

ISSN 1694-7649



ЖУРНАЛ «НАУКА И ТЕХНИКА» ОСНОВАН В 1993 ГОДУ,  
ПЕРЕИМЕНОВАН В «НАУКА И НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ» В 1996 ГОДУ,  
ПЕРЕИМЕНОВАН В «НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ  
КЫРГЫЗСТАНА» В 2015 ГОДУ, ВЫХОДИТ ЕЖЕМЕСЯЧНО

Республиканский научно-теоретический журнал

# НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА

№ 11, 2015



БИШКЕК - 2015

СОДЕРЖАНИЕ

**МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**MATHEMATICAL SCIENCES**

<i>Каденова З.А., Орзмаматова Ж.Ш.</i>	
ЖАРЫМ ОКТО БИРИНЧИ ТИПТЕГИ	
ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК	
ТЕНДЕМЕЛЕРИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН	
ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖӨНҮНДӨ.....	3
<i>Каденова З.А., Орзмаматова Ж.Ш.</i>	
О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ	
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА	
ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ.....	3
<i>Z.A. Kadenova, Zh.Sh. Orozmamatova</i>	
ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS LINEAR	
FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE OF	
THE FIRST KIND ON THE SEMIAxis.....	3

**ГЕОЛОГИЯ ИЛИМДЕРИ**  
**ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**GEOLOGICAL SCIENCE**

<i>Савилова Е.Б.</i>	
СУУ РЕСУРСТАРЫН БУЛГАНУУДАН КОРГООН	
БАРЬЕР ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ ЖӨНҮНДӨ.....	8
<i>Савилова Е.Б.</i>	
О БАРЬЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ЗАЩИТЫ	
ЗОДНЫХ РЕСУРСОВ ОТ ЗАГРЯЗНЕНИЯ.....	8
<i>E.B. Savilova</i>	
ABOUT THE NEOTECTONIC FACTOR OF	
FORMATION OF ZONES OF THE	
CONCENTRATION OF DEPTH RASSOLS.....	8
<i>Каримов А.А., Набиев Н.Ф., Назаров Дж.</i>	
ЗЕРАВШАН ДАРЫЯСЫНЫН БАССЕЙНИНИН	
ГРАВИТАЦИЯЛЫК ПРОЦЕССТЕРИ	
ЖӨНҮНДӨ.....	11
<i>A.Karimov, N.F. Nabiev, Dzh. Nazarov</i>	
GRAVITATIONAL PROCESSES	
IN THE ZERAVSHAN RIVER BASIN.....	11
<i>Савилова Е.Б.</i>	
ОЕНБУРГДУН БУЗУЛУК ОЙДУЦУНУН	
САЛЫНДАГЫ ГИДРОГЕОЛОГИЯЛЫК	
ҮНӨЗДӨГҮ ГЕОКОРКУНУЧТАР ЖӨНҮНДӨ...17	17
<i>E.B. Savilova</i>	
ГЕОРИСКАХ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКОГО	
ПРАКТЕРА НА ПРИМЕРЕ БУЗУЛУКСКОЙ	
САДИНЫ ОРЕНБУРЖЬЯ.....	17
<i>E.B. Savilova</i>	
ABOUT THE GEORISK HYDROGEOLOGICAL	
CHARACTER ON EXAMPLE OF THE BASIN	
BUZULUK ORENBURG.....	17

<i>Мухидинов Ф.А.</i>	
ИСТИКЛОЛ ЖАНА ХАТЛОН	
АВТОТРАНСПОРТТУК	
ТОННЕЛДЕРИНИН СЕЙСМИКАЛЫК	
ТОБОКЕЛЧИЛИГИН БААЛООНУН	
КРИТЕРИЙЛЕРИ (Тажикстан Республикасы).....21	21
<i>Мухидинов Ф.А.</i>	
КРИТЕРИИ ОЦЕНОК СЕЙСМИЧЕСКОГО	
РИСКА АВТОТРАНСПОРТНЫХ ТОННЕЛЕЙ	
ИСТИКЛОЛ И ХАТЛОН (Республика	
Таджикистан).....	21
<i>F.A. Mukhidinov</i>	
CRITERIA OF THE SEISMIC RISK ASSESSMENTS	
FOR THE AUTOTRANSPORT TUNNELS ISTEKLOL	
AND KHATLON (Republic of Tajikistan).....21	21

<i>Усупаев Ш.Э.</i>	
ЖЕРДИН БИРДИК НООСФЕРА-ИНЖЕНЕРДИК-	
ГЕОНОМИЯЛЫК ТЕОРИЯСЫ.....	24
<i>Усупаев Ш.Э.</i>	
ЕДИНАЯ НООСФЕРНО-ИНЖЕНЕРНО-	
ГЕОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЗЕМЛИ.....	24
<i>Sh.E. Usupayev</i>	
UNIFIED NOOSPHERIC-ENGINEERING-	
GEONOMIC THEORY OF THE EARTH.....24	24

<i>Усупаев Ш.Э., Едигенов М.Б., Оролбаева Л.Э.,</i>	
<i>Клименко Д.П.</i>	
ЖЕРДИН ГЕОСФЕРАЛАРЫНДАГЫ	
ПОЛИГРУНТТАРДЫН ЖАНА СУУЛАРДЫН	
АЙЛАНУУСУНУН ИНЖЕНЕРДИК-	
ГЕОНОМИКАЛЫК ТЕРЕҢ МОДЕЛДЕРИ.....39	39
<i>Усупаев Ш.Э., Едигенов М.Б., Оролбаева Л.Э.,</i>	
<i>Клименко Д.П.</i>	
ИНЖЕНЕРНО-ГЕОНОМИЧЕСКИЕ ГЛУБИННЫЕ	
МОДЕЛИ КРУГОВОРОТА ПОЛИГРУНТОВ И	
ВОДЫ В ГЕОСФЕРАХ ЗЕМЛИ.....39	39
<i>Sh.E. Usupayev, M.B. Edigenov, L.E. Orolbaeva,</i>	
<i>D.P. Klimenko</i>	
ENGINEERING AND GEONOMIC DEPTH MODELS	
OF CYCLING OF POLIGRANTS AND WATER IN	
THE GEOSPHERES OF THE EARTH.....39	39

**ЭКОЛОГИЯ ИЛИМДЕРИ**  
**ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**ENVIRONMENTAL SCIENCES**

<i>Матикеева Н.К.</i>	
ГЕОГРАФИЯ ЖАНА ЧЕКТЕШ ИЛИМДЕРДЕ	
ЖАРАТЫЛЫШ-РЕСУРСТУК ТАЛАШТАРДЫ	
ҮЙРӨНҮҮНҮН ҮКМАЛАРЫ .....	45
<i>N.K. Matikeeva</i>	
ПОДХОДЫ К ИЗУЧЕНИЮ ПРИРОДНО-	
РЕСУРСНЫХ КОНФЛИКТОВ	
В ГЕОГРАФИИ И СМЕЖНЫХ НАУКАХ.....45	45
<i>N.K. Matikeeva</i>	
APPROACHES TO THE STUDY OF NATURAL	
RESOURCE CONFLICTS IN GEOGRAPHY AND	
RELATED SCIENCES.....45	45

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ  
MATHEMATICAL SCIENCES

Каденова З.А., Орозмаматова Ж.Ш.

ЖАРЫМ ОКТО БИРИНЧИ ТИПТЕГИ  
ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН  
ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖӨНҮНДӨ

Каденова З.А., Орозмаматова Ж.Ш.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ  
ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА  
ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

Z.A. Kadenova, Zh.Sh. Orozmamatova

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS LINEAR  
FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST  
KIND ON THE SEMIAxis

УДК: 517.968

Макалада жарым окто биринчи типтеги Фредгольмдун сыйыктуу интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгы маселеси каралды.

Негизги сөздөр: биринчи типтеги сыйыктуу интегралдык теңдемелер, чыгарылышынын жалгыздыгы, жарым ок.

В статье рассмотрены вопросы единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения первого рода, единственность решений, полуось.

In this article uniqueness of solutions to systems of linear Fredholm integral equations of the first kind in the semi axis are analized.

Key words: linear integral equations first kind, uniqueness of solutions, semi axis.

Постановка задачи. В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм доказана теорема единственности решений для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^{\infty} K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a, \infty), \quad (1)$$

где  $\int_a^{\infty} \int_a^{\infty} |K(t, s)|^2 ds dt < \infty$ ,

$$K(t, s) = \begin{cases} A(t, s), & a \leq s \leq t < \infty, \\ B(t, s), & a \leq t \leq s < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается что  $A(t, s)$  и  $B(t, s)$  являются дважды непрерывно-дифференцируемые функции соответственно на  $\{(t, s) : a \leq s \leq t < \infty\}$ , и  $\{(t, s) : a \leq t \leq s < \infty\}$ , решение  $u(t)$  ищется в  $L_2[a, \infty)$ , где  $L_2[a, \infty)$  - пространства квадратично-суммируемых функций в  $[a, \infty)$ .

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерра первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, ранее изучались частности в [1], [4], [5], [6], [7], где были получены теоремы единственности, оценки устойчивости и построены регуляризирующие операторы. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [2,3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В работе [8], изучены вопросы регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на конечном отрезке. В данной работе, доказывается единственность решения уравнения (1), в пространстве  $L_2[a, \infty)$ .

Будем предполагать выполненные следующие условия:

- a)  $H(t, s) = A(t, s) + B(s, t)$  имеют производные  
 $H'_t(t, a), \lim_{b \rightarrow \infty} H'_s(b, s), H''_{st}(t, s)$  при всех  $(t, s) \in G = \{(t, s), a \leq s \leq t < \infty\}$ ;  
 $H'_t(t, s), H'_s(t, s), H''_{st}(t, s) \in L_2(G)$ ;
- б)  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, a) \geq 0, H'_t(t, a) \leq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} H'_s(t, s) \geq 0, H''_{st}(t, s) \leq 0$ ;

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $H'_t(t, a) < 0$  при почти всех  $t \in [a, \infty)$ ,  
 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} H'_s(t, s) > 0$  при почти всех  $s \in [a, \infty)$ ,  
 3)  $H''_{st}(t, s) < 0$  при почти всех  $(t, s) \in G$ .

В силу (2), уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t, s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t, s)u(s)ds = f(t). \quad (3)$$

Обе части уравнения (3) умножим на функцию  $u(t)$  и полученное произведение интегрируем по области  $a \leq t < \infty$ .

Тогда получим

$$\int_a^\infty \int_a^t A(t, s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_a^s B(t, s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt. \quad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \int_a^t A(t, s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_a^s B(t, s)u(s)u(t)dsdt &= \int_a^\infty f(t)u(t)dt, \text{ т.е.} \\ \int_a^\infty \int_a^t [A(t, s) + B(s, t)]u(s)u(t)dsdt &= \int_a^\infty f(t)u(t)dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H(t, s) = A(t, s) + B(s, t).$$

Тогда

$$\int_a^\infty \int_a^t H(t, s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$z(t, s) = \int_s^t u(\nu) d\nu \quad (6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d_s z(t, s) &= -u(s) ds, \\ u(s) ds &= -d_s z(t, s), \\ z(t, s) u(t) dt &= \frac{1}{2} d_t (z^2(t, s)) \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью формул (6), (7) и интегрирования по частям, использую формулу Дирихле в левой части соотношения (5) преобразуем его к виду:

$$\begin{aligned} - \int_a^\infty \left[ \int_a^t H(t, s) d_s z(t, s) \right] u(t) dt &= - \int_a^\infty \left[ H(t, s) z(t, s) \Big|_a^t - \int_a^t H'_s(t, s) z(t, s) ds \right] u(t) dt = \\ &= \int_a^\infty H(t, a) z(t, a) \Big] u(t) dt + \int_a^\infty \int_a^t H'_s(t, s) z(t, s) u(t) ds dt = \int_a^\infty H(t, a) z(t, a) u(t) dt + \\ &+ \int_a^\infty \int_a^t H'_s(t, s) z(t, s) ds u(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^\infty H(t, a) d_t z^2(t, a) + \int_a^\infty \int_a^s H'_s(t, s) z(t, s) u(t) dt ds = \frac{1}{2} \int_a^\infty H(t, a) z^2(t, a) \Big|_a^\infty - \\ &- \frac{1}{2} \int_a^\infty H'_t(t, a) z^2(t, a) dt + \frac{1}{2} \int_a^\infty \left[ \int_s^\infty H'_s(t, s) d_s z^2(t, s) \right] ds = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, a) z^2(t, a) - \\ &- \frac{1}{2} \int_a^\infty H'_t(t, a) z^2(t, a) dt + \frac{1}{2} \int_a^\infty \left[ \int_s^\infty H'_s(t, s) z^2(t, s) \right] ds - \int_a^\infty \int_s^\infty H''_{st}(t, s) z^2(t, s) dt ds = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, a) z^2(t, a) - \\ &- \frac{1}{2} \int_a^\infty H'_t(t, a) z^2(t, a) dt + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^\infty H'_s(t, s) z^2(t, s) ds - \frac{1}{2} \int_a^\infty \int_a^t H''_{st}(t, s) z^2(t, s) ds dt = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, a) z^2(t, a) - \frac{1}{2} \int_a^\infty H'_t(t, a) z^2(t, a) dt + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^\infty H'_s(t, s) z^2(t, s) ds - \frac{1}{2} \int_a^\infty \int_a^t H''_{st}(t, s) z^2(t, s) ds dt = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, a) \left[ \int_a^\infty u(s) ds \right]^2 - \frac{1}{2} \int_a^\infty H'_t(t, a) \left[ \int_a^t u(\nu) d\nu \right]^2 dt + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^\infty H'_s(t, s) \left[ \int_s^\infty u(\xi) d\xi \right]^2 ds - \\ &- \frac{1}{2} \int_a^\infty \int_a^t H''_{st}(t, s) \left[ \int_s^t u(\xi) d\xi \right]^2 ds dt, \end{aligned}$$

где  $z(t, t) = 0$ .

Таким образом, из (4) имеем

$$\int_a^\infty \int_a^t H(t, s) u(s) ds u(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, a) \left[ \int_a^{\infty} u(s) ds \right]^2 - \frac{1}{2} \int_a^{\infty} H'_t(t, a) \left[ \int_a^t u(\xi) d\xi \right]^2 dt + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} H'_s(t, s) \left[ \int_s^{\infty} u(\xi) d\xi \right]^2 ds - \\
 &- \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^t H''_{st}(t, s) \left[ \int_s^t u(\xi) d\xi \right]^2 ds dt = \int_a^{\infty} f(t) u(t) dt
 \end{aligned} \tag{8}$$

В силу условия а) для любого решения  $u(t)$  уравнения (1) получили (8).

Пусть  $f(t) \equiv 0$ . Тогда в силу условий б), в) из (8) вытекает, что

$$\int_a^t u(s) ds \equiv 0, \text{ или } \int_s^t u(\xi) d\xi \equiv 0. \text{ Либо } \int_t^{\infty} u(t) dt = 0, \quad t \in [a, \infty),$$

Далее, в силу условия в)  $u(t) \equiv 0$ .

И так, доказана следующая теорема

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда решение уравнения (1) единственно в классе  $L_2[a, \infty)$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение (1) при  $a=0$ ,  $A(t, s) = \frac{s}{(1+t)^3}$

при  $(t, s) \in G = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ ;

$$B(t, s) = \frac{t}{(s+1)^2} \quad \text{при } (t, s) \in G_1 = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\};$$

$(t, s) \in L_2(0, \infty)$ . В этом случае

$$H(t, s) = A(t, s) + B(s, t) = \frac{s}{(1+t)^3} + \frac{s+1}{(t+1)^2}, \quad (t, s) \in G \tag{9}$$

Из (9) имеем

$$1) H'_t(t, s) = -\frac{3s}{(1+t)^4} - \frac{2(s+1)}{(t+1)^3}, \quad (t, s) \in G, \tag{10}$$

$$1) H'_s(t, s) = \frac{1}{(1+t)^3} + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad (t, s) \in G, \tag{11}$$

$$1) H''_{ts}(t, s) = -\frac{3}{(1+t)^4} - \frac{2}{(t+1)^3}, \quad (t, s) \in G, \tag{12}$$

Из (9) получим  $\lim_{t \rightarrow \infty} H'_s(t, 0) = 0$ .

Из (10) имеем  $H'_t(t, 0) = -\frac{2}{(t+1)^3} < 0$  при всех  $t \in [0, \infty)$ ,

Из (11) получим 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} H'_s(t, s) = 0$  при всех  $s \in [0, \infty)$ ,

Из (12) получим

$$H_{ts}''(t,s) = -\left(\frac{3}{(1+t)^4} + \frac{2}{(t+1)^3}\right) < 0, (t,s) \in G$$

Таким образом, выполняются все условия вышеуказанной теоремы т.е. выполняются условия а), б), в). Таким образом, решение следующего интегрального уравнения

$$\int_0^t \frac{s}{(1+s)^3} u(s) ds + \int_t^\infty \frac{(t+1)}{(s+1)^2} u(s) ds = f(t), t \in [0, \infty)$$

Единственно в пространстве  $L_2[0, \infty)$ .

#### Литература:

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера первого рода и третьего рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. - Т.19. - №4, 1979. - С. 970-989.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. - 1959. - Т.127, № 1. - С. 31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука, 1980.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтера первого рода. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988. Выпуск 21. - С. 3-38.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН СССР. - 1989. - Т. 309. - № 5. - С. 1052-1055.
6. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра. // Известия АН Киргизской ССР, 1988. - №1. - С. 13-18.
7. Асанов А., Каденова З.А. О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». - Самара: СамГТУ, 2004. - Ч.3. - С. 122-126.
8. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. Самара: СамГТУ, 2005. - №38. - С. 11-14.

