OMEGA SCIENCE
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЦЕНТР
ИННОВАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ISSN 2410-700X
издается с 01.2015
№ 1-2 / 2018

СИМВОЛ НАУКИ

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.968

Каденова З.А.
г.Бишкек. д.ф.-м.н, доцент
Kadenova71 @mail.ru
Орозмаматова Ж.Ш.
г. Ош ст.преп. ОшТУ
Jypar75@mail.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы единственности решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси.

Ключевые слова

Линейные интеральные уравнения первого рода, система, единственность решений, полуось

Z.A. Kadenova , Zh.Sh. Orozmamatova

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE SEMIAXIS

Abstract

In the article the questions of uniqueness of solutions of systems of linear Fredholm integral equations of the first kind in the semiaxis.

Key words and phrases

linear integral equations first kind, system, uniqueness of solutions, semiaxis.

Негизги сөздөр

биринчи типтеги сызыктуу интегралдык теңдемелер, система, чыгарылышынын жалгыздыгы, жарым ок

Постановка задач. В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм доказана теорема единственности решений для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси.

Рассмотрим систему вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \tag{1}$$

где
$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), a \le s \le t < \infty; \\ B(t,s), a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

$$A(t,s) = a_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s)=b_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$f(t)=(f_i(t))=(f_1(t),\dots f_n(t))^T$,

$u(t)=(u_i(t))=(u_1(t),\dots u_n(t))^T$,

Здесь A(t,s) и B(t,s)- данные матричные функции, f(t)-известная вектор функция, u(t)-неизвестная вектор –функция.

Для матрица $A=(a_{ij})$ и вектора $f=(f_i)$ определим норму

$$\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|u\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для $u=(u_i)$, $v=(v_i)\in R^n$, определим скалярное произведение

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\ .$$

Всюду будем предполагать, что

$\|K(t,s)\|\in L_2([a,\infty)\times[a,\infty)), f(t)\in L_2[a,\infty)$.

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнение сводящиеся к ним были изучены [1-5], где были получены теоремы единственности устойчивости и регуляризации.

Запишем системы (1) в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds+\int_t^\infty B(t,s)u(s)ds=f(t). \tag{3}$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на n-мерную вектор- функцию $u(t)$. Полученное произведение интегрируем по области

$a\le t<\infty$. Тогда получим

$$\int_a^\infty\left\langle\int_a^t A(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt+\int_a^\infty\left\langle\int_a^s B(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt=\int_a^\infty\langle f(t),u(t)\rangle dt, \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^\infty\int_a^t\langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt+\int_a^\infty\int_a^s\langle B(t,s)u(s),u(t)\rangle dtds=\int_a^\infty\langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

$$\int_a^\infty\int_a^t\langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt+\int_a^\infty\int_a^s\langle u(s),B^*(t,s)u(t)\rangle dtds=\int_a^\infty\langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

$$\int_a^\infty\int_a^t\langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt+\int_a^\infty\int_a^s\langle B^*(t,s)u(t),u(s)\rangle dtds=\int_a^\infty\langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

$$\int_a^\infty\int_a^t\langle (A(t,s)+B^*(s,t))u(s),u(t)\rangle dsdt=\int_a^\infty\langle f(t),u(t)\rangle dt. \tag{5}$$

Обозначая

$$H(t,s)=A(t,s)+B^*(s,t) \quad (t,s)\in G=\{(t,s)\,|\,a\le s\le t<\infty\},$$

из (5) получим

$$\int_a^\infty\int_a^t \langle H(t,s)u(s),u(t)\rangle ds dt=\int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt.$$

Предполагаем выполнение следующих условий:

а) $H(t,s)$ имеет производные $H_t'(t,a), H_s'(t,s), H_{st}''(t,s)$

$(H(t,a))^*=H(t,a), (H_s'(t,s))^*=H_s'(t,s), \quad (H_{st}''(t,s))^*=H_{st}''(t,s)$ где H^* сопряженная матри матрице H и $\|H_t'(t,s)\|, \|H_s''(t,s)\|, \|H_{ts}''(t,s)\|\in L_2(G)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle H(b,a)u,u\rangle\ge 0, \forall u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\in R^n$ т.е. $H(\infty,a)\ge 0$;

$\langle H_t'(t,a)u,u\rangle\le 0, \forall u\in R^n$ т.е. $H_t'(t,a)\le 0; \quad \forall t\in[a,\infty)$;

$\lim\limits_{t\to\infty}\langle H_s'(b,s)u,u\rangle\ge 0, \forall u\in R^n$ т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} H_s'(b,s)\ge 0; \ \forall s\in[a,\infty)$;

$\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle\le 0, \forall u\in R^n$ т.е. $H_{st}''(t,s)\le 0, \quad \forall (t,s)\in G$.

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $\langle H_t'(t,a)u,u\rangle\le 0, \forall u\in R^n, u\ne 0$ т.е. $H_t'(t,a)<0$ при почти всех $t\in[a,\infty)$;

2) $\langle H_s'(b,s)u,u\rangle\ge 0, \forall u\in R^n, u\ne 0$ т.е. $H_s'(b,s)>0$ при почти всех $s\in[a,\infty)$;

3) $\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle\le 0, \forall u\in R^n, u\ne 0$ т.е. $H_{st}''(t,s)<0$ при почти всех $(t,s)\in G=\{(t,s): a\le s\le t<\infty\}$.

Для преобразования левой части системы (7) используем следующие соотношения

$$=z(t,s)=\int_s^t u(\nu)d\nu,$$

$$d_s z(t,s)=-u(s)ds,$$

$$u(s)ds=-d_s z(t,s),$$

$$\langle z(t,s),u(t)\rangle=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle z(t,s),z(t,s)\rangle dt$$

$$-\langle H(t,s)z_s'(t,s),u(t)\rangle=\langle H_s'(t,s)z(t,s),u(t)\rangle-(\langle H(t,s)z(t,s),u(t)\rangle)_s',$$

$$\langle H(t,a)z(t,a),z_t'(t,a)\rangle=\frac{1}{2}\langle H(t,a)z(t,a),z(t,a)\rangle_t'-\frac{1}{2}\langle H_t'(t,a)z(t,a),z(t,a)\rangle,$$

$$\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle_t^{'}-\frac{1}{2}\left\langle H_{ts}^{''}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle.$$

Тогда применяя формулы Дирихле имеем следующую соотношение

$$\int_a^\infty\left\langle\int_a^t H(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt=-\int_a^\infty\left\langle\int_a^t H(t,s)z_s^{'}(t,s)ds,u(t)\right\rangle dt=$$

$$=-\int_a^\infty\left\langle\left[H(t,s)z(t,s)\Big|_a^t\int_a^t H_s^{'}(t,s)z(t,s)ds\right],u(t)\right\rangle dt,$$

$$\int_a^\infty\left\langle H(t,a)z(t,a),z_t^{'}(t,a)\right\rangle dt+\int_a^\infty\int_a^t\left\langle H_s^{'}(t,s),z_t^{'}(t,s)\right\rangle dsdt=$$

$$=\int_a^\infty\left\langle H(t,a)z(t,a),z_t^{'}(t,a)\right\rangle dt+\int_a^\infty\int_s^\infty\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z_t^{'}(t,s)\right\rangle dtds \qquad (10)$$

Используя выше указанные соотношения, получим

$$\int_a^\infty\left\langle H(t,a)z(t,a),z_t^{'}(t,a)\right\rangle dt=\frac{1}{2}\left\langle H(\infty,a)z(\infty,a),z(\infty,a)\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty\left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a),z(t,a)\right\rangle dt, \qquad (11)$$

$$\int_a^\infty\int_s^\infty\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z_t^{'}(t,s)\right\rangle dtds=\frac{1}{2}\int_a^\infty\left\langle H_s^{'}(b,s)z(b,s),z(b,s)\right\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_s^\infty\left\langle H_{ts}^{''}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle dtds. \qquad (12)$$

Учитывая (11), (12) и формулу Дирихле из (10) имеем

$$\int_a^\infty\left\langle\int_a^t H(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt=\frac{1}{2}\left\langle H(\infty,a)z(\infty,a),z(\infty,a)\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty\left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a),z(t,a)\right\rangle dt+\frac{1}{2}\int_a^\infty\left\langle H_s^{'}(\infty,s)z(\infty,s),z(\infty,s)\right\rangle ds- \qquad (13)$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty\left[\int_a^t\left\langle H_{st}^{''}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle ds\right]dt.$$

Тогда в силу (13), соотношение (7) примет вид

$$\int_a^\infty\int_a^t\left\langle H(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt=\frac{1}{2}\left\langle H_s^{'}(b,a)z(b,a),z(b,a)\right\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty\left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a),z(t,a)\right\rangle dt+\frac{1}{2}\int_a^\infty\left\langle H_s^{'}(\infty,s)z(\infty,s),z(\infty,s)\right\rangle ds- \qquad (14)$$

$$-\int_a^\infty\int_a^t\left\langle H_{st}^{''}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle dsdt=\int_a^\infty\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt.$$

Пусть в (14) $f(t) \equiv 0$. Тогда, в силу условий б) и в) из (14) вытекает, что

$z(t,a) \equiv 0$ т.е. $\int_a^t u(v)dv \equiv 0$ при $t \in [a,\infty)$ или $z(\infty,s) \equiv 0$ т.е. $\int_s^\infty u(v)dv = 0$ при $s \in [a,\infty)$.

Далее, в силу условия в), $u(t) \equiv 0$. Итак доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), б), и в).

Тогда решение системы (1) единственно $L_2([a,\infty),R^n)$.

Список использованной литературы:

1.Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральны уравнений Фредгольма первого рода.// Труды международной конференции «Inverse and Ill-Posed Problem of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentie on the occasion of his 75-th birthday. August 20-25, 2007. Novosibirsk, Russia. Электронный сборник.

2.Асанов А., Каденова З.А. Единственность и устойчивость решений систем линейных интегральны уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.// Труды межд. конф.«Inverse and Ill-Pose Problems of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on th occasion of his 80-th birthday August 5-12, 2012, Novosibirsk, Russi

3.Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральны уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.// Труды межд. конф. «Функциональн анализ и его приложения», посвященную 70-летию со дня рождения д.ф.-м.н., академика Национальн Академии наук РК М. Отелбаева, 2- 5 октября 2012 г., г. Астана, Казакстан.

4.Асанов А., Каденова З. А. Интегральное уравнение первого рода с двумя независимыми переменным Германия: «Немецкое издательство LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012.- 178 стр.

5.Асанов А., Каденова З. А. Об единственности решений линейных интегральных уравнений первого род двумя независимыми переменными.// Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Биш Илим, 2010,- Вып.43- С. 46-53.

Арсенин В.Я., Иванов В.В. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свер методом регуляризации. // ЖВМ и МФ.-1968.-8.-№2.

УДК 517.968

Орозмаматова Ж
г. ОШ ст.преп.О
Jypar75@m

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

Аннотация

Рассмотрена регуляризация и получены оценки устойчивость решений систем лин интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси