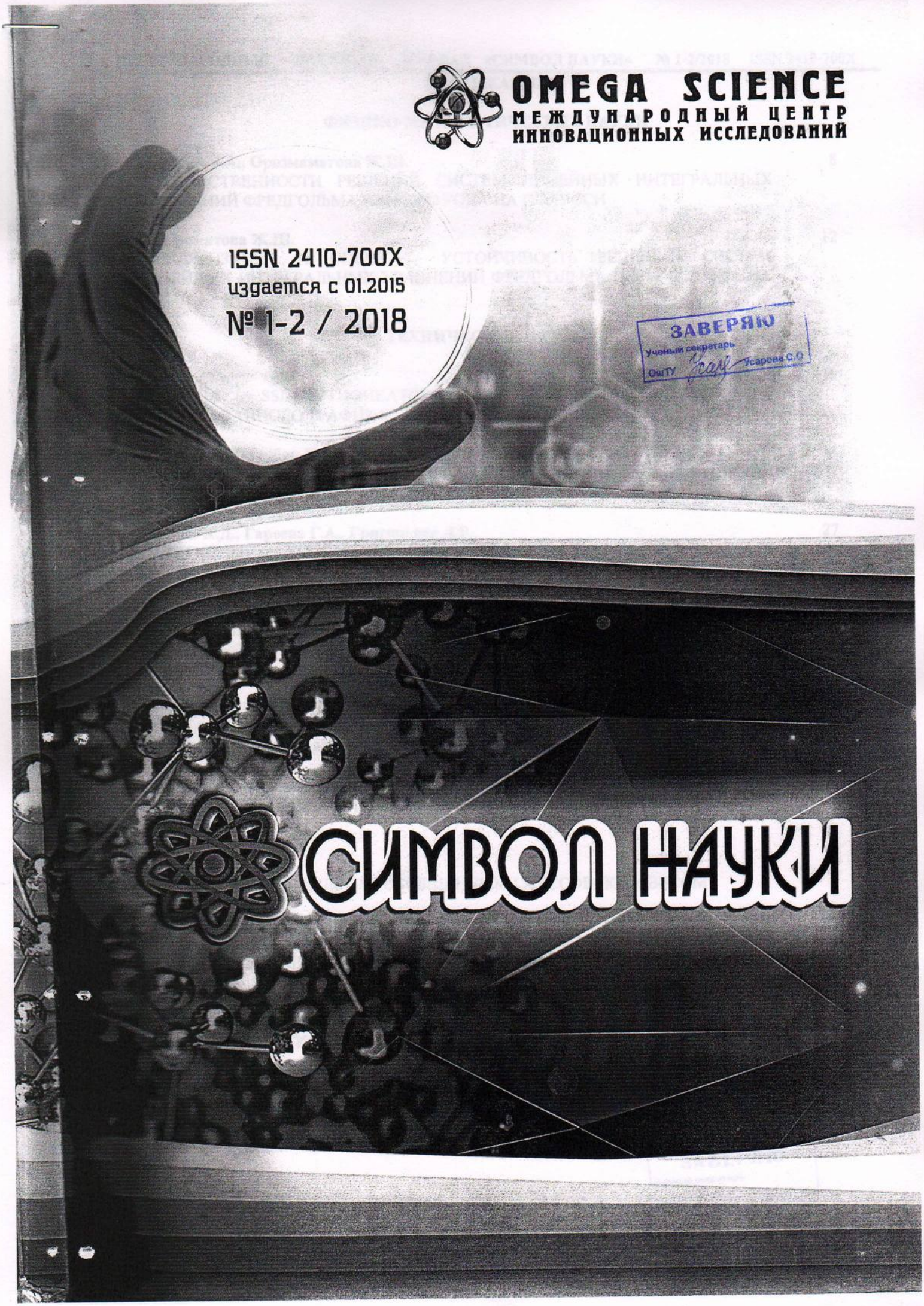
OMEGA SCIENCE
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЦЕНТР
ИННОВАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ISSN 2410-700X
издается с 01.2015
№ 1-2 / 2018
ЗАВЕРЯЮ
Ученым секретарь
ОшГУ
Усарова С.О
СИМВОЛ НАУКИ

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

Ключевые слова

Линейные интегральные уравнения, уравнения первого рода, единственность решений, регуляризирующие операторы, оценка устойчивости.

Zh.Sh. Orozmamatova

REGUJARIZATION AND ESTIMATE STABILITY OF TNE SOLUTION SYSTEMS OF THE LINEAR INTEGRAL OF FREDGOLM OF THE FIRST KIND EQUATIONS THE AXIS

Abstract

Regularization is considered and the estimate stability solution of the linear integral systems of the Fredholm equation on the axis are received.

Key words

linear integral equations, equations of the first kind , uniqueness of the solutions, regulating operators, estimate stability.

Рассмотрим системы линейных интегральных уравнений типа Фредгольма первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

где
$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), -\infty < s \le t < \infty; \\ B(t,s), -\infty < t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

$$A(t,s) = a_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s) = b_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (f_i(t)) = (f_1(t),\dots f_n(t))^T,$$

$$u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t),\dots u_n(t))^T,$$

Здесь A(t,s) и B(t,s)- данные матричные функции, f(t)-известная вектор функция, u(t)-неизвестная вектор –функция.

Для матрица $A=(a_{ij})$ и вектора $f=(f_i)$ определим норму

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для $u=(u_i)$, $v=(v_i) \in R^n$, определим скалярное произведение

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i .$$

Всюду будем предполагать, что

$\|K(t,s)\| \in L_2(R\times R), f(t) \in L_2(R)$.

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнение сводящиеся к ним были изучены [1-5], где были получены теоремы единственности устойчивости и регуляризации.

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)\,ds + \int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)\,ds = f(t), t \in R. \tag{3}$$

Обе части (3) на скалярно умножим на вектор – функцию $u(t)$.Полученное произведение проинтегрируем по области $-\infty < t < \infty$, получим,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle ds dt + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty} \langle B(t,s)u(s),u(t)\rangle ds dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t),u(t)\rangle dt\,. \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle ds dt + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \langle B^{*}(s,t)u(s),u(t)\rangle ds dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \langle A(t,s) + B^{*}(s,t)u(s),u(t)\rangle ds dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t),u(t)\rangle dt\,. \tag{5}$$

Где $B^{*}(s,t)$-транспонированная матрица к матрице B(s,t).

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left(A(t,s) + B^{*}(s,t)\right), \qquad (t,s) \in G = \{-\infty < s < t < \infty\}$$

Тогда из (5) имеем

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \langle H(t,s)u(s),u(t)\rangle ds dt = \int_{-\infty}^{-\infty} \langle f(t),u(t)\rangle dt.. \tag{6}$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$ следующим образом:

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ H(s,t), & -\infty < t \le s < \infty, \end{cases} \tag{7}$$

$$H(t,s) = (H_{ij}(t,s), H(s,t) = (H_{ij}(s,t)).$$

Ясно, что

$M(t,s) = M(s,t) \quad (t,s) \in R \times R$ и справедлива

$$M(t,s) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{\nu} \begin{pmatrix} \phi_1^{(\nu)}(t) \\ \dots \\ \phi_n^{(\nu)}(t) \end{pmatrix} (\overline{\phi}_1^{(\nu)}(s) \dots \overline{\phi}_n^{(\nu)}(s)), m \le \infty, \tag{8}$$

где λ_{ν} – собственные значения матричного ядра $M(t,s)$ расположенные в порядке убывания их модулей, и вектор – функции.

$\varphi^{(\nu)}(t) = (\varphi_1^{(\nu)}(t) \dots \varphi_n^{(\nu)}(t))^T$ – собственные ортонормированные вектор –функции соответствующие собственным значениям λ_{ν}.

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_{ν} матричного ядра $M(t,s)$ положительны. В силу полной непрерывности и само сопряженности оператора M, порожденного матричным ядром $M(t,s)$, ортонормированная последовательность собственных вектор–функций $\{\phi^{(\nu)}(t)\}$ полна в $L_2(R;R^n)$.

Для $u(t) = (u_i(t) \in L_2(R;R^n))$ определим норму

$$\|u(t)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|u_i(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|u(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$u^{(\nu)} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(\nu)}(t)\right\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\phi_i^{(\nu)}(t)\right)dt,$$

(v=1,2,…).

Семейство множеств корректностей, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{u(t)\in L_2(R;R^n):\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2 \le c\right\},$$

где $c>0,\quad 0<\alpha<\infty,$

$$u^{(\nu)} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(\nu)}(t)\right\rangle dt,\quad (\nu=1,2,..). \tag{9}$$

Пусть $u(t)=(u_i(t))\in M_\alpha$. Тогда

$$\|u(t)\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2 = \lambda_1^{\alpha}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)\le c\lambda_1^{\alpha},$$

$$\|u(t)\|_{l_2}^2 \le c\lambda_1^{\alpha}. \tag{10}$$

Будем предполагать, что $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $(u_i(t))\in M_\alpha$ и силу (6),(7) и (8) имеем

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left\langle\begin{pmatrix}\varphi_1^{(\nu)}(t)\\ \dots\dots\\ \varphi_n^{(\nu)}(t)\end{pmatrix}(\varphi_1^{(\nu)}(s)\dots\varphi_n^{(\nu)}(s))\begin{pmatrix}u_1(s)\\ \dots\\ u_n(s)\end{pmatrix},u(t)\right\rangle dsdt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}f_i(t)u_i(t)\right]dt,\quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}\left\langle u(s),\varphi^{(\nu)}(s)\right\rangle ds\right]\left\langle u(t),\varphi^{(\nu)}(t)\right\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt.$$

Отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(\nu)}(t)\right\rangle dt\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt,$$

т.е. $\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt.$

Далее используя неравенства Гельдера, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \|f(t)\|\cdot\|u(t)\|. \tag{11}$$

С другой стороны

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u_\nu\right|^2}{\lambda_\nu}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p=1+a, q=\frac{(1+\alpha)}{\alpha}$ Учитывая $u(t)\in M_\alpha$ и (11), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\|f(t)\|\|u(t)\|\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

отсюда получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\|f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \qquad 0<\alpha<\infty \qquad (12)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть оператор М порожденным матричным ядром $M(t,s)$ положительный, где $M(t,s)$ определен по формуле(7) и (8).Тогда на множестве $K(M_\alpha)$. $K(M_\alpha)$ образ M_α при отображении оператором, K обратный K^{-1}, обратный K к равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=f(t), \quad t\in R, \varepsilon>0 \qquad (13)$$

будет регуляризирующим для системы (1) на множестве M_α.

На самом деле, сделаем следующую подстановку в системе (1)

$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon)$,

где $u(t)\in M_\alpha$ - решение системы (1), получим:

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon\,u(t).$$

Отсюда, умножая на на $\xi(t,\varepsilon)$, интегрируя от -∞ до ∞ и учитывая (2) ,(5), (7) и (8) имеем

$$\varepsilon\|\xi(t,\varepsilon)\|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu|\xi_\nu(\varepsilon)|^2\le\varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty}|u^{(\nu)}|\|\xi_\nu(\varepsilon)|, \qquad (14)$$

где $\xi_i(\varepsilon)$- коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\phi^{(\nu)}(t)=\{\phi_i^{(\nu)}(t)\}$ т.е.

$$\xi_\nu(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi(t,\varepsilon),\phi_\nu(t)\rangle dt, (\nu=1,2,...).$$

Применяя неравенство Гёльдера при $p=q=\frac{1}{2}$, и учитывая (10), из (14) получим

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|\le\|u(t)\|, \qquad (15)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu|\xi_\nu(\varepsilon)|^2\le\varepsilon\|u(t)\|^2\le\varepsilon c\lambda_1^\alpha, \varepsilon>0, \qquad (16)$$

С другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_\nu(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, $m=2(1+\alpha)$, $n=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu\right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее в силу $u(t)\in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left(c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{p+q}{pq}},$$

Отсюда, подставляя $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}(c\lambda_1^{\alpha})^{\frac{1}{2}}(\varepsilon c\lambda_1^{\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \tag{17}$$

т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c\lambda_1^{\frac{1}{2(1+a)}}c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}\lambda_1^{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}.$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{18}$$

Учитывая (18), из (14) имеем

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_2 \le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\quad 0<\alpha<\infty. \tag{19}$$

Таким образом, доказана.

Теорема 2. Пусть оператор M порожденный матричным ядром $M(t,s)$ положительный и $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (19), где u(t, ε)-решение системы (13), u(t)-решение системы (1), $M(t,s)$ определен по формуле (8).

Список использованной литературы:

1.Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. ДАН СССР .1959. 127,№1.с31-33

2.Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и

анализа .М.: Наука 1980.

3.Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. ДАН СССР. 1989. Т.309. №5.с 1052-1055.

4.Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables.// International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.

5.Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables.// Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia- 2013, №3- С. 30-36.

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.