ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАН КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Диссертационный совет К 01.17.554

На правах рукописи

УДК: 517.968.74

ДЫЙКАНОВ ГАПАР АСКАРОВИЧ

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ош – 2019

Работа выполнена на кафедре естественно-математических дисциплин Кызыл-Кийского педагогического института Баткенского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Юлдашев Турсун Камалдинович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Асанов Авыт

доктор физико-математических наук, профессор
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

Ведущая организация: Ферганский государственный университет
Республика Узбекистан, 150100, г. Фергана,
улица Мураббийлар, 19.

Зашита диссертации состоится «1» июня 2019 г в 11:00 часов на заседании диссертационного совета К.01.17.554 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики и Жалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 333 и на сайте https://www.oshsu.kg/news/new/?lg=1&id_parent=3289&id2=11390.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент: Т. О. Бекешов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе рассматриваются смешанные задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Изучается обобщенная разрешимость поставленной в диссертации смешанных задач и построения их решений в виде ряда Фурье.

Актуальность темы диссертации. Теория дифференциальных уравнений в частных производных возникла и развивалась на основе изучения задач математической физики. Это объясняется тем фактом, что многие задачи математической физики приводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Основные уравнения математической физики – это уравнения: волновое, теплопроводности и Лапласа. Они имеют много приложений в математической физике. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике и т.д.

Задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, которые по одной переменной (по времени) являются начальными, а по другим переменным (по пространственным переменным) - граничными, часто называются смешанными.

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений.

Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Смешанные задачи часто встречаются и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных четвертого и высоких порядков.

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом используются в теории автоматического управления и автоколебательных систем, при изучении явлений в технических, экономических и экологических системах.

Уравнения с запаздывающим аргументом появляются в случае, когда в рассматриваемой физической или технической задаче сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, предшествующий данный.

Большой вклад в развитие теории функционально-дифференциальных уравнений внесли Н. В. Азбелов, Б. И. Ананьев, Л. А. Бекларян, С. А.

Брыкалов, А. И. Булгаков, Ю. А. Ведь, В. Б. Колмановский, Н. Н. Красовский, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, М. И. Иманалиев, В. П. Максимов, А. А. Мартынюк, Г. И. Марчук, Ю. А. Митропольский, А. Д. Мышкис, С. Б. Норкин, В. Р. Носов, В. Г. Пименов, Л. Ф. Рахматуллина, В. П. Рубаник, А. М. Самойленко, Дж. Хейл, В. Н. Шевело, Л. Э. Эльсгольц, М. Г. Юмагулов и многие другие ученые.

В последние 35 лет начали изучать так называемые дифференциальные уравнения с отражающим аргументом, в правой части которых неизвестная функция зависит от « - t ». Такие уравнения рассматривались в работах А.Р. Автабизаде, Ю.К. Хянг, Дж. Вайнер, Ю.А. Ведь, М.Т. Матраимова и других.

В данной диссертационной работе изучаются смешанные задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, содержащие нелинейные отклонения.

Целью диссертационной работы является изучение следующих вопросов:

1. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;
2. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения;
3. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.
4. Разработать достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.
5. Построить решения в виде ряда краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.
6. Разработать достаточные условия разрешимости краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

Задачи диссертационной работы:

1. Доказать однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих

суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;

2. Определить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения;

3. Находить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Разработать достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.

5. Построить решения в виде ряда краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Разработать достаточные условия разрешимости краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

Методика исследования. Использованы: основные теоремы математического анализа, неравенство Гельдера, неравенство Минковского и неравенство Бесселя, метод последовательных приближений в банаховом пространстве и методы интегральных неравенств.

Научная новизна. Впервые изучаются однозначная обобщенная разрешимость смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;

2. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-

дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения;

3. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Разработка достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.

5. Построение решения в виде ряда краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Разработка достаточные условия разрешимости краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

Теоретическая значимость полученных результатов. В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы являются основами развития теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Практическая значимость полученных результатов. Доказательства теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач. Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Результаты диссертации опубликовались в 7 статьях в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК КР и в 2 статьях в материалах международных научных конференций «Решетневские чтения» (г. Красноярск). Все публикации входят в перечень РИНЦ.

Апробация результатов диссертации. Материалы диссертации докладывались на разных научных конференциях: КГПУ имени Арабаева (Бишкек, 2002 г.); ОшГУ (Ош, 2001-2003 гг.); БатГУ (Кызыл-Кия, 2001-2017 гг.) и ФерГУ (Фергана, 2001 г.). Некоторые положения диссертации обсуждались также на семинарах: по уравнениям в частных производных при ОшГУ (г. Ош, 2012-2019 гг., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор А. Сопуев); на межвузовском научном семинаре по актуальным вопросам теории дифференциальных уравнений при ОшГУ (г.Ош, 2012-2019 гг., руководитель семинара - член-корр. НАН КР К. Алымкулов); на семинаре по дифференциальным уравнениям при ЖАГУ (г. Жалал-Абад, 2013-2019 гг., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор К.С. Алыбаев); на семинаре по дифференциальным уравнениям механики сплошных сред при СибГУ им. М. Ф. Решетнева (г. Красноярск, 2011 г., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор С. И. Сенашов).

Личный вклад соискателя. В совместных работах [1] - [6] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем существовании и единственности решений, получение основных результатов – автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 21 параграфов, выводов и библиографии из 172 наименований. Объем диссертации 118 страниц.

Пользуясь случаем, я выражаю благодарность своему научному руководителю доценту Т.К. Юлдашеву за постановку задач и постоянный интерес к данной работе. Я признателен также профессору С.И. Сенашову и доценту К.Х. Шабадикову за полезные советы при обсуждении моей диссертационной работы.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы и отмечена научная новизна работы, а также кратко изложено содержание глав диссертации.

Первая глава состоит из четырех параграфов. § 1.1 носит вспомогательный характер и содержит основные обозначения, определения и факты из функционального анализа и теории уравнений математической физики.

В § 1.2 приводится краткий обзор литературы по теме диссертации. В § 1.3 приводится краткий обзор результатов диссертации и сформулированы постановки смешанных задач. В § 1.4 приводится заключение по главе 1.

В главе 2 в прямоугольной области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x),x)\right) \qquad (1)$$

с начально-граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(t,x)_{|\,t\in(-\infty,0]}=\varphi_1(t,x),\; u(t,x)_{|\,t\in(T,\infty)}=0,\\ &u_t(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2(x),\; u_{tt}(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_3(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \qquad (3)$$

где $f(t,x,u\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=$

$=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$,

$0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Решение данной задачи разыскивается в виде ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x)\,,\quad (t,x)\in D, \tag{4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots$.

Определение 1. Если функция $u(t,x)\in \hat{W}_2^3(D)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right]-f\,\Phi\right\}dy\,dt=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0}dy$$

для любой пробной функции $\Phi(t,x)\in C^{3,4}(D)$, то она называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Согласно определению решение задачи (1)-(3) разлагается единственным образом в ряд Фурье по собственным функциям $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$ почти для всех $t\in D_T$. Если $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3), то имеет место разложение (4) почти при всех $t\in D_T$ и $a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)dy$, $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots$.

Теорема 1. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Отображение $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывно;
2. $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3) и $a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)dy$.

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (1)-(3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяют следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t)=\psi_n(t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y))\right)b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds, \tag{5}$$

где

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$G_n(t,s)=\mu_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],\ \mu_n=\left[\lambda_n(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Теорема 2. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{F_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\|F_1(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{F_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\|F_2(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

4. $\|\vec{\psi}(t)\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда ССНИУ (5) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\left\|\vec{a}^{k+1}(t)-\vec{a}^k(t)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\delta_1}{k!}\left[\max_{t\in D_T}\int_0^t F(s)ds\right]^k\exp\left\{\delta_2\max_{t\in D_T}\int_0^t F(s)ds\right\},$$

где $F(s)=2\|F_1(s,x)\|_{L_2(D_l)}+\Delta\left\|F_1(s,x)F_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}$, δ_1 и δ_2 - некоторые положительные постоянные.

Подставляя ССНИУ (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1)-(3):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left[\psi_n(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(s)))\right)b_n(y)G_n(t,s)dyds\right.. \qquad (6)$$

Теорема 3. Предположим, что выполняются условия теоремы 2. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (5), то ряд (6) будет слабо обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Смешанная задача (1)-(3) изучена и для случаев отклонений

$$\delta=\delta\left(t,x,\int_0^t K(t,s)Q\vec{a}(s)ds\right)\ \text{и}\ \delta=\delta\left(t,x,\int_0^t K\left(t,s,Q\vec{a}(s)\right)ds\right).$$

Методом суммирования Чезаро изучается существование слабого решения смешанной задачи (1)-(3). Как известно, что частичные суммы Чезаро тригонометрического ряда для любой непрерывной функции равномерно сходятся к ней. Поэтому представляет интерес искать слабое решение задачи (1)-(3) в виде

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)\,b_n(x)\,, \tag{7}$$

$b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x\,,\ \lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}\,.$

Подставляя ряд (7) в уравнение (1), получим следующую ССНИУ:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\cdot G_n(t,s)\,dy\,ds,$$

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$\overline{G}_n(t,s)=\overline{\mu}_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],$$

$$\overline{\mu}_n=\left[\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)\right]^{-1},\ b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x\,,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots\,.$$

Отсюда получим

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)b_n(x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)b_n(x)\big[\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\overline{G}_n(t,s)\,dy\,ds\,\big].$$

Теорема 4. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $f(t,x,u,\vartheta)$ при фиксированном $t\in D_T$ непрерывна по $(x,u,\vartheta)\in D_l\times R$, по x удовлетворяет условию Гельдера;

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{h(t)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\int_0^t h(s)\,ds<\infty$;

3. $\left\| f\left(t,x,u_0(t,x),u_0(\delta(t,x),x)\right)\right\|_C\le h(t)$;

4. $\psi_1(t,x)\in C^1(D)$, где $\psi_1(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\psi_n(t)b_n(x)$.

Тогда уравнение

$$u(t,x)=\psi_1(t,x)+\int_0^t \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right) f_n(u)b_n(x)\overline{G}_n(t,s)\,ds,$$

где $f_n(u)=\int_0^l f\left(s,y,u(t,y),u(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,ds$, имеет единственное решение в классе $C^1(D)$.

В главе 3 в прямоугольной области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),\int_0^t K(t,s)u(\delta(s,x),x)\,ds\right) \qquad (8)$$

со смешанными условиями

$$u(t,x)_{|\,t\in(-\infty;0]}=\varphi_1(t,x),\ u(t,x)_{|\,t\in(T.\infty)}=0,\ u_t(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2(x), \qquad (9)$$

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0,$$

(10)

где $f(t,x,u\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C(D_l)$, $0<K(t,s)\in C(D_T^2)$,

$\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0,\quad i=\overline{1,2},\ D\equiv D_T\times D_l,$

$D_T\equiv[0,T],\ D_l\equiv[0,l],\ 0<l<\infty,\ 0<T<\infty,\ \delta(t,x)\neq t.$

Решение данной задачи тоже разыскивается в виде ряда Фурье (4).

Определение 2. Если функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^2(D)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}H+2\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}H+\frac{\partial^4}{\partial y^4}H\right]-fH\right\}dy\,dt=$$

$$=\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial}{\partial t}H\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_2[H]_{t=0}\,dy$$

для любой пробной функции $H(t,x)\in C^{2,4}(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (8)-(10).

Теорема 5. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Отображение $fQ:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывно;

2. $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (8)-(10) и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)\,dy.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (8)-(10) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяет следующую ССНИУ:

$$a_n(t)=w_n(t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)Q\vec{a}\left(\delta(\theta,y)\right)d\theta\right)\times$$
$$\times b_n(y)P_n(t,s)\,d y\,d s,\quad t\in D_T\ , \tag{11}$$

где $w_n(t)=\left[\varphi_{1n}+t\left(\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{2n}\right)\right]\cdot e^{-\lambda_n^2 t},\quad P_n(t,s)=(t-s)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-s)}$.

Теорема 6. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)Q\vec{a}^0\left(\delta(\theta,x,Q\vec{a}^0(\theta))\right)d\theta\right)\right\|_{L_2(D_l)} d s\le\Delta<\infty$;

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{H(t,x)_{|u};F_1(t,x)_{|\vartheta}\right\}$,

где $\left\|H(t,x)\right\|_{L_2(D_l)}=\alpha_1(t)>0,\ \left\|F_1(t,x)\right\|_{L_2(D_l)}=\alpha_2(t)>0$;

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{F_2(t,x)_{|u}\right\}$,

где $\left\|F_1(t,x)\int\limits_0^t K(t,s)F_2(s,x)\,d s\right\|_{L_2(D_l)}=\alpha_3(t)>0$;

4. $\left\|\vec{w}(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty$.

Тогда ССНИУ (11) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Подставляя ССНИУ (11) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (8)-(10):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\Big[\ w_n(t)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q^{2,\eta}\vec{a}\left(\delta(s,y,Q\vec{a}(s))\right)\right)b_n(y)P_n(t,s)\,d y\,d s. \tag{12}$$

Теорема 7. Предположим, что выполняются условия теоремы 6. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (11), то ряд (12) будет слабо обобщенным решением смешанной задачи (8)-(10).

Смешанная задача (8)-(10) изучена и для случая отклонения

$$\delta=\delta\left(t,x,\int\limits_0^t K(t,s)Q\vec{a}(s)\,d s\right).$$

В главе 4 рассматриваются смешанные задачи для уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Сначала рассматриваются линейные интегральные неравенства с отражением аргумента.

Далее в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u\left(\delta(t,x,u(-t,x)),x\right)\right) \tag{13}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|\,t\in(-\infty;-T\,]}=0,\ u(0,x)=\varphi_1(x),\ \ u(t,x)_{|\,t\in(\,T,\infty\,)}=0,$$
$$u_{\,t}\,(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2\,(x),\, u_{\,tt}\,(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_3\,(x), \tag{14}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{\,xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{\,xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \tag{15}$$

где $f\,(t,x,u\,\vartheta)\in C(D\times R^2),\ \varphi_{\,i}\,(x\,)\in C^{\,4}\left(D_l\,\right),\ \varphi_{\,i}(x)_{|\,x=0}=\varphi_{\,i}(x)_{|\,x=l}=$

$=\varphi''_i\,(x)_{|\,x=0}=\varphi''_i\,(x)_{|\,x=l}=0,\ i=\overline{1,3}\ ,\ D\equiv D_T\times D_l\,,\,D_T\equiv\left[-T,T\,\right],\ D_l\equiv\left[\,0,l\,\right],$

$0<l<\infty,\,0<T<\infty,\,\delta(t,x)\neq t.$

Решение данной задачи разыскивается в виде ряда Фурье (4).

Определение 3. Если функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^3(D)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{l}\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\overline{\Phi}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial^4}{\partial y^4}\overline{\Phi}\right]-f\,\overline{\Phi}\right\}d\,y\,d\,t=$$
$$=-\int\limits_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\Phi}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}d\,y+$$
$$+\int\limits_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}d\,y-\int\limits_0^l\varphi_3\left[\overline{\Phi}\right]_{t=0}d\,y$$

для любой пробной функции $\overline{\Phi}(t,x)\in C^{\,3,4}\left(D\right)$, то она называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (13)-(15).

Теорема 8. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Отображение $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывно;
2. $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (13)-(15) и

$$a_n\,(t)=\int\limits_0^l u(t,y)b_n\,(y)\,d\,y\,.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (13)-(15) по собственным функциям $b_{\,n}\,(x)$ удовлетворяет следующую ССНИУ:

$$a_{\,n}\,(\,t)=\omega_n(t)+\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}\,(s),Q\vec{a}\,(\delta(s,y,Q\vec{a}\,(-s)))\right)\times$$
$$\times b_n(y)G_n(t,s)\,d\,y\,d\,s,\ t\in D_{\,T}\,, \tag{16}$$

где

$$\omega_{\,n}(t)=\frac{\lambda_{\,n}^{\,2}\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_{\,n}^{\,2}(1-\lambda_{\,n}^{\,2})}e^{-\lambda_{\,n}^{\,2}t}+\frac{\lambda_{\,n}^{\,3}\varphi_{1n}+\lambda_{\,n}(1+\lambda_{\,n})\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_{\,n}^{\,2}(1+\lambda_{\,n})}\,e^{\lambda_{\,n}t}+$$

$$+\frac{-\lambda_n^3\varphi_{1n}-\lambda_n(1-\lambda_n)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1-\lambda_n)}e^{-\lambda_n t},\ \ \mu_n=2\lambda_n(1-\lambda_n^2),$$

$$G_n(t,s)=\frac{1}{\mu_n}\left[-e^{-\lambda_n^2(t-s)}+2\left(ch\lambda_n(t-s)-\lambda_n sh\lambda_n(t-s)\right)\right].$$

Теорема 9. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\left|\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(-s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\right|\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{h_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\int\limits_0^t\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{h_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\int\limits_0^t\left\|h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

4. $\left\|\vec{\omega}(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда ССНИУ (16) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Подставляя ССНИУ (16) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (13)-(15):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left[\,\omega_n(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right)b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds\right.. \tag{17}$$

Теорема 10. Предположим, что выполняются условия теоремы 9. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (16), то ряд (17) будет слабо обобщенным решением смешанной задачи (13)-(15).

В главе 5 рассматриваются смешанные задачи для уравнений, содержащих суперпозицию параболического, гиперболического оператора и операторы смешанного типа.

В разделе 5.1 области D рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{18}$$

с условиями

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ u_t(t,x)|_{t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)|_{t=0}=\varphi_3(x), \tag{19}$$

$$\begin{gathered}u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0=\\=u_{xxxx}(t,x)_{|x=0}=u_{xxxx}(t,x)_{|x=l}=0,\end{gathered} \tag{20}$$

где $f(t,x,u(t,x))\in C(D\times R)$, $\varphi_i(x)\in C(\Omega_l)$,

$\varphi_i(x)|_{x=0} = \varphi_i(x)|_{x=l} = \varphi_i''(x)|_{x=0} = \varphi_i''(x)|_{x=l} = \varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0} =$
$= \varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l} = 0,\ i=\overline{1,3},\ D \equiv \Omega_T \times \Omega_l,\ \Omega_T \equiv (0,T),\ \Omega_l \equiv (0,l),\quad i=\overline{1,3}$,
$0<l<\infty,\ 0<T<\infty.$

Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x)\,,\quad (t,x)\in D, \tag{21}$$

где функции $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots$. удовлетворяют граничным условиям

$$b_n(0) = b_n(l) = b_n''(0) = b_n''(l) = b_n^{(IV)}(0) = b_n^{(IV)}(l) = 0\,.$$

Тогда из (21) для $a_n(t),\ n=1,2,\ldots$ получим следующую счетную систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} a_n^{III}(t) + \lambda_n^2 a_n^{II}(t) + \lambda_n^4 a_n^{I}(t) + \lambda_n^4 a_n(t) = \\ = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l f(t,x,\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(t)\cdot b_\nu(x)) b_n(x)dx \end{gathered} \tag{22}$$

где $a_n(t) = \int_0^l u(t,x) b_n(x)dx,\ n=1,2,\ldots$

Решая систему (22) методом вариации произвольных постоянных, получим следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t) = \psi_n(t) + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \int_0^l f(s,x,\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(s)\cdot b_\nu(x)) b_n(x) G_n(t,s,)dx\,ds,\ t\in \Omega_T\,, \tag{23}$$

Итак, изучение разрешимости смешанной задачи (18)-(20) свели к изучению однозначной разрешимости ССНИУ (23).

Теорема 11. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\| \ \vec{\psi}(t)\ \|_{B_2(T)} < \infty;$

2. $\int_0^t \left\| f\left(s,x,\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(s)\cdot b_\nu(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega_l)} ds = \Delta < \infty;$

3. $f(t,x,u) \in Lip\{q(t,x)|_u\},$

здесь

$$\int_0^t \left\| q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)} ds < \infty,\ \ \left\| q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)} \equiv \left\{ \int_0^l q^2(s,x)dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда ССНИУ (23) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Теорема доказывается методом последовательных приближений.

Теорема 12. Пусть $\vec{a}(t)$ является решением ССНИУ (23). Тогда последовательность функций $\{u(t,x)\}=\{Q\vec{a}^k(t)\}$ к функции $u(t,x)=Q\vec{a}(t)$, которая является единственным решением смешанной задачи (18)-(20).

В разделе 5.2 в области $D\equiv D_1\times D_2$ рассматривается уравнение

$$0=\begin{cases} u_{ttt}(t,x)+u_{xxx}(t,x), & (t,x)\in D_1, \\ u_{ttt}(t,x)-u_{ttt}(t,x), & (t,x)\in D_2 \end{cases} \tag{24}$$

с условиями

$$u(t,x)|_{t=-T}=\varphi_1(x),\ u(t,x)|_{t=T}=\varphi_2(x), u_t(t,x)|_{t=T}=\varphi_3(x), \tag{25}$$

$$u(t,x)|_{x=-1}=u(t,x)|_{x=0}=u(t,x)|_{x=1}=0, \tag{26}$$

где $D_1\equiv E_T^+\times E_0$, $D_2\equiv E_T^-\times E_0$, $E_T^-\equiv(-T,0)$, $E_T^+\equiv(0,T)$, $E_0\equiv(-1,1)$, $\varphi_i(x)\in C^4(E_0)$, $\varphi_i(x)_{|x=-1|}=\varphi_i(x)_{|x=0|}=\varphi_i(x)_{|x=1|}=0$, $i=\overline{1,3}.$

Задачу (24)-(26) будем изучать при следующих условиях склеивания:

$$u(+0,x)=u(-0,x), u_t(+0,x)=u_t(-0,x), u_{tt}(+0,x)=u_{tt}(-0,x). \tag{27}$$

Под решением уравнения (24) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^{3,3}(D_1\cup D_2)$, которая удовлетворяет уравнению (24) и условиям (25)-(27).

Нетривиальные решения данной задачи строятся в виде следующего ряда:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x). \tag{28}$$

В параграфе 5.3 в области $D\equiv D_1\times D_2$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+sign t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0 \tag{29}$$

с условиями

$$u(t,x)_{|t=-T}=\varphi_1(x), u(t,x)_{|t=T}=\varphi_2(x),\ u_t(t,x)_{|t=T}=\varphi_3(x), \tag{30}$$

$$\begin{aligned} u(t,x)|_{x=0}=u(t,x)|_{x=l}=u_{xx}(t,x)|_{x=0}=u_{xx}(t,x)|_{x=l}= \\ =u_{xxxx}(t,x)|_{x=0}=u_{xxxx}(t,x)|_{x=0}=0,\ t\in E_T, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\varphi_i(x)\in C^6(E_0)$, $\varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=$

$$=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l}=0,\ i=\overline{1,3}, D_1\equiv E_T^+\times E_0, D_2\equiv E_T^-\times E_0,$$

$$E_T^-\equiv(-T;0),\ E_T^+\equiv(0;T),\ E_0\equiv(0;l),\ 0<l<\infty,\ 0<T<\infty,$$

$0<\varepsilon$ - малый параметр.

Задачу (29)-(31) будем изучать при следующих условиях склеивания

$$u(+0,x)=u(-0,x),\ u_t(+0,x)=u_t(-0,x),\ u_{tt}(+0,x)=u_{tt}(-0,x), \tag{32}$$

при этом предположим, что

$$u(+0,0)=u(-0,0)=u(+0,l)=u(-0,l)=0.$$

Под решением уравнения (29) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^{3,3}(D_1\cup D_2)$, которая удовлетворяет уравнению (29) и условиям (30)-(32).

Решение данной задачи ищем в виде следующего ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x)\in D, \tag{33}$$

где функции $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}x,\ \lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2,\ n=1,2,...,$ удовлетворяют граничным условиям:

$$b_n(0)=b_n(l)=b_n''(0)=b_n''(l)=b_n^{(IV)}(0)=b_n^{(IV)}(l)=0.$$

Для определения коэффициентов A_{1n} и $B_{1n}, i=\overline{1,3}$ получим следующие представления:

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+A_{2n}e^{\sqrt{\lambda_n}t}+A_{3n}e^{-\sqrt{\lambda_n}t}\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x,\ t>0;$$

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{1n}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+B_{2n}\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_{3n}\sin\sqrt{\lambda_n}t\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x,\ \ t<0.$$

Определяются коэффициенты A_{1n} и $B_{1n},\ i=\overline{1,3}$ из условий (30) и (32).

Выводы

В данном диссертационном исследовании сформулирована и доказана однозначная обобщенная разрешимость смешанных задач: для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро–дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения. Также изучены вопросы разрешимости смешанных и краевых задач для других типов дифференциальных уравнений в частных производных.

В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы внесет вклад для развития теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частых производных четвертого порядка.

Доказательство теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач. Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

В работе получены следующие научные результаты:

1. Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения.

2. Определены достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения.

3. Найдены достаточные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

4. Разработаны достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.

5. Построено решение в виде ряда краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Разработаны достаточные условия разрешимости краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Дыйканов Г.А. О смешанной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – №2. – С. 164–169.
2. Дыйканов Г.А. Краевая задача для однородного эллиптико-гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Складнi системи i процеси. – 2010. – №1. – С. 19–24.
3. Дыйканов Г.А. О смешанной задаче для нелинейного уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы XIV межд. научн. конф., 10-12 ноября 2010 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2010. – Часть 2. – С. 465–466.
4. Дыйканов Г.А. Смешанная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с максимумами [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы XIV межд. научн. конф., 10-12 ноября 2011 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2011. – Часть 2. – С. 553–554.
5. Дыйканов Г.А. О разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. – 2011. – №1. – С. 48–52.
6. Дыйканов Г.А. Краевая задача для смешанного уравнения шестого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2011. - №1. - С. 52–54.
7. Дыйканов Г.А. Смешанная задача для одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2017. - № 2. - С. 41–48.
8. Дыйканов Г.А. О смешанной задаче для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отражающим отклонением [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2018. - № 4. - С. 9–17.
9. Дыйканов Г.А. Обобщенная разрешимость смешанной задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с нелинейным отклонением [Текст] / Г. А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2018. - № 4. - С. 17–25.

Дыйканов Гапар Аскаровичтин 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн «Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу сызыктуу эмес функционалдык-дифференциалдык теңдемелер үчүн аралаш маселелер» темасындагы диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Ачкыч сөздөр: Аралаш маселелер, баштапкы жана чек аралык шарттар, жалпыланган чечимдин жашашы, гиперболалык, параболалык жана эллипстик операторлор, интегралдык теңдеме, сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин санактык системасы, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөөнүн обьектиси: Төртүнчү тартиптеги параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын кармаган теңдемелер үчүн аралаш маселелер, параболалык оператордун квадраты, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясы.

Изилдөөнүн предмети: Параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын, параболалык оператордун квадратын, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясын кармап турган төртүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн аралаш маселелердин чечимдеринин жашашын жана жазгыздыгын изилдөө.

Изилдөөнүн максаты: Параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын, параболалык оператордун квадратын, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясын кармап турган төртүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн аралаш маселелердин бир маанилүү чечимдерге ээ болушунун коэффициенттик жетиштүү шарттардын тургузуу.

Изилдөөнүн методдору: Изилдөөдө интегралдык барабарсыздыктар, удаалаш жакындаштыруу методу, функционалдык анализдин жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теориясынын методдору колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: Параболалык жана гиперболалык операторлордун суперпозициясын жана сызыктуу эмес четтөөлөрдү кармап турган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер үчүн, параболалык оператордун квадратын кармап турган сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн, параболалык жана эллипстик операторлордун суперпозициясын жана сызыктуу эмес чагылтуучу четтөөлөрдү кармап турган сызыктуу эмес теңдемелер үчүн аралаш маселелердин бир маанилүү жалпыланган чечилүүсү биринчи жолу изилдеп үйрөнүлгөн.

Изилдөөлөрдүн теориялык жана практикалык маанилүүлүгү: Диссертациядагы алынган жыйынтыктар сызыктуу эмес төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин теориясын өнүктүрүүгө салым кошот.

Теоремалардын далилдөөлөрү конструктивдүү жана прикладдык маселердин сандык эсептөөлөрүндөгү алгоритмдердин түзүүгө өбөлгө түзөт.

Алынган жыйынтыктар сызыктуу эмес термелүүлөр теориясында жана автоматтык башкарып-түзөөлөрдө колдонулат.

РЕЗЮМЕ

Диссертационной работы Дыйканова Гапара Аскаровича на тему: "Смешанные задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Смешанные задачи, начальные и граничные условия, обобщенная разрешимость, гиперболический, параболический и эллиптические операторы, интегральные уравнения, счетные системы нелинейных интегральных уравнений, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: Смешанные задачи для уравнений четвертого порядка, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов, квадрат параболического оператора, суперпозиция параболического и эллиптического операторов.

Предмет исследования: Исследования существования и единственности решения смешанных задач для уравнений четвертого порядка, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов, квадрат параболического оператора и суперпозицию параболического и эллиптического операторов.

Цель исследования: Установление достаточных коэффициентных условий однозначной обобщенной разрешимости смешанных задач для уравнений четвертого порядка, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов, квадрат параболического оператора и суперпозицию параболического и эллиптического операторов.

Методы исследования: При исследовании были использованы методы интегральных неравенств, метод последовательных приближений, методы функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна исследования:

Впервые изучаются однозначная обобщенная разрешимость смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Теоретическое и практическое значения исследования: В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы внесет вклад в развитие теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Доказательства теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач.

Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

SUMMARY

The dissertation work of Dyikanov Gapar Askarovich on the topic: "Mixed problems for nonlinear fourth-order functional differential equations in partial derivatives" for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: Mixed problems, initial and boundary conditions, generalized solvability, hyperbolic, parabolic and elliptic operators, integral equations, countable systems of nonlinear integral equations, uniqueness of a solution, existence of a solution.

Object of research: Mixed problems for fourth-order equations containing a superposition of parabolic and hyperbolic operators, the square of a parabolic operator, the superposition of parabolic and elliptic operators.

Subject of research: Studies on the existence and uniqueness of the solution of mixed problems for fourth-order equations containing a superposition of parabolic and hyperbolic operators, the square of a parabolic operator, and a superposition of parabolic and elliptic operators.

Aim of research: To establish sufficient coefficient conditions for the unambiguous generalized solvability of mixed problems for equations of the fourth order containing a superposition of parabolic and hyperbolic operators, a square of a parabolic operator, and a superposition of parabolic and elliptic operators.

Methods of research: The study used the methods of integral inequalities, the method of successive approximations, the methods of functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Scientific novelty. The unique generalized solvability of mixed problems for nonlinear differential equations containing the superposition of parabolic and hyperbolic operators and nonlinear deviations are studied for the first time; for nonlinear integro-differential equations containing the square of a parabolic operator and nonlinear deviations; for nonlinear equations containing a superposition of parabolic and elliptic operators and nonlinear reflecting deviations.

Theoretical and practical implications of the study: Theoretically, the results of this dissertation will make a definite contribution to the development of the theory of nonlinear differential and integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order.

The proofs of the theorems are constructive and allow us to construct algorithms for the numerical calculations of applied problems.

The results obtained can be applied in the theory of nonlinear oscillations and automatic control.

Подписано к печати: 24.06.2019 г.

Формат: 60x84 1/16   Объем: 1,4 п.л.
Заказ: № 21

Компьютерные услуги “Book-дизайн”
г. Ош, ул. И. Сулайманова №3.