OMEGA SCIENCE

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЦЕНТР ИННОВАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

СИМВОЛ НАУКИ

ISSN 2410-700X
ИЗДАЕТСЯ С 01.2015
№ 5 / 2016
ЧАСТЬ 3

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Пусть $f(t) \equiv 0$. Тогда в силу условий б), в) из (8) вытекает, что

$\int_a^\infty u(s)ds \equiv 0, \int_s^t u(\xi)d\xi = 0$. Далее, в силу условия в) $u(t) \equiv 0$.

И так, доказана следующая теорема

Теорема. Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда решение уравнения (1) единственно в классе $L_2[a,\infty)$.

Список использованной литературы:

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера первого рода и третьего рода // журнал вычислительной математики и математический физики. Т.19.№4, 1979, с. 970-989.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтера первого рода. //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. Выпуск 21. с. 3-38.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. с. 1052-1055.
6. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра.// Известия АН Киргизской ССР, 1988.- №1.-С.13-18.
7. Асанов А., Каденова З.А. О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: Сам ГТУ, 2004.-Ч.3.-С.122-126.
8. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия физико-математические науки. Самара: Сам ГТУ, 2005. №38. с. 11-14.

УДК 517.968

Орозмаматова Жыпар Шермиттовна
старший преподаватель, ОшТУг. Ош, Кыргызская Республика
E-mail: jypar75@mail.ru

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

J.Sh. Orozmamatova

REGULARIZATION OF SYSTEMS LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF FREDGOLM OF THE FIRST KIND WITH IN UNLIMITED AREAS

Аннотация

В настоящей статье рассмотрена регуляризация и получены оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях.

In the present article regularization and of stability of systems linear integral equations of Fredgolm of the

first kind with in unlimited areas.

Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty),$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases}$$

$$K(t,s) = (K_{ij}(t,s)),\ A(t,s) = (A_{ij}(t,s)),\ B(t,s) = (B_{ij}(t,s)),$$

$$K(t,s) \in L_2([a,\infty)\times[a,\infty); M),$$

$$u(t) = (u_i(t)),\ f(t) = (f_i(t)) \in L_2([a,\infty); E_n).$$

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнения, сводящие ранее изучались частности в [1]-[5], где были получены теоремы единственности, устойчі регуляризации.

В силу (2) системы уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t).$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на вектор-функцию $u(t)$. Полученное прои интегрируем по области $a \le t < \infty$, получим

$$\int_a^\infty \left\langle \int_a^t A(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle_n dt + \int_a^\infty \left\langle \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle_n dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt,$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t)\rangle_n dsdt + \int_a^\infty \int_t^c \langle B(t,s)u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt.$$

Применяя формулу Дирихле, из (5) имеем

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t)\rangle_n dsdt + \int_a^\infty \int_a^t \langle B^*(s,t)u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt,$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle (A(t,s) + B^*(s,t))u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt.$$

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}(A(t,s) + B^*(s,t)), \quad (t,s) \in G = \{(t,s) \mid a \le s \le t < \infty\}.$$

Тогда

$$2\int_a^\infty \int_a^t \langle H(t,s)u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt.$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$ следующим образом

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H(s,t), & a \le t \le s < \infty, \end{cases}$$

где $H(t,s)=(H_{ij}(t,s)),\quad H(s,t)=(H_{ij}(s,t))$.

Тогда что $M(t,s)=M(s,t)$.

$$M(t,s)=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu\begin{pmatrix}\varphi_1^{(\nu)}(t)\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \varphi_n^{(\nu)}(t)\end{pmatrix}\left(\overline{\varphi}_1^{(\nu)}(s)\ldots\overline{\varphi}_n^{(\nu)}(s)\right),\quad m\le\infty. \tag{9}$$

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_ν матричного ядра $M(t,s)$ простые. В силу вполне непрерывности и самосопряженности оператора M, порожденного матричным ядром, ортонормированная последовательность собственных вектор - функций $\{\varphi^{(\nu)}(t)\}$ полна в $L_2([a,\infty),E_n)$. Очевидно, что если $u(t)\in L_2([a,\infty),E_n)$, то $\|u(t)\|=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, где $u^{(\nu)}=\langle u(t),\varphi^{(\nu)}(t)\rangle$, $(\nu=1,2,\ldots)$.

Пусть последовательность соответствующих собственных значений $\{\lambda_\nu\}$ расположена в порядке роста их модулей.

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in L_2([a,\infty);E_n)\ :\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c>0,\ \ 0<\alpha<\infty,\ \ u^{(\nu)}=\langle u(t),\varphi^{(\nu)}(t)\rangle,\ (\nu=1,2,\ldots)$, т.е.

$$u^{(\nu)}=\int_a^\infty\langle u(t),\varphi^{(\nu)}(t)\rangle_n\,dt. \tag{10}$$

Ясно, что если $u(t)\in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|\le c\lambda_1^\alpha.$$

Будем предполагать, что $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда системы (1) имеет решение $u(t)\in M_\alpha$ и справедливо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\int_a^\infty\langle u(t),\varphi^{(\nu)}(t)\rangle_{E_n}dt\right|^2=\int_a^\infty\langle f(t),u(t)\rangle_{E_n}dt.$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2\le\|f(t)\|\cdot\|u(t)\|. \tag{11}$$

С другой стороны

$$\|u(t)\|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\le\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p=1+\alpha,\quad q=(1+\alpha)/\alpha$. Учитывая $u(t)\in M_\alpha$ и (11), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|^2\le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\langle\|f(t)\|,\|u(t)\|\right\rangle^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

отсюда получим следующую оценку устойчивости

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \cdot \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \; 0 < \alpha < \infty .$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 1. Пусть оператор M порожденным матричным ядром $M(t,s)$ положительный, где Λ определен по формуле (8) и (9). Тогда решение системы (1) в $L_2([a,b];E_n)$ единственно. Кроме того множестве $K(M_\alpha)$ $(K(M_\alpha)-$ образ M_α при отображении оператором K оператор K^{-1}, обратны K, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \; \varepsilon > 0 \qquad ($$

будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_α.

На самом деле, сделаем следующую подстановку в системе (1) (13).

$$u(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t) \in M_\alpha$ - решение системы (1), получим

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon) + \int_a^\infty K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon\, u(t).$$

Отсюда, учитывая (1), имеем

$$\varepsilon\|\xi(t,\varepsilon)\|^2 + \sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \le \varepsilon \sum_{\nu=1}^\infty |u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)|, \qquad (14$$

где $\xi_\nu(\varepsilon)$ - коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\varphi^{(\nu)}(t) = \{\varphi_i^{(\nu)}(t)\}$ т.е. $\xi_\nu(\varepsilon) = \langle \xi(t,\varepsilon), \varphi^{(\nu)}(t)\rangle$. Применяя неравенство Гёльдера при $p = q = \frac{1}{2}$, из (14) получим

$$\|\xi(t,\varepsilon)\| \le \|u(t)\|, \qquad (15)$$

$$\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \le \varepsilon\|u(t)\|^2 \le \varepsilon c \lambda_1^\alpha, \varepsilon > 0. \qquad (16)$$

С другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^\infty |u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)| = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{|\xi_\nu(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} \cdot \lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} |u^{(\nu)}|^{\frac{1}{1+\alpha}} |\xi_\nu(t,\varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}} |u^{(\nu)}|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, $m = 2(1+\alpha)$, $n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu\right)^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^\alpha}\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{(1+\alpha)}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее, в силу $u(t)\in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left(c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{p+q}{pq}}.$$

Отсюда, подставляя $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}\cdot\left(c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\varepsilon c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \tag{17}$$

т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}\cdot c^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\cdot\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}\lambda_1^{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\cdot\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c\cdot\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}}\cdot\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{18}$$

Учитывая (18), из (14) имеем

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}}\cdot\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\quad 0<\alpha<\infty. \tag{19}$$

Таким образом, доказана.

Теорема 2. Пусть оператор M порожденный матричным ядром $M(t,s)$ положительный и $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (19), где $u(t,\varepsilon)$ - решение системы (13), $u(t)$ - решение системы (12), $M(t,s)$ определен по формуле (8).

Список использованной литературы:

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. с. 1052-1055.
4. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.
5. Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables- Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia- 2013, №3- С. 30-36.