являются системы СВУ(R ∨ C) состоящие из $n \geq 1$уравнений первого порядка

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = f\big(t, z(t,\varepsilon)\big) \qquad (1)$$

с начальным условием$z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon)$. (2)
Пусть $t \in \Delta \subset C$ и Δ - односвязная область,$t_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка;
$z(t,\varepsilon) = colon\big(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon), \ldots, z_n(t,\varepsilon)\big), n \in N$;

$f(t,z)$- заданная комплекснозначная аналитическая функция, по переменнымt,z в некоторой области H переменныхt,z,

$$f(t,z)=colon\big(f_1(t,z),f_2(t,z),\dots,f_n(t,z)\big).$$

(ВУ), соответствующие (1) имеет вид$f\big(t,\xi(t)\big)=0$.(3)

Предполагается, (3) имеет изолированные решения $\xi_j(t)(j=1,2,\dots,k)$.

Определение 2.1.1. Если $\xi_j(t)\in Q(\Delta)$и$\forall t\in\Delta$ ($\xi_j(t)\neq\xi_m(t)$ при $j\neq m$), то решения $\xi_j(t)\xi_m(t)$ называются изолированными вΔ.

$Q(\Delta)$ - пространство аналитических функции в области Δ.

Определение 2.1.2. Пусть 1.Существует область $\Delta_j\subset\Delta$ содержащая точку t_0.2. $\forall t\in\Delta_j$ существует $z(t,\varepsilon)$ – решение задачи (1)-(2). 3. $\forall t\in\Delta_j\big(z(t,\varepsilon)\to\xi_j(t)$по $\varepsilon\big)$.

При выполнении этих условий область Δ_j назовём областью притяжения решения $\xi_j(t)$.Пусть задача (1)-(2) рассматривается для значений $t\in[t_0,T]$- отрезок действительной оси и вырожденное уравнение (3) имеет решения $\xi_j(t)(j=1,2,\dots,k)$ определенные для $t\in[t_0,T]$.

Определение 2.1.3. Если$\xi_j(t)\in C^1([t_0,T])$ и $\forall t\in[t_0,T]\big(\xi_j(t)\neq\xi_m(t)$ при $j\neq m\big)$, то решение $\xi_j(t)$ и $\xi_m(t)$ называются изолированными в $[t_0,T]$.

Определение 2.1.4. Пусть:1. Существует интервал $(t_0,t_j)\subset[t_0,T]$.

1. $\forall t\in(t_0,t_j)$существует $z(t,\varepsilon)$ – решение задачи (1)- (2).
2. $\forall t\in(t_0,t_j)\big(z(t,\varepsilon)\to\xi_j(t)$ по $\varepsilon\big)$,тогда (t_0,t_j) – назовём интервалом притяжения решения $\xi_j(t)$.Далее область(интервал) притяжения обозначим$\Delta_j\left(\xi_j(t)\right)\left((t_0,t_j)\left(\xi_j(t)\right)\right)$.

Задача. При каких условиях на правые части уравнения (1) существуют области (интервалы) притяжения решений $\xi_j(t)$?

Предметом дальнейших исследований будет решение данной задачи для различных СВУ(R) и СВУ(C) первого порядка или их систем.

В §2.2 определены основные функции (ОФ), основные вектор функции (ОВФ) и разделение главных множеств (ГМ).

Если задана (СВУ)$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=a(t)z(t,\varepsilon)+\varepsilon b(t)+f\big(t,z(t,\varepsilon)\big)$,(4)

то правая часть по t определяет некоторое множество Δ.

Определение 2.1.1. Функцию $a_j(t)$ назовём основной функцией (ОФ).

Пусть рассматривается система из нескольких уравнений первого порядка

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=A(t)z(t,\varepsilon)+\varepsilon b(t)+f\big(t,z(t,\varepsilon)\big)(5)$$

где $A(t)$- квадратная матрица порядка $n\times n$; $b(t)=colon(b_1(t),\dots,b_n(t),f(t,z)=colon(f_1(t,z),\dots,f_n(t,z);\ t\in\Delta$ и соответствующая вырожденная система имеет изолированные решения $\xi_k(t)$- вектор-столбцы размерности $n(k=1,2,\dots,m)$.

В (5) проведя замену неизвестной вектор-функции $z(t,\varepsilon)=\xi_k(t)-v_k(t,\varepsilon)$, где $v_k(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная вектор- функция получим систему

$$\varepsilon v_k'(t,\varepsilon) = A_k(t)v_k(t,\varepsilon) + \varepsilon b_k(t) + f_k\big(t, v_k(t,\varepsilon)\big), t \in \Delta. \quad (6)$$

Пусть матрица $A_k(t)$ при фиксированномk имеет различные собственные значения $a_{kj}(t)(j = 1,2,\dots,n)$. Для этого случая множество Δ (при фиксированном k) определяется совокупностью $\{a_{kj}(t), b_{kj}(t), f_{kj}(t, v_k)\}$.

Определение 2.2.2 Вектор-функцию $a_{k0}(t) = \big(a_{k1}(t), \dots, a_{kn}(t)\big)$ назовём основной вектор–функцией (ОВФ).

Заранее можно ожидать, что решения вырожденного уравнения (системы) имеют различные множества притяжений и задача состоит в определении таких множеств. Таким образом для доказательства существование множества притяжений предварительно с помощью, каких то, средств надо произвести деление множеств Δ на части и выбрать те части, которые могут быть множествами притяжений. Следовательно «разделение» множества состоит из двух составляющих: «деление множества на части» и «выбора частей».

Далее деление (ГМ) будет осуществлена с применением (ОФ) или (ОВФ), а выбор и соответствие выбора множествам притяжений будут подтверждены теоремами.

§2.3 содержит материалы касающиеся свойств линии уровня гармонических функций.

В§2.4 изложены способы деление областей с применением гармонических функций. Пусть заданы функции $a_j(t)(j = 1,2,\dots,n)$ и выполняется условиеU 2.4.1 $a_j(t) \in Q(\Delta)$ и$\forall t \in \Delta\ \big(a_j(t) \neq 0\big)$.

Определены функции $A_j(t) = \int_{t_0}^{t} a_j(\tau)d\tau$, где $t_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка, $t = t_1 + it_2, ReA_j(t) = A_{j1}(t_1,t_2), \mathcal{J}mA_j(t) = A_{j2}(t_1,t_2)$.

Линия $(p_{0j1}) = \{t \in \Delta \mid ReA_j(t) = 0\}$область Δ делит на части $\Delta_{j11}, \Delta_{j12}$.Принято$\Big(\forall t \in \Delta_{j11}\big(A_{j1}(t_1,t_2) \leq 0\big) \wedge \forall t \in \Delta_{j12}\big(A_{j1}(t_1,t_2) \geq 0\big)\Big)$(A1)

Аналогично $(p_{0j2}) = \{t \in \Delta \mid JmA_j(t) = 0\}$ область Δ делит на частиΔ_{j21}, Δ_{j22}.

Возьмём$\Big(\forall t \in \Delta_{j21}\big(A_{j2}(t_1,t_2) \leq 0\big) \wedge \forall t \in \Delta_{j22}\big(A_{j2}(t_1,t_2) \geq 0\big)\Big)$. (A2)

Определена область Δ_{j0}, ограниченная линиями уровней $(p_{j11}), (p_{j12}), (p_{j21}), (p_{j22})$:$(p_{j1k}) = \{t \in \Delta \mid ReA_j(t) = p_{j1k} - const\}$, $(p_{j2k}) = \{t \in \Delta \mid \mathcal{J}mA_j(t) = p_{j2k} - const\}, (k = 1,2)$. Рис.1

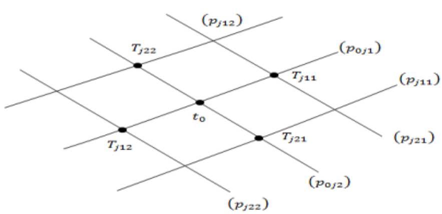

рис.1

Точка t_0 является внутренней точкой области Δ_{j0}.

Определение 2.2.1. Области Δ_{j0} назовём базовыми и обозначим Δ_{j0}(B).

В §2.5 базовые области определенные в §2.4 с применением конформного отображения базовых областей $w = A(t)$ (j - фиксированное) отображены в некоторый треугольник $(\mathcal{P}_{j0})$ плоскости w.**§2.6** посвящен решению задачи о пересечении базовых областей определенных в §2.4.Пусть определены базовые области $\Delta_{j0}(B)(j = 1,2,\dots,n)$.Существует ли $\bigcap_j \Delta_{j0} = \Delta_0$, где $ReA_j(t) \leq 0$?

Каждая, отдельно взятая $\Delta_{j0}(B)$ имеет часть, где $ReA_j(t) == A_{j1}(t_1,t_2) \leq 0$.Далее в водится обозначение $\Delta_0(B1)$.

Определение 2.6.1. Область Δ_0(B1) назовём базовой областью типа 1.

Рассматриваются функции $a_j(t)(j = 1,2), t \in \Delta$ и для $a_j(t)$ выполняются условие U2.4.1 и соглашения (А1), (А2) .Существуют базовые области типа1 для функций $A_{j1}(t_1,t_2) = Re\int_{t_0}^{t} a_j(\tau)d\tau$ которые обозначены Δ_{0j}(B1).

Ставится задача, при каких условиях существует$\bigcap_{j=1}^{2} \Delta_{0j}$ (B1) $= \Delta_{02}$? Введено обозначение Δ_{02}(B2).

Определение2.6.2.Область $\Delta_{02}(B2)$ назовём базовой областью типа 2.

Введены линии уровня $(p_{j1}) = \{t \in \Delta \big| A_{j1}(t_1,t_2) = p_{j1} - const\} j = 1,2$и составлены множества $\{(p_{j1})\}$.Пусть выполняется условие

U2.6.1. Произвольные линии $(p_{11}) \in \{(p_{11})\}$ и $(p_{21}) \in \{(p_{21})\}$ пересекаются только в одной точке.

Согласно условияU2.6.1 область Δ разделяется на четыре части $\Delta_k(k = 1,2,3,4)$, причем существует только одна часть, где $A_{j1}(t_1,t_2) \leq 0(j = 1,2)$, а в оставшихся частях функции $A_{j1}(t_1,t_2)$, по совокупности имеют разные знаки. Часть, где $A_{j1}(t_1,t_2) \leq 0$ $(j = 1,2)$ обозначена Δ_1 (рис.2).

Согласно определение 2.6.1 область Δ_1 является базовой областью типа 2.

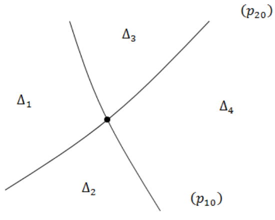

рис.2

Принято соглашение $\forall t \in \Delta_1\big(A_{j1}(t_1,t_2) \leq 0\big), \forall t \in \Delta_2(A_{11}(t_1,t_2) \leq 0,$ $A_{21}(t_1,t_2) \geq 0), \forall t \in \Delta_3(A_{11}(t_1,t_2) \geq 0, A_{21}(t_1,t_2) \leq 0),$
$\forall t \in \Delta_4\big(A_{j1}(t_1,t_2) \geq 0\big).$ (А3)

Для дальнейших исследований проведено деление областей Δ_k. Введены линии уровня$\left(p_{1\varepsilon}^{\pm}\right) = \{t \in \Delta \mid A_{11}(t_1,t_2) = \mp\varepsilon ln\varepsilon\}$,
$\left(p_{2\varepsilon}^{\pm}\right) = \{t \in \Delta \mid A_{21}(t_1,t_2) = \mp\varepsilon ln\varepsilon\}$.

Деление области Δ изображена на (рис.3).

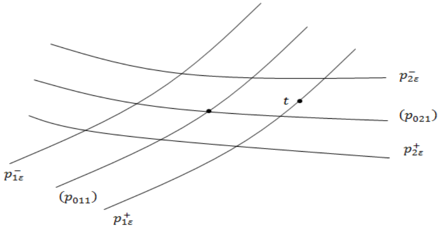

Рис.3

Часть Δ_1 ограниченная $(p_{1\varepsilon}^{-})$ и $(p_{2\varepsilon}^{-})$ обозначена $\Delta_{1\varepsilon}$; часть Δ_2 ограниченная $(p_{1\varepsilon}^{-})$ и $(p_{2\varepsilon}^{+})$ обозначена $\Delta_{2\varepsilon}$;часть Δ_3 ограниченная $(p_{1\varepsilon}^{+})$ и $(p_{2\varepsilon}^{-})$ обозначена $\Delta_{3\varepsilon}$; часть Δ_4 ограниченная $(p_{1\varepsilon}^{+})$ и $(p_{2\varepsilon}^{+})$ обозначена $\Delta_{4\varepsilon}$;

В §2.7 приведены различные определения кривых (по Жордану, Кантору, Урысону) и на кривой состоящих из нескольких спрямляемых кривых Жордана: $(p_1),(p_2),\dots,(p_n)$ решения СВУ первого порядка вида$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=a(t)z(t,\varepsilon)+f(t,z(t,\varepsilon),\varepsilon)$с начальным условием$z(t_0,\varepsilon)=z^0$, где $t\in\Delta\subset C$ и $t_0\in\Delta$ и её внутренняя точка; при условииU2.7.1 $a(t)\in Q(\Delta)$. U2.7.2 $f(t,z,\varepsilon)\in Q(H)$, где H – некоторое множество переменных (t,z) и $f(t,z,\varepsilon)$ непрерывна по ε;представлена на каждом из частей $p_k(k=1,2,3,\dots,n)$. Данное представление используется в главах 3 и 4.

§2.8 содержит заключение по главе 2.

В главе 3 рассматриваются СВУ первого порядка и данная глава состоит из шести параграфов. **В § 3.1** рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=f(t,z)=a(t)(z(t,\varepsilon)-b_1)(z(t,\varepsilon)-b_2), \tag{7}$$

где $t\in[0,T],b_j\in R_+(j=1,2)$ и $0<b_1<b_2$,$t_0=0$,

с начальным условием$z(0,\varepsilon)=z^0-\mathrm{const}$ (8)

в предположении выполнения условий: U3.1.1 $a(t)\in C([0,T])$.
U3.1.2 $a(t)<0\ (0\le t<t_0); a(t_0)=0;\ a(t)>0\ (t_0<t\le T)$.
Вырожденное уравнение имеет решения: $\xi_1=b_1,\xi_2=b_2$. (9)
Задача существование интервалов притяжений и его связь с интервалами устойчивости точки покоя решается следующей теоремой.

Теорема 3.1.1. Пусть рассматривается задаче (7)–(8) и выполняются условия U3.1.1, U3.1.2. Тогда для решений (9) существуют интервалы притяжения и некоторые интервалы притяжений содержат интервалы неустойчивости точек покоя.

Приведены примеры подтверждающие достоверность полученных результатов:

1. $a(t)=-\cos t, t\in R$. 2. $a(t)=\begin{cases}2(t-1), 0\le t\le 2;\\ 2(t-3), 2\le t\le 4;\\ 2(t-5), 4\le t\le 6.\end{cases}$

Далее рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = f(t,z) = a(t)z(z-b_1)(z-b_2), \tag{10}$$

где $t \in [0,T]$, $b_j \in R_+$ и $b_1 < b_2$,

$$z(0,\varepsilon) = z^0 - const \tag{11}$$

Предполагается выполнимость условий U3.1,U3.2. Заданное уравнение рассмотрим в множестве $\Omega = \{(t,z)|\ 0 \le t \le T, 0 < z\}$.

Вырожденное уравнение имеет решения:$\xi_1 = 0, \xi_2 = b_{1,}\xi_3 = b_2$. (12)

Множество Ωпрямымиz$z = b_1$, $z = b_2$ разделяется на три части:

$$\Omega_j = \{(t,z)|\ 0 \le t \le T, b_{j-1} < z < b_j\}, j = 1,2,3, \qquad b_0 = 0, b_3 = +\infty.$$

Следующая теорема выражает взаимосвязь областей влияния и интервалов притяжений.

Теорема 3.1.2. Пусть рассматривается задача (10)-(11) и для $a(t)$ выполняются условия U3.1.1, U3.1.2. Тогда для каждого из случаев $(0,z^0) \in \Omega_j$ существуют интервалы притяжений для одного из решений (12).

Приведены примеры

Пример 1. $a(t) = 2(t-1), t \in [0,3], t_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 2.$

Пример 2.$a(t) = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], k \in Z_+$-множество неотрицательных целых чисел, $t_0 = -\frac{\pi}{2}, b_1 = 1, b_2 = 2.$

§3.2 посвящен и следованию СВУ Бернулли вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) \tag{13}$$

с начальным условием$z(t_0,\varepsilon) = z^0 - const,$ (14)

при действительных и комплексных значениях t.

§3.2 состоит из двух подпунктов. В подпункте 3.2.1 рассматривается уравнение Бернулли с действительным аргументом, в следующих случаях:1.Пусть выполняются условия:U3.2.1.$a(t), b(t) \in C^2[t_0,T] \wedge \forall t \in$ $\in [t_0,T](b(t) \neq 0)$. U3.2.2. $\forall t \in [t_0,T](a(t) < 0)$.(ВУ) соответствующие (13) имеет решения $\xi_1(t) \equiv 0$, $\xi_2(t) = -a(t)/b(t)$.

Справедлива **Теорема 3.2.1.** Пусть рассматривается задача (13)-(14) и выполняются условия U3.2.1, U3.2.2. Тогда $(t_0,T]$- является интервалом притяжения для решения $\xi_1(t)$.

Решение $\xi_2(t)$ не имеет интервала притяжений.

2. Пусть выполняется условие U3.2.3. $\forall t \in [t_0,T](a(t) > 0)$.

Тогда справедлива **Теорема 3.2.2.**Пусть рассматривается задача (13) -(14) и выполняются условия U.3.2.1, U.3.2.3.Тогда $(t_0,T]$- является интервалом притяжения для $\xi_2(t)$.Решение $\xi_1(t)$ не имеет интервала притяжений.

3.Пусть выполняются условия

U3.2.4. $\forall t \in [t_0,T](a'(t) > 0) \wedge a(T_0) = 0\ (t_0 < T_0 < T)$.

U3.2.5.$\exists!\ T_1(T_0 < T_1 < T) \wedge F(T_1) = 0$.

Сформулированные условия обеспечивают существование смежных интервалов притяжений.

Теорема 3.2.3.Пусть рассматривается задача (13)-(14) и выполняются условия U.3.2.1, U.3.2.4, U.3.2.5.Тогда (t_0,T_1) - интервал притяжения для $\xi_1(t)$, а $(T_1,T]$- интервал притяжения для $\xi_2(t)$.

Приведены примеры для рассматриваемых случаев:

1. $a(t) \equiv -1, b(t) \in C^2[-1,1]$.
2. $a(t) = expt, b(t) \in C^2[0,1]$ и $\forall t \in [0,1](b(t) \neq 0)$.
3. $a(t) = 2t$, а $b(t) \in C^2[-1,2]$ и $\forall t \in [-1,2](b(t) \neq 0)$.

В 3.2.2 исследована уравнение Бернулли с комплексным аргументом при условииU3.2.6. $a(t), b(t) \in Q(\Delta)$ и $\forall t \in \Delta\ (a(t) \neq 0, b(t) \neq 0)$.

(ВУ), имеет решения $\xi_1(t) \equiv 0,\ \xi_2(t) = -\frac{a(t)}{b(t)} \in Q(\Delta)$.

Для доказательства существования областей притяжений использованы построения §2.4 (для одной функции). Рассматриваются области $\Delta_{k\varepsilon}(k = 1,2)$.Справедлива

Теорема 3.2.1. (существование смежных областей притяжений). Пусть выполняются условия U3.2.6 и $\big(AK(k = 1,2)\big)$. Тогда $\forall t \in \Delta$ решение задачи (13)-(14) существует и $\Delta_{k\varepsilon}(k = 1,2)$ являются областями притяжения соответственно для решений $\xi_k(t)(k = 1,2)$.

Приведен пример. $a(t) \equiv a \in C \wedge a - const, b(t) \in Q(\Delta), t_0 \in \Delta \subset C$.

В § 3.3 исследована СВУ типа Риккати

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) + c(t)z^2(t,\varepsilon) \tag{15}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon), \tag{16}$$

где $t \in \Delta \subset C, t_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка.

Пусть выполняется условие U3.3.1. $a(t) \in Q(\Delta)$ и $\forall t \in \Delta\ (a(t) \neq 0)$.

Для доказательства существования областей притяжения использованы построения проведённые в § 2.4. Если учесть построения проведённые в § 2.4, то базовая область $\Omega_{10}(B)$ состоит из двух частей. Эти части обозначены $\Delta_{111}(B)$ и $\Delta_{112}(B)$.

По определению и согласовании (A1)

$$\big(\forall(t_1,t_2) \in \Delta_{111}(B)(A_{11}(t_1,t_2) \leq 0) \wedge \forall(t_1,t_2) \in \Delta_{112}(B)(A_{11}(t_1,t_2) \geq 0)\big)$$

Рассматривается решение $\xi_1(t) \equiv 0$ и считается $|z^0| \leq M_0\varepsilon$. (17)

Теорема 3.3.1. Пусть выполняются условия U3.3.1, U3.3.2. Тогда существует решение задачи (15), (17ё) в $\Delta_{111}(B)$ и область $\Delta_{111}(B)$ является областью притяжения решения $\xi_1(t) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 3.3.1 проведена используя конформное отображение областей (§2.5).

Далее рассматривается решение $\xi_2(t)$.

Справедлива **Теорема 3.3.2.** Пусть выполняются условия U3.3.1, U3.3.2. Тогда существует решение (15) удовлетворяющее условию $|z^0(\varepsilon) - \xi_2(t_0)| \leq$ $\leq M\varepsilon$ и область $\Delta_{112}(B)$ является областью притяжения решения $\xi_2(t)$.

В § 3.4 исследована СВУ первого порядка

$$\varepsilon\, z'(t,\varepsilon) = f\big(t, z(t,\varepsilon)\big), \tag{18}$$

с начальным условием $z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon)$(19)

для $t \in \Delta, t_0 \in \Delta$;в предположении,(ВУ) имеет изолированные решения

$\xi_j(t), (j = 1,2,\dots,n) \in Q(\Delta)$ и выполняется условиеU3.4.1 Пусть $f(t,z) \in Q(H), H-$ некоторая область переменных (t,z).
В (18) производится замена $z\,(t,\varepsilon) = u_j(t,\varepsilon) + \xi_j\,(t)$и получается уравнение

$$\varepsilon u_j'(t,\varepsilon) = a_j(t)u_j(t,\varepsilon) + \varepsilon b_j(t) + g_j(t,u_j(t,\varepsilon)) \tag{20}$$

$f_z'(t,\xi_j) \equiv a_j(t),\ \frac{1}{2!}f_z''(t,\xi_j)u_j^2 + \cdots.. \equiv g_j(t,u_j), -\xi'_j(\mathrm{t}) \equiv b_j(t)$.
U3.4.2Пусть $\forall (t,z) \in H\ \left(\left|g_l(t,\tilde{u}_j) - g_j(t,\tilde{u}_j)\right| \le M_0\left|\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j\right| max\{|\tilde{u}_j|,|\tilde{\tilde{u}}_j|\}\right)$.
U3.4.3$\forall t \in \Delta(a_j(t) \neq 0)$.

$$u_j(t_0,\varepsilon) = u_j^0(\varepsilon), \quad \left|u_j^0(\varepsilon)\right| \le M_1\varepsilon. \tag{21}$$

Доказана**Теорема 3.4.1.** Пусть выполняются условия U3.4.1,U3.4.2, U3.4.3**.**Тогда для каждого $\xi_j(t)$существует:

1. Решение $z_j(t,\varepsilon)$уравнения (18) удовлетворяющее условию
$$z_j(t_0,\varepsilon) = z_j^0(\varepsilon),\ \left|z_j^0(\varepsilon) - \xi_j(t_o)\right| \le M_2\varepsilon.$$
2. Область $\Delta_j \subset \Delta$ и $\forall\, t \in \Delta_j\big(z_j(t,\varepsilon) \longrightarrow \xi_j(t)\text{по }\ \varepsilon\big)$.

Для доказательства теоремы 3.4.1 используется уравнение (20) с условием (21) и применяется конформное отображение областей (§ 2.5).
В данном параграфе на примерах доказана, общая часть областей притяжений $\Delta_j\left(z_j(t,\varepsilon)\right)$ могут быть: плоской областью, простой дугой(линией),точкой.

В § 3.5 доказана зависимость областей притяжений от начальных значений и возможные расширение смежных областей притяжений. Рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + z^2(t,\varepsilon) + \varepsilon f\big(t,z(t,\varepsilon)\big), \tag{22}$$

с начальным условием

$$z(\tilde{t}_0,\varepsilon) = \tilde{z}^0(\varepsilon), |\tilde{z}^0(\varepsilon)| \le M_0\varepsilon, \tag{23}$$

где $t \in \Delta \subset C, \tilde{t}_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка
Пусть выполняются условия:U3.5.1 $\forall t \in \Delta\ (a(t) \neq 0)$ и $a(t) \in Q(\Delta)$
U3.5.2 $f(t,z) \in Q(H), H$- некоторая область переменных t,z и

$$\forall\left((t,\tilde{z}),(t,\tilde{\tilde{z}})\right)\left(\left|f(t,\tilde{z}) - f(t,\tilde{\tilde{z}})\right| \le M\left|\tilde{z} - \tilde{\tilde{z}}\right|\right).$$

Вырожденное уравнение имеет решения $\xi_1(t) \equiv 0, \xi_2(t) = -a(t)$.
Взяв произвольную, внутреннюю точку $t_0 \in \Delta$, не совпадающую с точкой $\tilde{t}_0$ определяется функция$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$.
$A(t)$ в точке t_0имеет простой нуль, следовательно линия уровня $(p_{10}) = \{t \in \Delta | ReA(t) = 0\}$ область Δ на части Δ_1,Δ_2, при этом можно взять

$$\forall t \in \Delta_1(ReA(t) \ge 0) \land \forall t \in \Delta_2(ReA(t) \le 0).$$

Если воспользоваться результатами теорем 3.3.1-3.3.2 то область Δ_1 является областью притяжения решения $\xi_2(t)$ при условии $|z(t_0,\varepsilon) - a(t_0)| \le M_0\varepsilon$, а область Δ_2, областью притяжения решения $\xi_1(t)$ при $|z(t_0,\varepsilon)| \le M_0\varepsilon$.

В данном параграфе исследуем зависимость существование областей притяжений от начальных значений $\tilde{t}_0$**.**

Пусть $\tilde{t}_0 \in \Delta_1$ и $A_0(t) = \int_{\tilde{t}_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$. Тогда $A_0(t) = A(t) - A(\tilde{t}_0)$.
Рассматривается линия уровня
$(\tilde{p}_1) = \{t \in \Delta_1 | ReA(t) = ReA(\tilde{t}_0) = \tilde{p}_1 - const > 0\}$ (рис.4).

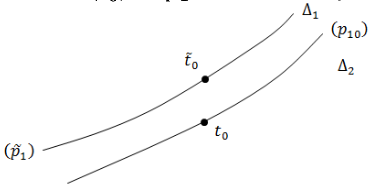

Рис.4

Следующие теоремы выражают зависимость областей притяжений от начальных значений.

Теорема 3.5.1. Пусть выполняются условия U3.5.1, U3.5.2. Тогда: 1. Существует область Δ_{11} состоящая из частей Δ_1 и Δ_2; Решение задачи (22), (23) определенное в Δ_{11}. 2. Область Δ_{11} является областью притяжения решения $\xi_1(t)$.

Теорема 3.5.2. Пусть выполняются условия U3.5.1, U3.5.2. Тогда: 1. Существует решение задачи (22), (23) определенное в Δ_{12}. 2. Область Δ_{12} является областью притяжения решения $\xi_2(t)$ и состоит из части Δ_2 и Δ_1.

В теореме 3.5.2 взято $\tilde{t}_0 \in \Delta_2$ (рис.5)

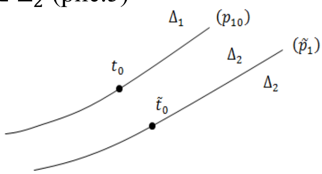

Рис.5

Из доказанных теорем вытекает возможные расширения областей притяжения. К примеру в теореме 3.5.1 двигая линию уровня $(\tilde{p}_1)$ «вглубь» области Δ_1 получим расширение области притяжения Δ_{11},причем границы Δ_{11} упираются к границе области Δ (если Δ ограничено) или уходят в бесконечность (если Δ неограничено). Аналогичное имеет место для Δ_{12}.

Приведен пример $a(t) \equiv a - const \in C, t_0 = 0, a = a_1 + ia_2, 0 < a_1, 0 < a_2$.

В § 3.6 приведены заключения по главе 3.

Глава 4 посвящена исследованию систем из нескольких уравнений первого порядка и состоит из пяти параграфов.

В §4.1 доказано зависимость решений вырожденной системы от количества решений уравнений, входящих в вырожденную систему. В частности вырожденная система, системы СВУ вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, z(t,\varepsilon)), \quad (24)$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon), \quad (25)$$

где $z(t,\varepsilon) = colon\big(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon), \dots, z_n(t,\varepsilon)\big)$,

$$A(t) = diag\big(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)\big), b(t) = diag\big(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)\big)$$
$z^2(t,\varepsilon) = colon\big(z_1^2(t,\varepsilon), z_2^2(t,\varepsilon), \dots, z_n^2(t,\varepsilon)\big)$,
имеет $2^n (n \in N)$ решений.

В **§4.2** рассматривается система вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) \qquad (26)$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0 - const, \qquad (27)$$

где $z(t,\varepsilon) = colon\big(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\big)$,

$$A(t) = diag\big(a_1(t), a_2(t)\big), \qquad b(t) = diag\big(b_1(t), b_2(t)\big)$$
$$z^2(t,\varepsilon) = colon\big(z_1^2(t,\varepsilon), z_2^2(t,\varepsilon)\big),\ z^0 = colon(z_1^0, z_2^0).$$

Вырожденная система имеет решения

$$\xi^1(t) = colon(0;0), \xi^2(t) = colon\big(0; -a_2(t)/b_2(t)\big),$$
$$\xi^3(t) = colon(-a_1(t)/b_1(t), 0),$$
$$\xi^4(t) = colon\big(-a_1(t)/b_1(t), -a_2(t)/b_2(t)\big).$$

Данный параграф содержит два подпункта.
В подпункте 4.2.1 система (26) исследована при действительных значениях t и предполагается выполнения условий: U.4.2.1 $\forall t \in [t_0, T](a_k(t) \neq 0)$.U.4.2.2 $a_k(t), b_k(t) \in C^2([t_0, T])$.
Доказаны
Теорема 4.2.1. Пусть $\forall t \in [t_0, T](a_k(t) > 0)$ и выполняется U.4.2.2. Тогда $(t_0, T]\big(\xi^4(t)\big)$.
Теорема 4.2.2. Пусть $\forall t \in [t_0, T](a_k(t) < 0)$ и выполняется U4.2.2. Тогда $(t_0, T]\big(\xi^1(t)\big)$.
Теорема 4.2.3. Пусть $\forall t \in [t_0, T](a_1(t) > 0, a_2(t) < 0)$ и выполняется U4.2.2. Тогда $(t_0, T]\big(\xi^3(t)\big)$.
Теорема 4.2.4. Пусть $\forall t \in [t_0, T](a_1(t) < 0, a_2(t) > 0)$ и выполняется U4.2.2. Тогда $(t_0, T]\big(\xi^2(t)\big)$.
Теорема 4.2.5.(существование смежных интервалов притяжений).
Пусть $\forall t \in [t_0, T_0)(a_1(t) < 0),\ a_1(T_0) = 0, \forall t \in (T_0, T]$
$(a_1(t) > 0) \exists!\ T_1(T_0 < T_1 < T\ \wedge A_1(T_1) = 0), \forall t \in (t_0, T](a_2(t) > 0)$
и выполняется U4.2.2. Тогда $(t_0, T_1)\big(\xi^2(t)\big), (T_1, T]\big(\xi^4(t)\big)$.

В подпункте 4.2.2 система (26) исследована при комплексных значениях t, в предположении

U4.2.3. $a_j(t), b_j(t) \in Q(\Delta) \wedge \forall t \in \Delta(a_j(t) \neq 0, b_j(t) \neq 0)$.

Справедливы: **Лемма 1**. В каждом из частей $\Delta_{k\varepsilon}(k = 1,2,3,4)(exp\frac{1}{\varepsilon}A_{j1}(\tau_1) \to 0$ по $\varepsilon)$ или $\left(exp\frac{-1}{\varepsilon}A_{j1} \to 0 \text{ по } \varepsilon\right)$ $(j = 1,2)$.

и **Теорема 4.2.6**.(существование смежных областей притяжений). Пусть выполняются условия U2.6.1 и U4.2.3. Тогда существуют:1.Решение задачи (26)-(27). 2. Области притяжения $\Delta_{k\varepsilon}\big(\xi^k(t)\big)(k = 1,2,3,4)$.
Области $\Delta_{k\varepsilon}$ определены в §2.6, $ReA_{j1}(t) = ReA_j(t) = Re\int_{t_0}^{t} a_j(\tau)d\tau$.

§4.3 посвящена исследованию системы из двух уравнений первого порядка

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) + \varepsilon g\big(t, z(t,\varepsilon)\big), \qquad (28)$$

с начальным условием $z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon)$, (29)

$t \in \Delta$, $t_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка; $z(t,\varepsilon) = colon\big(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\big)$, $A(t) = diag\big(a_1(t), a_2(t)\big)$; $b(t) = diag\big(b_1(t), b_2(t)\big)$;
$z^0 = colon(z_1^0, z_2^0)$; $z^2(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}\big(z_1^2(t,\varepsilon), z_2^2(t,\varepsilon)\big)$;
$g(t,z) = colon\big(g_1(t,z), g_2(t,z)\big)$;
Предполагается выполнение следующих условий:U4.3.1. $a_j(t), b_j(t) \in Q(\Delta)$.U4.3.2. $\forall t \in \Delta\big(a_j(t) \neq 0,\ \ b(t)\ \neq 0\big)$(j=1,2).
U4.3.3.$g(t,z) \in Q(H)$и $\forall((t,\tilde{z}),(t,\tilde{\tilde{z}})) \in H\big(\|g(t,\tilde{z}) - g(t,\tilde{\tilde{z}})\| \leq M_j\|\tilde{z} - \tilde{\tilde{z}}\|\big)$, где $H = \{(t,z) | t \in \Delta, \|z - \xi_j\| \leq M_0\}$.
$\xi_1(t) = colon(0;0), \xi_2(t) = colon(0; -a_2(t)/b_2(t)), \xi_3(t) = 0, \xi_4(t) = 0.$
Введены линии уровня функций
$ReA_j(t) = Re\int_{t_0}^{t} a_j(\tau)d\tau = ReA_{j1}(t_1,t_2), \big(p_{j1}\big) = \{t \in \Delta | A_{j1}(t_1,t_2) = p_{j1}\}, j = 1{,}2$ и составлены множества $\{(p_{j1})\}$.
Пусть выполняется условиеU4.3.4 Произвольные линии $(p_{11}) \in \{(p_{11})\}$ и $(p_{21}) \in \{(p_{21})\}$ пересекаются только в одной точке.Согласно U4.3.4 линии $\big(p_{j0}\big)$ область Δ делят на части Δ_k(k=1,2,3,4).Доказаны:
Лемма 2. Пусть выполняются условие U4.3.4 и (A3). Тогда $A_{11}(t_1,t_2)$ строго монотонна вдоль(p_{21}), а $A_{21}(t_1,t_2)$ строго монотонна вдоль (p_{11}).
Теорема.4.3.1.(существование смежных областей притяжений). Пусть выполняются условия U4.3.1-U4.3.4 и (A3). Тогда для каждого решения $\xi_j(t)$существует решение $z(t,\varepsilon)$задачи(28)–(29) удовлетворяющее условия $\|z(t_0,\varepsilon) - \xi_j(t_0)\| \leq M_2\varepsilon$ и области $\Delta_{j1}(B2) \subset \Delta_j (j = 1{,}2{,}3{,}4)$, которые являются областями притяжения соответственно для решений $\xi_j(t) (j = 1{,}2{,}3{,}4)$.
Приведены примеры иллюстрирующие полученные результаты.

1. $a_1(t) = 1, b_1(t) = 1$, $a_2(t) = 1$, $b_2(t) = 1.$
2. $a_1(t) = 1, b_1(t) = 1$, $a_2(t) = -1$, $b_2(t) = -1.$
3. $a_1(t) = 2t, b_1(t) = 1$, $a_2(t) = 2(t-1)$, $b_2(t) = 1.$

ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрены СВУ(R∨C) имеющие несколько решений при вырождении. Ставится задача исследования асимптотического приближения решений заданных СВУ(R∨C) к решениям вырожденных уравнений. Для решения поставленной задачи проводится обзор ранних исследований. Проведенный обзор показал, что асимптотическое поведение решений СВУ(R) в основном исследованы, когда вырожденные уравнения имеют единственное решение или множество решений вырожденного уравнения рассмотрена как точечное, без выделения отдельных решений и определения соответствующих интервалов притяжений.
Исследования СВУ(С), когда вырожденные уравнения имеют несколько решений ранее не проводились.

Для решения поставленной задачи введены новые понятия: главные множества (ГМ), основные функции (ОФ), основные вектор функции (ОВФ), множества притяжения, с использованием введенных новых и других понятий связанных с ними разработан метод разделения (ГМ).

Разделение (ГМ) состоит из двух составляющих: деление множеств на части и выбор частей. Деления (ГМ), произведены с использованием (ОФ) и (ОВФ). Используя деление (ГМ) и выбором частей доказано существование множеств притяжений. Для СВУ(С) доказательство областей притяжений осуществлена представлением решений на некоторых линиях.

Рассмотрены случаи когда множества притяжений существуют не для всех решений (ВУ). Сформулированы наиболее общие условия существования множеств притяжений. Доказательство существование множеств притяжений проведены без привлечения устойчивости решений вырожденных уравнений. Исследованы возможности расширения областей притяжений для решений СВУ(С).

Автор выражает признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Алыбаеву Курманбеку Сармановичу за постоянное внимание и полезные советы при обсуждении работы.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Мурзабаева А.Б. Нарушение единственности решений вырожденного уравнения для сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями[Текст]/ А.Б. Мурзабаева //Известия КГТУ им.И.Раззакова. Материалы Международной конференции «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании», посвященной 75-летию академика А. Жайнакова. -Бишкек, 2016.-С.162-69
2. Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями при нарушении единственности решений вырожденного уравнения. [Текст] /А.Б. Мурзабаева //Инновации в науке: сб. статей по материалам LXIII Международной научно-практической конференции. №11(60). - Новосибирск: СиБАК, 2016. - С. 42-49.

3. Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения при нарушении единственности решений вырожденного уравнения и условия устойчивости[Текст] /А.Б. Мурзабаева // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLIX Между-народной научно-практической конференции. № 12 (47). - Новосибирск: СиБАК, 2016. - С. 77-85.
4. Мурзабаева А.Б**.** Сингулярно возмущенные уравнения с неаналитическими правыми частями теряющие единственность при вырождении [Текст]/ А.Б. Мурзабаева //Вестник ЖАГУ, 2017, № 1(34). - С. 27-33.
5. Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении [Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. - С. 15-20**.**
6. Мурзабаева А.Б. Системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении[Текст] /А.Б.Мурзабаева// Теоретические и практические вопросы современной науки: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XLI международной научной конференции. № 7 (41). Москва, 2018. - С. 12-18.
7. Мурзабаева А.Б. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений[Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург, 2018. - С. 7-11.
8. Мурзабаева А.Б. Построение размеченных множеств применением гармонических функций[Текст] / А.Б. Мурзабаева // Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург,2018.-С. 32-36.
9. Murzabaeva A.B. Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy. [Text] /K.S.Alybaev, A.B. Murzabaeva //In “International Conference on Analysis and Applied Mathematics” (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings Vol. no. 1997, American Institute of Physics.-2018.-P.020076-1-020076-5.Режимдоступа:https://doi.org/10.1063/1.5049070.
10. Мурзабаева А.Б. Представление решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений на линиях[Текст] / А.Б. Мурзабаева //Вестник ЖАГУ. № 4. Жалал-Абад, 2018. - С. 3-7.
11. Мурзабаева А.Б. Исследование сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с разделением множеств при вырождении [Текст] / А.Б. Мурзабаева //Вестник ЖАГУ. № 4. Жалал-Абад, 2018. - С. 7-15.

Мурзабаева Айтбү Бусурманкуловнанын01.01.02-дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча «Сингулярдуу дүүлүккөн дифференциалдык теңдемелерди кубулганда көптүктөрдү бөлүү менен изилдөө» аталыштагы темада физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: сингулярдуу дүүлүккөн теңдеме, аналитикалык функция,баштапкы маселе, деңгээл сызыгы, көптүктөрдү бөлүү.

Изилдөөнүн объектиси: Кубулганда бир нече чыгарылышка ээ болгон чыныгы жана комплекстик аргументтүү сингулярдуу дүүлүккөн дифференциалдык теңдемелер (системалар) СДТ(R∨C).

Изилдөөнүн максаты: Берилген СДТ(R∨C) чечимдеринин кубулган теңдемелердин (КТ) чечимдерине асимптотикалык жакындыгын изилдөө.

Изилдөөнүн усулдары: Берилген СДТ(R∨C) башкы көптүктөрүн (БК) бөлүүгө негизделген жаңы усул иштелип чыгылган жана конформдуу чагылдыруу, удаалаш жакындаштыруу усулдары колдонулган.

Илимий жаңылык: 1. (КТ) бир нече чечимдерге ээ болгон учурда СДТ(R∨C) чечимдерин изилдөөнүн (БК) бөлүүгө негизделген усул иштелген. 2. (КТ) чечимдери үчүн тартуучу көптүк түшүнүгү киргизилүү менен (БК) бөлүктөрүнүн жана (КТ) чечимдеринин ортосундагы байланыш түзүлгөн. 3. (КТ) айрым чечимдери үчүн тартуучу көптүктүн жашабай калган учурлары каралган. 4. СКТ(R) үчүн тартуучу интервалынын жана бириктирилген системанын (А.Н.Тихонов боюнча) тынч абал чекитинин туруктуулук интервалынын ортосундагы байланыш изилденген. 5. Тартуучу аймагынын баштапкы маанилерден көз карандылыгы далилденген жана тартуучу аймактарын кенейтүү мүмкүнчүлүктөрү каралган. 6. СКТ(С) чечимдерин кандайдыр бир сызыктарда көрсөтүү аркылуу тартуучу аймактардын жашашы далилденген. 7.Тартуучу көптүктөрдүн жашашы (КТ) чечимдеринин туруктуулук шарты колдонулбай ишке ашырылган.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү: Жумушта алынган жыйынтыктар кванттык физикадагы, гидродинамикадагы, дүүлүгүү теориясындагы, автоматтык жөнгө салуу теориясындагы, башкаруудагы, электротехникадагы, радиотехникадагы, механизмдер жана машиналар теориясындагы процесстерди изилдөөдө колдонулушу мүмкүн. Ошондой эле жыйынтыктарды “Математика” багыты боюнча студенттер, магистрлер, аспиранттар үчүн сингулярдуу дүүлүккөн теория боюнча лекциялык курстарды окууда, СДТлер менен байланышкан башка теоретикалык маселелерди чечүү үчүн колдонсо болот.

Резюме

диссертации **Мурзабаевой Айтбү Бусурманкуловны на тему “**Исследование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с разделением множеств при вырождении” представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференцтальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, аналитическая функция, начальная задача, линии уровня, разделение множеств.

Объект исследования: Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения (системы) с действительными и комплексными аргументами (СВУ(R⋁C)), которые при вырождении имеют несколько решений.

Цель работы: Исследовать асимптотическое приближение решений заданных (СВУ(R⋁C))к решениям соответствующих вырожденных уравнений (ВУ).

Методы исследования: Разработан новый метод исследования СВУ(R⋁C) основанный на разделение главных множеств (ГМ) заданных уравнений, а также методы конформного отображения, последовательных приближений.

Научная новизна: 1. Разработан единый метод исследования СВУ(R∨C), которые при вырождении имеют несколько решений основанный на деление (ГМ).2. Установлена взаимосвязь между частями (ГМ) и множеством решений (ВУ), с введением понятия множества притяжений для решений (ВУ). 3. Рассмотрены случаи, когда не для всех решений (ВУ), существуют множества притяжений; 4. Для СВУ(R) исследована взаимосвязь интервала притяжения и интервала устойчивости точки покоя присоединенной системы (по терминологии А.Н.Тихонова). 5. Доказано, зависимость областей притяжений от начальных значений и возможность расширения областей притяжений. 6. Для доказательства существования областей притяжений, решения СВУ(С) представлены на некоторых линиях. 7.Доказательство существование множеств притяжений осуществлена без привлечения условий устойчивости решений (ВУ).

Практическоезначениеисследования. Результаты полученные в работе могут быть применены при исследовании процессов в квантовой физике, гидродинамике, в теории возмущений, колебаний, теории автоматического регулирования, управления, электротехнике, радиотехнике, в теории механизмов и машин. Также результаты можно использовать при чтении лекционных курсов по теории теории сингулярных возмущений для студентов, магистров и аспирантов по направлениям «Математика», а также для решений других теоретических задач, связанных с СВУ.

Summary

Thesis of Murzabaeva Aitbu Busurmankulovna on the topic “Study of singularly perturbed differential equations with separation of sets under degeneration” is submitted for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 - Differential Equations, Dynamical Systems and Optimal Control

Keywords: singularly perturbed equations, analytic function, initial problem, level lines, separation of sets.

Object of study: Singularly perturbed differential equations (systems) with real and complex arguments (SPE (R⋁C)), which have several solutions for degeneration.

Objective: To investigate the asymptotic approximation of solutions given (SPE (R⋁C)) to solutions of the corresponding degenerate equations (DE).

Research methods: A new research method of the SPE (R⋁C) was developed based on the separation of the main sets (MS) of given equations, as well as the methods of conformal mapping, successive approximations.

Scientific novelty: 1. A unified method of research of SPE (R∨C) has been developed, which, when degenerated, have several solutions based on division (MS). 2. The interrelation between the parts (MS) and the solution set (DE) is established, with the introduction of the concept of the set of attractings for the solutions (DE). 3. Cases are considered when not for all solutions (DE), there exist sets of attractings; 4. For the SPE (R), the interrelation of the interval of attraction and the interval of stability of the point of rest of the attached system was investigated (in the terminology of A.N. Tikhonov). 5. It is proved that the domain of attraction depends on initial values and the possibility of expanding the domain of attraction. 6. To prove the existence of domains of attraction, solutions of SPE (C) are presented on some lines. 7. The proof of the existence of sets of attractings is carried out without invoking the conditions of stability of solutions (DE).

The practical significance of the study. The results obtained in the work can be applied in the study of processes in quantum physics, hydrodynamics, in the theory of perturbations, oscillations, the theory of automatic control, control, electrical engineering, radio engineering, in the theory of mechanisms and machines. Also, the results can be used when reading lecture courses on the theory of the theory of singular perturbations for students, masters and graduate students in the areas of "Mathematics", as well as for solving other theoretical problems related to SPE.