МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА МОДЕЛІ СИСТЕМ

УДК 517. 95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов
Баткенский государственный университет, Кыргызстан
tursunbay@rambler.ru

Введение

В области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается уравнение:

$$\begin{cases} u_{ttt}(t,x) + u_{xxx}(t,x), & (t,x) \in D_1, \\ u_{ttt}(t,x) - u_{xxx}(t,x), & (t,x) \in D_2 \end{cases} \tag{1}$$

с условиями:

$$u(t,x)|_{t=-T} = \varphi_1(x), u(t,x)|_{t=T} = \varphi_2(x), u_t(t,x)|_{t=T} = \varphi_3(x); \tag{2}$$

$$u(t,x)|_{x=-1} = u(t,x)|_{x=0} = u(t,x)|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где $D_1 \equiv E_T^+ \times E_0$, $D_2 \equiv E_T^- \times E_0$, $E_T^- \equiv (-T, 0)$, $E_T^+ \equiv (0, T)$, $E_0 \equiv (-1, 1)$, $\varphi_i(x) \in C^4(E_0)$, $\varphi_i(x)|_{x=-1} = \varphi_i(x)|_{x=0} = \varphi_i(x)|_{x=1} = 0$, $i = \overline{1,3}$.

Задачу (1)–(3) будем изучать при следующих условиях склеивания:

$$u(+0,x) = u(-0,x), u_t(+0,x) = u_t(-0,x), u_{tt}(+0,x) = u_{tt}(-0,x). \tag{4}$$

Под решением уравнения (1) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, которая в областях D_1 и D_2 является регулярным решением соответствующего уравнения и удовлетворяет условиям (2)–(4). Регулярность означает непрерывность в D всех производных, входящих в уравнение $[1]$.

Решение данной задачи ищем в виде следующего ряда Фурье $[2]$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x). \tag{5}$$

Основные результаты

Подставляя (5) в уравнение (1), получим следующие уравнения:

$$1)\quad a_n^{III}(t) - \lambda_n a_n(t) = 0, \quad t \in E_T^+, \tag{6}$$

$$2)\quad a_n^{III}(t) + \lambda_n a_n(t) = 0, \quad t \in E_T^-, \tag{7}$$

Кочурмо анык
Окшош катчысы, ф.м.к. А.М. Мурзаева

3) $b_n^{III}(x)+\lambda_n b_n(x)=0$, $x\in E_0$, $0<\lambda_n=\text{const}$. (8)

1. Сначала решаем уравнения (8). При этом граничные условия (3) принимают вид:

$$b_n(-1)=b_n(0)=b_n(1)=0\ . \tag{9}$$

Общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$b_n(x)=C_{1n}e^{-\mu_n x}+C_{2n}e^{\frac{\mu_n x}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x+C_{3n}e^{\frac{\mu_n x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x,\ \mu_n=\sqrt[3]{\lambda_n}\ ,\ x\in E_2, \tag{10}$$

где коэффициенты C_{in} подлежат определению, $i=\overline{1,3}$.

В силу условия (9), из (10) получим следующую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_{in}(i=\overline{1,3})$:

$$\begin{cases} C_{1n}e^{\mu_n}+C_{2n}e^{\frac{-\mu_n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n-C_{3n}e^{\frac{-\mu_n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n=0,\\ C_{1n}+C_{2n}=0,\\ C_{1n}e^{-\mu_n}+C_{2n}e^{\frac{\mu_n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n+C_{3n}e^{\frac{\mu_n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n=0. \end{cases} \tag{11}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $C_{1n}=-C_{2n}$. Тогда из (11) приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} C_{2n}\left(-e^{\mu_n}+e^{\frac{-\mu_n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n\right)-C_{3n}e^{\frac{-\mu_n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n=0,\\ C_{2n}\left(-e^{\mu_n}+e^{\frac{\mu_n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n\right)+C_{3n}e^{\frac{\mu_n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n=0 \end{cases}$$

или

$$C_{2n}\left(-\operatorname{ch}\mu_n+\operatorname{ch}\frac{\mu_n}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n\right)+C_{3n}\operatorname{sh}\frac{\mu_n}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n=0. \tag{12}$$

Рассмотрим соотношение (12). Так как $-\operatorname{ch}\mu_n+\operatorname{ch}\frac{\mu_n}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n\neq 0$ при $\mu_n\neq 0$, то мы положим, что $C_{2n}=0$. Тогда из (12) имеем:

$$C_{3n}\operatorname{sh}\frac{\mu_n}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n=0. \tag{13}$$

Кочурлю анык
Окнои катчоиси, ф.м.к. А.М. Мурзаналиева А Шуть

Так как $C_{1n} = C_{2n} = 0$, естественно предположить, что $C_{3n} \neq 0$. Поскольку $\mathrm{sh}\frac{\mu_n}{2} \neq 0$ при $\mu_{2n}\beta > 0$, то из (13) получим, что $\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n = 0$, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n = n\pi, n = 1, 2, \ldots$. Отсюда $\mu_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}n\pi$ или $\lambda_n = \frac{8\sqrt{3}n^3\pi^3}{9}, n = 1, 2, 3, \ldots$.

Следовательно, собственная функция уравнения (8), соответствующая собственным значениям $\lambda_n = \frac{8\sqrt{3}n^3\pi^3}{9}$, имеет вид:

$$b_n(x) = C_{3n}e^{\frac{\mu_n x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x, \quad x \in E_0. \tag{14}$$

Коэффициент C_{3n} в (14) находим из условия $\int_{-1}^{1} b_n^2(x)dx = 1$. После преобразования получим, что $C_{3n} = 2\sqrt{\frac{\mu_n}{4\mathrm{sh}\mu_n - \mathrm{ch}\mu_n}}$.

Итак, собственные функции задачи (8), (9) приобретают вид:

$$b_n(x) = 2\sqrt{\frac{\mu_n}{4\mathrm{sh}\mu_n - \mathrm{ch}\mu_n}}\, e^{\frac{\mu_n x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x, \ x \in E_0. \tag{15}$$

Переходим к решению уравнений (6) и (7). Общие решения уравнений (6) и (7) имеют вид:

$$a_n(t) = B_{1n}e^{\mu_n t} + B_{2n}e^{\frac{-\mu_n t}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t + B_{3n}e^{\frac{-\mu_n t}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t, \quad x \in E_T^+, \tag{16}$$

$$a_n(t) = A_{1n}e^{-\mu_n t} + A_{2n}e^{\frac{\mu_n t}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t + A_{3n}e^{\frac{\mu_n t}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t, \quad x \in E_T^-, \tag{17}$$

где коэффициенты A_{in} и B_{in} – постоянные, которые подлежат определению, $i = \overline{1,3}$.

Условия (2) и (4) запишем в виде:

$$a_n(-T) = \varphi_{1n}, a_n(T) = \varphi_{2n}, a_n'(T) = \varphi_{3n}, \tag{18}$$

$$a_n(+0) = a_n(-0),\ a_n'(+0) = a_n'(-0),\ a_n''(+0) = a_n''(-0), \tag{19}$$

где

$$\varphi_{in} = \int_{-1}^{1} \varphi_i(x)b_n(x)dx,\ i = \overline{1,3}. \tag{20}$$

Используя условия (18), из функций (16) и (17) получаем следующую алгебраическую систему уравнений относительно коэффициентов A_{in} и B_{in}, $i = \overline{1,3}$:

Кочирмо анок

Окном катчоса, ф.и.к. А.Ш. Мурадмова

$$\begin{cases} A_{1n}e^{\mu_n T}+A_{2n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-A_{3n}\,e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T=\varphi_{1n}, \\ B_{1n}e^{\mu_n T}+B_{2n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T+B_{3n}\,e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T=\varphi_{2n}, \\ B_{1n}e^{\mu_n T}-B_{2n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right]-B_{3n}\,e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right]=\mu_n^{-1}\varphi_{3n}. \end{cases} \quad (21)$$

Из системы (21) трех уравнений невозможно однозначно определить шесть неизвестных. Поэтому дополнительно используем условие (19). Тогда получаем новую систему трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} B_{1n}+B_{2n}=A_{1n}+A_{2n}, \\ 2B_{1n}-B_{2n}+\sqrt{3}\,B_{3n}=-2A_{1n}+A_{2n}+\sqrt{3}\,A_{3n}, \\ 2B_{1n}-B_{2n}-\sqrt{3}\,B_{3n}=2A_{1n}-A_{2n}+\sqrt{3}\,A_{3n}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных коэффициентов B_{in} $(i=\overline{1,3})$, получаем:

$$B_{1n}=\frac{2}{5\Delta_n}\left[\Delta_{1n}+\Delta_{2n}+\sqrt{3}\Delta_{3n}\right], \quad (27)$$

$$B_{2n}=\frac{\sqrt{3}}{5\Delta_n}\left[\sqrt{3}\Delta_{1n}+\sqrt{3}\Delta_{2n}-2\Delta_{3n}\right], \quad (28)$$

$$B_{3n}=\frac{1}{\Delta_n}\left(-\frac{11}{15}\sqrt{3}\Delta_{1n}+\frac{4}{15}\sqrt{3}\Delta_{2n}-\frac{1}{5}\Delta_{3n}\right). \quad (29)$$

Итак, с помощью формул (26)–(29) определяются коэффициенты A_{1n} и B_{in}, $i=\overline{1,3}$ в функции (16) и (17). Подставляя функции (16), (17) в ряд (5), получим:

$$u(t,x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu_n}{4\operatorname{sh}\mu_n-\operatorname{ch}\mu_n}}\left[B_{1n}\,e^{\mu_n t}+B_{2n}\,e^{\frac{-\mu_n t}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t+\right.$$
$$\left.+B_{3n}\,e^{\frac{-\mu_n t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t\right]\cdot e^{\frac{\mu_n x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x,\ \ (t,x)\in D_1, \quad (30)$$

$$u(t,x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu_n}{4\operatorname{sh}\mu_n-\operatorname{ch}\mu_n}}\left[A_{1n}e^{-\mu_n t}+A_{2n}\,e^{\frac{\mu_n t}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t+\right.$$
$$\left.+A_{3n}\,e^{\frac{\mu_n t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t\right]\cdot e^{\frac{\mu_n x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x,\ \ (t,x)\in D_2. \quad (31)$$

Кочирмо аслак

Окном наличасы, ф.-и.к. А. М. Мурзашева

$$p_{22n}=\frac{2}{5}e^{\mu_n T}-\frac{3}{5}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{4}{15}\sqrt{3}\,e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$p_{23n}=\frac{2}{5}\sqrt{3}\,e^{\mu_n T}+\frac{2}{5}\sqrt{3}\,e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{5}\sqrt{3}\,e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$p_{31n}=e^{\mu_n T};\; p_{32n}=e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T;\; p_{33n}=-e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T.$$

Решая систему (25) с помощью правила Крамера, получаем:

$$A_{in}=\frac{\Delta_{in}}{\Delta_n},\; i=\overline{1,3}, \tag{26}$$

где $\Delta_n=\left|p_{ijn}\right|_{\substack{i=\overline{1,3}\\ j=\overline{1,3}}}\neq 0$, а $\Delta_{in}(i=\overline{1,3})$ получается заменой -го столбца на столбец, состоящий из чисел $\varphi_{2n},\mu_n^{-1}\varphi_{3n},\varphi_{1n}, i=\overline{1,3}$.

Подставляя (26) в формулы (22)–(24), получим:

$$B_{1n}=\frac{2}{5\Delta_n}\left[\Delta_{1n}+\Delta_{2n}+\sqrt{3}\Delta_{3n}\right], \tag{27}$$

$$B_{2n}=\frac{\sqrt{3}}{5\Delta_n}\left[\sqrt{3}\Delta_{1n}+\sqrt{3}\Delta_{2n}-2\Delta_{3n}\right], \tag{28}$$

$$B_{3n}=\frac{1}{\Delta_n}\left(-\frac{11}{15}\sqrt{3}\Delta_{1n}+\frac{4}{15}\sqrt{3}\Delta_{2n}-\frac{1}{5}\Delta_{3n}\right). \tag{29}$$

Итак, с помощью формул (26)–(29) определяются коэффициенты A_{1n} и B_{in}, $i=\overline{1,3}$ в функции (16) и (17). Подставляя функции (16), (17) в ряд (5), получим:

$$u(t,x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu_n}{4\operatorname{sh}\mu_n-\operatorname{ch}\mu_n}}\left[B_{1n}e^{\mu_n t}+B_{2n}e^{\frac{-\mu_n t}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t+\right.$$
$$\left.+B_{3n}e^{\frac{-\mu_n t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t\right]\cdot e^{\frac{\mu_n x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x,\quad (t,x)\in D_1, \tag{30}$$

$$u(t,x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu_n}{4\operatorname{sh}\mu_n-\operatorname{ch}\mu_n}}\left[A_{1n}e^{-\mu_n t}+A_{2n}e^{\frac{\mu_n t}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t+\right.$$

их приложения. – Ташкент : Фан, 1989. – С. 24–36.
2. Несис Е.И. Методы математической физики / Е.И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.

Кочурма аниқ
Окиш каттенсоп, ф.-м.к. А.Мирзаев Мурзаметова Л.

Ряды (30) и (31) с коэффициентами A_{in} и B_{in}, $i=\overline{1,3}$, определяемыми из (26–29), удовлетворяют уравнению (1), краевым условиям (2), (3) и условиям склеивания (4).

Покажем, что ряды (30) и (31) можно почленно дифференцировать по переменным t, x три раза и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Действительно, интегрируя по частям функцию (20), имеем:

$$\varphi_{in} = \frac{1}{9}\varphi_{in} + \frac{8}{9\mu_n}\varphi_{in}^{I} + \frac{8}{3\mu_n^2}\varphi_{in}^{II} + \frac{32}{9\mu_n^3}\varphi_{in}^{III} + \frac{16}{9\mu_n^4}\varphi_{in}^{(IV)}, \tag{32}$$

где $\varphi_{in}^{(IV)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_{ixxxx}(x)\, b_n(x)\, dx,\ i=\overline{1,3}.$

Подставляя (32) в ряды (30) и (31) и оценивая их, получаем сходящийся мажорантный ряд $\delta_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{Q_{kn}}{n^k}$, где δ_1 – положительный постоянный и

$$Q_{kn} = \left|\varphi_{1n}^{(k)}\right| + \left|\varphi_{2n}^{(k)}\right| + \left|\varphi_{3n}^{(k)}\right|,\ k=\overline{1,4}.$$

Дифференцируя ряды (30) и (31) три раза по каждому аргументу и оценивая их, имеем мажорантный ряд:

$$\Phi_n = \delta_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{Q}_n}{n}, \tag{33}$$

где $0 < \delta_2 = \text{const}$, $\overline{Q}_n = \left|\varphi_{1n}\right| + \left|\varphi_{2n}\right| + \left|\varphi_{3n}\right|$.

Нетрудно видеть что ряд (33) сходится, так как $\frac{\overline{Q}_n}{n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + Q_n^2\right)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n^2$ сходится.

Выводы

Итак, нами доказана следующая теорема: функция $u(t,x)$, определяемая рядами (30) и (31), имеет непрерывные производные по аргументам t, x четвертого порядка и удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(4). При этом возможно почленное дифференцирование рядов (30) и (31) по аргументам t, x и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Литература

1. Джураев Т.Д. Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков / Т.Д. Джураев, Б.В. Логинов, И.А. Малюгина // Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. – Ташкент : Фан, 1989. – С. 24–36.

2. Несис Е.И. Методы математической физики / Е.И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.

Кочирма аслик

Окилов котибаси, ф.-м.к. А Шер... Мурзалиева Д.И.