МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.968.

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Каденова З.А.

Ош– 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень условных обозначений……..…….3

Введение…….……..……...5

Глава 1. Обзор работ по теме диссертации и вспомогательные материалы

1.1. Некорректно поставленные задачи……....11

1.2. Обзор основных результатов в теории интегральных уравнений первого рода…….…….....17

Выводы по главе 1……..…..…….....24

Глава 2. Линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

2.1. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси.....25

2.2 Регуляризация и оценка устойчивости решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси……..…….....30

2.3. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси…….....36

2.4. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси…….....41

Выводы по главе 2…….……48

Глава 3. Системы линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода

3.1. Регуляризация и оценка устойчивости решений систем линейных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси.....53

3.2. Регуляризация и оценка устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси……..……60

3.3. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси.....66

Выводы по главе 3……72

Заключение…….…….....79

Список использованных источников……..……....81

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

N – множество натуральных чисел;

R – множество вещественных чисел;

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство;

$\langle *,* \rangle$ – скалярное произведение в R^n т.е. для u=(u$_i$) , v=(v$_i$)$\in R^n$, $\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$,

для вектора u=(u$_i$)$\in R^n$, норму $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i| \right)^{\frac{1}{2}}$;

$L_2[a,\infty)$ – пространство всех квадратично суммируемых функций в $[a,\infty)$;

$L_1[a,\infty)$ – пространство всех суммируемых функций в $[a,\infty)$;

$L_1([a,\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $L_1[a,\infty)$;

$L_2(-\infty,+\infty)$ – пространство всех квадратично суммируемых функций в $(-\infty,+\infty)$;

$L_1(-\infty,+\infty)$ – пространство всех суммируемых функций в $(-\infty,+\infty)$;

$L_2((-\infty,+\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $L_2(-\infty,+\infty)$;

$L_1((-\infty,+\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $L_1(-\infty,+\infty)$;

$C(-\infty,+\infty)$ – пространство всех непрерывных функций в $(-\infty,+\infty)$;

$C[a,\infty)$ – пространство всех непрерывных функций в $[a,\infty)$;

$C((-\infty,+\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $C(-\infty,+\infty)$;

$L_2((-\infty,+\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $L_2(-\infty,+\infty)$;

$C([a,\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $C[a,\infty)$;

$L_2([a,\infty);R^n)$ – пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из $L_2[a,\infty)$;

$L_2(G)$ – пространство квадратно-суммируемых функций в области G.

Для матрицы A=(a_{ij}) определим норму $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)^{\frac{1}{2}}$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. В последние годы развивается теория интегральных уравнений первого и третьего родов как область теории некорректных задач.

Среди математических задач выделяется класс задач, решение которых неустойчиво к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат классу некорректно поставленных задач. Одним из классов таких некорректных задач являются интегральные уравнения первого и третьего родов.

Многие обратные задачи относятся к числу так называемых некорректно поставленных данных. Современная теория решения некорректно поставленных задач, основанная на работах российских математиков – А.Н. Тихонова, [94-96], М.М. Лаврентьева [70-77], В.К. Иванова [33-35] и их научных школ, позволяют преодолеть возникающие трудности. В развитие теории и приложений некорректных задач весомый вклад внесли ученые М.М.Лаврентьев, А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, В.К.Иванов, В.В.Васин, М.И.Иманалиев, В.П.Танана, В.Г.Романов, А.Г. Ягола, Ю.Е.Аниконов, С.П, Шишатский, В.А.Морозов, А.Л.Бухгейм, А.М.Денисов, Н.С.Габбасов, С.И.Кабанихин, А.С.Апарцин, А. Асанов, А. Саадабаев, Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев, Б.С. Аблабеков, З.А.Каденова, Г.Сапарова и др. Вопросы для интегральных уравнений первого рода рассматривались в [12]-[14], [34], [36], [43]- [45], [71], [75], [89], [90],[91],[92].

В качестве основных приложений рассматривались обратные задачи геофизики, астрофизики, обработки изображений, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустики. Они выполняют большое число прикладных задач, в том числе, при математической обработке (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах. В качестве приближенных решений таких задач, устойчивых к малым изменениям

исходных данных, берется регуляризация решения, получаемая методом регуляризации.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими программами и проектами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014 гг., номер гос. регистрации № 0005756), «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017 гг., номер государственной регистрации № 0007125) и включены в отчеты по этим проектам.

Целью исследования является построение регуляризирующих операторов для решения линейных интегральных уравнений и систем уравнений первого рода на полуоси и на оси, доказательство теорем единственности и получение оценки устойчивости для таких уравнений и систем в разных семействах множеств корректностей.

Методика исследования. Основными методами исследования являются: методы функционального анализа, метод неотрицательных квадратичных форм, метод регуляризации М.М.Лаврентьева, методы интегральных преобразований.

Научная новизна работы:

- доказаны теоремы единственности решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;
- доказаны теоремы единственности решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;

- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси;

- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;

- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и получены оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;

- доказаны теоремы единственности решений для одного класса линейных систем интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси.

Теоретическая значимость и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные по результатам исследования теоретические результаты могут быть применены в различных областях науки и техники.

Экономическая значимость работы заключается в том, что результаты исследования могут быть использованы в изучении макроэкономических моделей, динамики различных экономических явлений, их эволюции в долгосрочных интервалах.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;

- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;

- достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси;

- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и оценки устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;

- достаточные условия единственности решения для линейных систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;

- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;

- регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и оценки устойчивости решений для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;

Личный вклад соискателя состоит в построении регуляризирующих операторов для решения линейных интегральных уравнений первого и третьего рода и их систем, доказательстве теоремы их единственности и оценке их устойчивости. Постановка задач при решении линейных интегральных уравнений третого рода на оси и их систем на полуоси принадлежит д.ф.-м.н., проф. А.Асанову.

Апробация результатов исследования. Материалы диссертации докладывались на международных и республиканских научно-практических конференциях:

- «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование, новые задачи и методы» Проблемы математического и естественнонаучного образования (Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014 г.);

- «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 19-24 октября 2015 г.);

- тезисы докладов Борубаевских чтений (Кыргызская Республика, г.Бишкек, 1 марта 2018 года);

- тезисы докладов Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications –MADEA-8 (Бишкек-Чолпон-Ата ,17-23 июнь 2018 года).

Результаты диссертационного исследования доложены также на расширенном заседании кафедры «Прикладная информатика в экономике» Ошского технологического университета имени М.М. Адышева.(протокол №3 от 30 октября 2018 года)

Публикации. Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 8 научных статьях соискателя [20, 21, 67, 68, 65, 82, 83, 84], в рецензируемых изданиях и сборниках, в зарубежных периодических изданиях, индексируемых РИНЦ, из них в журналах с импакт-фактором -2.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка использованной литературы. Работа изложена на 92 страницах машинописного текста. Перечень литературы содержит 103 наименований.

В первой главе отражен обзор работ по теме диссертации и вспомогательные материалы. В ней сделан обзор основных результатов научных исследований в теории некорректных задач и задач, приводящих к некорректным задачам.

В главе 1, состоящей из двух параграфов, приводится обзор работ по некорректным задачам и интегральным уравнениям первого рода.

Глава 2, состоящая из четырех параграфов, посвящена исследованиям единственности, регуляризации и оценки устойчивости решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого и третьего родов на полуоси и на оси. Применяя методы функционального анализа, квадратичных форм и неравенств в ней доказаны теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода на полуоси и на оси. Получены оценки устойчивости и построены регуляризующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения линейных интегральных уравнений первого рода в пространстве $L_2[a,\infty)$ и $L_2(-\infty;\infty)$.

В третьей главе работы исследованы вопросы единственности, устойчивости и регуляризации решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого и третьего родов на полуоси и оси. Применяя методы функционального анализа, квадратичных форм и неравенств доказана теорема единственности, решений систем линейных интегральных уравнений первого рода на полуоси и на оси. Получены оценки устойчивости и построены регуляризующие операторы для систем линейных интегральных уравнений

первого рода в пространстве в $L_2([a,\infty), R^n)$, в $L_2((-\infty;+\infty); R^n)$. Кроме того, доказана теорема единственности решений систем линейных интегральных уравнений третьего рода на полуоси.

В заключение отметим, что полученные результаты исследований линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях, открыли возможности для получения оценки устойчивости и построить регуляризирующие операторы разных множеств корректностей. Таким образом, задача определения приближенного решения по приближенным данным сводится к нахождению регуляризующего оператора и параметра регуляризации.

Полученные результаты исследований вопросов регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода и систем линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях могут быть применены в различных областях науки и техники

ГЛАВА I.
ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1.1. Некорректно поставленные задачи

Понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений было сформулировано в начале нашего века Ж. Адамаром [1].

Определение 1.1.1. Задача называется поставленной корректно, если выполняются следующие условия:

1) решение задачи существует;
2) решение задачи единственно;
3) решение задачи непрерывно зависит от данных.

Первое условие требует, чтобы данных в задаче не было слишком много (чтобы задача не была переопределенной).

Второе условие требует, чтобы данных было достаточно для определенности задачи.

Третье условие связано со следующим обстоятельством: если задача связана с описанием физического явления, данные не могут считаться известными абсолютно точно. Можно считать лишь то, что нам известно некоторое приближение к данным задачи. Таким образом, если непрерывная зависимость решения от данных не имеет места, решение задачи будет фактически неопределенным.

Некорректно поставленной задачей или просто некорректной задачей можно назвать любую задачу, которая не удовлетворяет, по крайней мере одну из условий корректности. Однако в теории некорректных задач основное внимание уделяется третьему условию.

Долгое время математики уходили от обсуждения задач такого типа, считая их лишенными физического смысла.

Впервые на примере обратной задачи теории потенциалов, имеющей непосредственное приложение в геофизике, А.Н. Тихонов [94], переосмыслив известные требования Адамара [1], предъявляемые к задачам математической физики, предложил для восстановления устойчивости сузить область решений до некоторого компакта.

Физическим оправданием такого подхода служило то наблюдение, что на практике, как правило, об искомом решении имеется несколько больше информации, чем это отражено в уравнении.

Теорема 1.1.1. Взаимно-однозначное непрерывное отображение A компакта $K \subset X$ в хаусдорфово пространство Y есть гомеоморфизм, т.е. отображение A^{-1} тоже непрерывно.

Применительно к банаховым пространствам X, Y и оператору A (вообще говоря, нелинейному), отображающему компакт $K \subseteq X$ непрерывно и взаимно-однозначно на $AX \subseteq Y$, теорему надо переформулировать в следующем виде.

Теорема 1.1.2. Существует непрерывная в нуле функция $\omega(\varepsilon), \omega(0) = 0$ такая, что для всех $u_1, u_2 \in K$ имеет место оценка:

$$\|u_1 - u_2\| \le \omega(\|Au_1 - Au_2\|),$$

где $\| \ \|$- нормы в пространствах X и Y соответственно.

В связи с этой теоремой следует ввести следующее:

Определение 1.1.2. Задача $Au = f, A: D(A) \to Y, D(A) \subset X$ называется условно корректной (или корректной по Тихонову) на множестве $K \subseteq D(A)$, если существует непрерывная в нуле функция $\omega(\varepsilon), \varepsilon \ge 0, \omega(0) = 0$ такая, что

$$\forall\, u_1, u_2 \in K \ \|u_1 - u_2\| \le \omega(\|Au_1 - Au_2\|) \qquad (*)$$

Здесь A – произвольный, вообще говоря, нелинейный оператор с областью определения $D(A) \subseteq X; X, Y$ - банаховы пространства.

Множество K, на котором выполнена оценка (*), называется множеством корректности (или классом корректности).

Определение корректной по Тихонову задачи введено М.М. Лаврентьевым.

Новое понятие корректности постановки таких задач в работах А.Н. Тихонова [94 - 97], М.М. Лаврентьева [70-76] и В.К. Иванова [33-35], от классического, дало средство для исследования некорректных задач и

стимулировало интерес к интегральным уравнениям первого рода, имеющим большое прикладное значение.

Примеры некорректно поставленных задач

Хорошо известным примером некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма I рода, если пространства в которых действует оператор, выбраны так, как указано ниже. Пусть функция z(s) задана на отрезке [a, b] функция *f(*x) - на отрезке [c,d], ядро K(x,s) на прямоугольнике [c,d]×[a,b], а λ - некоторое число.

Тогда интегральное уравнение Фредгольма II рода имеет вид:

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) z(s) ds + f(x), \qquad (1.1.1)$$

Уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b K(x,s) z(s) ds = f(x), \qquad (1.1.2)$$

Уравнение Вольтерра II рода:

$$z(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) z(s) ds + f(x), \qquad (1.1.3)$$

Уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_a^x K(x,s) z(s) ds = f(x), \qquad (1.1.4)$$

Понятно, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, ядро которого можно определить как:

$$K_{Фред}(x,s) = \begin{cases} K_{Вол}(x,s), s \le x, \\ 0, \qquad s > x. \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

Свойства этих уравнений разные, в том числе корректность постановок задач на основе этих уравнений.

Ядро *K*(x,s) называется замкнутым, если из равенства:

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s) z(s) ds = 0 \qquad (1.1.6)$$

Следует, что z(s)=0.

Рассмотрим теперь уравнение Фредгольма I рода:

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)ds = f(x), \qquad (1.1.7)$$

где ядро K(x,s) - функция, непрерывная по совокупности аргументов $(x,s) \in [c,d] \times [a,b]$, а решение z(s) - непрерывная на отрезке [a,b] функция.

Таким образом, мы рассматриваем оператор A как действующий в следующих пространствах:

A: C[a,b] $\rightarrow$ C[c,d].

Покажем, что эта задача является некорректно поставленной. Напомним условия корректной постановки задачи:

1) Существование решения. Это означает, что решение должно существовать для любой непрерывной на [c,d] функций u(x).

2) Единственность решения. Данное условие эквивалентно требованию устойчивость решения. Это означает, что для любой последовательности $u_n \rightarrow \bar{u}$, $Az_n \rightarrow u_n$, $A\bar{z}_n = \bar{u}$, последовательность $z_n \rightarrow \bar{z}$.

3) Замкнутость ядра. В этом случае если решение есть, то оно единственно.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} областью определения $D(A^{-1})=C[c,d]$. Условие устойчивости эквивалентно непрерывности обратного A^{-1} при условии, что обратный оператор существует. Посмотрим, в каких случаях нарушается каждое из трех условий корректности. Пусть ядро K(x,s) такое, что для любого $s \in [a,b]$ существует непрерывная первая производная $K_x(x,s)$ в точке $x_0 \in (c,d)$. Тогда для любой непрерывной функции z(s) существует и непрерывная производная уравнения (7) в точке x_0:

$$\left(\int_a^b K(x,s)z(s)ds \right)' \Big|_{x=x_0} = \int_a^b K_x(x_0,s)z(s)ds = f'(x_0) \qquad (1.1.8)$$

Поэтому если производная $f'(x)$ терпит разрыв в точке x_0, то решения уравнения (1.1.7) не существует.

Понятно, что единственность решения нарушается, если ядро K(x,s) не является замкнутым.

Лемма 1. Тождественный линейный оператор I: $N \to N$, где N-нормированное пространство не является вполне непрерывным, если N не конечномерное.

Замкнутый единичный шар не является компактом в бесконечномерном пространстве.

Лемма 2. Пусть $A: N_1 \to N_2$, $B: N_2 \to N_3$ - линейные непрерывные операторы, N_1, N_2, N_3 нормированные пространства. Если A или B является вполне непрерывным, то оператор $BA: N_1 \to N_3$ тоже является вполне непрерывным.

Рассмотрим замкнутый единичный шар $\overline{S_1}(0)$. Пусть A вполне непрерывен тогда множество $A\overline{S_1}(0)$ - компактное. А если есть некоторая компактная последовательность $x_n \in N_2$, то в силу непрерывности B последовательность Bx_n тоже будет компактной в N_3. Поэтому множество $BA\overline{S_1}(0)$ компактное.

Пусть теперь B вполне непрерывен. Множество $A\overline{S_1}(0)$ - ограниченное, тогда в силу теоремы, множество $BA\overline{S_1}(0)$ компактное.

Пусть вполне непрерывный оператор A действует из бесконечномерного нормированного пространства N_1 нормированное пространство N_2 и на области его значений R(A) существует поскольку не выполнятся первое и третье условия корректности. Действительно, оператор можно рассматривать только на множестве непрерывно дифференцируемых функций, а не всем пространстве

непрерывных функций. Поэтому не выполняется условие корректности (1). Но и на своей области определения этот оператор не ограничен, а, следовательно, не является непрерывным.

Возьмем последовательность функций $f_n(x) = \cos nx.$

Тогда:

$$\| f_n \| = \max_{x\in[0,1]} |\cos nx| = 1,$$

$$\| Af_n \| = \| n \cdot \sin nx \| \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что корректность задачи зависит от выбора пространств F и Z. Так, если рассмотренный выше оператор рассматривать как действующий из пространства $C^{(1)}$ [0, 1] в C[0,1], то задача становится корректно поставленной.

Если оператор A является инъективным, элемент u принадлежит R (A), норму $\|z\|$ в пространстве Z ввести как:

$$\|z\|_Z = \|Az\|_F \qquad (1.1.14)$$

то задача (13) становится корректно поставленной.

К сожалению, при решении практических задач выбор пространство Z и F жестко привязан к самой задаче и не может быть изменен произвольным образом. Главной же задачей исследователя является не создание искусственных пространств Z и F в которых будет удобно решать задачу, а нахождение дополнительных ограничений на элементы этих пространств, которые бы позволили сделать данную задачу корректной. Большинство этих дополнительных задач, которые могут решаться совместно с основной задачей.

Часто при решении задач геофизики или томографии требуется найти распределение плотности (или какого-то другого параметра, имеющего смысл плотности, например коэффициента поглощения оптических, звуковых волн.). При этом задача записывается в виде интегрального уравнения, формально допускающего математического решение, имеющее, в том числе отрицательные или очень большие положительные величины. Но это противоречит требованиям об ограниченности и не отрицательности физической, которую требуется найти. В других задачах исследуемый процесс проходит с какой-то известной

скоростью, что дает нам оценить значение первой производно какой-то величины. Вся эта информация для определенных задач может позволить улучшить постановку задачи, например задача, становится корректной или появляется возможность оценить скорость сходимости приближенного решения к точному.

1.2. Обзор основных результатов в теории интегральных уравнений первого рода

Интегральные уравнения становятся объектом особого внимания математиков в середине XIX века, когда задача Дирихле в теории потенциала была сведена к интегральному уравнению. С началом исследований линейного интегрального уравнения 2 вида при решении задач Дирихле для уравнения Лапласа в первой половине 19 века появились первые примеры интегральных уравнений. В это же время началось построение общей теории линейных интегральных уравнений. Основоположниками данной теории являются В. Вольтерра, Д. Гильберт, Э.И.Фредгольм и немецкий математик Э. Шмидт.

В развитие теории и приложений интегральных уравнений первого рода весомый вклад внесли ученые М.М.Лаврентьев, А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, В.К.Иванов, В.В.Васин, М.И.Иманалиев, В.П.Танана, В.Г.Романов, А.Г. Ягола, А. Асанов, А.Саадабаев, Ю.Е.Аниконов, С.П.Шишатский, В.А.Морозов, А.Л.Бухгейм, А.М.Денисов, Н.С.Габбасов, С.И.Кабанихин, А.С.Апарцин, Т.Д.Омуров, Т.Т. Каракеев и др.

Остановимся на некоторых моментах развития теории интегральных уравнений первого рода.

Отдельными учеными построена теория обобщенных решений интегральных уравнений первого рода и их аппроксимации при помощи методов теории сингулярных возмущений, разработан и применен к аппроксимации экспериментальных данных метод доказательного глобального поиска (М.И. Иманалиев, П.С. Панков, С.Н. Алексеенко).

Вопросы регуляризации решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве непрерывных функций изучены М.И.Иманалиевым, А.С.Апарциным, А.Л.Бухгеймом, А.М.Денисовым, С.И.Кабанихином, А.Асановым, А.Сражидиновым и др.

Вопросы регуляризации для операторных и интегральных уравнений исследованы в работах многих авторов [3-14], [23-29], [33-39], [71-76], [79], [94-95], [97]. В частности, Лаврентьевым М.М. подробно изучена регуляризация операторных уравнений. Кабанихин С.И. исследовал задачи выбора параметра регуляризации линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого рода рассматривались в работах отечественных и зарубежных ученых [12]-[14], [21], [22], [33]- [35], [43]- [45], [65]-[71], [73], [87], [99-102].

Интегральные и операторные уравнения первого рода возникают в теоретических и прикладных задачах. К ним сводятся различные обратные задачи для дифференциальных уравнений [2], [24], [28], [32], [67], [86], [88], [88], [94] и большое число прикладных задач (по изучению спектрального состава светового излучения, по обработке экспериментальных данных, связанных с диагностикой сферической или асимметрических плазменных образований, автоматического регулирования [94], по исследованию отражения волн от прямолинейной границы [94], обратная задача акустики, геоэлектрики, кинематики и сейсмики [43-45], [74], [96] в том числе задач математической обработки результатов измерений в физических экспериментах [33], [34], [94], [95]).

В числе кыргызских ученых, внесших весомый вклад в математическую науку посредством исследования проблем решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и направлений их применения следует отметить научную школу во главе с членом-корреспондентом НАН Я.В.Быковым, академика М.И.Иманалиева, член-корр. П.С.Панков, докторов наук А.И.Боташева, Р.Рафатова, К.Какишева, С.Каримова, А.Саадабаева, К.Алымкулова, С.Н.Алексеенко, А.Асанова, Т.М.Иманалиева, Т.Д.Омурова,

Ю.А.Ведь, Л.А.Финкеля, В.Д. Федорова, М. Жураева, А.С.Сейтказиеву, К.С.Сейтказиеву, К.Сулайманова, Р.Тазабекова, С.Раманкулова, О.Тукешова, Т.Камытова, К.Бараталиева, О.Джолдошева, А.Искендерова, Б.Шабыкеева, И.Жунушева, А.Кутанова, Р.Г.Ражапова, З.Пахырова, А.Бектеналиева, Ж.Нарматова, С.Искандарова, А.Байзакова, Ш.Алиева, Л.Талипову, С.Баялиеву, К.Эшенкулова, Б.Назаркулову, Э.Каптагаева, А.С.Сопуева, В.Г.Головину, А.М.Джураева, К.С.Алыбаева, Ш.Эгембердиева, А.Ж.Артыкова, Т.О.Бекешова и многих других.

Так, в работе А.А.Саадабаева [89] подробно изучены теории метода регуляризации А.Н. Тихонова, метода регуляризации М.М. Лаврентьева и их применения к решениям операторных и интегральных уравнений первого рода. Следует отметить, что в списке литературы этой работы А.Саадабаева содержатся работы многих авторов по вопросам регуляризации и единственности решения отмеченных уравнений.

Статья А.Асанова [7] посвящена вопросам регуляризации операторного уравнения Вольтерра первого рода в шкале банаховых пространств. В статье А.Асанова [10], наряду с другими результатами, методом неотрицательных квадратичных форм, установлены достаточные условия единственности решения операторного уравнения Вольтерра первого рода пространстве Гильберта.

В работах З.А. Каденовой [46-51] исследованы вопросы единственности, регуляризации и устойчивости решений линейных интегральных уравнений первого рода и систем линейных интегральных уравнений первого рода на конечном отрезке.

В ней рассматривается линейное интегральное уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1.2.1}$$

где

$$K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), & a\le s\le t\le b, \\ B(t,s), & a\le t\le s\le b. \end{cases}$$

$A(t,s),\ B(t,s) u\ f(t)$ данные функции, $u(t)-$ искомая функция.

Используя методы функционального анализа и неотрицательных квадратичных форм доказана теорема единственности решения уравнения (1.2.1) в классе $L_2[a,b]$.

З.А. Каденовой [46-51] изучены вопросы регуляризация и линейных интегральных уравнений первого рода и системы линейных интегральных уравнений первого рода.

Основными результатами работы З.А. Каденовой [51-61] являются доказательство теоремы единственности интегральных уравнений и систем интегральных уравнений первого рода, построение регуляризирующих уравнения в пространстве $L_2[a,b]$, получения оценки устойчивости в разных семействах множеств корректностей.

Основные результаты докторской диссертации З.А. Каденовой [51-61] заключаются в следующем;

-доказаны теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений и систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях;

- построены регуляризирующие операторы в пространствах $L_2(G)$ и $L_{2,n}(G)$;

-получены оценки устойчивости в разных семействах множеств корректностей.

Для получения сформулированных в работе результатов З.А. Каденовой [51-61] были использованы методы функционального анализа и неотрицательных квадратичных форм.

В работах Г.Б. Сапаровой [90-93] исследованы вопросы регуляризации и единственности решений интегрального уравнения Фредгольма первого рода с

разрывным ядром в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$ и в пространстве $L[a,b]$.

Г.Б Сапаровой [90-93] рассмотрено уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b M(t,s)u(s)ds = f(t),\ a \le t \le b,$$

$$M(t,s)=\begin{cases} K(t,s), \text{ при } & a \le s \le t \le b \\ H(t,s), \text{ при } & a \le t \le s \le b \end{cases}.$$

где $K(t,s)$, $H(t,s)$, $f(t)$ – заданные непрерывные функции.

Найдены широкие достаточные условия единственности решений линейных интегральных уравнений и систем Фредгольма первого рода с разрывным ядром. Также найдены широкие достаточные условия существования решений нелинейных интегральных уравнений и систем Фредгольма первого рода с разрывным ядром.

А также Г.Б. Сапарова [90-93] рассматривает уравнение

$$\int_a^t m(s)u(s)ds + \int_t^b n(s)u(s)ds + \int_a^t K(t,s)u(s)ds = f(t),\ t \in [a,b] \qquad (1.2.2)$$

где $m(s)$,$n(s)$,$f(t)$ – заданные непрерывные функции на $[a,b]$, $K(t,s)$ – известная непрерывная функция на G.

Наряду с уравнением (1.2.2) рассмотрено уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_a^t m(s)v(s,\varepsilon)ds + \int_t^b n(s)v(s,\varepsilon)ds + \int_a^t K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(a)$$

Построен частично регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром.

А.А. Тойгонбаевой [98-101] исследовано уравнение вида

$$\int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t),\ \ t \in [a,b],$$

где $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$,

$$K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t \le b, \\ B(t,s), & a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

Предполагается, что $A(t,s)$ и $B(t,s)$ являются непрерывными функциями соответственно на $\{(t,s): a \le s \le t \le b\}$ и $\{(t,s): a \le t \le s \le b\}$, решение $u(t)$ ищется в $C[a,b]$.

По итогам проведенного исследования А.А. Тойгонбаевой [98-101] получены следующие результаты:

найдены достаточные условия единственности решений для одного класса линейных интегральных уравнений и систем Фредгольма-Стильтьеса первого рода;

построен регуляризирующий оператор по М.М.Лаврентьеву для решения линейного интегрального уравнения Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

Далее рассмотрено

$$\int_a^t A(s)u(s)d\varphi(s) + \int_t^b B(s)u(s)d\varphi(s) + \int_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), t \in [a,b],$$

где $A(s), B(s) - n \times n$-мерные матричные функции на $[a,b]$, $K(t,s)$ $- n \times n$-мерная известная непрерывная матричная функция на $G = \{(t,s): a \le s \le t \le b\}$,

$f(t)$ и $u(t) -$ известная и искомая n-мерные вектор-функции, $\varphi(t) -$ возрастающая непрерывная функция.

А.А. Тойгонбаевой построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

Рассмотрена система

$$\int_a^t A(s)u(s)d\varphi(s) + \int_t^b B(s)u(s)d\varphi(s) + \int_a^t K(t,s,u(s))d\varphi(s) = f(t), \ t \in [a,b]$$

где $A(s), B(s) - n \times n -$мерные известные матричные функции, $K(t,s,u(s)) -$ известная непрерывная $n -$мерная вектор-функция, $f(t) -$известная вектор-функция и $u(t) -$искомая вектор-функция.

Наряду с системой (3.5.1) рассмотрена система

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_a^t A(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_a^t B(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_a^t K(t,s,v(s,\varepsilon))d\varphi(s)=$$
$$=f(t)+\varepsilon u(a),$$

где $u(t)-$решение системы (3.5.1), $0<\varepsilon-$малый параметр.

Предположено выполнение следующих условий:

а) $(A(t)-B(t))=I_n$ при всех $t\in[a,b]$, поскольку в случае $\det[A(t)-B(t)]\neq 0, t\in[a,b]$ в системе можно сделать замену $u(t)=[A(t)-B(t)]^{-1}u_1(t)$;

б) $K'_{\varphi(t)}(t,s,u)\in C(G\times R), G=\{(t,s):a\le t\le s\le b\},\|A(t)\|,\|B(t)\|\in C[a,b]$;

в) для любых $(t,s,u_1),(\tau,s,u_1),(t,s,u_2),(\tau,s,u_2)\in G\times R$ справедлива оценка:

$$\|K(t,s,u_1)-K(\tau,s,u_1)-K(t,s,u_2)+K(\tau,s,u_2)\|\le M_1|\varphi(t)-\varphi(\tau)|\cdot\|u_1-u_2\|,$$

где $0<M_1-$известная постоянная.

В результате проведенных А.А Тойгонбаевой [98-101] исследований построен регуляризирующий оператор по М.М.Лаврентьеву для решения систем нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода, изучены вопросы регуляризации и единственности решений интегрального уравнения Фредгольма-Стильтьеса первого рода в пространствах $C[a,b]$ и $L_{2,\varphi}[a,b]$.

В настоящей диссертационной работе проводятся новые исследования вопросов единственности, устойчивости и регуляризации решений линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях и систем линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

В первой главе отражен обзор работ по теме диссертации и вспомогательные материалы. В ней сделан обзор основных результатов научных исследований в теории некорректных задач и задач, приводящих к некорректным задачам.

Часто при решении задач геофизики или томографии требуется найти распределение плотности (или какого-то другого параметра, имеющего смысл плотности, например коэффициента поглощения оптических, звуковых волн). При этом задача записывается в виде интегрального уравнения, формально допускающего математического решение, имеющее, в том числе отрицательные или очень большие положительные величины. Но это противоречит требованиям об ограниченности и не отрицательности физической, величины которую требуется найти. В других задачах исследуемый процесс проходит с какой-то известной скоростью, что дает нам оценить значение первой производной какой-то величины. Вся эта информация для определенных задач может позволить улучшить постановку задачи, например задача, становится корректной или появляется возможность оценить скорость сходимости приближенного решения к точному.

ГЛАВА 2.

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

2.1. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси

Для начала исследуем уравнение следующего вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty) \tag{2.1.1}$$

где $\int_a^\infty \int_a^\infty |K(t,s)|^2 dsdt < \infty,$

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Допустимо, что $B(t,s)$ и A(t,s) выступают дважды гладкими функциями, сообразно на $\{(t,s): \ a \le s \le t < \infty\}$, и $\{(t,s): \ a \le t \le s < \infty\}$, решение $u(t)$ находится в $L_2[a,\infty)$, где $L_2[a,\infty)$,- пространства квадратично суммируемых функций в $[a,\infty)$.

Подразумеваем, что реализованы нижеследующие условия:

Производные от $a)$ $H(t,s) = A(t,s) + B(s,t)$ выглядят как: $H'_t(t,a)$, $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s)$, $H''_{st}(t,s)$ при всех $(t,s) \in G = \{(t,s), a \le s \le t < \infty\}$;

$H'_t(t,s)$, $H'_s(t,s)$, $H''_{st}(t,s) \in L_2(G)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty} H(t,a) \ge 0$, $H'_t(t,a) \le 0$, при $t \in [a,\infty)$, $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) \ge 0$, при $s \in [a,\infty)$, $H''_{st}(t,s) \le 0$ при $(t,s) \in G$;

$в)$ осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $H'_t(t,a) < 0 \quad \forall \quad t \in [a,\infty)$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) > 0 \quad \forall \quad s \in [a,\infty)$,

3) $H''_{st}(t,s)<0 \quad \forall \ (t,s)\in G$.

Уравнение (2.1.1), в силу соотношения (2.1.2) выразим как

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds+\int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t). \qquad (2.1.3)$$

Теперь мы на функцию u(t) умножаем обе части равенства (2.1.3) и затем интегрируем полученный результат по сфере $a\le t<\infty$.

В этой связи имеем

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)\,u(t)dsdt+\int_a^\infty\int_t^\infty B(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt \qquad (2.1.4)$$

Из соотношения (2.1.4), используя формулу Дирихле, получаем

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)\,u(t)dsdt+\int_a^\infty\int_a^s B(t,s)u(s)u(t)dtds=\int_a^\infty f(t)u(t)dt,$$

т.е. $\int_a^\infty\int_a^t [A(t,s)+B(s,t)]u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt$.

Обозначим

$$H(t,s)=A(t,s)+B(s,t).$$

Тогда

$$\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)ds\,u(t)dt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt \qquad (2.1.5)$$

Введем обозначения

$$z(t,s)=\int_s^t u(\nu)d\nu \qquad (2.1.6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &d_s z(t,s)=-u(s)ds,\\ &u(s)ds=-d_s z(t,s),\\ &z(t,s)u(t)dt=\frac{1}{2}d_t\left(z^2(t,s)\right). \end{aligned} \qquad (2.1.7)$$

Посредством формулы (2.1.6) и формулы (2.1.7), а также интегрирования по частям, применяя в левой части равенства (2.1.5) формулу Дирихле, трансформируем последнее к данному виду

$$-\int_a^\infty\left[\int_a^t H(t,s)d_s z(t,s)\right]u(t)dt=-\int_a^\infty\left[H(t,s)z(t,s)\Big|_a^t-\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)ds\right]u(t)dt=$$

$$=\int_a^\infty H(t,a)z(t,a)u(t)dt+\int_a^\infty\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dsdt=\int_a^\infty H(t,a)z(t,a)u(t)dt+$$

$$+\int_a^\infty\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)dsu(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^\infty H(t,a)d_t z^2(t,a)+\int_a^\infty\int_s^\infty H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dtds=\frac{1}{2}H(t,a)z^2(t,a)\Big|_a^\infty-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\int_a^\infty\left[\int_s^\infty H'_s(t,s)d_t z^2(t,s)\right]ds=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\int_a^\infty\left[H'_s(t,s)z^2(t,s)\Big|_s^\infty-\int_s^\infty H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dtds\right.=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)z^2(t,s)ds-\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_a^t H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dsdt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a)-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)z^2(t,s)ds-\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_a^t H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dsdt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)\left[\int_a^\infty u(s)ds\right]^2-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)\left[\int_a^t u(t)ds\right]^2dt+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)\left[\int_s^\infty u(\xi)d\xi\right]^2ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^t H''_{st}(t,s)\left[\int_s^t u(\xi)d\xi\right]^2dsdt,$$

где $z(t,t)=0$.

Таким образом, из (2.1.4) имеем

$$\int_a^\infty \int_a^t H(t,s)u(s)dsu(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} H(t,a)\left[\int_a^\infty u(s)ds\right]^2 - \frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)\left[\int_a^t u(t)ds\right]^2 dt + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)\left[\int_s^\infty u(\xi)d\xi\right]^2 ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^t H''_{st}(t,s)\left[\int_s^t u(\xi)d\xi\right]^2 dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt \qquad (2.1.8)$$

В силу вышеобозначенного условия а) для всякого решения u(t) равенства (2.1.1) определяем уравнение (2.1.8).

Допускаем, что $f(t) \equiv 0$. В этом случае в основательности условий б), в) из равенства (2.1.8) получается, что: $\int_a^t u(s)ds \equiv 0, \text{ или } \int_s^t u(\xi)d\xi = 0$. Либо $\int_t^\infty u(t)dt = 0,\ t \in [a,\infty),$ затем, в силу условия в) $u(t) \equiv 0.$

Таким образом, произведено доказательство нижеследующей теоремы.

Теорема 2.1.1. Допустимо осуществление условий а), б) и в). В данном контексте решение равенства (2.1.1) будет в пространстве $L_2[a,\infty)$ – единственно. Что отмечено другие исследователями [81, стр.36-39]

Пример 2.1.1. Исследуем соотношение (2.1.1) при а=0, $A(t,s) = \dfrac{s}{(1+t)^3}$ при $(t,s) \in G = \{(t,s): 0 \le s \le t < \infty\};$

$B(t,s) = \dfrac{t+1}{(s+1)^2}$ при $(t,s) \in G_1 = \{(t,s): 0 \le s \le t < \infty\};$

$(t,s) \in L_2(0,\infty).$

$$H(t,s)=A(t,s)+B(s,t)=$$

В этом случае $$=\frac{s}{(1+t)^3}+\frac{s+1}{(t+1)^2},(t,s)\in G \qquad (2.1.9)$$

Из (2.1.9) имеем:

$$1)\ H'_t(t,s)=-\frac{3s}{(1+t)^4}-\frac{2(s+1)}{(t+1)^3},\qquad (t,s)\in G, \qquad (2.1.10)$$

$$1)\ H'_s(t,s)=\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{1}{(t+1)^2},\quad (t,s)\in G, \qquad (2.1.11)$$

$$1)\ H''_{ts}(t,s)=-\frac{3}{(1+t)^4}-\frac{2}{(t+1)^3},\quad (t,s)\in G, \qquad (2.1.12)$$

Из (2.1.9) получим $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,0)=0.$

Из (2.1.10) имеем $H'_t(t,0)=-\frac{2}{(t+1)^3}<0$ при всех $t\in[0,\infty),$

Из (2.1.11) получим $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s)=0$ при всех $s\in[0,\infty),$

Из (2.1.12) получим

$$H''_{ts}(t,s)=-\left(\frac{3}{(1+t)^4}+\frac{2}{(t+1)^3}\right)<0,(t,s)\in G$$

Таким образом, выполняются все условия вышеуказанной теоремы, т.е. выполняются условия а), б), в). Таким образом, решение следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^t \frac{s}{(1+t)^3}u(s)ds+\int_t^\infty \frac{(t+1)}{(s+1)^2}u(s)ds=f(t),t\in[0,\infty)$$

единственно в пространстве $L_2[0,\infty)$.

2.2. Регуляризация и оценки устойчивости решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси

Исследуем уравнение следующего вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \tag{2.2.1}$$

где $\int_a^\infty \int_a^\infty |K(t,s)|^2 dtds \le \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Подразумевается, что и f(t) , B(t,s), и A(t,s) являются данными функциями, а u(t) выступает как функция искомая.

Равенство (2.1.1) в основании соотношения (2.2.2) отобразим в таком виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t) \tag{2.2.3}$$

Осуществляя произведение на u(t) обеих частей (2.2.3) совместно с интегрированием по t, имеем:

$$\int_a^\infty \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_t^\infty B(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt \tag{2.2.4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (2.2.4) имеем:

$$\int_a^\infty \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_a^s B(t,s)u(s)u(t)dtds = \int_a^\infty f(t)u(t)dt,$$

т.е.

$$\int_a^\infty \int_a^t [A(t,s) + B(s,t)]u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt\,. \tag{2.2.5}$$

Обозначим

$$H(t,s)=\frac{1}{2}\left[A(t,s)+B(s,t)\right],\quad (t,s)\in G=\{(t,s): a\le s\le t<\infty\}.$$

Тогда из (2.2.5) имеем

$$2\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt\,.$$

Из условия (2.2.2), вытекает, что

$$\int_a^\infty\int_a^t H^2(t,s)dtds<+\infty. \tag{2.2.6}$$

Нижеследующим образом вводится новая функция $M(t,s)$:

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s), & a\le s\le t<\infty,\\ H(s,t), & a\le t\le s<\infty.\end{cases} \tag{2.2.7}$$

Понятно, что

$M(t,s)=M(s,t),\qquad (t,s)\in[a,\infty)\times[a,\infty).$

В справедливости выражения вполне несложно убедиться:

$$\int_a^\infty\int_a^\infty |M(t,s)|^2 dsdt<\infty\,.$$

Достоверно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^\infty\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \tag{2.2.8}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...-$характеристические числа матричного ядра *M* (t,s), которые позиционируются в возрастающем порядке модулей последних – $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le...$ и $\varphi_1(t),\varphi_2(t)...$ – конгруэнтные собственные ортонормированные функции.

Теорема 2.2.1. Допустимо, что *M* (t,s) является полным ядром и $0<\lambda_1\le\lambda_2\le....$ В данном контексте решение равенства (2.1.1) будет единственно в пространстве $L_2[a,\infty)\bigcap C[a,\infty)$.

Доказательство. Пусть уравнение (2.2.1) при $f(t)\equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t)\in L_2[a,\infty)\bigcap C[a,\infty)$ т.е.

$$\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t) \equiv 0, \text{ почти при всех } t \in [a,\infty).$$

Отсюда

$$2\int_a^\infty \int_a^t H(t,s)u(s)u(t)dsdt = 0 \qquad (2.2.9)$$

Учитывая (2.2.6), (2.2.7) и (2.2.8) из (2.2.9) получим:

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{2}{\lambda_i} \int_a^\infty \varphi_i(t)u(t) \int_a^t \varphi_i(s)u(s)dsdt = 0$$

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_a^\infty \varphi_i(t)u(t)dt \right|^2 = 0$$

Тогда

$$\int_a^\infty \varphi_i(t)u(t)dt = 0, \quad (i = 1,2...)$$

Следовательно, $u(t) = 0$. Теорема 2.2.1 доказана.

В последующем мы принимаем тот постулат, что положительными являются все характеристические числе λ_v матричного ядра *M* (t,s).

Обозначим нижеследующим образом семейство множеств корректностей, которое обусловлено параметром α:

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2[a,\infty) : \sum_{v=1}^\infty \lambda_v^\alpha \left| u^{(v)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(v)} = \int_a^\infty u(t)\varphi_v(t)dt, \qquad (2.2.10)$$

Понятно, что если $u(t) \in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|^2 \le c\lambda_1^{-\alpha},$$

где $\|u(t)\| = \left(\int_a^\infty |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{v=1}^\infty \left| u^{(v)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Считаем возможным, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. В этом случае равенство (2.2.1) обладает решением $u(t) \in M_\alpha$ и справедливо.

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_a^\infty u(t)\varphi_i(t)dt \right|^2 = \int_a^\infty f(t)u(t)dt.$$

Далее, применяя неравенства Гельдера, получаем

$$\sum_{v=1}^\infty \lambda_v^{-1} \left| u^{(v)} \right|^2 \le \| f(t) \| \cdot \| u(t) \|. \qquad (2.2.11)$$

С иной стороны

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} |u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{|u_i|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

В данном моменте нами было использовано неравенство Гёльдера, при $p = 1 + a, q = \frac{(1+\alpha)}{\alpha}$. Принимая во внимание, что $u(t) \in M_\alpha$ и неравенство (2.2.11), из последнего выражения получаем:

$$\|u(t)\|^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\| f(t) \| \| u(t) \| \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

В этой связи имеем нижеследующую оценку устойчивости

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t) \|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \qquad 0 < \alpha < \infty \qquad (2.2.12)$$

Как итог, следующая теорема доказана.

Теорема 2.2.2. Допустим, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром *M* (t,s), является положительным, где *M* (t,s) установлен по тождеству (2.2.7). В таком случае оператор K^{-1}, обратный K, на множестве *K* (M_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка

устойчивости (2.2.12) – справедлива. Что отмечено др.исследователями [64,стр.14-18]

Продемонстрируем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty),\ \varepsilon>0 \qquad (2.2.13)$$

для равенства (2.2.1) на множестве M_α будет регуляризирующим.

Действительно, осуществив дальнейшую подстановку в выражение (2.2.13) $u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon)$,

где $u(t)\in M_\alpha$ – решение формулы (2.2.1), имеем:

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon\, u(t).$$

Умножая последнее уравнение на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, от α до +∞ принимая во внимание (2.2.2) и (2.2.8), получаем

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^2+\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu^{-1}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2 \le \varepsilon\sum_{\nu=1}^\infty \left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|, \qquad (2.2.14)$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ являются для функции $\xi(t,\varepsilon)$ коэффициентами Фурье, по ортонормированной системе $\{\varphi_\nu(t)\}$. т.е. $\xi_\nu(\varepsilon)=\int_a^\infty \xi(t,\varepsilon)\varphi_\nu(t)dt$.

Используя Гёлдера неравенство при $p=q=\frac{1}{2}$, из выражения (2.2.14) определяем:

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\| \le \left\|u(t)\right\|, \qquad (2.2.15)$$

$$\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu^{-1}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2 \le \varepsilon\left\|u(t)\right\|^2 \le \varepsilon c\lambda_1^{-\alpha},\ \varepsilon>0, \qquad (2.2.16)$$

с иной стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_\nu(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Следовательно, после использования неравенства Гёльдера к правой части при $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, $m=2(1+\alpha)$, $n=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu^{-1}\right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Затем, из последнего неравенства в силу $u(t)\in M_\alpha$, выражений (2.2.15) и (2.2.16) получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{p+q}{pq}},$$

Тогда здесь, подставляя $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, определяем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{1}{2}}(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \qquad (2.2.17)$$

т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{\frac{-\alpha}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c\lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \qquad (2.2.18)$$

Принимая во внимание выражения (2.2.18), из (2.2.14), получаем

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0<\alpha<\infty \qquad (2.2.19)$$

Итого, теорема 2.2.3 будет доказана.

Теорема 2.2.3. Допустим, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром *M* (t,s), является положительным и $f(t) \in K(M_\alpha)$. В этом случае оценка выражения (2.2.19) справедлива, где *u* (t, ε) – решение равенства (2.2.13) *u* (t) – решение уравнения (2.2.1) *M* (t,s) определено по формуле (2.2.8).

2.3. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в оси

Исследуем линейно-интегральное равенство Фредгольма первого рода:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in R = (-\infty,\infty) \qquad (2.3.1)$$

где $K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), -\infty < s \le t < \infty; \\ B(t,s), -\infty < t \le s < \infty. \end{cases}$ (2.3.2)

Заданные функции *A* (t,s) и *B*(s, t) непрерывны на *G* = {(t,s) : −∞ < s ≤ t < ∞}.

Пусть *C*(R) обозначим пространство всех непрерывных функций на R. Здесь *C*(G) – обозначим пространство всех функций непрерывных на G.

Мы вводим обозначения:

$$H(t,s) = A(t,s) + B(s,t), (t,s) \in G \qquad (2.3.3)$$

Допускаем осуществление дальнейших условий:

а) $H(t,s), H_t^{'}(t,s), H_s^{'}(t,s), H_{ts}^{''}(t,s) \in C(G), \quad \alpha(t) = \lim_{s\to-\infty} H(t,s), t \in R,$

$\alpha(t) \in C(R), \ \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = a_0 \in R, a_0 \ge 0, \alpha^{'}(t) = \lim_{s\to-\infty} H_t^{'}(t,s) \le 0, t \in R,$

$H_{ts}^{''}(t,s) \le 0, (t,s) \in G, \alpha^{'}(t) \in L_1(R),$

$\beta(s) = \lim_{t\to\infty}[H_s^{'}(t,s)] \ge 0$ при всех $s \in R$, $\beta(s) \in C(R) \cap L_1(R)$;

б) $\sup_{(t,s)\in G}\left|H(t,s)\right|\le L<\infty, \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}\left|H_s^{'}(t,s)\right|ds\le M<\infty, H_{ts}^{''}(t,s)\in L_1(G),$

$\sup_{t\in[s,\infty)}\left|H_s^{'}(t,s)\right|\le\gamma(s)\in L_1(R)$;

в) осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $\alpha^{'}(t)<0 \quad \forall \ t\in R;$

2) $\beta(s)>0 \quad \forall \ s\in R;$

3) $H_{ts}^{''}(t,s)<0 \quad \forall \ (t,s)\in G.$

Теорема 2.3.1. Допустимо осуществление условия а), б) и в). В этом случае решение в пространстве $L_1(R)$ интегрального выражения (2.3.1) будет единственно.

Доказательство. Положим, что u(t) ∈ $L_1(R)$ является решением интегрального уравнения (2.3.1). В силу (2.3.2) мы можем записать интегральное уравнение (2.3.1) в виде:

$$\int_{-\infty}^{t}A(t,s)u(s)ds+\int_{t}^{\infty}B(t,s)u(s)ds=f(t), t\in R. \qquad (2.3.4)$$

Умножив обе стороны уравнения (2.3.4) на u(t) и интегрируя по области R, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}A(t,s)u(s)ds+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{s}^{\infty}B(t,s)u(s)u(t)dtds=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u(t)dt \qquad (2.3.5)$$

Применение формул Дирихле к (2.3.5) и с учетом обозначения (2.3.3), мы видим, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}H(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u(t)dt \qquad (2.3.6)$$

Введем обозначение

$$z(t,s)=\int_{s}^{t}u(\tau)d\tau, (t,s)\in G \qquad (2.3.7)$$

$$d_s z(t,s)=-u(s)ds, z(t,s)u(t)dt=\frac{1}{2}d_t(z^2(t,s)). \qquad (2.3.8)$$

Преобразуем интеграл слева от тождества (2.3.6). Учитывая фактор (2.3.7), (2.3.8) и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(t)z(t,-\infty)u(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} H_s^{'}(t,s)z(t,s)u(t)dsdt$$

Следовательно, используя формулу Дирихле, нами записывается:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)u(t)dsdt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(t)d_t(z^2(t,-\infty)) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{s}^{\infty} H_s^{'}(t,s)d_t(z^2(t,s))\right]ds = \frac{1}{2}a_0 z^2(+\infty,-\infty) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{'}(t)z^2(t,-\infty)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(s)z^2(\infty,s)ds - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{s}^{\infty} H_{ts}^{''}(t,s)z^2(t,s)dtds \qquad (2.3.9)$$

Беря во внимание уравнение (2.3.6) и используя задачу Дирихле из выражения (2.3.9) имеем:

$$\frac{1}{2}a_0 z^2(\infty,-\infty) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{'}(t)z^2(t,-\infty)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(s)z^2(\infty,s)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} H_{ts}^{''}(t,s)z^2(t,s)dsdt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt\,. \qquad (2.3.10)$$

Предположим, что f (t) = 0 для всех t ∈ R. тогда, принимая во внимание условия а), б) и в) мы из (2.3.10) получим:

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = 0, t \in R или \int_{s}^{\infty} u(\tau) = 0, s \in R или\,.$$

$$\int_{s}^{t} u(\tau)d\tau = 0, (t,s) \in G\,.$$

Следовательно, u (t) = 0 для всех t ∈ R.

Замечание 2.3.1. Если B (s,t) = 0 для всех (t,s) ∈ G, то интегральное уравнение (2.3.1) является Вольтерровое линейное интегральное уравнение первого рода. В этом случае утверждение теоремы справедливо для H(t,s) = A(t,s), ∀(t,s) ∈ G.

Замечание 2.3.2. Если A(t,s) = 0 для всех (t,s) ∈ G, то интегральное уравнение (2.3.1) является Вольтерровое линейное интегральное уравнение первого рода. В этом случае утверждение теоремы верно для H(t,s) = B(s,t), ∀(t, s) ∈ G.

Пример 2.3.1. Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)ds + \int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)ds = f(t), t \in R \qquad (2.3.11)$$

$$A(t,s) = \begin{cases} -\frac{c}{a(b-a)}\left[e^{bt}e^{-a(t-s)-\frac{2b}{a+b}e^{as}}\right], -\infty < s \le t \le 0, \\ \frac{c}{a(a+b)}e^{-a(t-s)e^{-bt}}, -\infty < s \le t < \infty, t \ge 0 \end{cases}, \qquad (2.3.12)$$

$$B(t,s) = \begin{cases} \frac{cd}{ab}(e^{bs}-2), -\infty < t \le s \le 0, \\ -\frac{cd}{ab}e^{-bs}, -\infty < t \le s < \infty, s \ge 0 \end{cases}, \qquad (2.3.13)$$

a, b, c и d – вещественные параметры, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0, d < 0$, $a \ne b$. Тогда с учетом (2.3.12) и (2.3.13) из (2.3.3) имеем:

$$H(t,s) = \begin{cases} -\frac{c}{a(b-a)}\left[e^{bt}e^{-a(t-s)} - \frac{2b}{a+b}e^{as}\right] + \frac{cd}{ab}(e^{bt}-2), -\infty < s \le t \le 0 \\ \frac{c}{a(a+b)}e^{-a(t-s)}e^{-bt} - \frac{cd}{ab}e^{-bt}, -\infty < s \le t < \infty, t \ge 0, \end{cases} \qquad (2.3.14)$$

$$H_t^{'}(t,s) = \begin{cases} -\frac{c}{a}e^{bt}e^{-a(t-s)} + \frac{cd}{a}e^{bt}, -\infty < s \le t \le 0 \\ -\frac{c}{a}e^{-a(t-s)}e^{-bt} + \frac{cd}{ab}e^{-bt}, -\infty < s \le t < \infty, t \ge 0, \end{cases} \qquad (2.3.15)$$

$$H_s^{'}(t,s) = \begin{cases} -\frac{c}{b-a}\left[e^{bt}e^{-a(t-s)} - \frac{2b}{a+b}e^{as}\right], -\infty < s \le t \le 0 \\ \frac{c}{a+b}e^{-a(t-s)}e^{-bt}, -\infty < s \le t < \infty, t \ge 0, \end{cases} \qquad (2.3.16)$$

$$H_{ts}^{''}(t,s) = -ce^{b|t|}e^{-a(t-s)}, (t,s) \in G, \qquad (2.3.17)$$

$$\alpha(t) = \lim_{s \to -\infty} H(t,s) = \begin{cases} \frac{cd}{ab}(e^{bt}-2), t \le 0, \\ \frac{-cd}{ab}e^{-bt}, t \ge 0 \end{cases} \qquad (2.3.18)$$

$$\alpha^{'}(t) = \lim_{s \to -\infty} H_t^{'}(t,s) = \begin{cases} \frac{cd}{a}e^{bt}, t \le 0, \\ \frac{cd}{a}e^{-bt}, t \ge 0 \end{cases} \qquad (2.3.19)$$

$$\beta(s) = \lim_{t \to \infty} H_s^{'}(t,s) = 0, s \in R, \qquad (2.3.20)$$

$$a_0 = \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 0 \qquad (2.3.21)$$

$$L = \sup\left\{ \frac{c}{a|b-a|}(1+\frac{2b}{a+b}) + \frac{2c|d|}{ab}, \frac{c}{a(a+b)} + \frac{c|d|}{ab} \right\} \qquad (2.3.22)$$

$$M = \sup\left\{ \frac{c}{a|b-a|}(1+\frac{2b}{a+b}), \frac{c}{a(a+b)} \right\} \qquad (2.3.23)$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \frac{c}{|b-a|}(e^{bc} + \frac{a+3b}{a+b}e^{as}), s \le 0, \\ \frac{c}{a+b}e^{-bs}, s \ge 0 \end{cases} \qquad (2.3.24)$$

Затем, принимая во внимание (2.3.14) - (2.3.24), мы можем проверить, что условия а), б) и в) выполняются для системы (2.3.11). Поэтому решение интегрального уравнения (2.3.11) единственно в пространстве $L_1(R)$.

Пример 2.3.2. Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)ds = f(t), t \in R \qquad (2.3.25)$$

$$A(t,s) = \begin{cases} -\frac{c}{a(b-a)}\left[e^{bt}e^{-a(t-s)} - \frac{2b}{a+b}e^{as} \right] + \frac{cd}{ab}(e^{bt}-2), -\infty < s \le t \le 0 \\ \frac{c}{a(a+b)}e^{-a(t-s)}e^{-bt} - \frac{cd}{ab}e^{-bt}, -\infty < s \le t < \infty, t \ge 0, \end{cases} \qquad (2.3.26)$$

a, b, c и d – вещественные параметры, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0, d < 0$, $a \ne b$. Тогда с учетом (2.3.22) и (2.3.23) из (2.3.3) имеем:

$$H(t,s) = A(t,s), (t,s) \in G. \qquad (2.3.27)$$

Затем, принимая во внимание (2.3.26), (2.3.27) и (2.3.14) - (2.3.24), мы можем проверить, что условия а), б) и в) выполняются для интегрального уравнения (2.3.25). Поэтому решение интегрального уравнения (2.3.25) единственно в пространстве $L_1(R)$.

Пример 2.3.3. Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)ds = f(t), t \in R \qquad (2.3.28)$$

$$B(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{c}{a(b-a)}\left[e^{bt}e^{-a(t-s)}-\dfrac{2b}{a+b}e^{as}\right]+\dfrac{cd}{ab}(e^{bt}-2), -\infty<s\le t\le 0\\ \dfrac{c}{a(a+b)}e^{-a(t-s)}e^{-bt}-\dfrac{cd}{ab}e^{-bt}, -\infty<s\le t<\infty, t\ge 0,\end{cases} \qquad (2.3.29)$$

a, b, c и d - вещественные параметры, $a>0$, $b>0$, $c>0$,$d<0$, $a\neq b$. Тогда с учетом (2.3.28) и (2.3.29) из (2.3.3) имеем:

$$H(t,s)=B(s,t),(t,s)\in G. \qquad (2.3.30)$$

Затем, принимая во внимание (2.3.29), (2.3.30) и (2.3.14) - (2.3.24), мы можем проверить, что условия а), б) и в) выполняются для интегрального уравнения (2.3.28). Поэтому в пространстве $L_1(R)$ решение интегрального уравнения (2.3.28) – единственно.

2.4. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси

Исследуем равенство нижеследующего вида:

$$Ku\equiv a(t)u(t)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s)ds=f(t),\quad t\in(-\infty,\infty) \qquad (2.4.1)$$

где $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,s)|^2dtds<\infty$,

$$K(t,s)=\begin{cases}A(t,s), & -\infty<s\le t<\infty,\\ B(t,s), & -\infty<t\le s<\infty.\end{cases} \qquad (2.4.2)$$

Предполагается, что A (t,s), B (t,s), α (t) и f (t) – функции, которые даны, а искомой функцией выступает – u(t) . Всюду будем предполагаться, что функция a(t) – непрерывная ограниченная функция на $(-\infty,\infty)$ и $a(t)\ge 0$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$.

В силу (2.4.2) уравнение (2.4.1) запишем в виде:

$$a(t)u(t)+\int_{-\infty}^{t}A(t,s)u(s)ds+\int_{t}^{\infty}B(t,s)u(s)ds=f(t). \qquad (2.4.3)$$

Умножая обе части (2.4.3) на $u(t)$ и интегрируя по t получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}a(t)|u(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}A(t,s)u(s)u(t)dsdt+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty}B(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u(t)dt. \qquad (2.4.4)$$

Применяя формулу Дирихле, из (2.4.4) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}a(t)|u(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\left[A(t,s)+B(s,t)\right]u(s)u(t)dsdt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u(t)dt. \qquad (2.4.5)$$

Обозначим

$$H(t,s)=\frac{1}{2}\left[A(t,s)+B(s,t)\right],\quad (t,s)\in G=\{(t,s):-\infty<s\le t<\infty\} \qquad (2.4.6)$$

Тогда из (2.4.5) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}a(t)|u(t)|^2dt+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u(t)dt.$$

Из условия (2.4.2) и обозначения (2.4.6), вытекает, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}H^2(t,s)dsdt<+\infty. \qquad (2.4.7)$$

Нижеследующим образом вводится новая функция $M(t,s)$:

$$M(t,s)=\begin{cases}H(t,s), & -\infty<s\le t<\infty,\\ H(s,t), & -\infty<t\le s<\infty.\end{cases} \qquad (2.4.8)$$

Понятно, что:

$$M(t,s)=M(s,t),\quad (t,s)\in R\times R.$$

В справедливости выражения вполне несложно убедиться:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|M(t,s)|^2 dsdt < \infty .$$

Достоверно, что:

$$M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \qquad (2.4.9)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – характеристические числа матричного ядра *M* (t,s), которые позиционируются в возрастающем порядке модулей последних – $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ...$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t)...$ – конгруэнтные собственные ортонормированные функции.

Теорема 2.4.1. Допустимо, что *M* (t,s) является полным ядром и $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ....$ В данном контексте решение выражения (2.4.1) будет единственно в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Пусть уравнение (2.4.1) при $f(t) \equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ т.е.

$$a(t)u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t) \equiv 0, t \in (-\infty,\infty).$$

Отсюда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt + 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t,s)u(s)u(t)dsdt = 0. \qquad (2.4.10)$$

Учитывая (2.4.7), (2.4.8) и (2.4.9) из (2.4.10) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t)u(t)dt\right|^2 = 0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t)u(t)dt = 0, \quad (i = 1,2...).$$

Следовательно, $u(t) = 0$ при всех $t \in (-\infty,\infty)$.

Доказывание теоремы 2.4.1 осуществлено.

В последующем мы принимаем тот постулат, что положительными являются все характеристические числе λ_v матричного ядра M (t,s).

Обозначим нижеследующим образом семейство множеств корректностей, которое обусловлено параметром α:

$$Q_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2(-\infty,\infty) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^\alpha \left| u^{(v)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(v)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi_v(t)dt, \tag{2.4.11}$$

Понятно, что если $u(t) \in Q_\alpha$, то:

$$\|u(t)\|^2 \le c\lambda_1^{-\alpha}, \text{ где } \|u(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| u(t)^2 \right| dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Считаем возможным, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. В этом случае уравнение (2.4.1) обладает решением $u(t) \in Q_\alpha$ и справедливо.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi_i(t)dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.$$

Далее, применяя неравенства Гельдера, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-1} \left| u^{(v)} \right|^2 \le \| f(t) \| \cdot \| u(t) \|. \tag{2.4.12}$$

С иной стороны

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} |u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

В данном моменте нами было использовано неравенство Гёльдера, при $p = 1 + a, q = \frac{(1+\alpha)}{\alpha}$. Принимая во внимание, что $u(t) \in Q_\alpha$ и неравенство (2.4.12), из последнего выражения получаем

$$\|u(t)\|^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\| f(t)\| \|u(t)\|\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

В этой связи имеем нижеследующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \ 0<\alpha<\infty. \qquad (2.4.12)$$

В итоге, нижеследующая теорема доказана.

Теорема 2.4.2. Допустим, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром M (t,s), является положительным, где M (t,s) установлен по уравнению (2.4.9). В таком случае оператор K^{-1}, обратный K, на множестве K (Q_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка устойчивости (2.4.12) – справедлива.

Продемонстрируем, что решение системы уравнений:

$$(\varepsilon + a(t))u(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), t \in (-\infty,\infty), \varepsilon > 0 \qquad (2.4.13)$$

для равенства (2.4.1) на множестве M_α будет регуляризирующим.

Действительно, осуществив дальнейшую подстановку в выражение (2.4.13):

$$u(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t) \in Q_\alpha$ – является решением равенства (2.4.1), получаем:

$$(\varepsilon + a(t))\,\xi(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon u(t).$$

Умножая последнее уравнение на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, от -∞ до +∞, принимая во внимание формулы (2.4.2) и (2.4.9), получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon\|\xi(t,\varepsilon)\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} a(s)|\xi(s,\varepsilon)|^2 ds + \\ + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-1} |\xi_v(\varepsilon)|^2 \le \varepsilon \sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}| |\xi_v(\varepsilon)|,\end{gathered} \qquad (2.4.14)$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ – выступают для функции $\xi(t,\varepsilon)$, коэффициентами Фурье, по ортонормированной системе $\{\varphi_\nu(t)\}$. т.е. $\xi_\nu(\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(t,\varepsilon)\phi_\nu(t)dt.$

Используя Гёлдера неравенство при $p=q=\frac{1}{2}$, из выражения (2.4.14) определяем

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|\le\|u(t)\|, \tag{2.4.15}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-1}|\xi_\nu(\varepsilon)|^2\le\varepsilon\|u(t)\|^2\le\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha},\ \varepsilon>0, \tag{2.4.16}$$

с иной стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\xi_\nu(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}|u^{(\nu)}|^{\frac{1}{1+\alpha}}|\xi_\nu(t,\varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}}|u^{(\nu)}|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Следовательно, после приложения обобщенного неравенства Гёльдера к правой части при $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, $m=2(1+\alpha)$, $n=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)|\le\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu(\varepsilon)|^2\lambda_\nu^{-1}\right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}|u^{(\nu)}|^2\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\|\xi(t,\varepsilon)\|^{\frac{1}{1+\alpha}}\|u(t)\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)|\le\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu(\varepsilon)|^2\lambda_\nu^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}|u^{(\nu)}|^2\right)^{\frac{1}{q}}\|\xi(t,\varepsilon)\|^{\frac{2}{q}}\|u(t)\|^{\frac{2}{p}}.$$

Затем, из последнего неравенства в силу $u(t)\in Q_\alpha$, выражений (2.4.15) и (2.4.16) получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)|\le\left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\|u(t)\|^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|u^{(\nu)}||\xi_\nu(\varepsilon)|\le\left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{p+q}{pq}},$$

Далее, подставляя $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, устанавливаем

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| u^{(v)} \right\| \xi_v(\varepsilon) \right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} (c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{1}{2}} (\varepsilon c \lambda_1^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \qquad (2.4.17)$$

т.е.

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| u^{(v)} \right\| \xi_v(\varepsilon) \right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} c^{\frac{1}{2}} c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \lambda_1^{\frac{-\alpha}{2}} \lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| u^{(v)} \right\| \xi_v(\varepsilon) \right| \le c \lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{1+\alpha}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \qquad (2.4.18)$$

Принимая во внимание выражения (2.4.18), из (2.2.14), получаем:

$$\left\| u(t,\varepsilon) - u(t) \right\| \le c^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \qquad (2.4.19)$$

Итого, теорема 2.4.3 будет доказана.

Теорема 2.4.3. Допустим, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром *M* (t,s), является положительным и $f(t) \in K(M_\alpha)$. В этом случае оценка выражения (2.4.19) справедлива, где *u* (t, ε) – решение уравнения (2.4.13) *u*(t) – решение уравнения (2.4.1) *M* (t,s) определен по формуле (2.4.9).

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

В главе 2, состоящей из четырех параграфов, проведен анализ регуляризации, единственности, а также осуществлена оценка устойчивости решений линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего и первого родов на оси и полуоси. Используя методы квадратичных форм, функционального анализа и неравенств в данной главе произведены доказательства теорем единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода на оси и полуоси. Сформированы оценки устойчивости и построены регуляризующие операторы по М.М. Лаврентьеву в целях решения линейных интегральных уравнений первого рода в пространстве $L_2[a,\infty)$ и $L_2(-\infty;\infty)$.

В 2.1 разделе рассмотрено уравнение вида:

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \tag{2.1.1}$$

где $$\int_a^\infty \int_a^\infty |K(t,s)|^2 dsdt < \infty,$$

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Подразумевалось, что реализованы нижеследующие условия:

Производные от $a)$ $H(t,s) = A(t,s) + B(s,t)$ выглядят как:

$H'_t(t,a),\ \lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s),\ H''_{st}(t,s)$ при всех $(t,s) \in G = \{(t,s), a \le s \le t < \infty\}$;

$H'_t(t,s),\ H'_s(t,s),\ H''_{st}(t,s) \in L_2(G)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty} H(t,a) \ge 0,\ H'_t(t,a) \le 0,$ при $t \in [a,\infty),\ \lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) \ge 0,$ при $s \in [a,\infty)$,

$H''_{st}(t,s) \le 0$ при $(t,s) \in G$;

$в)$ осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $H'_t(t,a) < 0 \quad \forall \quad t \in [a,\infty)$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) > 0 \quad \forall \ s \in [a,\infty)$,

3) $H''_{st}(t,s) < 0 \qquad \forall \quad (t,s) \in G$.

Теорема 1. Допустимо осуществление условий а), б) и в). В данном контексте решение равенства (2.1.1) будет в пространстве $L_2[a,\infty) \bigcap C[a,\infty)$.– единственно.

В разделе 2.2 одновременно рассмотрены уравнение (1) и следующее интегральное уравнение второго рода:

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_a^\infty K(t,s) u(s,\varepsilon) ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \varepsilon > 0 \tag{2.2.13}$$

где ε – выступает малым параметром.

Сформированы оценки устойчивости решения для интегрального уравнения (2.1.2) на множестве корректности:

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2[a,\infty) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha \left| u^{(\nu)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \ 0 < \alpha < \infty,$ где $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – характеристические числа матричного ядра M (t,s), которые позиционируются в возрастающем порядке модулей последних – $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ...$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t) ...$ – конгруэнтные собственные ортонормированные функции,

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H(s,t), & a \le t \le s < \infty, \end{cases}$$

$$H(t,s) = \frac{1}{2}[A(t,s) + B(s,t)], \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : a \le s \le t < \infty\},$$

$$u^{(\nu)} = \int_a^\infty u(t) \varphi_\nu(t) dt.$$

Осуществлено, в частности, доказывание последующих теорем.

Теорема 2. Допускалось, что M (t,s) является полным ядром и $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$. В данном контексте решение равенства (1) будет единственно в пространстве $L_2[a,\infty)$.

Теорема 3. Допускалось, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром M (t,s), является положительным, где M (t,s) установлен по тождеству (2.2.7). В таком случае оператор K^{-1}, обратный K, на множестве K (M_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$.

Нами построены регуляризаюшие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения интегрального уравнения (2.1.1) на множестве корректности M_α. А именно решение $u(t,\varepsilon)$ уравнения (2.1.2) сходится по норме $L_2[a,\infty)$ к решению u(t) уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$, где u(t) $\in M_\alpha$.

В разделе 2.3. исследованы выражения вида:

$$Ku \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{2.3.1}$$

где
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|^2 dtds < \infty,$$

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ B(t,s), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases}$$

Подразумевалось, что реализованы нижеследующие условия:

а) $H(t,s) = A(t,s) + B(t,s), (t,s) \in G = \{(t,s) : -\infty < s \le t < \infty\}$,

$H(t,s), H_t^{'}(t,s), H_s^{'}(t,s), H_{ts}^{''}(t,s) \in C(G)$,

$\alpha(t) = \lim\limits_{s\to-\infty} H(t,s), t \in R$,

$\alpha(t) \in C(R), \quad \lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = a_0 \in R, a_0 \ge 0, \alpha^{'}(t) = \lim\limits_{s\to-\infty} H_t^{'}(t,s) \le 0, t \in R$,

$H_{ts}^{''}(t,s) \le 0, (t,s) \in G, \alpha^{'}(t) \in L_1(R)$,

$\beta(s) = \lim\limits_{t\to\infty}[H_s^{'}(t,s)] \ge 0 \quad \forall \quad s \in R, \beta(s) \in C(R) \cap L_1(R)$;

б) $\sup_{(t,s)\in G}\left|H(t,s)\right| \le L < \infty, \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}\left|H_s^{'}(t,s)\right|ds \le M < \infty, H_{ts}^{''}(t,s) \in L_1(G),$

$\sup_{t\in[s,\infty)}\left|H_s^{'}(t,s)\right| \le \gamma(s) \in L_1(R)$;

в) осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $\alpha^{'}(t) < 0 \quad \forall \quad t \in R;$

2) $\beta(s) > 0 \quad \forall \quad s \in R;$

3) $H_{ts}^{''}(t,s) < 0 \quad \forall \quad (t,s) \in G.$

Теорема 4. Допускалось осуществление условий а), б) и в). В данном контексте решение интегрального уравнения (2.3.1) будет в пространстве $L_1(R)$ единственно.

В разделе 2.4. одновременно рассмотрены следующие интегральные уравнения третьего и второго родов:

$$Ku \equiv a(t)u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{2.4.1}$$

$$(\varepsilon + a(t))u(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), t \in (-\infty,\infty), \varepsilon > 0, \tag{2.4.2}$$

где $\varepsilon -$ малый параметр, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(t,s)\right|^2 dtds < \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ B(t,s), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Предполагается, что $A(t,s), B(t,s), a(t) u f(t)$ – данные функции, u(t)– искомая функция. Всюду будем предполагаться, что функция $a(t)-$ непрерывная ограниченная функция на $(-\infty,\infty)$ и $a(t) \ge 0$ при всех $t \in (-\infty,\infty)$.

Сформированы оценки устойчивости решения для интегрального уравнения (2.4.1) на множестве корректности:

$$Q_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2(-\infty,\infty) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{\alpha} \left|u^{(v)}\right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$ где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – характеристические числа матричного ядра *M* (t,s), которые позиционируются в возрастающем порядке модулей последних – $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \ldots$ – конгруэнтные собственные ортонормированные функции,

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ H(s,t), & -\infty < t \le s < \infty, \end{cases}$$

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left[A(t,s) + B(s,t)\right], \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : -\infty < s \le t < \infty\},$$

$$u^{(v)} = \int_a^\infty u(t)\varphi_v(t)dt.$$

Выполнено построение регуляризуюших операторов по М.М. Лаврентьеву для решения интегрального уравнения (4) на множестве корректности Q_α . А именно решение $u(t,\varepsilon)$ уравнения (5) сходится по норме $L_2(-\infty,\infty)$ к решению u(t) уравнение (2.4.1) при $\varepsilon \to 0,$ где u(t) $\in Q_\alpha$.

ГЛАВА 3.
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО И ТРЕТЬЕГО РОДОВ

3.1. Регуляризация и оценка устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси

Проанализируем систему интегральных уравнений линейного типа, когда искомая функция входит только под знак интеграла, т.е. уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in [a,\infty), \qquad (3.1.1)$$

где $K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), a \le s \le t < \infty; \\ B(t,s), a \le t \le s < \infty. \end{cases}$ (3.1.2)

$$A(t,s) = a_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s) = b_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (f_i(t)) = (f_1(t),\dots f_n(t))^T,$$

$$u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t),\dots u_n(t))^T,$$

где A (t, s), B (t, s) – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная вектор-функция, $f(t)$ – установленная вектор-функция.

Везде допустим, что:

$$\|K(t,s)\| \in L_2([a,\infty)\times[a,\infty)), \|f(t)\| \in L_2[a,\infty).$$

В силу выражения (3.1.2.) преобразуем уравнение (3.3.1) и получим:

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t), t \in [a,\infty), \qquad (3.1.3).$$

Правую и левую часть выражения (3.1.3) скалярно перемножим на вектор-функцию $u(t)$, интегрируя результирующее произведение по сфере: $a \le t < \infty$.

Следовательно,

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt + \int_a^\infty \int_t^\infty \langle B(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt = \int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt. \qquad (3.1.4)$$

Используя формулу Дирихле, из уравнения (3.1.4) получаем:

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt + \int_a^\infty \int_a^t \langle B^*(s,t)u(s),u(t)\rangle dsdt = \int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle [A(t,s)+B^*(s,t)]u(s),u(t)\rangle dsdt = \int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt. \qquad (3.1.5)$$

где B^*(s,t) – транспонированная матрица к матрице B(s,t).

Обозначим:

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left(A(t,s)+B^*(s,t)\right), \quad (t,s) \in G = \{a \le s < t < \infty\}$$

Тогда из (3.1.5) имеем

$$2\int_a^\infty \int_a^t \langle H(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt = \int_a^\infty \langle f(t),u(t)\rangle dt. \qquad (3.1.6)$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$ следующим образом

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H^*(s,t), & a \le t \le s < \infty, \end{cases} \qquad (3.1.7)$$

$$H(t,s) = (H_{ij}(t,s), H^*(s,t) = (H_{ji}(s,t)).$$

Ясно, что

$$M(t,s) = M(s,t) \quad (t,s) \in [a,\infty)\times[a,\infty) \text{ и справедлива}$$

$$M(t,s) = \sum_{v=1}^{m} \lambda_v \begin{pmatrix} \phi_1^{(v)}(t) \\ \dots \\ \phi_n^{(v)}(t) \end{pmatrix} (\bar{\phi}_1^{(v)}(s) \dots \bar{\phi}_n^{(v)}(s)), m \le \infty, \qquad (3.1.8)$$

где λ_v – значения собственные матричного ядра $M(t,s)$ которые позиционируются в убывающем порядке модулей последних, и вектор-функции;

$\varphi^{(v)}(t)=(\varphi_1^{(v)}(t)...\varphi_n^{(v)}(t))^T$ – собственные ортонормированые вектор-функции соответствующие собственным значениям λ_v.

В последующем мы будем полагать, что положительными выступают все значения собственные λ_v матричного ядра $M(t,s)$. При этом последовательность ортонормированная собственных вектор-функций $\{\phi^{(v)}(t)\}$ является полной в $L_2([a,\infty),R^n)$, в силу самосопряженности и полной непрерывности оператора М, который порожден матричным ядром $M(t,s)$.

При $u(t)=(u_i(t)\in L_2([a,\infty);R^n)$ установим норму:

$$\|u(t)\|_{L_2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\int_a^{\infty}|u_i(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^{\infty}\|u(t)\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где:

$$u^{(v)}=\int_a^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt=\int_a^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\phi_i^{(v)}(t)\right)dt,$$

(v=1,2,…).

Нижеследующим способом вычленим семейство множеств корректностей, обусловливаемое параметром α:

$$N_\alpha=\left\{u(t)\in L_2\left([a,\infty);R^n\right):\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c>0,\quad 0<\alpha<\infty,$

$$\mathrm{u}^{(\mathrm{v})}=\int_a^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt,\quad (v=1,2,..). \tag{3.1.9}$$

Пусть $u(t)=(u_i(t))\in N_\alpha$.

Тогда

$$\|u(t)\|_{L_2}^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|^2=\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\alpha}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2=\lambda_1^{\alpha}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\right)\le c\lambda_1^{\alpha},$$

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 \le c\lambda_1^{\alpha}. \qquad (3.1.10)$$

Допустим, что вектор-функция $f(t) \in K(N_\alpha)$. Следовательно, система (3.1.1) обладает решением $(u_i(t)) \in N_\alpha$ и в силу выражений (3.1.6),(3.1.7) и (3.1.8) получаем

$$2\int_a^\infty \int_a^t \sum_{v=1}^\infty \lambda_v \left\langle \begin{pmatrix} \phi_1^{(v)}(t) \\ ..... \\ \phi_1^{(v)}(t) \end{pmatrix} (\phi_1^{(v)}(s)...\phi_n^{(v)}(s)) \begin{pmatrix} u_1(s) \\ .... \\ u_n(s) \end{pmatrix}, u(t) \right\rangle dsdt = \int_a^\infty \left[\sum_{i=1}^n f_i(t) u_i(t) \right] dt,$$

$$\text{т.е.} \quad \sum_{v=}^\infty 2\int_a^\infty \left[\int_a^t \langle u(s), \varphi^{(v)}(s) \rangle ds \right] \langle u(t), \varphi^{(v)}(t) \rangle dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle dt.$$

Отсюда

$$\sum_{v=1}^\infty \lambda_v \left| \int_a^\infty \langle u(t), \phi^{(v)}(t) \rangle dt \right|^2 = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle dt,$$

$$\text{т.е.} \quad \sum_{v=1}^\infty \lambda_v \left| u^{(v)} \right|^2 = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle dt.$$

Затем, применяя неравенства Гельдера, получаем

$$\sum_{v=1}^\infty \lambda_v \left| u^{(v)} \right| \le \| f(t) \|_{L_2} \cdot \| u(t) \|_{L_2}. \qquad (3.1.11)$$

С иной стороны

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 = \sum_{v=1}^\infty \frac{\left| u^{(v)} \right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_v^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \lambda_v^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left| u^{(v)} \right|^{\frac{2}{1+a}} \le \left(\sum_{v=1}^\infty \frac{|u_v|^2}{\lambda_v} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{v=1}^\infty \lambda_v^{-\alpha} \left| u^{(v)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

В данном моменте нами было использовано неравенство Гёльдера, при $p = 1 + a, q = \frac{(1+\alpha)}{\alpha}$. Принимая во внимание, что $u(t) \in N_\alpha$ и неравенство (3.1.11), из последнего выражения получаем:

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} (\| f(t) \|_{L_2} \| u(t) \|_{L_2})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

В этой связи имеем нижеследующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \qquad 0<\alpha<\infty. \qquad (3.1.12)$$

В итоге, нижеследующая теорема доказана.

Теорема 3.1.1. Положим, что оператор M, сгенерированный матричным ядром *M* (t,s), выступает положительным, где *M* (t,s) установлен по выражениям (3.1.7) и (3.1.8). В данном случае оператор K^{-1}, являясь обратным K, на множестве $K(N_\alpha)$(при отображении оператором K, $K(N_\alpha)$ представляется образом N_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка устойчивости (3.1.12) – справедлива.

Продемонстрируем, что решение системы уравнений:

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty), \varepsilon>0 \qquad (3.1.13)$$

для системы (3.1.1) на множестве N_α .будет регуляризирующим.

Действительно, осуществив дальнейшую подстановку в системе (3.1.1):

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in N_\alpha -$ является решением системы (3.1.1), имеем:

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon\, u(t).$$

Следовательно, умножая на на $\xi(t,\varepsilon)$, интегрируя от α до ∞ и учитывая (3.1.2) ,(3.1.5), (3.1.7) и (3.1.8), получаем:

$$\varepsilon\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_2}^2 + \sum_{v=1}^\infty \lambda_v |\xi_v(\varepsilon)|^2 \le \varepsilon \sum_{v=1}^\infty |u^{(v)}||\xi_v(\varepsilon)|, \qquad (3.1.14)$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ – выступают для функции $\xi(t,\varepsilon)$, коэффициентами Фурье, по ортонормированной системе $\phi^{(v)}(t)=\{\phi_i^{(v)}(t)\}$ т.е.

$$\xi_v(\varepsilon)=\int_a^\infty \langle \xi(t,\varepsilon),\phi_v(t)\rangle dt, (v=1,2,...).$$

Используя Гёлдера неравенство при $p = q = \frac{1}{2}$, и, принимая во внимание соотношение (3.1.10), из формулы (3.1.14) определяем

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_2} \le \|u(t)\|_{L_2}, \tag{3.1.15}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \le \varepsilon \|u(t)\|_{L_2}^2 \le \varepsilon c \lambda_1^\alpha, \varepsilon > 0, \tag{3.1.16}$$

С иной стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\xi_\nu(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} \cdot \lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} |u^{(\nu)}|^{\frac{1}{1+\alpha}} |\xi_\nu(t,\varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}} |u^{(\nu)}|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Следовательно, после приложения обобщенного неравенства Гёльдера к правой части, при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}, q = 2(1+\alpha), m = 2(1+\alpha), n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \lambda_\nu \right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_\nu^\alpha} \right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}} \|\xi(t,\varepsilon)\|^{\frac{1}{1+\alpha}} \|u(t)\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_\nu^\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \|\xi(t,\varepsilon)\|^{\frac{2}{q}} \|u(t)\|^{\frac{2}{p}}.$$

Затем, из последнего неравенства в силу $u(t) \in N_\alpha$, выражений (3.1.15) и (3.1.16) получаем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| \le \left(\varepsilon c \lambda_1^\alpha\right)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} \left(c \lambda_1^\alpha\right)^{\frac{p+q}{pq}},$$

Следовательно, подставляя $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}, q = 2(1+\alpha)$, определяем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} (c\lambda_1^\alpha)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon c \lambda_1^\alpha)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \tag{3.1.17}$$

т.е.

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v\left(\varepsilon\right)\right| \le c\lambda_1^{\frac{1}{2(1+a)}} c^{\frac{1}{2}} c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \lambda_1^{\frac{\alpha}{2}} \lambda_1^{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}.$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v\left(\varepsilon\right)\right| \le c\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \qquad (3.1.18)$$

Из неравенства (3.1.14), принимая во внимание выражение (3.1.18), получаем:

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{a(2a+1)}{4(1+a)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, 0 < a < \infty. \qquad (3.1.19)$$

Итого, теорема 3.1.2 будет доказана.

Теорема 3.1.2. Допустим, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром M (t,s), является положительным и $f(t) \in K(N_\alpha)$. В этом случае оценка выражения (3.1.19) справедлива, где u (t, ε) – является решением системы (3.1.13), u(t) – решением системы (3.1.1), а M (t,s) установлен по уравнению (3.1.8). Что отмечено другие исследователями [66 стр.стр.15-18]

3.2. Регуляризация и оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений типа Фредгольма первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in (-\infty,\infty), \qquad (3.2.1)$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), -\infty < s \le t < \infty; \\ B(t,s), -\infty < t \le s < \infty. \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

$$A(t,s) = a_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s) = b_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (f_i(t)) = (f_1(t),\dots f_n(t))^T,$$

$$u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t),\dots u_n(t))^T,$$

где B (t,s), A (t,s) – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная вектор-функция, f (t) – установленная вектор-функция.

Везде допустим, что

$$\|K(t,s)\| \in L_2(R \times R), \|f(t)\| \in L_2(R).$$

Уравнение (3.2.1), в относительности выражения (3.2.2), представим как

$$\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)ds + \int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)ds = f(t), t \in R. \qquad (3.2.3)$$

Первую и вторую часть системы (3.2.3) скалярно перемножим на n-мерную вектор-функцию $u(t)$, интегрируя результирующее произведение по сфере $-\infty < t < \infty$, при этом имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \langle A(t,s)u(s), u(t)\rangle dsdt + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty} \langle B(t,s)u(s), u(t)\rangle dsdt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), u(t)\rangle dt. \qquad (3.2.4)$$

Используя формулу Дирихле, с уравнения (3.2.4) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\langle A(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\langle B^{*}(s,t)u(s),u(t)\rangle dsdt=\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\langle [A(t,s)+B^{*}(s,t)]u(s),u(t)\rangle dsdt=\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t),u(t)\rangle dt\,. \qquad (3.2.5)$$

где $B^{*}(s,t)$ – транспонированная матрица к матрице B(s,t).

Обозначим

$$H(t,s)=\frac{1}{2}\left(A(t,s)+B^{\bullet}(s,t)\right), \qquad (t,s)\in G=\{-\infty<s<t<\infty\}$$

Тогда из (3.2.5) имеем

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\langle H(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt=\int_{-\infty}^{-\infty}\langle f(t),u(t)\rangle dt.. \qquad (3.2.6)$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s)=(M_{ij}(t,s))$ следующим образом

$$M(t,s)=\begin{cases}H(t,s), & -\infty<s\le t<\infty,\\ H(s,t), & -\infty<t\le s<\infty,\end{cases} \qquad (3.2.7)$$

$$H(t,s)=(H_{ij}(t,s),H(s,t)=(H_{ij}(s,t)).$$

Ясно, что

$M(t,s)=M(s,t)$ $\quad (t,s)\in G$ и справедлива

$$M(t,s)=\sum_{v=1}^{m}\lambda_v\begin{pmatrix}\phi_1^{(v)}(t)\\ \dots\\ \phi_n^{(v)}(t)\end{pmatrix}(\bar{\phi}_1^{(v)}(s)\dots\bar{\phi}_n^{(v)}(s)),m\le\infty, \qquad (3.2.8)$$

λ_v – значения собственные матричного ядра $M(t,s)$ которые позиционируются в убывающем порядке модулей последних, и вектор-функции;

$\varphi^{(v)}(t)=(\varphi_1^{(v)}(t)\dots\varphi_n^{(v)}(t))^T$ – собственные ортонормированные вектор-функции соответствующие собственным значениям λ_v.

В последующем мы будем полагать, что положительными выступают все значения собственные λ_v матричного ядра $M(t,s)$. При этом последовательность ортонормированная собственных вектор-функций $\{\phi^{(v)}(t)\}$ является полной в

$L_2(R;R^n)$, в силу самосопряженности и полной непрерывности оператора M, который порожден матричным ядром $M(t,s)$.

Для $u(t)=(u_i(t)\in L_2(R;R^n))$ определим норму

$$\|u(t)\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|u_i(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|u(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $u^{(v)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\phi_i^{(v)}(t)\right)dt$, (v=1,2,…).

Последующим способом вычленим семейство множеств корректностей, обусловливаемое параметром α:

$$P_\alpha=\left\{u(t)\in L_2(R;R^n):\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c>0,\quad 0<\alpha<\infty,$

$$u^{(v)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt,\quad (v=1,2,..). \tag{3.2.9}$$

Пусть $u(t)=(u_i(t))\in P_\alpha$.

Тогда

$$\|u(t)\|_{l_2}^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|^2=\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\alpha}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2=\lambda_1^{\alpha}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\right)\le c\lambda_1^{\alpha},$$

$$\|u(t)\|_{l_2}^2\le c\lambda_1^{\alpha}. \tag{3.2.10}$$

Будем считать возможным, что вектор-функция $f(t)\in K(P_\alpha)$. Отсюда, равенство (3.2.1) содержит решение $(u_i(t))\in P_\alpha$ и силу выражений (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) получим:

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v\left\langle\begin{pmatrix}\varphi_1^{(v)}(t)\\ \dots\dots\\ \varphi_n^{(v)}(t)\end{pmatrix}(\varphi_1^{(v)}(s)\dots\varphi_n^{(v)}(s))\begin{pmatrix}u_1(s)\\ \dots\\ u_n(s)\end{pmatrix},u(t)\right\rangle ds\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}f_i(t)u_i(t)\right]dt,$$

т.е. $\sum_{v=1}^{\infty} 2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}\left\langle u(s),\varphi^{(v)}(s)\right\rangle ds\right]\left\langle u(t),\varphi^{(v)}(t)\right\rangle dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt$.

Отсюда:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt\right|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt,$$

$$\text{т.е.}\quad \sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v\left|u^{(v)}\right|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt.$$

Далее, применив неравенства Гельдера, получаем:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v\left|u^{(v)}\right|^2\le\left\|f(t)\right\|\cdot\left\|u(t)\right\|. \qquad (3.2.11)$$

С иной стороны

$$\left\|u(t)\right\|^2=\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(v)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_v^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\lambda_v^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}}\le\left(\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|u_v\right|^2}{\lambda_v}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

В данном моменте нами было использовано неравенство Гёльдера, при $p=1+a, q=\frac{(1+\alpha)}{\alpha}$. Принимая во внимание, что $u(t)\in P_\alpha$ и неравенство (3.2.11), из последнего выражения получаем

$$\left\|u(t)\right\|^2\le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\left\|f(t)\right\|\left\|u(t)\right\|\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

В данной связи имеем нижеследующую оценку устойчивости:

$$\left\|u(t)\right\|\le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\left\|f(t)\right\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \qquad 0<\alpha<\infty \qquad (3.2.12)$$

Как итог, есть доказательство теоремы.

Теорема 3.2.1. Предположим, что оператор M, сгенерированный матричным ядром *M* (t,s), выступает положительным, где *M* (t,s) установлен по выражениям (3.2.7) и (3.2.8). В этом случае оператор K^{-1}, являясь обратным K, на множестве $K(P_\alpha)$ (при отображении оператором K, $K(P_\alpha)$ представляется

образом M_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка (3.2.12) справедлива.

Продемонстрируем, что решение системы уравнений:

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=f(t),\quad t\in R,\ \varepsilon>0 \tag{3.2.13}$$

для системы (3.2.1) на множестве P_α , будет регуляризирующим.

Действительно, осуществив дальнейшую подстановку в системе (3.2.1)

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in P_\alpha$ – является решением системы (3.2.1), имеем:

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon\,u(t).$$

Отсюда, умножая на на $\xi(t,\varepsilon)$, интегрируя от -∞ до ∞ и учитывая формулу (3.2.2) ,формулу (3.2.5), а также (3.2.7) и (3.2.8), получаем:

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|, \tag{3.2.14}$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ – выступают для функции $\xi(t,\varepsilon)$ коэффициентами Фурье, по ортонормированной системе $\phi^{(\nu)}(t)=\left\{\phi_i^{(\nu)}(t)\right\}$ т.е.

$$\xi_\nu(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\xi(t,\varepsilon),\phi_\nu(t)\right\rangle dt,(\nu=1,2,...).$$

Используя Гёлдера неравенство при $p=q=\frac{1}{2}$, и, принимая во внимание соотношение (3.2.10), из формулы (3.2.14) устанавливаем:

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|\le\left\|u(t)\right\|, \tag{3.2.15}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\left\|u(t)\right\|^2\le\varepsilon c\lambda_1^\alpha,\ \varepsilon>0, \tag{3.2.16}$$

С иной стороны

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| = \sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_v^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_v^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_v(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Из этого следует, что после приложения обобщенного неравенства Гёльдера к правой части, при $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, $m=2(1+\alpha)$, $n=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ мы получаем:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{v=1}^{\infty}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2\lambda_v\right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(v)}\right|^2}{\lambda_v^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(v)}\right|^2}{\lambda_v^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Затем, из последнего неравенства в силу $u(t)\in P_\alpha$, формулы (3.2.15) и формулы (3.1.16) получаем:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left(c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{p+q}{pq}},$$

Следовательно, подставив $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, устанавливаем:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}(c\lambda_1^{\alpha})^{\frac{1}{2}}(\varepsilon c\lambda_1^{\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \tag{3.2.17}$$

т.е. $\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c\lambda_1^{\frac{1}{2(1+a)}}c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}\lambda_1^{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}$.

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{3.2.18}$$

Принимая во внимание выражение (3.2.18), из неравенства (3.2.14) получаем:

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_2 \le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0<\alpha<\infty. \tag{3.2.19}$$

Итого, доказательство теоремы осуществлено.

Теорема 3.2.2. Допустим, что оператор M, который сгенерирован матричным ядром M (t,s), является положительным и $f(t)\in K(P_\alpha)$. В этом случае оценка выражения (3.2.19) справедлива, где u (t,ε) – является решением системы (3.2.13), u(t) – решением системы (3.2.1), а M (t,s) установлен по соотношению (3.2.8). Что отмечоно другие исследователями [64,стр.14-18]

3.3. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси

Разберем систему нижеследующего вида:

$$P(t)u(t)+\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty), \tag{3.3.1}$$

где $K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), a\le s\le t<\infty; \\ B(t,s), a\le t\le s<\infty. \end{cases}$ (3.3.2)

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t,s)=a_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s)=b_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (f_i(t)) = (f_1(t),...f_n(t))^T,$$

$$u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t),...u_n(t))^T,$$

где A (t, s), B (t, s), P(t), – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная вектор-функция, f (t) – установленная вектор-функция.

Везде допустим, что:

$$\|K(t,s)\| \in L_2([a,\infty)\times[a,\infty)), \|f(t)\| \in L_2[a,\infty).$$

Преобразуя системы (3.3.1) получим

$$P(t)u(t) + \int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t). \qquad (3.3.3)$$

Правую и левую часть системы (3.3.3) скалярно перемножим на n-мерную вектор-функцию $u(t)$, интегрируя результирующее произведение по сфере $a \le t < \infty$.

Следовательно,

$$\int_0^\infty \langle P(t)u(t), u(t)\rangle dt + \int_a^\infty \left\langle \int_a^t A(t,s)u(s)ds, u(t)\right\rangle dt +$$
$$+ \int_a^\infty \left\langle \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds, u(t)\right\rangle dt + \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle dt. \qquad (3.3.4)$$

Учитывая формулу

$$\langle P(t)u, u\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t) + P^*(t)\right]u, u\right\rangle, \forall u \in R^n.$$

и применяя формулу Дирихле, из (3.3.4) имеем

$$\int_0^\infty \langle P(t)u(t), u(t)\rangle dt + \int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t)\rangle dsdt + \int_a^\infty \int_a^s \langle u(s)B^*(t,s)u(t)\rangle dtds =$$
$$= \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle dt,$$

$$\int_0^\infty \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t),u(t)\right\rangle dt+\int_a^\infty\int_a^t \left\langle A(t,s)u(s),u(t)\right\rangle dsdt+$$

т.е.

$$+\int_a^\infty\int_a^t \left\langle B^*(s,t)u(s),u(t)\right\rangle dsdt=\int_a^\infty \left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt. \qquad (3.3.5)$$

Обозначая

$$H(t,s)=A(t,s)+B^*(s,t) \quad (t,s)\in G=\{(t,s)\,|\,a\le s\le t<\infty\}, \qquad (3.3.6)$$

из (3.3.5) получим

$$\int_a^\infty \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t),u(t)dt+\int_a^\infty\int_a^t \left\langle H(t,s)u(s),u(t)\right\rangle dsdt=\int_a^\infty \left\langle f(t),u(t)\right\rangle dt. \qquad (3.3.7)$$

Допускаем выполнение следующих требований

а) $H(t,s)$ содержит производные $H_t'(t,a), H_s'(t,s), H_{st}''(t,s)$ и $(H(t,a))^*=H(t,a), (H_s'(t,s))^*=H_s'(t,s), \quad (H_{st}''(t,s))^*=H_{st}''(t,s)$ где H^* связанная матрица к матрице H и $\|H(t,s)\|,\|H_t'(t,s)\|,\|H_s''(t,s)\|,\|H_{ts}''(t,s)\|\in L_2(G)$,

$\|P(t)\|\in C[a,\infty)$ - является пространством всех ограниченных функций и функций в $[a,\infty)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty} \langle H(t,a)u,u\rangle\ge 0, \forall u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\in R^n$ т.е. $H(\infty,a)\ge 0$;

$\langle H_t'(t,a)u,u\rangle\le 0, \forall u\in R^n$ т.е. $H_t'(t,a)\le 0; \quad \forall t\in[a,\infty)$;

$\lim\limits_{t\to\infty}\langle H_s'(t,s)u,u\rangle\ge 0, \forall u\in R^n$ т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} H_s'(t,s)\ge 0; \ \forall s\in[a,\infty)$;

$\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle\le 0, \forall u\in R^n$ т.е. $H_{st}''(t,s)\le 0, \quad \forall (t,s)\in G$,

$$\left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u,u\right\rangle\ge \alpha(t)\|u\|^2, \forall u\in R^n, \alpha(t)\in C[a,\infty), \alpha(t)\ge 0$$

при едва ли не всех $t\in[a,\infty)$.

в) осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $\left\langle H_t^{'}(t,a)u,u\right\rangle < 0,\ \forall u \in R^n, u \neq 0$ т.е. $H_t^{'}(t,a) < 0\ \ \forall\ t \in [a,\infty)$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\left\langle H_s^{'}(t,s)u,u\right\rangle > 0,\ \forall u \in R^n, u \neq 0$ т.е. $H_s^{'}(t,s) > 0\ \ \forall\ s \in [a,\infty)$;

3) $\left\langle H_{st}^{''}(t,s)u,u\right\rangle < 0,\ \forall u \in R^n, u \neq 0$ т.е. $H_{st}^{''}(t,s) < 0$

$\forall\ \ (t,s) \in G = \{(t,s) : a \le s \le t < \infty\}$;

4) $\alpha(t) > 0 \quad \forall\ \ t \in [a,\infty)$.

Для трансформации первой части системы (3.3.7) применим следующие формулы:

$$z(t,s) = \int_s^t u(\nu)d\nu, \tag{3.3.8}$$

$$d_s z(t,s) = -u(s)ds,$$
$$u(s)ds = -d_s z(t,s),$$

$$\left\langle z(t,s),u(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle z(t,s),z(t,s)\right\rangle dt \tag{3.3.9}$$

$$-\left\langle H(t,s)z_s^{'}(t,s),u(t)\right\rangle = \left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),u(t)\right\rangle - \left(\left\langle H(t,s)z(t,s),u(t)\right\rangle\right)_s^{'},$$

$$\left\langle H(t,a)z(t,a),z_t^{'}(t,a)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle H(t,a)z(t,a),z(t,a)\right\rangle_t^{'} - \frac{1}{2}\left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a),z(t,a)\right\rangle,$$

$$\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z^{'}(t,s)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle_t^{'} - \frac{1}{2}\left\langle H_{ts}^{''}(t,s)z(t,s),z(t,s)\right\rangle.$$

В этом случае, используя выражения Дирихле, получаем дальнейшие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty\left\langle\int_a^t H(t,s)u(s)ds,u(t)\right\rangle dt = -\int_a^\infty\left\langle\int_a^t H(t,s)z_s^{'}(t,s)ds,u(t)\right\rangle dt = \\
&= \int_a^\infty\left\langle H(t,a)z(t,a),z_t^{'}(t,a)\right\rangle dt + \int_a^\infty\int_a^t\left\langle H_s^{'}(t,s),z(t,s)z_t^{'}(t,s)\right\rangle dsdt = \\
&= \int_a^\infty\left\langle H(t,a)z(t,a),z_t^{'}(t,a)\right\rangle dt + \int_a^\infty\int_s^\infty\left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s),z_t^{'}(t,s)\right\rangle dtds.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Используя вышеуказанные соотношения, получим:

$$\int_a^\infty \left\langle H(t,a)z(t,a), z_t^{'}(t,a)\right\rangle dt = \frac{1}{2}\left\langle H(\infty,a)z(\infty,a), z(\infty,a)\right\rangle -$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a), z(t,a)\right\rangle dt, \qquad (3.3.11)$$

$$\int_a^\infty \int_s^\infty \left\langle H_s^{'}(t,s)z(t,s), z_t^{'}(t,s)\right\rangle dtds = \frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_s^{'}(\infty,s)z(\infty,s), z(\infty,s)\right\rangle ds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \int_s^\infty \left\langle H_{ts}^{''}(t,s)z(t,s), z(t,s)\right\rangle dtds. \qquad (3.3.12)$$

Учитывая (3.3.11), (3.3.12) и формулу Дирихле из (3.3.10) имеем:

$$\int_a^\infty \left\langle \int_a^t H(t,s)u(s)ds, u(t)\right\rangle dt = \frac{1}{2}\left\langle H(\infty,a)z(\infty,a), z(\infty,a)\right\rangle -$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a), z(t,a)\right\rangle dt + \frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_s^{'}(\infty,s)z(\infty,s), z(\infty,s)\right\rangle ds - \qquad (3.3.13)$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left[\int_a^t \left\langle H_{st}^{''}(t,s)z(t,s), z(t,s)\right\rangle ds\right] dt.$$

В этой связи в силу соотношения (3.3.13), уравнение (3.3.7) получит вид:

$$\int_0^\infty \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t), u(t)\right\rangle dt + \int_0^\infty \int_0^t \left\langle H(t,s)u(s), u(t)\right\rangle dsdt =$$
$$= \int_0^\infty \left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u(t), u(t)\right\rangle dt + \frac{1}{2}\left\langle H_s^{'}(\infty,a)z(\infty,a), z(\infty,a)\right\rangle -$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_t^{'}(t,a)z(t,a), z(t,a)\right\rangle dt + \frac{1}{2}\int_a^\infty \left\langle H_s^{'}(\infty,s)z(\infty,s), z(\infty,s)\right\rangle ds - \qquad (3.3.14)$$
$$-\int_a^\infty \int_a^t \left\langle H_{st}^{''}(t,s)z(t,s), z(t,s)\right\rangle dsdt = \int_a^\infty \left\langle f(t), u(t)\right\rangle dt.$$

Допустим, что в выражении (3.3.14) $f(t) \equiv 0$. Следовательно, в силу положений б) и в) из соотношения (3.3.14) следует, что:

$$z(t,a) \equiv 0 \text{ т.е. } \int_a^t u(v)dv \equiv 0 \text{ при } t \in [a,\infty) \text{ или } z(\infty,s) \equiv 0$$

т.е. $\int\limits_s^\infty u(\nu)d\nu = 0$ при $s \in [a,\infty)$ или $u(t) = 0, \forall t \in [a,\infty)$.

Затем, вследствие условия в), $u(t) = 0,$ при $t \in [a,\infty)$. Тогда, последующая теорема доказана.

Теорема 3.3.1. Допустимо осуществление условий а), б) и в). В данном контексте решение системы (3.3.1) будет в пространстве $L_2([a,\infty), R^n) \bigcap C([a,\infty); R^n)$ – единственно.

Пример. Рассмотрим систему (3.3.1) при n=2, a=0

$$P(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} & m(t) \\ -m(t) & \dfrac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \qquad (3.3.15)$$

$$A(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{(1+t)(1+s)} & \dfrac{4}{(3+t)(2+s)} \\ -\dfrac{2}{(1+t)(1+s^2)} & \dfrac{5}{(6+t)(3+s)} \end{pmatrix},$$

$$B(t,s) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(1+t)(1+s)} & \dfrac{2}{(1+t^2)(1+s)} \\ \dfrac{-4}{(2+t)(3+s)} & \dfrac{-5}{(3+t)(6+s)} \end{pmatrix}.$$

$$m(t) \in C[0,\infty), f_1(t), f_2(t) \in L_2(0,\infty).$$

В этом случае все условия теоремы выполняются при:

$$\frac{1}{2}\left[P(t) + P^*(t)\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix},$$

$$H(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (t,s) \in G; \alpha(t) = \frac{t}{1+t^2}, t \in [0,\infty).$$

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3

В третьей главе данного диссертационного исследования рассмотрены аспекты регуляризации, устойчивости и единственности решений систем линейных интегральных уравнений типа Фредгольма первого и третьего родов на полуоси и оси. Применяя методы функционального анализа, квадратичных форм и неравенств осуществлено доказательство теорем единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода на оси и на полуоси. В результате осуществления установленных задач, для систем линейных интегральных уравнений первого рода в пространстве в $L_2([a,\infty), R^n)$, в $L_2((-\infty;+\infty); R^n)$ выполнено построение регуляризующих операторов и сформированы оценки устойчивости. Более того, произведено доказывание теоремы единственности решений систем линейных интегральных уравнений третьего рода на полуоси.

В параграфе 3.1 главы 3 исследованы, одновременно, последующие системы линейных интегральных уравнений типа Фредгольма первого рода на полуоси:

$$\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in [a,\infty), \tag{3.1.1}$$

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \varepsilon > 0 \tag{3.1.2}$$

где ε – является малым параметром ,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), a \le s \le t < \infty; \\ B(t,s), a \le t \le s < \infty. \end{cases}$$

$$A(t,s) = a_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s)=b_{ij}(t,s)=\begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t)=(f_i(t))=(f_1(t),\dots f_n(t))^T.$$

Для систем интегральных уравнений (6) на множестве корректности, определены оценки устойчивости решения:

$$N_\alpha=\left\{u(t)\in L_2\left([a,\infty);R^n\right):\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c>0,\ \ 0<\alpha<\infty,$

$$\mathrm{u}^{(v)}=\int_a^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt,\quad (v=1,2,..).$$

где $c>0,\ \ 0<\alpha<\infty,$ λ_v – значения собственные матричного ядра $M(t,s)$ которые позиционируются в убывающем порядке модулей последних, и вектор-функции;

$\varphi^{(v)}(t)=(\varphi_1^{(v)}(t)\dots\varphi_n^{(v)}(t))^T$ – собственные ортонормированые вектор-функции соответствующие собственным значениям λ_v.

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s), & a\le s\le t<\infty, \\ H^*(s,t), & a\le t\le s<\infty, \end{cases}$$

$$H(t,s)=(H_{ij}(t,s),H^*(s,t)=(H_{ji}(s,t)).$$

$$H(t,s)=\frac{1}{2}\left(A(t,s)+B^*(s,t)\right),\quad (t,s)\in G=\{a\le s<t<\infty\}$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 5. Предположим, что оператор M, сгенерированный матричным ядром M (t,s), выступает положительным. В данном случае оператор K^{-1}, являясь обратным K, на множестве $K(N_\alpha)$(при отображении оператором K, $K(N_\alpha)$ представляется образом N_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка

$$\|u(t)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \qquad 0<\alpha<\infty.$$

является справедливой.

Выполнено построение регуляризаюших операторов по М.М. Лаврентьеву для решения систем линейных интегральных уравнений первого рода на множестве корректности N_α. А именно решение $u(t,\varepsilon)$ – систем линейных интегральных уравнений второго рода (3.1.1) сходится по норме $L_2([a,\infty);R^n)$ к решению u(t) систем линейных интегральных уравнений первого рода при $\varepsilon \to 0$, где u(t) $\in N_\alpha$. т.е. справедлива оценка:

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{a(2a+1)}{4(1+a)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, 0<a<\infty \qquad (3.1.3.)$$

В 3.2 разделе рассмотрена система линейных интегральных уравнений типа Фредгольма первого рода:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in (-\infty,\infty) \qquad (3.2.1)$$

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t \in R, \varepsilon > 0, \qquad (3.2.2)$$

где $K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), -\infty < s \le t < \infty; \\ B(t,s), -\infty < t \le s < \infty. \end{cases}$

$$A(t,s) = a_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) & \dots & a_{1n}(t,s) \\ a_{21}(t,s) & a_{22}(t,s) & \dots & a_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,s) & a_{n2}(t,s) & \dots & a_{nn}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$B(t,s) = b_{ij}(t,s) = \begin{pmatrix} b_{11}(t,s) & b_{12}(t,s) & \dots & b_{1n}(t,s) \\ b_{21}(t,s) & b_{22}(t,s) & \dots & b_{2n}(t,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t,s) & b_{n2}(t,s) & \dots & b_{nn}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (f_i(t)) = (f_1(t),\dots f_n(t))^T,$$

$$u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t),\dots u_n(t))^T,$$

где A (t, s), B (t, s) – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная вектор-функция, $f(t)$ – установленная вектор-функция.

Везде допустим, что:

$$\|K(t,s)\| \in L_2(R \times R), \|f(t)\| \in L_2(R).$$

Выделим:

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left(A(t,s) + B^{\bullet}(s,t)\right), \qquad (t,s) \in G = \{-\infty < s < t < \infty\}$$

Нижеследующим способом включим новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$:

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ H(s,t), & -\infty < t \le s < \infty, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$$H(t,s) = (H_{ij}(t,s), H(s,t) = (H_{ij}(s,t)).$$

Ясно, что:

$M(t,s) = M(s,t)$ $(t,s) \in G$ и справедлива

$$M(t,s) = \sum_{v=1}^{m} \lambda_v \begin{pmatrix} \phi_1^{(v)}(t) \\ \dots \\ \phi_n^{(v)}(t) \end{pmatrix} (\bar{\phi}_1^{(v)}(s) \dots \bar{\phi}_n^{(v)}(s)), m \le \infty, \tag{3.2.4}$$

λ_v – значения собственные матричного ядра $M(t,s)$ которые позиционируются в убывающем порядке модулей последних, и вектор-функции;

$\varphi^{(v)}(t) = (\varphi_1^{(v)}(t) \dots \varphi_n^{(v)}(t))^T$ – собственные ортонормированные вектор-функции соответствующие собственным значениям λ_v.

В последующем мы будем полагать, что положительными выступают все значения собственные λ_v матричного ядра $M(t,s)$. При этом последовательность ортонормированная собственных вектор-функций $\{\phi^{(v)}(t)\}$ является полной в $L_2(R; R^n)$, в силу самосопряженности и полной непрерывности оператора М, который порожден матричным ядром $M(t,s)$. Последующим способом вычленим семейство множеств корректностей, обусловливаемое параметром α:

$$P_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2(R; R^n) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} \left| u^{(v)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c>0, \quad 0<\alpha<\infty,$

$$u^{(v)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle u(t),\phi^{(v)}(t)\right\rangle dt, \quad (v=1,2,..).$$

Теорема 6. Предположим, что оператор M, сгенерированный матричным ядром M (t,s), представляется положительным, где M (t,s) определяется по уравнению (3.2.4) В этом случае оператор K^{-1}, являясь обратным K, на множестве $K(P_\alpha)$ (при отображении оператором K, $K(P_\alpha)$ выступает образом M_α) непрерывен равномерно с показателем Гёлдера $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. оценка

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0<\alpha<\infty$$

является справедливой.

Выполнено построение регуляризаюших операторов по М.М. Лаврентьеву для решения систем линейных интегральных уравнений первого рода (3.2.2) на множестве корректности P_α. А именно, решение $u(t,\varepsilon)$ – систем линейных интегральных уравнений первого рода (3.3.1), по норме $L_2((-\infty,\infty);R^n)$, сходится к решению u(t) систем линейных интегральных уравнений первого рода (3.2.2) при $\varepsilon\to 0$, , где u(t) $\in P_\alpha$.

В параграфе 3.3 исследованы нижеследующие системы линейных интегральных уравнений типа Фредгольма третьего рода на полуоси:

$$P(t)u(t)+\int_a^{\infty}K(t,s)u(s)ds=f(t), \quad t\in[a,\infty), \qquad (3.3.1.)$$

где $K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), a\le s\le t<\infty; \\ B(t,s), a\le t\le s<\infty. \end{cases}$

где A (t, s), B (t, s), P(t), – текущие матричные функции, которые даны, u(t) – неизвестная вектор-функция, f (t) – установленная вектор-функция.

Везде допустим, что:

$\|K(t,s)\|\in L_2([a,\infty)\times[a,\infty)), \|f(t)\|\in L_2[a,\infty).$

Допускаем выполнение следующих требований:

а) $H(t,s)=A(t,s)+B^*(s,t)$ содержит производные $H_t'(t,a), H_s'(t,s), H_{st}''(t,s)$ и $(H(t,a))^*=H(t,a), (H_s'(t,s))^*=H_s'(t,s), \quad (H_{st}''(t,s))^*=H_{st}''(t,s)$ где H^* связанная матрица к матрице H и $\|H(t,s)\|, \|H_t'(t,s)\|, \|H_s''(t,s)\|, \|H_{ts}''(t,s)\| \in L_2(G)$,

$\|P(t)\| \in C[a,\infty)$ – является пространством всех ограниченных функций и функций без «скачков» в $[a,\infty)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty} \langle H(t,a)u,u\rangle \geq 0, \forall u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in R^n$ т.е. $H(\infty,a)\geq 0$;

$\langle H_t'(t,a)u,u\rangle \leq 0, \forall u \in R^n$ т.е. $H_t'(t,a)\leq 0; \quad \forall t\in[a,\infty)$;

$\lim\limits_{t\to\infty} \langle H_s'(t,s)u,u\rangle \geq 0, \forall u \in R^n$ т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} H_s'(t,s)\geq 0; \ \forall s\in[a,\infty)$;

$\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle \leq 0, \forall u \in R^n$ т.е. $H_{st}''(t,s)\leq 0, \quad \forall (t,s)\in G$,

$\left\langle \frac{1}{2}\left[P(t)+P^*(t)\right]u,u\right\rangle \geq \alpha(t)\|u\|^2, \forall u\in R^n, \alpha(t)\in C[a,\infty), \alpha(t)\geq 0$

$\forall \ t\in[a,\infty)$.

в) осуществляется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $\langle H_t'(t,a)u,u\rangle \leq 0, \forall u\in R^n, u\neq 0$ т.е. $H_t'(t,a)<0 \ \forall \ t\in[a,\infty)$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle H_s'(t,s)u,u\rangle > 0, \forall u\in R^n, u\neq 0$ т.е. $H_s'(t,s)>0 \ \forall \ s\in[a,\infty)$;

3) $\langle H_{st}''(t,s)u,u\rangle < 0, \forall u\in R^n, u\neq 0$ т.е. $H_{st}''(t,s)<0$

$\forall \ (t,s)\in G=\{(t,s): a\leq s\leq t<\infty\}$;

4) $\alpha(t)>0 \quad \forall \ t\in[a,\infty)$.

Теорема 7. Допустимо осуществление условий а), б) и в). В данном контексте решение системы (3.3.1) будет в пространстве $L_2\left(\left[a,\infty\right),R^n\right)\bigcap C\left(\left[a,\infty\right);R^n\right)$ – единственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования в данной диссертационной работе были решены следующие задачи и сформированы нижеследующие теоретические и практические выводы:

- определены достаточные условия единственности решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси;

- определены достаточные условия единственности решения линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси;

- сформированы оценки устойчивости решений и построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси;

- сформированы оценки устойчивости решений одного класса интегральных Фредгольма первого рода на оси и осуществлено построение регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву;

- для линейных систем интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси определены достаточные условия единственности решения;

- сформированы оценки устойчивости и осуществлено построение регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву для систем вышеизложенных для систем вышеизложенных уравнений на полуоси и оси;

Отметим, что результаты, которые были получены в процессе данного диссертационного исследования, касающиеся анализа линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях, продемонстрировали возможности получения оценки устойчивости и построения регуляризирующих операторов различных множеств корректностей.

Таким образом, задача установления по приближенным данным решения приближенного типа редуцируется к определению параметра регуляризации и регуляризующего оператора.

Сделанные в ходе диссертационного исследования выводы по аспектам единственности и регуляризации решений линейных интегральных уравнений и

систем линейных интегральных уравнений в неограниченных сферах, могут быть использованы в различных областях науки и техники.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст] / Ж.Адамар. - М.: Наука, 1978.
2. Аниконов Ю.Е. Некоторые вопросы интегральной геометрии [Текст] / Ю.Е.Ананинков // Труды Всесоюзного симпозиума по вычислительной томографии. - Новосибирск, 1983. - С. 9-11.
3. Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода [Текст] / А.С. Апарцин //Автоматика и телемеханика. 2004. - №2. – С. 118 - 125.
4. Асанов А. Регуляризация и достаточные условия единственности решения для интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Урысона [Текст] / А.Асанов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1979. - Вып. 12. - С. 165-176.
5. Асанов А. Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / А.Асанов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1981. - Вып. 14. - С. 227-234.
6. Асанов А. Регуляризация операторного уравнения Вольтерра в шкале банаховых пространств [Текст] / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып. 17. – С. 205-210.
7. Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / А. Асанов // Функциональный анализ и его приложения. - 1983. - Т. 17. - Вып. 4. - С. 73-74.
8. Асанов А. Один класс операторных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Асанов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе: Илим, 1983. - Вып. 16. - С. 269-276.
9. Асанов А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси [Текст] / А. Асанов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1985. - Вып. 18. - С. 17-20.
10. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра [Текст] / А. Асанов // Известия АН Киргизской ССР, 1988. - №1. - С. 13-18.

11. Асанов А. Операторные уравнения Вольтерра первого рода в шкалах гильбертовых пространств [Текст] / А. Асанов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе: Илим, 1991. - Вып. 23. - С. 67-80.
12. Асанов А., Каденова З.А. Об одном классе интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А. Асанов // Труды межд. научно-практ. конф.: «Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века». Вестник ОшГУ, серия ф-м.н. - Ош: Билим, 2001. - №4. - С. 59-67.
13. Асанов А., Об одном классе систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А. Асанов, З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2002. - Вып. 31. - С. 172-182.
14. Асанов А. О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А. Асанов, З.А Каденова // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». - Самара: Сам ГТУ, 2004. - Ч.3. - С. 122-126.
15. Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Электронный сборник] / А. Асанов, З.А Каденова // Труды международной конференции «Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on the occasion of his 75-th birthday. - August 20-25, 2007. - Novosibirsk, Russia.
16. Асанов А.Единственность и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, З.А Каденова // Труды межд. конф. «Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on the occasion of his 80-th birthday. - August 5-12, 2012. - Novosibirsk, Russia.
17. Асанов А. Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, З.А. Каденова // Труды межд. конф. «Функциональный

анализ и его приложения», посвященной 70-летию со дня рождения д.ф.-м.н., академика Национальной Академии наук РК М. Отелбаева. - 2- 5 октября 2012 г. - Астана, Казакстан.

18. Асанов А. Интегральное уравнение первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, З.А Каденова. - Германия: «Немецкое издательство LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012. - 178 стр.
19. Асанов А. Об единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными / А.Асанов, З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2010. - Вып. 43 - С. 46-53.
20. Асанов А. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси [Электронный ресурс] / А. Асанов, Ж.Ш. Орозмаматова // Постулат. - 2018. - № 8 (34). - С.79-85.
21. Асанов А., Орозмаматова Ж.Ш. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси. Синергия. - 2018. - №4. - С. 33-39.
22. Асанов А. [Текст] тезисы докладов Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications –MADEA-8 / А.Асанов, Ж.Ш. Орозмаматова. - Бишкек-Чолпон Ата. - 17-23 июнь, 2018 года. About uniqueness of Fredholm linaer integral equations of the first kind in the axis.
23. Арсенин В.Я. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свертки методом регуляризации [Текст] / В.Я. Арсенин, В.В. Иванов // ЖВМ и МФ. - 1968. - 8. - №2.
24. Арсенин В.Я. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки [Текст] / В.Я. Арсенин, Т.И. Савелова // ЖВМ и МФ. - 1969. - 9. - №6.
25. Бухгейм А.Л. Об одном классе операторных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / А.Л. Бухгейм //Функциональный анализ и его приложения. - 1972. - Вып. 1. - С. 1-9.

26. Бухгейм А.Л. Один класс операторных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / А.Л. Бухгейм // В кн.: Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. - Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1978. - С. 45-50.
27. Бухгейм А.Л. Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств [Текст] / А.Л. Бухгейм // Докл. АН СССР. - 1978. -Т. 242. - №2. - С. 272-275.
28. Воронин А. Ф. Теоремы единственности для интегральных уравнений в свертках 1-го и 2-го родов на отрезке [Текст] / А.Л. Бухгейм // ДАН, 2004. - т. 236. - №1. - С.12-14.
29. Воронин А.Ф. Полное обобщение метода Винера-Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами [Текст] / А. Ф Воронин // Дифференциальные уравнения, 2004. - Т. 40. - №9. - С. 1190-1197.
30. Гантмахер Д.Р. Теория матриц [Текст] / Д.Р. Гантмахер. - М: Наука, 1988.
31. Гохберг И.Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения [Текст] / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. - М.: Наука, 1967.
32. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности [Текст] / А.М.Денисов // Вест. Моск. университета. Сер. 15. - Вычисл. матем. и киберн.,1980. - №3. - С.49-52.
33. Иванов В.К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода [Текст] / В.К. Иванов // Дифференциальные уравнения. - 1967. - №3.
34. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Дифференциальные уравнения [Текст] / В.К. Иванов -1968. - №2. –С. 61.
35. Иванов В.К.. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.П. Танана. - М.: Наука, 1978.
36. Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода [Текст] / М.И Иманалиев. - Фрунзе: Илим, 1981. - 144 с.

37. Иманалиев М.И., Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А.Асанов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988. - Вып. 21. - С. 3-38.
38. Иманалиев М.И. Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И Иманалиев, А.Асанов // ДАН СССР. - 1989. - Т.309. - №5. - С. 1052-1055.
39. Иманалиев М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода [Текст] / М.И Иманалиев, А.Асанов // ДАН 2007. - Т. 415. - № 1. - с. 14-17.
40. Иманалиев М.И. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода [Текст] / М.И Иманалиев, А. Асанов // ДАН 2010. - Т. 430. - № 6. - с. 734-737.
41. Иманалиев М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода [Текст] / М.И Иманалиев, А.Асанов, Р.А.Асанов // ДАН 2011. - Т. 437. - № 5. - с. 592-596.
42. Иманалиев М.И. Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / М.И Иманалиев, А.Асанов, З.А. Каденова //ДАН КР, 2014. - Т. 454. - №5. - с. 518-522.
43. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи [Текст] / С.И.Кабанихин // Новосибирск. Сиб. научное издательство. - 2009 - 458 с.
44. Кабанихин С.И. Проекционный метод решения обратной задачи для уравнения акустики [Текст] / С.И.Кабанихин, М.А Шишленин // Труды XII Байкальской международной конференции, 2001. - Т.У. - С. 120-125.
45. Кабанихин С.И. Обратные задачи электродинамики [Текст] / С.И Кабанихин, В.Г. Романов, Т.П. Пухначева // АН СССР. Сиб. отд. ВЦ. - Новосибирск, 1984. – 201 с.
46. Каденова З.А. О единственности решений систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Труды 5-й Международной конференции

молодых ученых и студентов «Актуальные проблемы современной науки». - Самара: СамГТУ. - 2004. - Ч. 1, 2. - С. 61-66.

47. Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / З.А. Каденова // Труды 1-го международного форума «Актуальные проблемы современной науки». - Самара: Сам ГТУ. - 2005. - Ч.1,2. - С. 51-56.
48. Каденова З.А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / З.А. Каденова // Автореферат. - Редакционно-издательский отдел ОшТУ. - 2006. - 18 стр.
49. Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / З.А Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2010. - Вып. 42. - С. 200-205.
50. Каденова З.А. Об одном классе линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / З.А Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2010. - Вып. 43 - С. 53-68.
51. Каденова З.А. Регуляризация и еединственность решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] / З.А Каденова // Наука и новые технологии, № 10. - Бишкек, 2011. - С. 3-8.
52. Каденова З.А. Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] /З.А Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 44. - С. 73-79.
53. Каденова З.А. О единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] / З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 45. - С. 64-75.

54. Каденова З.А. О решениях систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 45. - С. 76-84.
55. Каденова З. А. О решениях систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] / З.А. Каденова // Известия ВУЗов. - №7. - Бишкек, 2012. - С. 9-12.
56. Каденова З.А. Регуляризация линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] / З.А. Каденова // Известия ВУЗов - №7- Бишкек, 2012. - С. 5-6.
57. Каденова З.А. Оценка устойчивости линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] /З.А. Каденова // Наука и новые технологии.- № 9. Бишкек, 2012. - С. 3-5.
58. Каденова З.А. Регуляризация систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] / З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 9, Бишкек, 2012. С. 41-46.
59. Каденова З.А. О решениях линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] / З.А. Каденова // Вестник КРСУ им. Б.Ельцина. - Бишкек, 2013. - Выпуск 13. - №1 - С. 71-74.
60. Каденова З.А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / З.А Каденова // Вестник КРСУ им. Б.Ельцина. - Бишкек, 2013. - Выпуск 13. - №5 - С. 164-170.
61. Каденова З.А. Один класс систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст] /З.А Каденова // Вестник КРСУ им. Б.Ельцина. - Бишкек, 2013 - Выпуск 13 - №7. - С. 10-14.

62. Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость решение линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях. [Текст] /З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова //Тезисы и доклады международной конференции «Бесконечномерный анализ стохастика математическое моделирование: новые задачи и методы». Москва, РУДН, 2014- 15-18декабрь - стр.123-129.
63. Каденова З.А. Регуляризация систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях. [Текст] /З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Международного научного конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» – Новосибирск: 19–21 октября 2015 г.
64. Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях. [Текст] /З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Наука и новые технологии. - 2013. - № 4. - С. 14-18.
65. Каденова З.А Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях [Текст] / З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Известия ВУЗов (Кыргызстан). 2013. - № 4. - С. 10-12
66. Каденова З.А Регуляризация и оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниценных областях [Текст] /З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Вестник КРСУ им. Б.Ельцина. - 2016. - Т. 16. - № 1. - С. 15-18
67. Каденова З.А. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси [Текст] /З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Наука и новые технологии, № 11. - Бишкек, 2015. - Стр. 3-7
68. Каденова З.А. О единственности решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси [Текст] / З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова // Символ науки. – Уфа: Омега сайнс, 2018. - №1-2. С. 8-12.

69. Каденова З.А. [Текст] / З.А Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова //Тезисы докладов II Борубаевских чтений Кыргызской Республики, г. Бишкек, 1 марта, 2018 года.
70. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа [Текст] / М.М Лаврентьев // Изв. АН СССР, сер. мат. 1956. -20. - С.819-842.
71. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М.М Лаврентьев // ДАН СССР. - 1959. - Т. 127- № 1. -С. 31-33.
72. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М.М Лаврентьев // ДАН СССР. - 1960. -Т. 133 - №2.
73. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М.М Лаврентьев // Новосибирск: Издательство СО АН СССР. - 1962.
74. Лаврентьев М.М. О постановке некоторых некорректных задач математической физики [Текст] / М.М Лаврентьев // В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. - Новосибирск: Наука, 1966. - С. 258-276.
75. Лаврентьев М.М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода [Текст] / М.М Лаврентьев // В кн.: Международный Конгресс математиков в Ницце 1970.- М.: Наука, 1972. -С. 130-136.
76. Лаврентьев М.М. Регуляризация операторных уравнений типа Вольтерра [Текст] / М.М Лаврентьев // В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977. - С. 199-205.
77. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М.М Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П Шишатский -М.: Наука, 1980.
78. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера первого рода и третьего рода [Текст] / Н.А.Магницкий // Журнал вычислительной математики и математический физики. - Т.19. - №4. - 1979, - с. 970-989.
79. Омуров Т.Д. Решения неявных интегральных уравнений типа Фредгольма и их приложения к некоторым задачам. [Текст] / Т.Д. Омуров - Бишкек, 1991. - 133 с.

80. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач [Текст] / Т.Д. Омуров.– Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.
81. Орозмаматова Ж.Ш. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // Символ науки. - 2016. - №5-3 (17). - С.36-39
82. Орозмаматова Ж.Ш. Регуляризация и оценки устойчивость решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // Известия вузов.- Бишкек.- №9 – 2017.- С. 17-23
83. Орозмаматова Ж.Ш. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // Известия вузов. - Бишкек. - № 9. - 2017. - С.3-9
84. Орозмаматова Ж.Ш. Регуляризация и оценки устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси. [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // - Символ науки. – Уфа: Омега сайнс, 2016. - №5(3). – С.39-43
85. Орозмаматова Ж.Ш. Регуляризация и оценки устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на оси [Текст] / Ж.Ш. Орозмаматова // - Символ науки. – Уфа: Омега сайнс, 2018. - №1-2. - С. 12-19.
86. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу [Текст] / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь - М.: Мир, 1979. - С. 263.
87. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г. Романов Новосибирск: Наука, 1984.
88. Романов В.Г. Обратные задачи геоэлектрики [Текст] / В.Г. Романов. - Новосибирск: Наука, 1991.
89. Саадабаев А. Методы решения интегральных уравнений первого рода [Текст]: учеб. пособие / А. Саадабаев. – Фрунзе, 1986. – 95 с.

90. Сапарова, Г.Б. Регуляризация решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром [Текст] / Г.Б. Сапарова, А.Асанов // Вестник КазНУ. – Серия математика, механика, информатика. – №2(61). – Алматы, 2009. – С. 16-22.
91. Сапарова, Г.Б. Об одном классе системы интегральных уравнений Фредгольма с разрывным ядром [Текст] / А. Асанов, Г.Б. Сапарова //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С.63-69.
92. Сапарова, Г.Б. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А. Асанов, Г.Б. Сапарова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим. 2008. – Вып. 38. – С. 41-53.
93. Сапарова, Г.Б. Об одном классе системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А. Асанов, Г.Б. Сапарова // Иссл. по интегро-дифф. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.40. – С.84-93.
94. Тихонов А.Н. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Б Гласко // ЖВМ и МФ. - 1964. - 4. - №3.
95. Тихонов А.Н. [и др.] / Новый метод восстановления истинных спектров [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, А.А.Думова, Л.В. Майоров, В.И. Мостовой // Атомная энергия . - 1965. - 18. - №6
96. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач. [Текст] / А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г. Ягола А.Г. - М.: Наука, 1990. -С. 1-232.
97. Тихонов А.Н. Нелинейные некорректные задачи [Текст] / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола - М.: Наука, 1995. – С. 1-312.
98. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А. Асанов, А.К. Тойгонбаева // Тезисы докладов международной научной конференции «Функциональный

анализ и его приложения». Астана: Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева. – 2012. – С. 110.

99. Тойгонбаева А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода [Текст] / А.К. Тойгонбаева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2012. - Вып. №2. - с. 165-169.
100. Тойгонбаева А.К. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А.К. Тойгонбаева // Исслед. по интегро-дифф. Уравнениям. - Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 44. - с. 68-72.
101. Тойгонбаева А.К. Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма – Стильтьеса первого рода [Текст] / А.К. Тойгонбаева // Исслед. по интегро-дифф. уравнениям – Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 45. - с. 56-63.
102. Anikonov Y. E. Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations. - Utrecht The Nethelands: VSP, 2001. - 270 p. (in English).
103. Apartsyn A.S. Nonclassical Linear Volterra Equations of the first kind. Utrecht, The Netherlands: VSP, 2002. - 294 p. (in English).