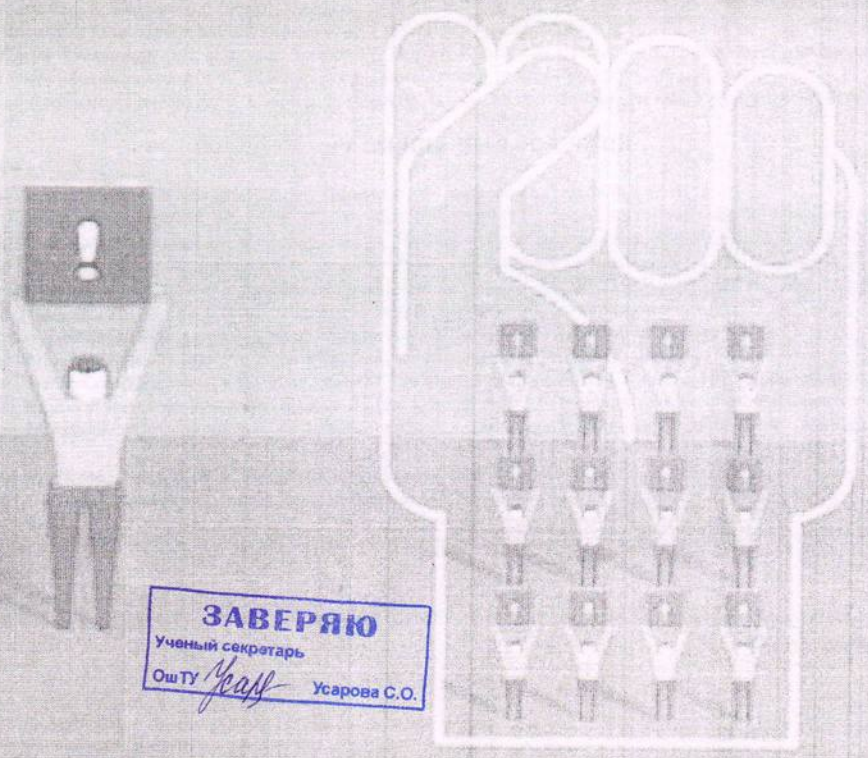
СИНЕРГИЯ

Научно-практический журнал



ISSN 2415-7708

Содержание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ	
В.О. Ушаков Взаимосвязь стратегий семейного воспитания и тревожности у младших дошкольников	7
А. Шерова О статистическом анализе гласных на уровне словаря	13
ЭКОНОМИКА, ОРГАНИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ПРЕДПРИЯТИЯМИ, ОТРАСЛЯМИ, КОМПЛЕКСАМИ	
Л.Д. Слепнева, Г.И. Рыбникова Эконометрическое моделирование как инструмент обеспечения финансовой безопасности предприятия	19
З.Н. Шуклина Стратегические направления обеспечения устойчивого внешнеэкономического развития РФ в условиях санкций	26
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИОРИТЕТНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ РАЗВИТИЯ НАУКИ И ТЕХНИКИ	
А. Асанов., Ж.Ш. Орозмаматова Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси	33
З. Сирожиддинов, Р.А. Мадатов, А. Мадатов Проблемы сохранения архитектурных памятников Узбекистана	40
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ И ПОЛИТИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ ЗАРУБЕЖНЫХ СТРАН	
И.М. Станчин, Н.Т. Исрафилов Миграционная подвижность населения Туркменистана	47

Contents

MODERN PROBLEMS OF PROFESSIONAL EDUCATION	
V.O. Ushakov Relationships of family education strategies and anxiety in younger preschool children	7
A. Sherova About the statistical analysis of vowels at the level of the dictionary	13
ECONOMICS, ORGANIZATION AND MANAGEMENT OF ENTERPRISES, BRANCHES, COMPLEXES	
L.D. Slepneva, G.I. Rybnikova Econometric modeling as a tool to ensure the financial security of the enterprise	19
Z.N. Shuklina Strategic directions for ensuring sustainable foreign economic development in Russia under the conditions of sanctions	26
BASIC AND APPLIED RESEARCH IN PRIORITY DIRECTIONS OF DEVELOPMENT OF SCIENCE AND TECHNOLOGY	
A. Asanov., J.S. Orozmamatova A class of systems of linear fredholm integral equations of the third kind on the semiaxis	33
Z. Sirozhiddinov, R.A. Madatov, A. Madatov Problems of preserving architectural monuments of Uzbekistan	40
SOCIO-ECONOMIC AND POLITICAL DEVELOPMENT OF FOREIGN COUNTRIES	
I.M. Stanchin, N.T. Israfilov Migration mobility of population of Turkmenistan	47

Фундаментальные и прикладные исследования по приоритетным направлениям развития науки и техники

УДК 517.968

А. Асанов., Ж.Ш. Орозмаматова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА НА ПОЛУОСИ

Кыргызско-Турецкий университет Манас,
Ошский технологический университет

Аннотация: Методом неотрицательных квадратичных форм изучены вопросы единственности решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси.

Ключевые слова: Систем линейных интегральных уравнений,Фредгольма, третьего рода, единственность решений, полуось

UDC 517.968

A. Asanov., J.S. Orozmamatova

A CLASS OF SYSTEMS OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND ON THE SEMIAXIS

Kyrgyz Turkish Manas University,
Osh Technological University

Abstract: In the article the method of the square form ave studing the uniqueness of solutions of class of systems of linear Fredholm integral equations of the third kind in the semi axis.

Key words: system of linear integral equations, Fredholm, third kind, system, the uniqueness of solutions, the semi axis.

Рассмотрим систему вида

$$P(t)u(t)+\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds=f(t),\quad t\in[a,\infty), \qquad (1)$$

где $$K(t,s)=\begin{cases}A(t,s), a\le s\le t<\infty;\\ B(t,s), a\le t\le s<\infty.\end{cases} \qquad (2)$$

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t,s)=a_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix}.$$

$$B(t,s)=b_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t)=(f_i(t))=(f_1(t),\dots f_n(t))^T,$$
$$u(t)=(u_i(t))=(u_1(t),\dots u_n(t))^T,$$

Здесь P(t), A(t,s) и B(t,s)- данные матричные функции. f(t)-известная вектор функция, u(t)-неизвестная вектор – функция.

Различные вопросы теории интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в работе [1] дан обзор результатов по интегральным уравнениям второго рода. В работе [2] для линейных интегральных уравнений Вольтерры первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В работе [3] для решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие по Лаврентьеву операторы. Доказаны теоремы единственности решений и построены регуляризирующие по Лаврентьеву операторы. Доказаны теоремы единственности решений и построены регуляризирующие по Лаврентьеву операторы для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода с негладкими матричными ядрами в работе [4], для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерры третьего рода в работе [5] и для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего в работе [6].

Здесь методом неотрицательных квадратичных форм доказана теорема единственности решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси.

Для матрицы $A=(a_{ij})$ и вектора $f=(f_i)$ определим норму

$$\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|u\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для $u=(u_i)$, $v=(v_i)\in R^n$, определим скалярное произведение

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i.$$

Всюду будем предполагать, что

$$\|K(t,s)\|\in L_2([a,\infty)\times[a,\infty)),\|f(t)\|\in L_2[a,\infty).$$

Запишем системы (1) в виде

$$P(t)u(t)+\int_a^t A(t,s)u(s)ds+\int_t^\infty B(t,s)u(s)ds=f(t). \quad (3)$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на n-мерную вектор- функцию $u(t)$. Полученное произведение интегрируем по области $a\le t<\infty$. Тогда получим

$$\int_0^\infty \langle P(t)u(t),u(t)\rangle dt+\int_a^\infty \left\langle \int_a^t A(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt+$$
$$+\int_a^\infty \left\langle \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt+\int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt. \quad (4)$$

Учитывая формулу

$$\langle P(t)u,u\rangle=\left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u,u\right\rangle, \forall u\in R^n.$$

и применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_0^\infty \langle P(t)u(t),u(t)\rangle dt+\int_a^\infty\int_a^t \langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt+\int_a^\infty\int_a^s \langle u(s)B^*(t,s)u(t)\rangle dtds=$$
$$=\int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

т. е.

$$\int_0^\infty \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t),u(t)\right\rangle dt+\int_a^\infty\int_a^t \langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt+$$
$$+\int_a^\infty\int_a^t \langle B^*(s,t)u(s),u(t)\rangle dsdt=\int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt. \quad (5)$$

Обозначая

$$H(t,s)=A(t,s)+B^*(s,t) \quad (t,s)\in G=\{(t,s)|\, a\le s\le t<\infty\}, \quad (6)$$

из (5) получим

$$\int_a^\infty \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t),u(t)dt+\int_a^\infty\int_a^t \langle H(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt=\int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt. \quad (7)$$

Предполагаем выполнение следующих условий:

а) $H(t,s)$ имеет производные $H_t'(t,a), H_s'(t,s), H_{st}''(t,s)$ и $(H(t,a))^*=H(t,a), (H_s'(t,s))^*=H_s'(t,s), \quad (H_{st}''(t,s))^*=H_{st}''(t,s)$ где H^* сопряженная матрица к матрице H и $\|H(t,s)\|,\|H_t'(t,s)\|,\|H_s''(t,s)\|,\|H_{ts}''(t,s)\|\in L_2(G)$.

$\|P(t)\|\in C[a,\infty)$-пространство всех непрерывных и ограниченных функции в $[a,\infty)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle H(t,a)u,u\rangle \ge 0, \forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in R^n$ т.е. $H(\infty,a)\ge 0$;

$$\langle H_t'(t,a)u,u\rangle \le 0, \forall u\in R^n \text{ т.е. } H_t'(t,a)\le 0;\ \forall t\in[a,\infty);$$

$$\lim_{t\to\infty}\langle H_s'(t,s)u,u\rangle \ge 0, \forall u\in R^n \text{ т.е. } \lim_{t\to\infty} H_s'(t,s)\ge 0;\ \forall s\in[a,\infty);$$

$$\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle \le 0, \forall u\in R^n \text{ т.е. } H_{st}''(t,s)\le 0,\ \forall (t,s)\in G;$$

$$\left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u,u\right\rangle \ge \alpha(t)\|u\|^2, \forall u\in R^n, \alpha(t)\in C[a,\infty), \alpha(t)\ge 0$$

при почти всех $t\in[a,\infty)$.

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $\langle H_t'(t,a)u,u\rangle \le 0, \forall u\in R^n, u\ne 0$ т.е. $H_t'(t,a)<0$ при почти всех $t\in[a,\infty)$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle H_s'(t,s)u,u\rangle > 0, \forall u\in R^n, u\ne 0$ т.е. $H_s'(t,s)>0$ при почти всех $s\in[a,\infty)$;

3) $\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle < 0, \forall u\in R^n, u\ne 0$ т.е. $H_{st}''(t,s)<0$ при почти всех $(t,s)\in G=\{(t,s): a\le s\le t<\infty\}$;

4) $\alpha(t)>0$ при почти всех $t\in[a,\infty)$.

Для преобразования левой части системы (7) используем следующие соотношения

$$z(t,s)=\int_s^t u(\nu)d\nu, \quad (8)$$

$$d_s z(t,s) = -u(s)ds,$$

$$u(s)ds = -d_s z(t,s),$$

$$\langle z(t,s),u(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle z(t,s),z(t,s)\rangle dt \quad (9)$$

$$-\langle H(t,s)z_s'(t,s),u(t)\rangle = \langle H_s'(t,s)z(t,s),u(t)\rangle - \left(\langle H(t,s)z(t,s),u(t)\rangle\right)_s'.$$

$$\langle H(t,a)z(t,a),z_t'(t,a)\rangle = \frac{1}{2}\langle H(t,a)z(t,a),z(t,a)\rangle_t' - \frac{1}{2}\langle H_t'(t,a)z(t,a),z(t,a)\rangle,$$

$$\langle H_s'(t,s)z(t,s),z'(t,s)\rangle = \frac{1}{2}\langle H_s'(t,s)z(t,s),z(t,s)\rangle_t' - \frac{1}{2}\langle H_{ts}''(t,s)z(t,s),z(t,s)\rangle.$$

Тогда применяя формулы Дирихле имеем следующую соотношение

$$\int_a^\infty \left\langle \int_a^t H(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle dt = -\int_a^\infty \left\langle \int_a^t H(t,s)z_s'(t,s)ds, u(t) \right\rangle dt =$$

$$= \int_a^\infty \left\langle H(t,a)z(t,a), z_t'(t,a) \right\rangle dt + \int_a^\infty \int_a^t \left\langle H_s'(t,s), z(t,s)z_t'(t,s) \right\rangle ds dt =$$

$$= \int_a^\infty \left\langle H(t,a)z(t,a), z_t'(t,a) \right\rangle dt + \int_a^\infty \int_s^\infty \left\langle H_s'(t,s)z(t,s), z_t'(t,s) \right\rangle dt ds. \quad (10)$$

Используя выше указанные соотношения, получим

$$\int_a^\infty \left\langle H(t,a)z(t,a), z_t'(t,a) \right\rangle dt = \frac{1}{2}\left\langle H(\infty,a)z(\infty,a), z(\infty,a) \right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_t'(t,a)z(t,a), z(t,a) \right\rangle dt, \quad (11)$$

$$\int_a^\infty \int_s^\infty \left\langle H_s'(t,s)z(t,s), z_t'(t,s) \right\rangle dt ds = \frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_s'(\infty,s)z(\infty,s), z(\infty,s) \right\rangle ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \int_s^\infty \left\langle H_{ts}''(t,s)z(t,s), z(t,s) \right\rangle dt ds. \quad (12)$$

Учитывая (11), (12) и формулу Дирихле из (10) имеем

$$\int_a^\infty \left\langle \int_a^t H(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle dt = \frac{1}{2}\left\langle H(\infty,a)z(\infty,a), z(\infty,a) \right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_t'(t,a)z(t,a), z(t,a) \right\rangle dt + \frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_s'(\infty,s)z(\infty,s), z(\infty,s) \right\rangle ds - \quad (13)$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left[\int_a^t \left\langle H_{st}''(t,s)z(t,s), z(t,s) \right\rangle ds \right] dt.$$

Тогда в силу (13), соотношение (7) примет вид

$$\int_0^\infty \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t), u(t) \right\rangle dt + \int_0^\infty \int_0^t \left\langle H(t,s)u(s), u(t) \right\rangle ds dt =$$

$$= \int_0^\infty \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t), u(t) \right\rangle dt + \frac{1}{2}\left\langle H_s'(\infty,a)z(\infty,a), z(\infty,a) \right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_t'(t,a)z(t,a), z(t,a) \right\rangle dt + \frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_s'(\infty,s)z(\infty,s), z(\infty,s) \right\rangle ds - \quad (14)$$

$$-\int_a^\infty \int_a^t \left\langle H_{st}''(t,s)z(t,s), z(t,s) \right\rangle ds dt = \int_a^\infty \left\langle f(t), u(t) \right\rangle dt.$$

Пусть в (14) $f(t) \equiv 0$. Тогда, в силу условий б) и в) из (14) вытекает, что

$z(t,a)\equiv 0$ т.е. $\int_a^t u(v)dv\equiv 0$ при $t\in[a,\infty)$ или $z(\infty,s)\equiv 0$ т.е. $\int_s^\infty u(v)dv=0$ при $s\in[a,\infty)$ или $u(t)=0,\forall t\in[a,\infty)$.

Далее, в силу условия в), $u(t)=0,$ при $t\in[a,\infty)$ Итак доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия а), б), и в).

Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_2([a,\infty),R^n)$.

Пример. Рассмотрим систему (1) при n=2, a=0

$$P(t)=\begin{pmatrix}\frac{t}{1+t^2} & m(t)\\ -m(t) & \frac{2t}{1+t^2}\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix},\qquad(15)$$

$$A(t,s)=\begin{pmatrix}\frac{t}{(1+t)(1+s)} & \frac{4}{(3+t)(2+s)}\\ -\frac{2}{(1+t)(1+s^2)} & \frac{5}{(6+t)(3+s)}\end{pmatrix},$$

$$B(t,s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{(1+t)(1+s)} & \frac{2}{(1+t^2)(1+s)}\\ \frac{-4}{(2+t)(3+s)} & \frac{-5}{(3+t)(6+s)}\end{pmatrix}.$$

$$m(t)\in C[0,\infty),f_1(t),f_2(t)\in L_2(0,\infty).$$

В этом случае все условия теоремы выполняются при

$$\frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]=\begin{pmatrix}\frac{t}{1+t^2} & 0\\ 0 & \frac{2t}{1+t^2}\end{pmatrix},$$

$$H(t,s)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},(t,s)\in G;\alpha(t)=\frac{t}{1+t^2},t\in[0,\infty).$$

Список литературы

1.Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Мат.анализ. Т.15. М.,1977.с 131-198

2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера первого рода и третьего рода // Журнал вычислительной математики и математический физики. Т.19.№4, 1979, с. 970-989.

3.Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР.-1959.-Т. 127, № 1.-С. 31-33.

4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР.-1989.-Т.309., №5.,-С. 1052-1055.

5.Иманалиев М.И., Асанов А. // О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН 2007. Т. 415. № 1. с. 14-17.

6.Иманалиев М.И., Асанов А. // О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. // ДАН 2010. Т. 430. № 6. с. 734-737.

Информация об авторах:

Асанов Авыт Асанович,
Доктор физико-математических наук, профессор
Кыргызско-Турецкий университет Манас,
г. Бишкек, Кыргызстан

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна,
Старший преподаватель, Ошский
технологический университет, г. Ош,
Кыргызстан

Information about authors:

Asanov Avyt Asanovich,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor
Kyrgyz-Turkish University Manas, Bishkek, Kyrgyzstan

Orozmamatova Zhypargul Shermamatovna,
Senior Lecturer, Osh Technological University, Osh,
Kyrgyzstan

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.