МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАТКЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КЫЗЫЛ-КИЙСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕКИЙ ИНСИТУТ

УДК 517.968.74

ДЫЙКАНОВ ГАПАР АСКАРОВИЧ

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Юлдашев Т. К.

Кызыл-Кия – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Теория дифференциальных уравнений в частных производных исторически возникла и развивалась на основе изучения задач математической физики. Это объясняется тем фактом, что многие задачи математической физики приводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Основные уравнения математической физики – это волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа. Они имеют много приложений в математической физике. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике и т.д. (см. напр. [69, 116]).

Задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, которые по одной переменной (по времени) являются начальными, а по другим переменным (по пространственным переменным) - граничными, часто называются смешанными. Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [6, 9]. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Смешанные задачи часто встречается в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков [4].

Дифференциальные уравнения в частных производных четвертого порядка имеют большое количество приложений в разной отрасли науки и техники (см., напр. [13, 16, 109, 120, 126, 127, 160, 164]).

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом находят много приложений: в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении технических, экономических, экологических и других проблем [3, 23, 64, 65, 86, 88, 98, 123, 134, 158].

Уравнения с запаздывающим аргументом появляются всякий раз, когда в рассматриваемой физической или технической задаче сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, предшествующий данный [86, 134].

Большой вклад в развитие теории функционально-дифференциальных уравнений внесли Н. В. Азбелов, Б. И. Ананьев, Л. А. Бекларян, С. А. Брыкалов, А. И. Булгаков, Ю. А. Ведь, В. Б. Колмановский, Н. Н. Красовский, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, М. И. Иманалиев, В. П. Максимов, А. А. Мартынюк, Г. И. Марчук, Ю. А. Митропольский, А. Д. Мышкис, С. Б. Норкин, В. Р. Носов, В. Г. Пименов, Л. Ф. Рахматуллина, В. П. Рубаник, А. М. Самойленко, Дж. Хейл, В. Н. Шевело, Л. Э. Эльсгольц, М. Г. Юмагулов и многие другие ученые.

В последние 35 лет начали изучать так называемые дифференциальные уравнения с отражающим аргументом, в правой части которых неизвестная функция зависит от « - t ». Такие уравнения рассматривались в работах А. Р. Автабизаде, Ю. К. Хянг, Дж. Вайнер, Ю. А. Ведь, М. Т. Матраимов и других.

Дифференциальные уравнения с отражающим аргументом имеет ряд особенностей. Например, уравнение $x'(t) = a\,x(-t),\quad a = const \neq 0,\ t \in R$ с начальным условием $x(t_0) = x^0,\, t_0 = (4k-1)\pi/(4a),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ при $x^0 \neq 0$ не имеет решение, а при $x^0 = 0$ имеет бесконечное число решений $x(t) = (\cos at + \sin at)\cdot C,\quad C = const$, что является общим решением данного уравнения [31].

В данной диссертационной работе изучаются смешанные задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, содержащие нелинейные отклонения в аргументе.

Целью диссертационной работы является изучение следующих вопросов:

1. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения;

2. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе;

3. Установить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

4. Разработать достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.

5. Построить решения в виде ряда краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Разработать достаточные условия разрешимости краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

Задачи диссертационной работы:

1. Доказать однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения в аргументе;

2. Определить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе;

3. Находить достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

4. Определить достаточные условия разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.

5. Построить решения в виде ряда краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Разработать достаточные условия разрешимости краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

Методика исследования. Использованы: основные теоремы математического анализа, неравенство Гельдера, неравенство Минковского и неравенство Бесселя, метод последовательных приближений в банаховом пространстве и методы интегральных неравенств.

Научная новизна диссертации. Впервые изучаются однозначная слабо обобщенная разрешимость смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения; для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения.

Теоретическая значимость диссертации. В теоретическом отношении результаты данной диссертационной работы являются основами развития теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Практическая значимость диссертации. Доказательства теорем конструктивны и позволяют построить алгоритмы при численных расчетах прикладных задач. Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных колебаний и автоматического регулирования.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Результаты диссертации опубликовались в 7 статьях в рецензируемых научных журналах [49] – [51], [150] – [151], [154] – [155] из перечня ВАК КР и в 2 статьях [152] – [153] в материалах международных научных конференций «Решетневские чтения» (г. Красноярск). Все публикации входят в перечень РИНЦ.

Апробация результатов диссертации. Материалы диссертации докладывались на разных научных конференциях: КГПУ имени Арабаева (Бишкек, 2002 г.); ОшГУ (Ош, 2001-2003 гг.); БатГУ (Кызыл-Кия, 2001-2017 гг.) и ФерГУ (Фергана, 2001 г.). Некоторые положения диссертации обсуждались также на семинарах: по уравнениям в частных производных при ОшГУ (г. Ош, 2012-2019 гг., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор А. Сопуев); на межвузовском научном семинаре по актуальным вопросам теории дифференциальных уравнений при ОшГУ (г.Ош, 2012-2019 гг., руководитель семинара - член-корр. НАН КР К. Алымкулов); на семинаре по дифференциальным уравнениям при ЖАГУ (г. Жалал-Абад, 2013-2019 гг., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор К. С. Алыбаев); на семинаре по дифференциальным уравнениям механики сплошных сред при СибГУ им. М. Ф. Решетнева (г. Красноярск, 2011 г., руководитель семинара - доктор физ.-мат. наук, профессор С. И. Сенашов).

Личный вклад соискателя. Во всех публикациях в соавторстве, включенных в диссертацию, реализация поставленных задач принадлежит диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 21 параграфов и библиографии из 172 наименований. Объем диссертации 118 страниц.

Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения в аргументе;

2. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе;

3. Установление достаточных коэффициентных условий однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

4. Определение достаточных условий разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции.

5. Построение решения в виде ряда краевой задачи для уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Обоснование разрешимость однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

В первой главе приводятся вспомогательные понятия и утверждения, обзор литературы и результатов диссертации.

Во второй главе изучается слабо обобщенная разрешимость смешанной задачи для дифференциальных уравнений, содержащие суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения в аргументе.

В третьей главе изучается слабо обобщенная разрешимость смешанной задачи для интегро-дифференциальных уравнений, содержащие квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе.

В четвертой главе изучаются интегральные неравенства с отражением аргумента и слабо обобщенная разрешимость смешанной задачи для уравнения, содержащие суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие в аргументе.

В пятой главе установлена разрешимость смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции, построено решение в виде ряда краевой задачи для однородного дифференциального уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа и доказана разрешимость краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего параболический оператор и эллиптико-гиперболический оператор смешанного типа в суперпозиции.

Пользуясь случаем, я выражаю благодарность своему научному руководителю доценту Т. К. Юлдашеву за постановку задач и постоянный интерес к данной работе. Я признателен также профессору С. И. Сенашову и доценту К. Х. Шабадикову за полезные советы при обсуждении результаты данной диссертационной работы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ

§ 1.1. Вспомогательные понятия и утверждения

Этот параграф носит вспомогательный характер и содержит основные обозначения, определения и факты из функционального анализа и теории уравнений математической физики.

1. Пространство непрерывных функций. Множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0, T]$, в котором введена норма

$$\| x(t) \| = \max_{0 \le t \le T} | x(t) |,$$

называется пространством непрерывных функций и обозначается $C[0;T]$. Аналогично определяется пространство $k-$раз непрерывно дифференцируемых функций $C^k[0;T]$.

2. Пространство функций с интегрируемой $p-$й степенью, $p>1$. Функция $f(t)$, определенная и измеримая на отрезке $[0, T]$, называется принадлежащей с суммируемой (интегрируемой) $p-$й степенью или принадлежащей классу Лебега $L_p(0,T)$, если вводится норма следующим образом

$$\| f(t) \|_{L_p(0,T)} = \left(\int_0^T | f(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Пространство числовых последовательностей ℓ_p. Пусть дано множество числовых последовательностей $x = \{\xi_n\}$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$. Обозначим это множество через ℓ_p. Если в нем вводим норму так

$$\| x \|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

то полученное пространство называется пространством ℓ_p.

4. Класс функций $Bnd(M)$. Класс функций, ограниченных по норме положительным числом M , обозначается через $Bnd(M)$.

5. Класс функций $Lip\left\{L_{|u,\vartheta,\ldots}\right\}$. Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u,\vartheta,\ldots$ с положительным коэффициентом L, обозначается через $Lip\left\{L_{|u,\vartheta,\ldots}\right\}$. А для функций одной переменной индекс опускается.

6. Пространство $B_p(T)$. Рассматривается множество

$$\left\{\vec{a}(t)=(a_n(t))\middle| a_n(t)\in C(D_T),\ n=1,2,\ldots\right\},\ D_T\equiv[0;T],$$

элементы которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left|a_n(t)\right|^p<\infty .$$

Это множество становится пространством типа Банаха и обозначается через $B_p(T)$, если снабжается нормой

$$\left\|\vec{a}(t)\right\|_{B_p(T)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left|a_n(t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $B_p(T)$ будет пространством типа Банаха. В этом множестве используется также обозначение

$$\left\|\vec{a}(t)\right\|_{B_p(t)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n(t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

7. Пространство $E_p(D)$. Пусть $D\equiv D_T\times D_l$, $D_l\equiv[0,l]$ и $b_n(x)-$ собственные функции положительно определенного, самосопряженного оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ с чистоточечным спектром, λ_n^2-соответствующие собственные значения. Для каждого элемента $\vec{a}(t)\in B_p(T)$ определим оператор Q следующим образом:

$$Q\vec{a}(t)=u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(x).$$

Обозначим через $E_p(D)$ множество значений оператора Q. Здесь $Q: B_p(T) \to E_p(D)$.

Рассмотрим непрерывную по совокупности своих аргументов функцию $f(t,x,u)$. Она порождает нелинейный оператор fQ. Оператор fQ действует из пространства $B_p(T)$ в пространство $L_p(D)$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l f\left(t,y,u(t,y)\right) b_n(y)\,dy \cdot b_n(x)$$

есть ряд Фурье по собственным функциям оператора fQ.

8. Пространство $\hat{W}_p^k(D)$**.** Следуя [52, 53], определяется слабо обобщенное решение смешанных задач. Обозначается через $\hat{W}_p^k(D)$ класс непрерывных функций $u(t,x)$ двух переменных в замкнутом прямоугольнике D и имеющих в нем частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t}$, ..., $\dfrac{\partial^{k-1} U(t,x)}{\partial t^{k-1}}$, каждая из которых принадлежат не только $L_p(D)$, но и принадлежат $L_p(D_l)$ при фиксированном $t \in D_T$ и принадлежат $L_p(D_T)$ при фиксированном $x \in D_l$, где

$$L_{p,q}(D) = \left\{ u(t,x): \left[\int_0^T \left(\int_0^l |u(t,x)|^p\,dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Когда $q = 1$ или $p = 1$, множество $L_{p,q}(D)$ пишется, соответственно $L_p(D_l)$ или $L_q(D_T)$.

Пространство $\hat{W}_p^k(D)$ всюду плотно в пространстве $L_{p,q}(D)$. Для функций из $\hat{W}_p^k(D)$справедливы соотношения:

$\lim\limits_{t \to T} \int_0^l \Phi(t,x)\,dx = 0$ при $k = 1$;

$\lim\limits_{t \to T} \int_0^l \Phi(t,x)\,dx = \lim\limits_{t \to T} \int_0^l \dfrac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}\,dx = 0$ при $k = 2$;

$$\lim_{t\to T}\int_0^l \Phi(t,x)\,dx=\lim_{t\to T}\int_0^l \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}\,dx=\lim_{t\to T}\int_0^l \frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t^2}\,dx=0 \text{ при } k=3.$$

Аналогично определяется соотношение при $k=4$.

9. Оператор $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Оператор $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ имеет полную ортонормированную систему собственных функций в $L_2(D_l)$, причем множество собственных функций $b_n(x)$ ограничено в совокупности, т.е. существует положительное число M такое, что для всех $n=1,2,3,...$ имеет место оценка $\left|b_n(x)\right|\le M$ и для собственных значений сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$, где λ_n^2- собственные значения, соответствующие собственным функция $b_n(x)$ оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и такие, что $0<\lambda_n<\lambda_{n+1}$.

10. Неравенство Гельдера

Утверждение 1.1.1. Если $f(t)\in L_p(0,T),\ p>1$ и $g(t)\in L_q(0,T),\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то произведение $f(t)\cdot g(t)-$ суммируемая на отрезке $[0,T]$ функция и имеет место оценка

$$\int_0^T |f(t)\cdot g(t)|\,dt\le\left(\int_0^T |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_0^T |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Утверждение 1.1.2. Если $x=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell_p$, $p>1$ и $y=\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell_q$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i\cdot\zeta_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\zeta_i\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

11. Неравенство Минковского

Утверждение 1.1.3. Если $f(t),g(t)\in L_p(0,T)$, то имеет место оценка

$$\left(\int_0^T |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^T |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^T |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Утверждение 1.1.4. Если $x=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}, y=\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}\in \ell_p$, то имеет место оценка

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i+\zeta_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\zeta_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

12. Неравенство Бесселя

Утверждение 1.1.5. Если $f(x)\in L_p(0,l)$, $f_n=\int_0^l f(y)\cdot b_n(y)\,dy-$ коэффициент Фурье и $b_n(x)$ образует полную систему собственных функций в $L_p(0,l)$, то имеет место оценка

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f(y)\right|\cdot\left|b_n(y)\right|dy\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le\left\{\int_0^l |f(y)|^p\,dy\right\}^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_{L_p(0;l)}.$$

13. Линейные интегральные неравенства

Утверждение 1.1.6 (Гронуолла). Если для функции $0\le u(t)\in C[a;\infty)$ и постоянных $C\ge 0$, $K\ge 0$ справедливо неравенство

$$u(t)\le C+K\int_a^t u(s)\,ds\,,$$

то имеет место оценка

$$u(t)\le C\cdot e^{K(t-a)}.$$

Утверждение 1.1.7 (Гронуолла-Беллмана). Если для функций $0\le u(t)\in C[a;\infty)$, $0\le g(t)\in C[a;\infty)$ и постоянного числа $C\ge 0$ справедливо неравенство

$$u(t) \le C + \int_a^t g(s) \cdot u(s)\, d\, s\ ,$$

то имеет место оценка

$$u(t) \le C \cdot \exp\left\{ \int_a^t g(s)\, d\, s \right\}.$$

Утверждение 1.1.8. Если для функций
$0 \le u(t),\, f(t), \alpha(t),\, \beta(t) \in C\left[a; \infty\right)$ и справедливо неравенство

$$u(t) \le f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s) \cdot u(s)\, d\, s\ ,$$

то имеет место оценка

$$u(t) \le f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s) f(s) \exp\left\{ \int_a^t \beta(\theta) \alpha(\theta)\, d\, \theta \right\} d\, s\ .$$

§ 1.2. Обзор литературы

При построении решений нелинейных уравнений математической физики иногда приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными решениями. Исследованию точных решений дифференциальных уравнений в частных производных посвящены многочисленные работы многих авторов, в частности работы В. К. Андреева, О. В. Капцова, В. В. Пухначева, А. А. Родионова [8], С. Н. Антонцева, А. В. Кажихова, В. Н. Монахова [9], Д. Колтон В. Н. Монахова [66]. При этом авторы используют в основном методы группового анализа и обратной задачи рассеяния. Кроме того, в теории тепло- и массопереноса и в гидродинамике часто используют и другие методы: прямой метод Кларксона-Крускала, метод дифференциальных связей, метод обобщенного разделения переменных, метод функционального разделения переменных и прочие.

Для однородного волнового уравнения наилучшие условия разрешимости были получены В. А. Стекловым [114]. Достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения предложены В. П. Михайловым [83].

По классической разрешимости смешанной задачи для уравнения Шредингера можно указать результаты исследования В. С. Владимирова [34] и О. А. Ладыженской со своими учениками [71, 72]. Для неоднородного уравнения теплопроводности достаточные условия разрешимости смешанной задачи получены в работах В. П. Михайлова [83] и других. В. А. Чернятиным [132] обоснован подход к применению метода Фурье, основанный на отказе от почленного дифференцирования формальных рядов и замене его непосредственным суммированием их с функциями с нужными дифференциальными свойствами.

Работы И. В. Скрыпника посвящены изучению поведения решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений вблизи негладкой границы и в семействе перфорированных областей. Основой для получения результатов явились точные оценки решений модельных нелинейных задач, характеризующие поточечное поведение решений [110].

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка параболического и гиперболического типов достаточно хорошо изучены в работах В. А. Ильина [52], В. А. Ильина, Е. И. Моисеева [53, 54]. Е. И. Моисеев, М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов изучали спектральные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [85, 103, 104].

Т. Д. Джураев, Б. В. Логинов, И. А. Малюгина изучали спектральные задачи для некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков [44]. Т. Д. Джураев, А. Сопуев, Ю. П. Апаков и их ученики изучают смешанные и краевые задачи для дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков [10, 12, 45, 93, 113].

Б. С. Аблабеков, А. Р. Асанов и А. К. Курманбаева изучали обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [1, 2]. О. А. Конопелько в [67] изучает граничную задачу для уравнения четвертого порядка составного типа. В. И. Корзюк, О. А.

Конопелько изучали разрешимость граничных задач в цилиндрических областях для уравнения составного типа четвертого порядка [68].

А. Б. Бекиев изучает разрешимость краевой задачи для дифференциальных уравнений вида [18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f(t,x),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f(t,x).$$

В 1958 году Г. И. Чандиров методом Фурье разделения переменных рассматривал уравнение [131]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(t,x,u)$$

с начальными

$$u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x)$$

и граничными

$$u(t,0)=u(t,\pi)=0$$

условиями. Он исследовал существование, единственность и корректную разрешимость решений данной смешанной задачи.

В 1984 году К.Х. Шабадиков рассматривал уравнение [124]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+F(t,x,u)$$

с начальными

$$u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x)$$

и граничными

$$u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0$$

условиями. Он установил достаточные условия существования различного вида решений возмущенной и невозмущенной задач; выяснил влияние параметра возмущенной задачи на данные для принадлежности её решения классу решений невозмущенной задачи.

В работах [136-140] Т. К. Юлдашев изучал смешанные задачи для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. А в работах [141-146] он изучал интегро-дифференциальные уравнения в частных производных третьего и четвертого порядков с вырожденным ядром.

§ 1.3. Обзор результатов диссертации

В главе 2 в прямоугольной области D рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x),x)\right) \qquad (1.3.1)$$

с начально-граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(t,x)_{|\, t\in(-\infty,0]}=\varphi_1(t,x),\ u(t,x)_{|\, t\in(T,\infty)}=0,\\ &u_t(t,x)_{|\, t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|\, t=0}=\varphi_3(x), \end{aligned} \qquad (1.3.2)$$

$$u(t,x)_{|\, x=0}=u(t,x)_{|\, x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\, x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\, x=l}=0, \qquad (1.3.3)$$

где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|\, x=0}=\varphi_i(x)_{|\, x=l}=$

$=\varphi''_i(x)_{|\, x=0}=\varphi''_i(x)_{|\, x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$,

$D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Решение данной смешанной задачи (1.3.1)- (1.3.3) разыскивается в виде ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(x),\quad (t,x)\in D, \qquad (1.3.4)$$

где $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$.

Заметим, что функции $b_n(x)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$b_n(0)=b_n(l)=b''_n(0)=b''_n(l)=0.$$

Следовательно, функция, определенная с помощью ряда (1.3.4), формально удовлетворяет граничным условиям (1.3.3).

Определение 1.3.1. Функция $u(t,x)\in \hat{W}_2^3(D)$ называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3), если она для любой пробной функции $\Phi(t,x)\in C^{3,4}(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right]-f\,\Phi\right\}dy\,dt=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0}dy\,.$$

Согласно этому определению решение смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3) единственным образом разлагается в ряд Фурье по собственным функциям $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,...$ почти для всех $t\in D_T$. Таким образом, если $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3), то имеет место разложение (1.3.4) почти при всех $t\in D_T$ и $a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)dy$, $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$.

Теорема 1.3. 1. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывен;
2. $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3) и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)dy\,.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяют следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t)=\psi_n(t)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y))\right)b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds,\ \ t\in D_T, \qquad (1.3.5)$$

в котором

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$G_n(t,s)=\mu_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],\ \ \mu_n=\left[\lambda_n(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Теорема 1.3.2. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t\in D_T}\int_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{F_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\max\limits_{t\in D_T}\int_0^t\|F_1(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{F_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\max\limits_{t\in D_T}\int_0^t\|F_2(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

4. $\|\vec{\psi}(t)\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда счётная система (1.3.5) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Кроме того, справедлива оценка

$$\left\|\vec{a}^{k+1}(t)-\vec{a}^k(t)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\delta_1}{k!}\left[\max_{t\in D_T}\int_0^t F(s)\,ds\right]^k\exp\left\{\delta_2\max_{t\in D_T}\int_0^t F(s)\,ds\right\},$$

где $F(s)=2\|F_1(s,x)\|_{L_2(D_l)}+\Delta\|F_1(s,x)F_2(s,x)\|_{L_2(D_l)}$, δ_1 и δ_2 - некоторые положительные постоянные.

Подстановка ССНИУ (1.3.5) в ряд (1.3.4), даёт нам формальное решение смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\Big[\psi_n(t)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\big(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(s)))\big)b_n(y)G_n(t,s)\,d\,y\,d\,s\Big]. \qquad (1.3.6)$$

Ряд (1.3.6) пока мы называем формальным решением смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3), потому что мы ещё не доказали абсолютную и равномерную сходимость этого ряда (1.3.6).

Теорема 1.3.3. Предположим, что выполняются все условия теоремы 1.3.2. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (1.3.5), то ряд (1.3.6) будет решением смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3).

Смешанная задача (1.3.1)-(1.3.3) изучена и для случаев отклонений

$$\delta=\delta\left(t,x,\int_0^t K(t,s)Q\vec{a}(s)\,d\,s\right) \text{ и } \delta=\delta\left(t,x,\int_0^t K\big(t,s,Q\vec{a}(s)\big)d\,s\right).$$

Методом суммирования Чезаро изучается существование слабого решения смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3). Как известно, что частичные суммы Чезаро тригонометрического ряда для любой непрерывной функции равномерно сходятся к ней. Поэтому разыскивается слабое решение смешанной задачи (1.3.1)-(1.3.3) в виде

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)\,b_n(x), \qquad (1.3.7)$$

$$b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=\overline{1,k}.$$

Подставляя ряд (1.3.7) в заданное дифференциальное уравнение (1.3.1), получим следующую ССНИУ:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\cdot G_n(t,s)\,d\,y\,d\,s,$$

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$\overline{G}_n(t,s)=\overline{\mu}_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],$$

$$\overline{\mu}_n=\left[\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)\right]^{-1},\ b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots .$$

Отсюда получаем, что

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)b_n(x)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)b_n(x)\Big[\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\overline{G}_n(t,s)\,dy\,ds\Big].$$

Уже знаем, что функция $f(t,x,u,\vartheta)$ порождает нелинейный оператор fQ и этот оператор fQ действует из пространства $B_2(T)$ в пространство $L_2(D)$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l f\big(t,y,u(t,y),u(\delta(t,y),y)\big)b_n(y)\,dy\,b_n(x)$$

есть ряд Фурье по собственным функциям оператора fQ.

Теорема 1.3.4. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $f(t,x,u,\vartheta)$ при фиксированном $t\in D_T$ непрерывна по $(x,u,\vartheta)\in D_l\times R$, по x удовлетворяет условию Гельдера;

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\{h(t)\,|_{u,\vartheta}\}$, где $\int_0^t h(s)\,ds<\infty$;

3. $\left\| f\left(t,x,u_0(t,x),u_0(\delta(t,x),x)\right)\right\|_C \le h(t);$

4. $\psi_1(t,x)\in C^1(D),$ где $\psi_1(t,x)=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}\left(1-\dfrac{n-1}{k}\right)\psi_n(t)b_n(x)$.

Тогда уравнение

$$u(t,x)=\psi_1(t,x)+\int\limits_0^t\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)f_n(u)b_n(x)\overline{G}_n(t,s)\,ds,$$

где $f_n(u)=\int\limits_0^l f\left(s,y,u(t,y),u(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,ds$, имеет единственное решение в классе функций $C^1(D)$.

В главе 3 в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=$$

$$=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t K(t,s)u(\delta(s,x),x)\,ds\right) \tag{1.3.8}$$

со смешанными условиями

$$u(t,x)_{|\,t\in(-\infty;0]}=\varphi_1(t,x),\ u(t,x)_{|\,t\in(T.\infty)}=0,\ u_t(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2(x), \tag{1.3.9}$$

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \tag{1.3.10}$$

где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times R^2),\ \varphi_i(x)\in C(D_l),\ 0<K(t,s)\in C(D_T^2),$

$\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0,\quad i=\overline{1,2},\ D\equiv D_T\times D_l,$

$D_T\equiv[0,T],\ D_l\equiv[0,l],\ 0<l<\infty,\ 0<T<\infty,\ \delta(t,x)\neq t.$

Решение данной задачи также разыскивается в виде ряда Фурье (1.3.4).

Определение 1.3.2. Функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^2(D)$ называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.8)-(1.3.10), если она для любой пробной функции $H(t,x)\in C^{2,4}(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l \left\{ u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}H + 2\frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2}H + \frac{\partial^4}{\partial y^4}H \right] - f\,H \right\} dy\,dt =$$

$$= \int_0^l \varphi_1 \left[\frac{\partial}{\partial t}H \right]_{t=0} dy - \int_0^l \varphi_2 \left[H \right]_{t=0} dy.$$

Теорема 1.3.5. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $f\,Q : B_2(T) \to L_2(D)$ непрерывен;

2. $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.8)-(1.3.10) и

$$a_n(t) = \int_0^l u(t,y) b_n(y)\,dy.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (1.3.8)-(1.3.10) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t) = w_n(t) + \int_0^t\int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), \int_0^s K(s,\theta) Q\vec{a}\left(\delta(\theta,y)\right) d\theta \right) \times$$

$$\times b_n(y) P_n(t,s)\,dy\,ds, \quad t \in D_T, \qquad (1.3.11)$$

где

$$w_n(t) = \left[\varphi_{1n} + t\left(\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{2n} \right) \right] \cdot e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$P_n(t,s) = (t-s) \cdot e^{-\lambda_n^2 (t-s)}.$$

Теорема 1.3.6. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t\in D_T} \int_0^t \left\| f\left(s, x, Q\vec{a}^0(s), \int_0^s K(s,\theta) Q\vec{a}^0\left(\delta(\theta, x, Q\vec{a}^0(\theta))\right) d\theta \right) \right\|_{L_2(D_l)} ds \le \Delta < \infty;$

2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\left\{ H(t,x)_{|u}; F_1(t,x)_{|\vartheta} \right\},$

где $\left\| H(t,x) \right\|_{L_2(D_l)} = \alpha_1(t) > 0,$ $\left\| F_1(t,x) \right\|_{L_2(D_l)} = \alpha_2(t) > 0;$

3. $\delta(t,x,u) \in Lip\left\{ F_2(t,x)_{|u} \right\},$

где $\left\| F_1(t,x)\int\limits_0^t K(t,s)F_2(s,x)\,ds \right\|_{L_2(D_l)} = \alpha_3(t) > 0;$

4. $\left\| \vec{w}(t) \right\|_{B_2(T)} < \infty.$

Тогда счётная система (1.3.11) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Подставляя представление (1.3.11) в ряд Фурье (1.3.4), получаем формальное решение смешанной задачи (1.3.8)-(1.3.10):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\Big[w_n(t) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q^{2,\eta}\vec{a}\left(\delta(s,y,Q\vec{a}(s))\right)\right)b_n(y)P_n(t,s)\,dy\,ds\Big]. \quad (1.3.12)$$

Теорема 1.3.7. Предположим, что выполняются все условия теоремы 1.3.6. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (1.3.11), то ряд (1.3.12) будет решением смешанной задачи (1.3.8)-(1.3.10).

Смешанная задача (1.3.8)-(1.3.10) изучена и для случая отклонения

$$\delta = \delta\left(t,x,\int\limits_0^t K(t,s)Q\vec{a}(s)\,ds\right).$$

В главе 4 рассматриваются смешанные задачи для дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

Сначала рассматриваются линейные интегральные неравенства с отражением аргумента. Далее, в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) =$$

$$= f\left(t,x,u(t,x),u\left(\delta(t,x,u(-t,x)),x\right)\right) \quad (1.3.13)$$

с начальными

$$u(t,x)_{|\,t\in(-\infty;-T\,]}=0,\ u(0,x)=\varphi_1(x),\ \ u(t,x)_{|\,t\in(\,T,\infty\,)}=0,$$
$$u_{\,t}\,(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_2\,(x),\,u_{\,tt}\,(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_3\,(x), \tag{1.3.14}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{\,xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{\,xx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \tag{1.3.15}$$

где $f\,(t,x,u\,\vartheta)\in C(D\times R^2),\ \varphi_i(x)\in C^4\big(D_l\big),\ \varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=$

$=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0,\ i=\overline{1,3}\ ,\ D\equiv D_T\times D_l\,,\,D_T\equiv\left[-T,T\,\right],$

$D_l\equiv\left[\,0,l\,\right],\,0<l<\infty,\,0<T<\infty,\,\delta(t,x)\neq t.$

Решение данной смешанной задачи также разыскивается в виде ряда Фурье (1.3.4).

Определение 1.3.3. Функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^3(D)$ называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.13)-(1.3.15), если она для любой пробной функции $\overline{\Phi}(t,x)\in C^{3,4}\big(D\big)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_{-T}^{T}\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\overline{\Phi}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial^4}{\partial y^4}\overline{\Phi}\right]-f\,\overline{\Phi}\right\}d\,y\,d\,t=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\Phi}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}d\,y+$$

$$+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}d\,y-\int_0^l\varphi_3\left[\overline{\Phi}\right]_{t=0}d\,y\,.$$

Теорема 1.3.8. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывен;

2. $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (1.3.13)-(1.3.15) и

$$a_n\,(t)=\int_0^l u(t,y)b_n\,(y)d\,y\,.$$

Тогда коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (1.3.13)-(1.3.15). по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t) = \omega_n(t) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s, y, Q\vec{a}(-s)))\right) \times$$

$$\times b_n(y) G_n(t,s)\, d\,y\, d\,s,\ t \in D_T, \qquad (1.3.16)$$

где

$$\omega_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2(1-\lambda_n^2)} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^3 \varphi_{1n} + \lambda_n(1+\lambda_n)\varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1+\lambda_n)} e^{\lambda_n t} +$$

$$+ \frac{-\lambda_n^3 \varphi_{1n} - \lambda_n(1-\lambda_n)\varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1-\lambda_n)} e^{-\lambda_n t},\ \ \mu_n = 2\lambda_n(1-\lambda_n^2),$$

$$G_n(t,s) = \frac{1}{\mu_n}\left[-e^{-\lambda_n^2(t-s)} + 2\left(ch\lambda_n(t-s) - \lambda_n sh\lambda_n(t-s)\right)\right].$$

Теорема 1.3.9. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\max\limits_{t \in D_T} \int\limits_0^t \left\| f\left(s, x, Q\vec{a}^0(s), Q\vec{a}^0(\delta(s, x, Q\vec{a}^0(-s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)} d\,s \le \Delta < \infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta) \in Lip\left\{h_1(t,x)\,|_{u,\vartheta}\right\}$, где $\int\limits_0^t \left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} d\,s < \infty;$

3. $\delta(t,x,u) \in Lip\left\{h_2(t,x)\,|_{u}\right\}$, где $\int\limits_0^t \left\|h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} d\,s < \infty;$

4. $\left\|\vec{\omega}(t)\right\|_{B_2(T)} < \infty.$

Тогда счётная система (1.3.16) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Подставляя ССНИУ (1.3.16) в ряд (1.3.4), получим формальное решение смешанной задачи (1.3.13)-(1.3.15):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\left[\omega_n(t) + \right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right)b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds\Bigg]. \qquad (1.3.17)$$

Теорема 1.3.10. Предположим, что выполняются все условия теоремы 1.3.9. Если $\vec{a}(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (1.3.16), то ряд (1.3.17) будет решением смешанной задачи (1.3.13)-(1.3.15).

В главе 5 рассматриваются смешанные и краевые задачи для дифференциальных уравнений третьего и шестого порядков.

В параграфе 5.1 в прямоугольной области D рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x)\right) \qquad (1.3.18)$$

с начально-граничными условиями

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ u_t(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ u_{tt}(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x), \qquad (1.3.19)$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=$$

$$=u_{xxxx}(t,x)_{|x=0}=u_{xxxx}(t,x)_{|x=l}=0, \qquad (1.3.20)$$

где $f(t,x,u(t,x))\in C(D\times R)$, $\varphi_i(x)\in C(\Omega_l)$,

$\varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0}=$

$=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l}=0,\ D\equiv\Omega_T\times\Omega_l,\ \Omega_T\equiv(0,T),\ \Omega_l\equiv(0,l),$

$i=\overline{1,3},\ 0<l<\infty,\ 0<T<\infty.$

Решение данной смешанной задачи разыскивается в виде ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(x),\quad (t,x)\in D, \qquad (1.3.21)$$

где функции $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,...$ удовлетворяют граничным условиям

$$b_n(0)=b_n(l)=b_n''(0)=b_n''(l)=b_n^{(IV)}(0)=b_n^{(IV)}(l)=0.$$

Тогда из (1.3.21) для $a_n(t),\ n=1,2,\dots$ получаем следующую счетную систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$a_n'''(t)+\lambda_n^2 a_n''(t)+\lambda_n^4 a_n'(t)+\lambda_n^4 a_n(t)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l f(t,x,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(x))b_n(x)\,d\,x, \qquad (1.3.22)$$

где $a_n(t)=\int_0^l u(t,x)b_n(x)dx,\ n=1,2,\dots$

Путём решения счётной системы (1.3.22) методом вариации произвольных постоянных изучение разрешимости смешанной задачи (1.3.18)-(1.3.20) сводится к изучению однозначной разрешимости ССНИУ:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l\int_0^l f(s,x,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\cdot b_\nu(x))b_n(x)G_n(t,s,)\,d\,x\,d\,s, \qquad (1.3.23)$$

где $\psi_n(t)=\dfrac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\dfrac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$G_n(t,s)=\mu_n[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)],$$

$$\mu_n=\left[\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Теорема 1.3.11. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\|\ \vec{\psi}(t)\ \|_{B_2(T)}<\infty;$

2. $\int_0^t\left\| f\left(s,x,\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_\nu(s)\cdot b_\nu(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega_l)}ds=\Delta<\infty;$

3. $f(t,x,u)\in Lip\{q(t,x)|_u\},$

где

$$\int_0^t\left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}d\,s<\infty,\ \left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}\equiv\left\{\int_0^l q^2(s,x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда ССНИУ (1.3.23) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Теорема доказывается МПП.

Теорема 1.3.12. Пусть $\vec{a}(t)$ является решением ССНИУ (1.3.23). Тогда последовательность функций $\{u^k(t,x)\} = \{Q\vec{a}^{\,k}(t)\}$ сходится к функции $u(t,x) = Q\vec{a}(t)$, которая является единственным решением смешанной задачи (1.3.18)-(5.1.20).

В разделе 5.2 в области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{ttt}(t,x) + u_{xxx}(t,x), & (t,x) \in D_1, \\ u_{ttt}(t,x) - u_{ttt}(t,x), & (t,x) \in D_2 \end{cases} \tag{1.3.24}$$

с граничными условиями

$$u(t,x)|_{t=-T} = \varphi_1(x),\ u(t,x)|_{t=T} = \varphi_2(x), u_t(t,x)|_{t=T} = \varphi_3(x), \tag{1.3.25}$$

$$u(t,x)|_{x=-1} = u(t,x)|_{x=0} = u(t,x)|_{x=1} = 0, \tag{1.3.26}$$

где $D_1 \equiv E_T^+ \times E_0,\ D_2 \equiv E_T^- \times E_0,\ E_T^- \equiv (-T,0),\ E_T^+ \equiv (0,T),\ E_0 \equiv (-1,1),$ $\varphi_i(x) \in C^4(E_0),\ \varphi_i(x)_{|x=-1} = \varphi_i(x)_{|x=0} = \varphi_i(x)_{|x=1} = 0,\ i = \overline{1,3}.$

Задачу (1.3.24)-(1.3.26) будем изучать при следующих условиях склеивания:

$$u(+0,x) = u(-0,x), u_t(+0,x) = u_t(-0,x), u_{tt}(+0,x) = u_{tt}(-0,x). \tag{1.3.27}$$

Под решением уравнения (1.3.24) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^{3,3}(D_1 \cup D_2)$, которая удовлетворяет уравнению (1.3.24) и условиям (1.3.25)-(1.3.27).

Нетривиальные решения данной задачи строятся в виде следующего ряда:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x).$$

В разделе 5.3 в области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + sign t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = 0 \tag{1.3.29}$$

с граничными условиями

$$u(t,x)_{|t=-T}=\varphi_1(x),\ u(t,x)_{|t=T}=\varphi_2(x),\ u_t(t,x)_{|t=T}=\varphi_3(x), \tag{1.3.30}$$

$$u(t,x)|_{x=0}=u(t,x)|_{x=l}=u_{xx}(t,x)|_{x=0}=u_{xx}(t,x)|_{x=l}=$$
$$=u_{xxxx}(t,x)|_{x=0}=u_{xxxx}(t,x)|_{x=0}=0,\ t\in E_T, \tag{1.3.31}$$

где $\varphi_i(x)\in C^6(E_0),\ \varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=$

$$=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l}=0,\ i=\overline{1,3},\ D_1\equiv E_T^+\times E_0,\ D_2\equiv E_T^-\times E_0,$$

$$E_T^-\equiv(-T;0)\ ,\ E_T^+\equiv(0;T)\ ,\ E_0\equiv(0;l),\ 0<l<\infty,\ 0<T<\infty,$$

$0<\varepsilon$ - малый параметр.

Задачу (1.3.29)-(1.3.31) будем изучать при следующих условиях склеивания

$$u(+0,x)=u(-0,x),\ u_t(+0,x)=u_t(-0,x),\ u_{tt}(+0,x)=u_{tt}(-0,x), \tag{1.3.32}$$

при этом предположим, что

$$u(+0,0)=u(-0,0)=u(+0,\,l)=u(-0,\,l)=0.$$

Под решением уравнения (1.3.29) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^{3,3}(D_1\cup D_2)$, которая удовлетворяет уравнению (1.3.29) и условиям (1.3.30)-(1.3.32).

Нетривиальное решение данной задачи разыскивается в виде следующего ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x)\in D, \tag{1.3.33}$$

где функции $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}x\ ,\ \lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2,\ n=1,2,...,$ удовлетворяют граничным условиям:

$$b_n(0)=b_n(l)=b_n''(0)=b_n''(l)=b_n^{(IV)}(0)=b_n^{(IV)}(l)=0.$$

Подстановка ряда (1.3.33) в дифференциальное уравнение (1.3.29) приводит к следующим представлениям

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+A_{2n}e^{\sqrt{\lambda_n}\,t}+A_{3n}e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x;$$

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{1n}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+B_{2n}\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_{3n}\sin\sqrt{\lambda_n}t\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

Определяются коэффициенты A_{1n} и B_{1n}, $i=\overline{1,3}$ из условий (1.3.30) и (1.3.32).

§ 1.4. Заключение по главе 1

Приведенные вспомогательные утверждения играют важную роль при обосновании результатов, полученных в данной диссертационной работе.

В обзоре литературы приведены результаты других авторов, близких к тематике предлагаемой диссертационной работы.

В этой же главе приведены краткий обзор результатов, полученных и разработанных в диссертации.

На основе анализа указанных выше работ можно сделать заключение о том, что тема и задачи, рассматриваемые в диссертационной работе, являются актуальными.

ГЛАВА 2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ В СУПЕРПОЗИЦИИ

§ 2.1. Постановка задачи и сведение её ССНИУ

На плоскости (t,x) рассмотрим уравнение с частными производными вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x),x)\right), \qquad (2.1.1)$$

где $u(t,x)$ - искомая функция зависит от двух переменных: t и x.

Уравнение (2.1.1) будем рассматривать в области D, которая является прямоугольником, ограниченная отрезками прямых: $AB=\{(x,t): 0<x<l,\, t=0\}$, $BB_0=\{(x,t): x=l,\, 0<t<T\}$, $B_0A_0=\{(x,t): 0<x<l,\, t=0\}$, $A_0A=\{(x,t): x=0,\, 0<t<T\}$, здесь l,T - заданные положительные числа.

Уравнение (2.1.1) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$u_{xxxx}-u_{xxtt}-u_{xxt}+u_{ttt}=f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x),x)\right).$$

Известно, что для уравнения четвертого порядка вида

$$Au_{xxxx}+Bu_{xxxt}+Cu_{xxtt}+Du_{xttt}+Eu_{tttt}=F$$

уравнение характеристик записывается в виде

$$A(dt)^4-B(dt)^3dx+C(dt)^2(dx)^2-Ddt(dx)^3+E(dx)^4=0.$$

Так как у нас $A=1,\ B=0,\ C=-1,\ D=0,\ E=0,$ то уравнение характеристик имеет вид

$$(dt)^4-(dt)^2(dx)^2=0.$$

Запишем это уравнение в виде

$$(dt)^2[(dt)^2-(dx)^2]=0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0, \\ (dt)^2 - (dx)^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда и получаем уравнения характеристик вида:

$$t = const,\, t - x = const,\, t + x = const\,.$$

Следовательно, уравнение (2.1.1) является уравнением в частных производных четвертого порядка, имеющее один двукратный действительный и два различных действительных характеристик. Поэтому это уравнение принадлежит гиперболическому типу относительно старших производных [45]. Искомая функция $u(t,x)$ и правая часть уравнения (2.1.1) определена в области D. Для уравнения (2.1.1) будем исследовать смешанную задачу.

Задача 2.1. Найти в области D функцию $u(t,x)$, удовлетворяющее уравнению вида (2.1.1) и начально-граничным условиям:

$$\begin{aligned} &u(t,x)_{|\, t\in(-\infty,0\,]} = \varphi_1(t,x),\, u(t,x)_{|\, t\in(\,T,\infty\,)} = 0, \\ &u_{\,t}(t,x)_{|\, t=0} = \varphi_2(x),\, u_{\,tt}(t,x)_{|\, t=0} = \varphi_3(x), \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

$$u(t,x)_{|\, x=0} = u(t,x)_{|\, x=l} = u_{\,xx}(t,x)_{|\, x=0} = u_{\,xx}(t,x)_{|\, x=l} = 0, \qquad (2.1.3)$$

здесь $f\,(t,x,u\,\vartheta) \in C(D \times R^2)$, $\varphi_{\,i}(x) \in C^4(D_l)$, $\varphi_{\,i}(x)_{|\, x=0} = \varphi_{\,i}(x)_{|\, x=l} =$

$= \varphi_i''(x)_{|\, x=0} = \varphi_i''(x)_{|\, x=l} = 0$, $i = \overline{1,3}$, $D_T \equiv [\,0,T\,]$,

$D_l \equiv [\,0,l\,],\, 0 < l < \infty,\, 0 < T < \infty,\, \delta(t,x) \neq t.$

Так как уравнение (2.1.1) по переменной t имеет производные третьего порядка, а по x - производные четвертого порядка, в задаче 2.1 выбраны начально-граничные условия вида (2.1.2) и (2.1.3). Такую задачу, когда по одной переменной задаются начальные данные, а по другой переменной - граничные, обычно называют смешанной. Данную смешанную задачу будем изучать для случая, когда отклонение $\delta(t,x)$ содержится в правой нелинейной части уравнения.

Приведем алгоритм решения задачи:

1). Решение будем искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, то есть первая функция зависит только от t, другая только от - x;

2). Будем искать слабо обобщенное решение, удовлетворяющее интегральному тождеству;

3). Для определения коэффициента Фурье по t получаем ССНИУ типа Вольтерра;

4). Методом последовательных приближений (МПП) доказывается однозначная разрешимость ССНИУ.

Решение задачи 2.1 будем осуществлять по вышеуказанному алгоритму. Сначала представим искомую функцию как бесконечная сумма произведения двух функций, одна из которых зависит от переменной t, другая от x:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,b_n(x), \quad (t,x)\in D, \tag{2.1.4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\dots$.

Очевидно, что функции $b_n(x)$ четырежды непрерывно-дифференцируемы по x и для них имеет место равенство:

$$b_n(0)=b_n(l)=b''_n(0)=b''_n(l)=0.$$

Отсюда следует, что функция $u(t,x)$, представленная в (2.1.4), подчиняется условиям (2.1.3).

Определение 2.1. Если для произвольной вспомогательной функции $\Phi(t,x)\in C^{3,4}(D)$, искомая функция $u(t,x)\in \hat{W}_2^3(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right]-f\,\Phi\right\}dy\,dt=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l \varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0} d\,y-\int_0^l \varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0} d\,y\,,$$

то функцию $u(t,x)$ назовем слабо обобщенным решением задачи 2.1.

Если $u(t,x)$ есть слабо обобщенное решение задачи (2.1.1)-(2.1.3), то справедливо равенство (2.1.4) почти при всех $t\in D_T$ и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)d\,y\,,\ b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x\,,\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots.$$

Теорема 2. 1. Предположим, что выполняются следующие утверждения: 1). Отображение $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ непрерывно;
2). Функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям задачи 2.1 и для коэффициента имеет место равенство $a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)d\,y$, то коэффициенты $a_n(x)$, представляемые через собственные функции $b_n(x)$, удовлетворяют следующую ССНИУ:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y))\right)b_n(y)G_n(t,s)d\,y\,d\,s,\ t\in D_T\,, \quad (2.1.5)$$

где

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t\,,$$

$$G_n(t,s)=\mu_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],$$

$$\mu_n=\left[\lambda_n(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Доказательство. Из постановки рассматриваемой задачи следует тождество:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right]-\right.$$

$$\left.-f\,\Phi\right\}d\,y\,d\,t=-\int\limits_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}d\,y+$$

$$+\int\limits_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0}d\,y-\int\limits_0^l\varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0}d\,y\,. \qquad (2.1.6)$$

Предположим, что пробная функция имеет представление

$$\Phi=\Phi_m(t,\,x)=g(t)b_m(x)\in C^{3,4}(D),\ \ 0\neq g(t)\ \ .$$

Справедливо равенство:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(t)\,b_n(y)\times\right.$$

$$\times\left[-g'''(t)b_m(y)+\lambda_m^2\,g''(t)b_m(y)-\lambda_m^2\,g'(t)b_m(y)+\lambda_m^4\,g(t)b_m(y)\right]-$$

$$\left.-f\left(t,y,Q\vec a(t),Q\vec a(\delta(t,y))\right)g(t)b_m(y)\right\}d\,y\,d\,t=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(t)\,b_n(y)\left[-g'''(t)+\lambda_m^2\,g''(t)-\lambda_m^2\,g'(t)+\lambda_m^4\,g(t)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left(t,y,Q\vec a(t),Q\vec a(\delta(t,y))\right)g(t)b_m(y)\right\}d\,y\,d\,t=0.$$

Так как система собственных функций $\left\{b_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(D_l)$ образует полную систему ортонормированных функций, то из последнего равенства получаем

$$\int\limits_0^T\left[a_n(t)\cdot\left(-g'''(t)+\lambda_n^2\,g''(t)-\lambda_n^2\,g'(t)+\lambda_n^4\,g(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^l f\left(t,y,Q\vec a(t),Q\vec a(\delta(t,y))\right)g(t)b_n(y)\,d\,y\right]d\,t=0.$$

Если учтем свойство слабо обобщенного решения и используем метод интегрирования по частям, то непременно придем к равенству

$$\int_0^T g(t)\Big[a_n'''(t)+\lambda_m^2 a_n''(t)+\lambda_m^2 a_n'(t)+\lambda_m^4 a_n(t)-$$

$$-\int_0^l f\big(t,y,Q\vec{a}(t),Q\vec{a}(\delta(t,y))\big)b_n(y)\,dy\Big]dt=0. \qquad (2.1.7)$$

Так как по нашему предположению $g(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (2.1.7) получаем счётную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма третьего порядка

$$a_n'''(t)+\lambda_n^2 a_n''(t)+\lambda_n^2 a_n'(t)+\lambda_n^4 a_n(t)=$$

$$=\int_0^l f\big(t,y,Q\vec{a}(t),Q\vec{a}(\delta(t,y))\big)b_n(y)\,dy. \qquad (2.1.8)$$

Для решения этой системы уравнений (2.1.8) будем использовать метод вариации произвольных постоянных. В этом случае имеем следующее соотношение:

$$a_n(t)=C_{1n}e^{-\lambda_n^2 t}+C_{2n}\cos\lambda_n t+C_{3n}\sin\lambda_n t+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\big(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y))\big)b_n(y)G_n(t,s)\,dy\,ds,\ \ t\in D_T, \qquad (2.1.9)$$

где $$G_n(t,s)=\mu_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],$$

$$\mu_n=\left[\lambda_n(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Здесь функции $G_n(t,s)$ является решением дифференциального уравнения третьего порядка следующего вида:

$$G_n'''(t,s)+\lambda_n^2 G_n''(t,s)+\lambda_n^2 G_n'(t,s)+\lambda_n^4 G_n(t,s)=0.$$

Нам следует определить коэффициенты $C_{in}\ (i=\overline{1,3})$. Для этой цели будем использовать следующие начальные условия:

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\ a_n'(0)=\varphi_{2n},\ a_n''(0)=\varphi_{3n},$$

где $\varphi_{in} = \int\limits_0^l \varphi_i(y) b_n(y) dy$, $i = \overline{1,3}$. Итак, для однозначного определения коэффициентов C_{in} $(i = \overline{1,3})$ методом вариации произвольных постоянных выписали общее решение счётной системы (2.1.8) в виде (2.1.9). Теперь воспользуемся указанными выше начальными условиями и однозначно определим неизвестные константы C_{in} $(i = \overline{1,3})$. Далее, подставляя эти значения в (2.1.9) придем к представлению ССНИУ (2.1.5).

§ 2.2. Разрешимость ССНИУ с нелинейным отклонением

Как указано в §2.1 для коэффициентов ряда, зависящих от t , получили ССНИУ вида (2.1.5). Поэтому основной целью параграфа является доказательство однозначной разрешимости следующей ССНИУ:

$$a_n(t) = \psi_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s, y, Q\vec{a}(s)))\right) \times$$

$$\times b_n(y) G_n(t,s) dy ds, \; t \in D_T, \qquad (2.2.1)$$

здесь
$$\psi_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos \lambda_n t +$$

$$+ \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1 + \lambda_n^2) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^3 + \lambda_n^5} \sin \lambda_n t,$$

$$G_n(t,s) = \mu_n \left[e^{-\lambda_n^2 (t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n (t-s) - \cos \lambda_n (t-s) \right],$$

$$\mu_n = \left[\lambda_n (1 + \lambda_n^2) \right]^{-1}.$$

Счётная система (2.2.1) по характеру задачи соотнесем к типу нелинейных интегральных уравнением Вольтерра второго рода, причем в нелинейном ядре уравнения содержится нелинейное отклонение. Докажем, что это уравнение допускает единственное решение.

Теорема 2.2. Предположим, что выполняются:

1. $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t \left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)} d\,s \le \Delta < \infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{F_1(t,x)\big|_{u,\vartheta}\right\}$, здесь $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t \left\| F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} d\,s<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{F_2(t,x)\big|_{u}\right\}$, здесь $\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t \left\| F_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} d\,s<\infty;$

4. $\left\|\vec{\psi}(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда в пространстве $B_2(T)$ ССНИУ (2.2.1) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\left\|\vec{a}^{\,k+1}(t)-\vec{a}^{\,k}(t)\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le\frac{\delta_1}{k!}\left[\max_{t\in D_T}\int_0^t F(s)\,d\,s\right]^k \exp\left\{\delta_2\max_{t\in D_T}\int_0^t F(s)\,d\,s\right\}, \tag{2.2.2}$$

где $F(s)=2\left\| F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}+\Delta\left\| F_1(s,x)F_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}$, δ_1 и δ_2 - некоторые положительные постоянные.

Для доказательства однозначной разрешимости (2.2.1) применим метод последовательных приближений (МПП). Нулевое приближение определим так: $a_n^0(t)=\psi_n(t),\, t\in D_T, n=1,2,\ldots$ Тогда остальные приближения определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^{k+1}(t)=\psi_n(t)+ \\ +\dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}^k(s),Q\vec{a}^k(\delta(s,y,Q\vec{a}^k(s)))\right)\times \\ \times b_n(y)\cdot G_n(t,s)\,d\,y\,d\,s,\quad k=0,1,2,3,\ldots,\quad t\in D_T. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Пусть *k=0*. Тогда вычитая от первого приближения нулевое приближение имеем первую разность: $a_n^1(t)-a_n^0(t)$. Поэтому найдем оценку первой разности по норме в пространстве $B_2(T)$. Если учесть условия теоремы и воспользуемся неравенствами Гельдера и Бесселя, то для первой разности $a_n^1(t)-a_n^0(t)$ по норме из (2.2.3) получим

$$\left\| \vec{a}^{\,1}(t)-\vec{a}^{\,0}(t) \right\|_{B_2(t)} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l \left| f_0 b_n(y) G_n(t,s) \right| dy\, ds \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l \left| f_0\, b_n(y) \right| \cdot \left| G_n(t,s) \right| dy\, ds \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \int_0^l \left| f_0\, b_n(y) \right| \cdot \left| G_n(t,s) \right| dy\, ds \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M_1 \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left| G_n(t,s) \right| \cdot \int_0^l \left| f_0\, b_n(y) \right| dy\, ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f_0\; b_n(y) \right| dy \right]^2}\, ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_0^t \| f_0 \|_{L_2(D_l)} ds \leq M_1 M_2 \Delta , \tag{2.2.4}$$

где

$$f_k \equiv f\left(s, x, Q\vec{a}^{\,k}(s), Q\vec{a}^{\,k}(\delta(s,x,Q\vec{a}^{\,k}(s)))\right),\; k=0,1,2,...,$$

$$M_1 = \left\| \frac{1}{\lambda} \right\|_{\ell_2}, \quad M_2 = \max_{(t,s)} \left\| \vec{G}(t,s) \right\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0\leq s\leq t\leq T} \left| G_n(t,s) \right|^2}\,.$$

С учетом второго условия теоремы, найдем оценку разности правых частей по модулю:

$$\left| f\left(s,x,Q\vec{a}^{1}(s), Q\vec{a}^{1}(\delta(s,x,Q\vec{a}^{1}(s)))\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(s,x,Q\vec{a}^{0}(s), Q\vec{a}^{0}(\delta(s,x,Q\vec{a}^{0}(s)))\right) \right| \leq$$

$$\leq F_1(s,x)\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|\cdot\left|b_\nu(x)\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(x)\right)\right)\right|\cdot\left|b_\nu(x)\right|\right].$$

Далее, в силу третьего условия теоремы, получаем цепочку неравенств:

$$\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(x)\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)\right)\right)\right|+$$

$$+\left|a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(x)\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\left|\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)\right)-\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(x)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot F_2(s,x)\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(x)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(x)\right|,$$

Тогда из последнего неравенства с учетом (2.2.4) и с учетом неравенств Минковского, Гельдера и Бесселя получим оценку для второй разности $a_n^2(t)-a_n^1(t)$ по норме и придем к следующей оценке

$$\left\|\vec{a}^{\,2}(t)-\vec{a}^{\,1}(t)\right\|_{B_2(t)}\leq M_1M_2\int_0^t\int_0^l\left|f_1-f_0\right|dy\,ds\leq$$

$$\leq M_1M_2\int_0^t\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^1(s)-a_n^0(s)\right|\int_0^l F_1(s,y)\left|b_n(y)\right|dy+\right.$$

$$\left.+\Delta\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l F_1(s,y)\left|\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(y)\right)-\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(y)\right)\right|\left|b_n(y)\right|dy\right\}ds\leq$$

$$\leq M_1M_2\int_0^t\left\{2\left\|F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec{a}^{\,1}(s)-\vec{a}^{\,0}(s)\right\|_{B_2(t)}+\right.$$

$$+\Delta\int_0^l F_1(s,y)\left|\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(y)\right)-\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(y)\right)\right|dy\Bigg\}ds\le$$

$$\le M_1M_2\int_0^t\Bigg\{2\left\|F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec a^1(s)-\vec a^0(s)\right\|_{B_2(t)}+$$

$$+\Delta\int_0^l F_1(s,y)F_2(s,y)\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(s)b_i(y)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(s)b_i(y)\right|dy\Bigg\}ds\le$$

$$\le M_1M_2\int_0^t\Bigg\{2\left\|F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec a^1(s)-\vec a^0(s)\right\|_{B_2(t)}+$$

$$+\Delta\left\|\vec a^1(s)-\vec a^0(s)\right\|_{B_2(t)}\left\|F_1(s,x)F_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\Bigg\}ds\le$$

$$\le M_1M_2\int_0^t F(s)\left\|\vec a^1(s)-\vec a^0(s)\right\|_{B_2(t)}ds\le$$

$$\le\Delta\left(M_1M_2\right)^2\int_0^t F(s)ds,\quad t\in D_T, \qquad (2.2.5)$$

где $F(s)=2\left\|F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}+\Delta\left\|F_1(s,x)F_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}$.

Поступая точно аналогичным образом, получим оценку по норме для третьей разности:

$$\left\|\vec a^3(t)-\vec a^2(t)\right\|_{B_2(t)}\le$$

$$\le M_1M_2\int_0^t F(s)\left\|\vec a^2(s)-\vec a^1(s)\right\|_{B_2(t)}ds\le$$

$$\le\Delta\left(M_1M_2\right)^3\int_0^t F(s)\int_0^s F(\theta)d\theta ds\le\Delta\left(M_1M_2\right)^3\frac{\left[\int_0^t F(s)ds\right]^2}{2!},\quad t\in D_T.$$

Повторив этот процесс для произвольного натурального числа k, по индукции придем к следующей заключительной оценке:

$$\left\| \vec{a}^{\,k+1}(t) - \vec{a}^{\,k}(t) \right\|_{B_2(t)} \le \Delta \left(M_1 M_2 \right)^k \frac{\left[\int\limits_0^t F(s)\,ds \right]^k}{k!}, \quad t \in D_T. \qquad (2.2.6)$$

Кроме того, с учетом (2.2.6) получим ещё и следующую оценку:

$$\left\| \vec{a}(t) - \vec{a}^{\,k+1}(t) \right\|_{B_2(t)} \le$$

$$\le M_1 M_2 \int\limits_0^t \left\| \vec{a}(s) - \vec{a}^{\,k}(s) \right\|_{B_2(t)} F(s)\,ds \le$$

$$\le M_1 M_2 \int\limits_0^t \left\| \vec{a}(s) - \vec{a}^{\,k+1}(s) \right\|_{B_2(t)} F(s)\,ds +$$

$$+ M_1 M_2 \int\limits_0^t \left\| \vec{a}^{\,k+1}(s) - \vec{a}^{\,k}(s) \right\|_{B_2(t)} F(s)\,ds \le$$

$$\le \Delta \left(M_1 M_2 \right)^k \frac{\left[\max\limits_{t \in D_T} \int\limits_0^t F(s)\,ds \right]^k}{k!} +$$

$$+ M_1 M_2 \int\limits_0^t F(s) \left\| \vec{a}(s) - \vec{a}^{\,k+1}(s) \right\|_{B_2(t)} ds, \quad t \in D_T. \qquad (2.2.7)$$

Заметим, что к (2.2.7) применим неравенство Гронуолла-Беллмана. Поэтому, после применения этого неравенства, получаем, что справедлива оценка (2.2.2).

Теперь докажем существование решения ССНИУ (2.2.1). Нетрудно заметить, что это обстоятельство следует из оценки (2.2.6), так как при $k \to \infty$ совокупность последовательностей $\left\{ \vec{a}^{\,k}(t) \right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $\vec{a}(t) \in B_2(T)$, которая является решением ССНИУ (2.2.1).

Для того чтобы, показать единственность этого решения в пространстве $B_2(T)$ используем метод интегральных неравенств. С этой целью предположим, что ССНИУ (2.2.1) имеет два различные решения: $\vec{a}(t) \in B_2(T)$ и $\vec{\vartheta}(t) \in B_2(T)$. Очевидно, что тогда для их разности по норме имеем

$$\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_2(t)} \le M_1 M_2 \int_0^t F(s) \left\| \vec{a}(s) - \vec{\vartheta}(s) \right\|_{B_2(t)} ds, \quad t \in D_T. \quad (2.2.8)$$

Единственность решения ССНИУ (2.2.1) в пространстве $B_2(T)$ следует из применения неравенство Гронуолла-Беллмана к оценке (2.2.8). В самом деле, после применения указанного неравенства получаем, что $\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_2(T)} = 0$ для всех $t \in [0; T]$. Следовательно, единственность решения ССНИУ (2.2.1) в пространстве $B_2(T)$ доказана.

§ 2.3. Разрешимость смешанной задачи

Теперь рассмотрим смешанную задачу (2.1.1)-(2.1.3). Слабо обобщенное решение этой задачи будем представлять в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \Big[\psi_n(t) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(s)))\right) b_n(y) G_n(t,s)\, dy\, ds \Big], \qquad (2.3.1)$$

где $$\psi_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos \lambda_n t +$$

$$+ \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1 + \lambda_n^2) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^3 + \lambda_n^5} \sin \lambda_n t,$$

$$G_n(t,s) = \mu_n \left[e^{-\lambda_n^2 (t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n (t-s) - \cos \lambda_n (t-s) \right],$$

$$\mu_n = \left[\lambda_n (1 + \lambda_n^2) \right]^{-1}, \; b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \; \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Для получения такого представления в самом деле достаточно подставить ССНИУ (2.2.1) в ряд (2.1.4). Теперь мы можем доказать, что в самом деле ряд (2.3.1) является слабо обобщенным решением смешанной задачи (2.1.1)-(2.1.3). Здесь имеет место

Теорема 2.3. Если справедлива условия теоремы 2.2 и коэффициент $\vec{a}$ $(t) \in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (2.2.1), то ряд (2.3.1) будет слабо обобщённым решением задачи (2.1.1)-(2.1.3).

Для доказательства теоремы достаточно показать абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.3.1). Сначала докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t,x,u^k(t,x),u^k(\delta(t,x,u^k(t,x)),x)\right)=$$
$$= f\left(t,x,\,u(t,x),u(\delta(t,x,u(t,x)),x)\right). \tag{2.3.2}$$

Отметим, что $\vec{a}\,(t) \in B_2(T)$, $u(t,x)\in L_2\,(D)$. Тогда из равенства

$$\lim_{k\to\infty} u^k(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n(t)\,b_n(x)=u\,(t,x)$$

следует, что имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t,x,u^k(t,x),u^k(\delta(t,x,u^k(t,x)),x)\right)=$$
$$= f\left(t,x,\,u(t,x),u(\delta(t,x,u(t,x)),x)\right) \tag{2.3.2}$$

Рассмотрим последовательность следующих функций:

$$P_k=\int_0^T\int_0^l\Big\{u^k(t,y)\left[-\Phi_{ttt}-\Phi_{ttyy}-\Phi_{tyy}+\Phi_{yyyy}\right]-$$
$$-f\left(t,y,u^k(t,y),u^k(\delta(t,y,u^k(t,y)),y)\right)\cdot\Phi(t,y)\Big\}dy\,dt+$$
$$+\int_0^l\varphi_1^k\left[\Phi_{tt}+\Phi_{tyy}+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy-$$
$$-\int_0^l\varphi_2^k\left[\Phi_t+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy+\int_0^l\varphi_3^k\left[\Phi\right]_{t=0}dy\,. \tag{2.3.3}$$

Учтём, что имеет место интегральное тождество (2.1.6). Берем начальные условия

$$a_n(0)=\varphi_{1n}\,,\; a'_n(0)=\varphi_{2n}\,,\; a''_n(0)=\varphi_{3n}$$

После интегрирования в (2.3.3), придем к соотношению:

$$P_k=\int_0^l\left(\varphi_1(y)-\sum_{n=1}^{k}\varphi_{1n}b_n(y)\right)\left[\Phi_{tt}+\Phi_{tyy}+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int_0^l\left(\varphi_2(y)-\sum_{n=1}^k\varphi_{2n}b_n(y)\right)\left[\Phi_t+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\left(\varphi_3(y)-\sum_{n=1}^k\varphi_{3n}b_n(y)\right)\left[\Phi\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\Phi(t,y)\left\{f\left(t,y,Q\vec{a}(t),Q\vec{a}(\delta(t,y,Q\vec{a}(t)))\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(t,y,Q\vec{a}^k(t),Q\vec{a}^k(\delta(t,y,Q\vec{a}^k(t)))\right)\right\}b_n(y)\,dy\,dt. \qquad (2.3.4)$$

Нетрудно заметить, что первые три интеграла в (2.3.4) стремятся к нулю при $k\to\infty$ в силу свойств функций $\varphi_i(x)\in L_2(D_l)$.

При $k\to\infty$ следует из (2.3.2), что можно проследить сходимость разности последнего интеграла в (2.3.4). Следовательно, при $k\to\infty$ имеем, что $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=0$. Что и требовалось доказать.

§ 2.4. Слабая разрешимость смешанной задачи

В данном параграфе слабое решение задачи (2.1.1)-(2.1.3) будем разыскивать в виде

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)\,b_n(x), \qquad (2.4.1)$$

$$b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=\overline{1,k}.$$

Для доказательства существования слабого решения смешанной задачи (2.1.1)-(2.1.3) будем использовать метод суммирования Чезаро. Здесь существенно используется тот факт, что частичные суммы Чезаро тригонометрического ряда для любой непрерывной функции равномерно сходятся к ней. Поэтому представляет интерес разыскивать слабое решение задачи (2.1.1)-(2.1.3) в виде ряда (2.4.1)

Из уравнения (2.1.1) с учетом ряда (2.4.1) приходим к следующей счётной системе:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\cdot G_n(t,s)\,dy\,ds,$$

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t,$$

$$\overline{G}_n(t,s)=\overline{\mu}_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)\right],$$

$$\overline{\mu}_n=\left[\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)\right]^{-1},\ b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots.$$

Нетрудно заметить, что при $k\to\infty$ имеет место соотношение

$$u(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)a_n(t)b_n(x)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)b_n(x)\Big[\psi_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(s)b_\nu(y),\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)a_\nu(\delta(s,y))b_\nu(y)\right)\times$$

$$\times b_n(y)\overline{G}_n(t,s)\,dy\,ds\Big].$$

Для функция $f(t,x,u,v)$ рассмотрим нелинейный оператор fQ. Заметим, что оператор fQ. действует из $B_2(T)$ в $L_2(D)$. Следовательно, выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l f\left(t,y,u(t,y),u(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,dy\,b_n(x)$$

есть ряд Фурье для fQ.

Теорема 2.4. Если справедливы предположения:

1. $f(t,x,u,v)$ при фиксированном $t\in D_T$ непрерывна по $(x,u,v)\in D_l\times R$, по x удовлетворяет условию Гельдера;

2. $f(t,x,u,v) \in Lip\{h(t)|_{u,v}\}$ здесь $\int_0^t h(s)\,ds < \infty$;

3. $\left\| f\left(t,x,u_0(t,x),u_0(\delta(t,x),x)\right)\right\|_C \le h(t)$;

4. $\psi_1(t,x) \in C^1(D)$, здесь $\psi_1(t,x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\psi_n(t)b_n(x)$,

тогда уравнение

$$u(t,x) = \psi_1(t,x)+$$

$$+\int_0^t \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{n-1}{k}\right) f_n(u)b_n(x)\overline{G}_n(t,s)\,ds, \qquad (2.4.2)$$

где $f_n(u)=\int_0^l f\left(s,y,u(t,y),u(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,ds$, однозначно разрешима в классе $C^1(D)$.

Доказательство. Если $u(t,x)\in C(D)$, то

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\left[\int_0^l\left(1-\frac{n-1}{k}\right) f\left(t,y,u_0(t,y),u_0(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,dy\right]b_n(x)\right| \le$$

$$\le \max_x\left| f\left(t,x,u_0(t,x),u_0(\delta(t,x),x)\right)\right| \le h(t)$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left[\int_0^l\left(1-\frac{n-1}{k}\right) f\left(t,y,u_0(t,y),u_0(\delta(t,y),y)\right)b_n(y)\,dy\right]b_n(y)=$$

$$= f\left(t,x,u_0(t,x),u_0(\delta(t,x),x)\right),$$

причем сходимость равномерна по x для любого $t \in D_t$.

Так как $f(t, x, u(t,x), u_0(\delta(t, x), x)$ удовлетворяет условию Гельдера, то частичные суммы равномерно ограничены:

$$\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(u)b_n(x)\right| \le \delta_1\left\|\vec{f}(u)\right\|_C,$$

где $0 < \delta_1$ - постоянное число.

Следовательно, применяя преобразование Абеля к правой части уравнения (2.4.2) получим оценку

$$\left\| u_1(t,x) - u_0(t,x) \right\|_{C(D)} \le$$

$$\int_0^t \left| \left[\int_0^l \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{n-1}{k} \right) f_n(u) b_n(y)\, dy \right] b_n(y) \overline{G}_n(t,s) \right| ds \le$$

$$\le \int_0^t \| f_n(u) \|_{C(D)} \overline{G}_n(t,s)\, ds \le$$

$$\le \delta_2 \int_0^t h(s)\, ds,\ 0 < \delta_2 = \max_{(t,s)} \left| \overline{G}_n(t,s) \right|. \qquad (2.4.3)$$

С учетом (2.4.3) получим

$$\left\| u_2(t,x) - u_0(t,x) \right\|_{C(D)} \le$$

$$\le \delta_2 \int_0^t \left\| f\left(s,x,u_1(s,x),u_1(\delta(s,x),x)\right) - f\left(s,x,u_0(s,x),u_0(\delta(t,x),x)\right) \right\|_{C(D)} ds +$$

$$+ \delta_2 \int_0^t \left\| f\left(s,x,u_0(s,x),u_0(\delta(t,x),x)\right) \right\|_{C(D)} ds \le$$

$$\le 2\delta_2 \int_0^t h(s) \left\| u_1(t,x) - u_0(t,x) \right\|_{C(D)} ds + 2\delta_2 \int_0^t h(s)\, ds \le$$

$$\le \frac{1}{2!} \left[2\delta_2 \int_0^t h(s)\, ds \right]^2 + 2\delta_2 \int_0^t h(s)\, ds.$$

Итак, $\forall\ m \in N:\ m \ge 2,$ имеем

$$\left\| u_m(t,x) - u_0(t,x) \right\|_{C(D)} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left[2\delta_2 \int_0^t h(s)\, ds \right]^k \le \exp\left\{ 2\delta_2 \int_0^t h(s)\, ds \right\}. \qquad (2.4.4)$$

Отсюда следует, что существует последовательность функции $\left\{ u_m(t,x) \right\}_{m=1}^{\infty}$, для которой

$$u_m(t,x) \in S\left(u_0; \exp\left\{ 2\delta_2 \int_0^T h(t)\, dt \right\} \right).$$

Таким образом, проследив закономерность полученных оценок вида (2.4.4), придем к общей оценке

$$\left\| u_m(t,x) - u_{m-1}(t,x) \right\|_{C(D)} \le \frac{1}{m!} \left[2\delta_2 \int_0^t h(s)\, ds \right]^m .$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности функций $\left\{ u_m(t,x) \right\}_{m=1}^{\infty}$ к функции $u(t,x)$. Заметим также, что предельная функция является решением уравнения (2.4.2). Таким образом доказательство существования решения завершена.

Для доказательства единственности решения уравнения (2.4.2) поступим следующим образом. Предположим, что для уравнения (2.4.2) в области D существует два различные решения: $u(t,x)$ и $\vartheta(t,x)$. В этом случае для разности этих решений по норме имеет место оценка:

$$\left\| u(t,x) - \vartheta(t,x) \right\|_{C(D)} \le 2\delta_2 \int_0^t h(s) \left\| u(s,x) - \vartheta(s,x) \right\|_{C(D)} ds. \qquad (2.4.5)$$

В силу неравенства Гронуолла-Беллмана из (2.4.5) получаем, что $u(t,x) \equiv \vartheta(t,x)$, т.е. эти две функции тождественно равны между собой. Тем самым мы доказали единственность решения уравнения (2.4.2).

§ 2.5. Заключение по главе 2

Впервые изучена слабо обобщенное решение нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка, содержащие суперпозиции параболического и гиперболического операторов. Рассмотрены также случаи, когда имеет место нелинейные отклонения. Доказана однозначная разрешимость обобщенного решения.

Основным результатом главы 2 является нахождение достаточного коэффициентного условия однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи.

Изучена слабая разрешимость смешанной задачи.

ГЛАВА 3. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ В СУПЕРПОЗОЦИИ

§ 3.1. Сведение решение задачи к СНИУ

Пусть область D является прямоугольником, ограниченная отрезками прямых: $AB=\{(x,t): 0<x<l,\, t=0\}$, $BB_0=\{(x,t): x=l,\, 0<t<T\}$, $B_0A_0=\{(x,t): 0<x<l,\, t=0\}$, $A_0A=\{(x,t): x=0,\, 0<t<T\}$, здесь l, T - заданные положительные числа.

Задача 3.1. Найти функцию $u(t,x)$ из класса $\hat{W}_2^2(D)$, удовлетворяющее уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=$$

$$=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t K(t,s)u(\delta(s,x),x)\,ds\right) \tag{3.1.1}$$

и начально-граничным условиям

$$u(t,x)_{|t\in(-\infty;0]}=\varphi_1(t,x),\; u(t,x)_{|t\in(T.\infty)}=0,\; u_t(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x), \tag{3.1.2}$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \tag{3.1.3}$$

здесь $f(t,x,u\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C(D_l)$, $0<K(t,s)\in C(D_T^2)$,

$\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=l}=\varphi_i''(x)_{|x=0}=\varphi_i''(x)_{|x=l}=0$, $\quad i=\overline{1,2}$, $\quad D_T\equiv[0,T]$,

$D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Уравнение (3.1.1) можно записать следующим образом:

$$u_{xxxx}-2u_{xxt}+u_{tt}=f\big(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x),x)\big).$$

Так как для уравнения четвертого порядка вида

$$Au_{xxxx}+Bu_{xxxt}+Cu_{xxtt}+Du_{xttt}+Eu_{tttt}=F$$

уравнение характеристик записывается в виде

$$A(dt)^4 - B(dt)^3 dx + C(dt)^2 (dx)^2 - Ddt(dx)^3 + E(dx)^4 = 0 .$$

Если учесть, что $A=1,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ E=0,$ то уравнение характеристик имеет вид

$$(dt)^4 = 0 .$$

Отсюда и получаем уравнения характеристик вида:

$$t = const .$$

Следовательно, уравнение (3.1.1) является уравнением в частных производных четвертого порядка параболического типа относительно старших производных [45], имеющее единственную четырехкратную действительную характеристику.

Особенностью данной задачи заключается ещё в том, что в правой части уравнения имеется нелинейное отклонение, содержащиеся под знаком интеграла.

Для решения задачи используем следующий алгоритм:

1). Применяем метод разделения переменных. При этом неизвестная функция записывается в виде ряда, состоявшегося из произведения двух функций, каждый из которых зависит только от одного аргумента, то есть первая функция зависит только от t , другая - только от x;

2). Будем рассматривать слабо обобщенное решение в пространстве Соболева $\hat{W}_2^2(D)$;

3). Для коэффициента Фурье по t получаем ССНИУ типа Вольтерра;

4). МПП доказывается однозначная разрешимость ССНИУ в пространстве $B_2(T)$.

Пусть $u(t,x)$ определена в области D и является решением задачи 3.1. Применяем метод разделения переменных в виде ряда Фурье:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x), \quad (t,x) \in D, \tag{3.1.4}$$

где $b_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \lambda_n x,\ \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l},\ n = 1, 2, \ldots .$

Заметим, что для четырежды непрерывно-дифференцируемых по x коэффициентов $b_n(x)$ выполняются краевые условия:

$$b_n(0)=b_n(l)=b''_n(0)=b''_n(l)=0.$$

Итак, для $u(t,x)$, имеет место (3.1.3). Как указано выше, решение будем искать в пространстве Соболева $\hat{W}_2^2(D)$.

Определение 3.1. Функцию $u(t,x)$ из класса $\hat{W}_2^2(D)$ назовем слабо обобщенным решением задачи (3.1.1)-(3.1.3), если для неё выполняется следующее интегральное тождество

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}H+2\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}H+\frac{\partial^4}{\partial y^4}H\right]-f\,H\right\}d\,y\,d\,t=$$

$$=\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial}{\partial t}H\right]_{t=0}d\,y-\int_0^l\varphi_2\left[H\right]_{t=0}d\,y$$

для произвольной пробной функции $H(t,x)$ из класса $C^{2,4}(D)$.

Имеет место

Теорема 3.1. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Отображение $f\,Q:B_2(T)\to L_2(D)$ является непрерывным;

2. Функция $u(t,x)$ удовлетворяет всем условиям смешанной задачи 3.1 и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)d\,y\,.$$

Тогда коэффициенты Фурье $a_n(t)$ удовлетворяют следующую счётную систему:

$$a_n(t)=w_n(t)+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),\int_0^s K(s,\theta)Q\vec{a}\left(\delta(\theta,y)\right)d\,\theta\right)\times$$

$$\times\,b_n(y)P_n(t,s)d\,y\,d\,s,\;\;t\in D_T\,, \tag{3.1.5}$$

здесь

$$w_n(t)=\left[\varphi_{1n}+t\left(\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{2n}\right)\right]\cdot e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$P_n(t,s)=(t-s)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-s)}.$$

Доказательство. Воспользуемся интегральным тождеством из определения слабо обобщенного решения смешанной задачи 3.1. Тогда с учётом (3.1.4) получаем следующее интегральрное тождество

$$\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}H+2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}H+\frac{\partial^4}{\partial x^4}H\right]-\right.$$

$$\left.-fH\right\}dy\,dt=\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial}{\partial t}H\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_2\left[H\right]_{t=0}dy. \qquad (3.1.6)$$

Предположим, что пробную функцию можно представить в виде $H=H_m(t,x)=h(t)b_m(x)\in C^{2,4}(D)$, где $0\neq h(t)\in C^2(D_T)$.

Тогда из тождества (3.1.6) путём несложных преобразований получаем, что справедливо равенство

$$\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(y)\left[h''(t)b_m(y)-2\lambda_m^2h'(t)b_m(y)+\lambda_m^4h(t)b_m(y)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left(t,y,Q\vec{a}(t),\int_0^tK(t,s)Q\vec{a}\left(\delta(s,y)\right)ds\right)\cdot h(t)b_m(y)\right\}dy\,dt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)b_n(y)\left[h''(t)-\lambda_m^2h'(t)+\lambda_m^4h(t)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left(t,y,Q\vec{a}(t),\int_0^tK(t,s)Q\vec{a}\left(\delta(s,y)\right)ds\right)\cdot h(t)b_m(y)\right\}dy\,dt=0.$$

Отметим, что система функций $\left\{b_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную систему ортонормированных функций в $L_2(D_l)$. Поэтому, учитывая полноту данной системы функций, из последнего равенства получаем следующее упрощенное тождество

$$\int_0^T\left[a_n(t)\cdot\left(h''(t)-\lambda_m^2h'(t)+\lambda_m^4h(t)\right)-\right.$$

$$-\int_0^l f\left(t,y,Q\vec{a}(t),\int_0^t K(t,s)Q\vec{a}\big(\delta(s,y)\big)ds\right)\cdot h(t)b_n(y)dy\Bigg]dt=0.$$

Далее, осуществляя интегрирование по частям, из последнего полученного равенства приходим к следующему равенству

$$\int_0^T h(t)\Big[a_n''(t)+2\lambda_m^2 a_n'(t)+\lambda_m^4 a_n(t)-$$

$$-\int_0^l f\left(t,y,Q\vec{a}(t),\int_0^t K(t,s)Q\vec{a}\big(\delta(s,y)\big)ds\right)\cdot b_n(y)dy\Bigg]dt=0. \qquad (3.1.7)$$

Поскольку $h(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (3.1.7) относительно искомых коэффициентов получаем счётную систему нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в следующего вида

$$a_n''(t)+2\lambda_n^2 a_n'(t)+\lambda_n^4 a_n(t)=$$

$$=\int_0^l f\left(t,y,Q\vec{a}(t),\int_0^t K(t,s)Q\vec{a}\big(\delta(s,y)\big)ds\right)\cdot b_n(y)dy. \qquad (3.1.8)$$

Интегрирование этой счётной системы второго порядка (3.1.8) осуществляется методом вариации произвольных постоянных, то есть общее решение данной счётной системы записываем в следующем виде

$$a_n(t)=\big(C_{1n}+C_{2n}t\big)\cdot e^{-\lambda_n^2 t}+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),\int_0^s K(s,\theta)Q\vec{a}\big(\delta(\theta,y)\big)d\theta\right)\times$$

$$\times b_n(y)P_n(t,s)dy\,ds,\ t\in D_T\ , \qquad (3.1.9)$$

в котором использовано обозначение $P_n(t,s)=(t-s)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-s)}$.

Для однозначного определения произвольных коэффициентов интегрирования $C_{in}\,(i=\overline{1,2})$, воспользуемся начальными условиями

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\ a_n'(0)=\varphi_{2n},$$

где $\varphi_{in}=\int_0^l \varphi_i(y)b_n(y)dy,\ i=\overline{1,2}$.

Тогда из (3.1.9) приходим к ССНИУ (3.1.5).

§ 3.2. ССНИУ с интегральным отклонением

В данном параграфе рассматривается ССНИУ с интегральным отклонением вида

$$a_n(t) = w_n(t) + \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q^{2,\eta}\vec{a}\left(\delta\left(s, y, \int_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}(\theta)d\theta\right)\right)\right)\times$$

$$\times b_n(y)P_n(t,s)dy\,ds,\ t\in D_T\ , \tag{3.2.1}$$

здесь

$a_n(t)$ - искомая счётная функция, n=1,2,3,…,

$$w_n(t) = \left[\varphi_{1n} + t\left(\lambda_n^2\varphi_{1n} + \varphi_{2n}\right)\right]\cdot e^{-\lambda_n^2 t},\ P_n(t,s) = (t-s)\cdot e^{-\lambda_n^2(t-s)}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $$\max_{t\in D_T}\int_0^t \left\| f\left(s, x, Q\vec{a}^0(s), Q^{2,\eta}\vec{a}^0\left(\delta\left(s, x, \int_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^0(\theta)d\theta\right)\right)\right)\right\|_{L_2(D_l)} ds \le$$

$$\le \Delta < \infty;$$

2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\left\{H(t,x)|_u; F_1(t,x)|_\vartheta\right\}$,

$\left\|H(t,x)\right\|_{L_2(D_l)} = \alpha_1(t) > 0,\ \left\|F_1(t,x)\right\|_{L_2(D_l)} = \alpha_2(t) > 0;$

3. $\delta(t,x,u) \in Lip\left\{F_2(t,x)|_u\right\}$,

$$\left\|F_1(t,x)\int_0^t K(t,s)F_2(s,x)\int_0^s R(s,\theta)d\theta ds\right\|_{L_2(D_l)} = \overline{\alpha}_3(t) > 0;$$

4. $\left\|\vec{w}(t)\right\|_{B_2(T)} < \infty.$

Тогда счётная система уравнений (3.2.1) однозначно разрешима в пространстве $B_2(T)$.

Доказательство. Используем МПП. Последовательные приближения записываем в виде

$$
\begin{cases}
a_n^0(t) = w_n(t),\ t \in D_T, \\
a_n^{k+1}(t) = w_n(t) + \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}^k(s),Q^{2,\eta}\vec{a}^k\left(\delta\left(s,y,\int\limits_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^k(\theta)d\theta\right)\right)\right)\times \\
\times b_n(y)P_n(t,s)\,dy\,ds,\quad k=0,1,2,3,...,\ t\in D_T.
\end{cases} \tag{3.2.2}
$$

Для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ по норме из предыдущих соотношений имеем оценку

$$
\left\|\vec{a}^1(t)-\vec{a}^0(t)\right\|_{B_2(t)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t \left|P_n(t,s)\right|\times
$$

$$
\times\int\limits_0^l\left| f\left(s,y,Q\vec{a}^0(s),Q^{2,\eta}\vec{a}^0\left(\delta\left(s,y,\int\limits_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^0(\theta)d\theta\right)\right)\right)b_n(y)\right|dy\,ds \le
$$

$$
\le M_1\int\limits_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q^{2,\eta}\vec{a}^0\left(\delta\left(s,x,\int\limits_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^0(\theta)d\theta\right)\right)\right)\right\|_{L_2(D_l)} ds \le
$$

$$
\le M_1\Delta, \tag{3.2.3}
$$

здесь $M_1 = \max\limits_{t,s}\left|P_n(t,s)\right|$.

Для второй разности приближения $a_n^2(t) - a_n^1(t)$ используем вторую условию теоремы. Тогда, применяя неравенство Гельдера, по норме имеем

$$
\left\|\vec{a}^2(t)-\vec{a}^1(t)\right\|_{B_2(T)} \le
$$

$$
\le M_1\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left| f\left(s,y,Q\vec{a}^1(s),Q^{2,\eta}\vec{a}^1\left(\delta\left(s,x,\int\limits_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^1(\theta)d\theta\right)\right)\right)-\right.
$$

$$
\left.- f\left(s,y,Q\vec{a}^0(s),Q^{2,\eta}\vec{a}^0\left(\delta\left(s,y,\int\limits_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^0(\theta)d\theta\right)\right)\right)\right|dy\,ds \le
$$

$$
\le M_1\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left[H(t,y)\left\|\vec{a}^1(s)-\vec{a}^0(s)\right\|_{B_2(t)} + \right.
$$

$$+F_1(t,y)\int_0^s K(s,\theta)\left\|\left(\vec{a}^1\left(\delta\left(s,y,\int_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^1(\theta)d\theta\right)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\vec{a}^0\left(\delta\left(s,y,\int_0^s R(s,\theta)\cdot Q\vec{a}^0(\theta)d\theta\right)\right)\right)\right\|_{B_2(t)} d\theta\right]dy\,ds.$$

Так как в силу третьего условия теоремы

$$\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right)-\right.$$

$$\left.-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right)-\right.$$

$$\left.-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right)\right|+$$

$$+\left|a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right)-\right.$$

$$\left.-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot\left|\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)-\right.$$

$$\left.-\delta\left(s,x,\int_0^s R(s,\theta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(\theta)\cdot b_i(x)d\theta\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot H_2(s,x)\cdot\int_0^s R(s,\theta)\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(\theta)\cdot b_i(x)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(\theta)\cdot b_i(x)\right|d\theta,$$

то имеем следующую оценку

$$\left\|\vec{a}^2(t)-\vec{a}^1(t)\right\|_{B_2(t)}\leq$$

$$\le M_1\int_0^t \alpha_1(s)\left\|\vec a^{\,1}(s)-\vec a^{\,0}(s)\right\|_{B_2(t)} ds+$$

$$+M_1\int_0^t \left\|F_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\int_0^s K(s,\theta)\left\|\vec a^{1}(\theta)-\vec a^{0}(\theta)\right\|_{B_2(t)} d\theta\, ds+$$

$$+M_1\Delta\int_0^t\int_0^l F_1(s,y)\int_0^s K(s,\theta)F_2(\theta,y)\times$$

$$\times\int_0^\theta R(\theta,\xi)\left|\sum_{i=1}^\infty a_i^1(\xi)b_i(y)-\sum_{i=1}^\infty a_i^0(\xi)b_i(y)\right| d\xi\, d\theta\, dy\, ds\le$$

$$\le M_1\int_0^t\left(\alpha_1(s)+\alpha_2(s)\int_0^s K(s,\theta)d\theta\right)\left\|\vec a^{1}(s)-\vec a^{0}(s)\right\|_{B_2(t)} ds+$$

$$+M_1\Delta\int_0^t \alpha_3(s)\left\|\vec a^{1}(s)-\vec a^{0}(s)\right\|_{B_2(t)} ds\le\left(M_1\right)^2\Delta\int_0^t\overline{\eta}(s)ds, \qquad (3.2.4)$$

где $\overline{\eta}(t)=\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\int\limits_0^t K(t,s)ds+\overline{\alpha}_3(t)\Delta.$

Продолжим этот процесс для произвольного натурального числа k и по индукции получаем по аналогии (3.3.4), что справедлива оценка

$$\left\|\vec a^{\,k+1}(t)-\vec a^{\,k}(t)\right\|_{B_2(T)}\le\left(M_1\right)^{k+1}\Delta\frac{\left[\max\limits_{t\in D_T}\int_0^t\overline{\eta}(s)ds\right]^k}{k!}. \qquad (3.2.5)$$

Из оценки (3.2.5) заключаем, что при $k\to\infty$ последовательность функций $\left\{\vec a^{\,k}(t)\right\}_{k=1}^\infty$ сходится абсолютно и равномерно по t к функции $\vec a(t)\in B_2(T)$. Следовательно, существует решение счётной системы (3.2.1). Применением интегральных неравенств покажем единственность этого решения счётной системы (3.2.1) в пространстве $B_2(T)$.

Пусть счётная система (3.2.1) имеет два разные решения: $\vec a(t)\in B_2(T)$ и $\vec\vartheta(t)\in B_2(T)$. Тогда для разности этих функций по норме применяем метод, использованный выше, и приходим к следующей интегральной оценке

$$\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_2(t)} \le M_1 \int_0^t \overline{\eta}(s) \left\| \vec{a}(s) - \vec{\vartheta}(s) \right\|_{B_2(t)} ds\,. \qquad (3.2.6)$$

Применение неравенство Гронуолла-Беллмана к оценке (3.2.6) даёт, что $\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_2(T)} = 0$ для всех $t \in [0;T]$. Следовательно, ССНИУ (3.2.1) имеет единственное решение: $\vec{a}(t) \in B_2(T)$.

§ 3.3. Однозначная разрешимость смешанной задачи

Решение смешанной задачи (3.1.1)-(3.1.3) представим в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \Big[w_n(t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q^{2,\eta} \vec{a}\left(\delta(s, y, Q\vec{a}(s))\right)\right) b_n(y) P_n(t,s)\, dy\, ds \Big]. \qquad (3.3.1)$$

Для этого достаточно подставить (3.1.4) в (3.1.1), и мы получим представление задачи (3.1.1)-(3.1.3) в виде (3.3.1).

Рассмотрим вопрос о том, что при каких условиях представление (3.3.1) будет слабо обобщённым решением смешанной задачи (3.1.1)-(3.1.3).

Теорема 3.3. Предположим, что выполняются все условия теоремы 3.2 и $\vec{a}(t) \in B_2(T)$. Тогда ряд (3.3.1) будет сходиться к решению смешанной задачи (3.1.1)-(3.1.3).

Доказательство. По условию теоремы $\vec{a}(t) \in B_2(T)$. Поскольку $u(t,x) \in L_2(D)$ и

$$\lim_{k \to \infty} u^k(t,x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n(t) \cdot b_n(x) = u(t,x)\ ,$$

то отсюда следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f\left(t, x, u^k(t,x), \int_0^t K(t,s) u^k(\delta(s,x,u^k(s,x),x)\, ds \right) =$$

$$= f\left(t, x, u(t,x), \int_0^t K(t,s) u(\delta(s,x,u(s,x),x)\, ds \right). \qquad (3.3.2)$$

Строим следующую последовательность функций:

$$V_k = \int_0^T \int_0^l \left\{ u^k(t,y) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} H + 2 \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} H + \frac{\partial^4}{\partial y^4} H \right] - \right.$$

$$\left. - f\left(t, y, u^k(t,y), \int_0^t K(t,s) u^k(\delta(s,y,u^k(s,y),y)\, ds \right) H \right\} dy\, dt -$$

$$- \int_0^l \varphi_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} H \right]_{t=0} dy + \int_0^l \varphi_2 [H]_{t=0}\, dy. \qquad (3.3.3)$$

С учётом условий теоремы и начальных условий

$$a_n(0) = \varphi_{1n},\ a'_n(0) = \varphi_{2n}$$

интегрируем по частям отдельные слагаемые в формуле (3.3.3). Тогда имеем:

$$V_k = \int_0^l \left(\varphi_1(y) - \sum_{n=1}^k \varphi_{1n} b_n(y) \right) \left[H_t \right]_{t=0} dy -$$

$$- \int_0^l \left(\varphi_2(y) - \sum_{n=1}^k \varphi_{2n} b_n(y) \right) \left[H \right]_{t=0} dy +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l H(t,y) \left\{ f\left(t, y, Q\vec{a}(t), Q^{2,\eta} \vec{a}\left(\delta(t,y,Q\vec{a}(t)) \right) \right) - \right.$$

$$\left. - f\left(t, y, Q\vec{a}^{\,k}(t), Q^{2,\eta} \vec{a}^{\,k}\left(\delta(t,y,Q\vec{a}^{\,k}(t)) \right) \right) \right\} \cdot b_n(y)\, dy\, dt. \qquad (3.3.4)$$

Учтём, что $\varphi_i(x) \in L_2(D_l)$. В формуле (3.3.4) первые два интеграла стремятся к нулю при $k \to \infty$. Сходимость разности последнего интеграла в (3.3.4) следует из (3.3.2) при $k \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} V_k = 0$. Теорема доказана.

§ 3.4. Заключение по главе 3

Впервые изучена однозначная слабо обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные интегральные отклонения в аргументе.

Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе.

ГЛАВА 4. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРАМИ В СУПЕРПОЗИЦИИ

§ 4.1. Линейные интегральные неравенства с отражением аргумента

В данном параграфе рассматриваются интегральные неравенства, в которых подынтегральная искомая функция имеет отражающий аргумент.

Теорема 4.1.1. Пусть имеет место неравенство

$$u(t) \le C + K\left|\int_0^t u(-s)\,ds\right|, \quad t \in R, \tag{4.1.1}$$

где $u(t) \in C(R;R^+)$, $C \ge 0, K \ge 0$ - постоянные числа .

Тогда на числовой оси R справедлива оценка

$$u(t) \le C\exp\{|Kt|\}. \tag{4.1.2}$$

Доказательство. Заменяя в (4.1.1) s на - s и t на - t , имеем

$$u(-t) \le C + K\left|\int_0^t u(s)\,ds\right|, \quad t \in R. \tag{4.1.3}$$

Из (4.1.1) и (4.1.3) получаем, что

$$\sigma(t) \le C + K\left|\int_0^t \sigma(s)\,ds\right|, \quad t \in R, \tag{4.1.4}$$

где $\sigma(t) \equiv \max\{u(t), u(-t)\}$.

Применяя к интегральному неравенству (4.1.4) лемму Гронуолла, получаем

$$\sigma(t) \le C\exp\{|Kt|\}, \quad t \in R. \tag{4.1.5}$$

С учетом того, что $u(t) \le \sigma(t)$ на R, получаем (4.1.2).

Теорема 4.1.2. Пусть имеет место неравенство

$$u(t) \le C + \left|\int_0^t g(s)u(-s)\,ds\right|, \quad t \in R, \tag{4.1.6}$$

где $u(t)\in C(R;R),\ g(t)\in C(R;R),\ 0\le$ С – постоянное число.

Тогда справедлива оценка

$$u(t)\le C\exp\left\{\left|\int_0^t f(s)\,ds\right|\right\},\quad t\in R, \tag{4.1.7}$$

где $f(t)=\dfrac{1}{2}\big(g(t)+g(-t)\big).$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 4.1.1, заменяем в (4.1.6) s на $-s$ и t на $-t$. Тогда имеем

$$u(-t)\le C+\left|\int_0^t g(-s)u(s)\,ds\right|,\quad t\in R$$

или

$$\sigma(t)\le C+\left|\int_0^t f(s)\sigma(s)\,ds\right|,\quad t\in R, \tag{4.1.8}$$

где $\sigma(t)\equiv\max\{u(t),u(-t)\}$, $f(t)=\dfrac{1}{2}\big(g(t)+g(-t)\big).$

Применяя к интегральному неравенству (4.1.8) лемму Гронуолла-Беллмана, получим

$$\sigma(t)\le C\exp\left\{\left|\int_0^t f(s)\,ds\right|\right\},\quad t\in R. \tag{4.1.9}$$

Так как $u(t)\le\sigma(t)$, то из (4.1.9) следует (4.1.7).

Теорема 4.1.3. Пусть имеет место неравенство

$$u(t)\le f(t)+\alpha(t)\left|\int_0^t \beta(s)u(-s)\,ds\right|,\quad t\in R, \tag{4.1.10}$$

где

$$u(t)\in C(R;R^+),\ f(t)\in C(R;R^+),\ \alpha(t)\in C(R;R^+),\ \beta(t)\in C(R;R^+).$$

Тогда справедлива оценка

$$u(t)\le f_0(t)+$$

$$+\alpha_0(t)\left|\int_0^t f_0(s)\beta_0(s)\exp\left\{\left|\int_s^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\tau\right|\right\}ds\right|,\ t\in R, \qquad (4.1.11)$$

где $f_0(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right),\ \alpha_0(t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(t)+\alpha(-t)\right),\ \beta_0(t)=\frac{1}{2}\left(\beta(t)+\beta(-t)\right).$

Доказательство. Из (4.1.10) в силу условий теоремы нетрудно получить неравенство

$$\sigma(t)\le f_0(t)+\alpha_0(t)\left|\int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)\,ds\right|,\quad t\in R, \qquad (4.1.12)$$

где $\sigma(t)\equiv\max\{u(t),u(-t)\}$.

Примем обозначение

$$\omega(t)=\int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)\,ds. \qquad (4.1.13)$$

Отсюда

$$\omega(0)=0,\ \frac{d\omega(t)}{dt}=\beta_0(t)\sigma(t). \qquad (4.1.14)$$

Обе части (4.1.12) умножим на $\beta_0(t)$ и, принимая во внимание (4.1.13) и (4.1.14), получаем

$$\frac{d\omega}{dt}\le f_0(t)\beta_0(t)+\alpha_0(t)\beta_0(t)\omega(t),\quad t\in R. \qquad (4.1.15)$$

Вводим новую функцию $\Delta(t)$ с помощью следующего равенства

$$\omega(t)=\Delta(t)\exp\left\{\int_0^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\tau\right\}. \qquad (4.1.16)$$

Дифференцируя обе части (4.1.16) по t, получим

$$\frac{d\omega(t)}{dt}=\frac{d\Delta(t)}{dt}\exp\left\{\int_0^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\tau\right\}+$$

$$+\Delta(t)\exp\left\{\int_0^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\tau\right\}\alpha_0(t)\beta_0(t)$$

или

$$\frac{d\,\omega(t)}{d\,t}=\frac{d\,\Delta(t)}{d\,t}\exp\left\{\int_0^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\,\tau\right\}+\alpha_0(t)\beta_0(t)\omega(t). \qquad (4.1.17)$$

Подставляя значение $\frac{d\omega(t)}{d\,t}$ из (4.1.17) в (4.1.15), имеем

$$\frac{d\Delta(t)}{d\,t}\exp\left\{\int_0^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\,\tau\right\}\le f_0(t)\beta_0(t)$$

или, интегрируя обе части последнего неравенства, получаем

$$\Delta(t)\le\int_0^t f_0(s)\beta_0(s)\exp\left\{-\int_0^s \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\,\tau\right\}d\,s. \qquad (4.1.18)$$

Из (4.1.13) и (4.1.16) получаем, что

$$\int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)\,d\,s=\Delta(t)\exp\left\{\int_0^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\,\tau\right\}. \qquad (4.1.19)$$

С учетом (4.1.18) из (4.1.19) получаем

$$\beta_0(t)\sigma(t)\le f_0(t)\beta_0(t)+$$

$$+\int_0^t f_0(s)\beta_0(s)\exp\left\{\int_s^t \alpha_0(\tau)\beta_0(\tau)\,d\,\tau\right\}\alpha_0(t)\beta_0(t)\,d\,s$$

или

$$\sigma(t)\le f_0(t)+\alpha_0(t)\int_0^t f_0(s)\beta_0(s)\exp\left\{\int_s^t \alpha_0(\tau)\beta(\tau)\,d\,\tau\right\}d\,s\,.$$

С учетом того, что $u(t)\le\sigma(t)$,получаем (4.1.11).

Теорема 4.1.4. Пусть в условии теоремы 4.1.3;

$$f(t)>0\,,\quad f'(t)\in C(R;R^+),\;\; \alpha(t)\le 1\,.$$

Тогда из неравенства (4.1.10) следует оценка

$$u(t)\le f_0(t)\alpha_0(t)\exp\left\{\left|\int_0^t \beta_0(s)\alpha_0(s)\,d\,s\right|\right\},\quad t\in R\,, \qquad (4.1.20)$$

где $f_0(t),\;\alpha_0(t)$ определяются из условия теоремы 4.1.3.

Доказательство. Обе части неравенства (4.1.12) делим на $f_0(t)>0$

$$\frac{\sigma(t)}{f_0(t)} \le 1 + \frac{\alpha_0(t)}{f_0(t)} \int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)\,ds \le$$

$$\le \alpha_0(t)\left[1 + \frac{1}{f_0(t)} \int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)\,ds\right], \quad t \in R \ . \qquad (4.1.21)$$

Примем обозначение

$$R(t) = 1 + \frac{1}{f_0(t)} \int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)\,ds, \quad R(0) = 1.$$

Тогда

$$\frac{d\,R(t)}{d\,t} = \frac{\sigma(t)\beta_0(t)}{f_0(t)} - \frac{f_0'\ (t)}{f_0^2(t)} \int_0^t \beta_0(s)\sigma(s)ds \le \frac{\sigma(t)\beta_0(t)}{f_0(t)}.$$

Отсюда с учетом (4.1.21) получаем

$$\frac{d\,R(t)}{d\,t} \le \beta_0(t)\frac{\sigma(t)}{f_0(t)} \le \beta_0(t)\alpha_0(t)R(t)$$

или

$$\frac{d\,R}{R(t)} \le \beta_0(t)\alpha_0(t)\,dt.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$R(t) \le \exp\left\{\left|\int_0^t \beta_0(s)\alpha_0(s)ds\right|\right\}.$$

Подставляя это в (4.1.21), получаем

$$\sigma(t) \le f_0(t)\cdot\alpha_0(t)\cdot\exp\left\{\left|\int_0^t \beta_0(s)\alpha_0(s)\,ds\right|\right\}.$$

Отсюда с учетом того, что $u(t) \le \sigma(t)$ приходим к (4.1.20).

Теорема 4.1.5. Пусть выполняется неравенство

$$u(t) \le f(t) + \left|\int_0^t K(t,s)u(-s)\,ds\right|, \quad t \in R, \qquad (4.1.26)$$

где $u(t) \in C(R;R^+)$, $f(t) \in C(R;R^+)$, $K(t,s) \in C(R^2;R^+)$.

Тогда справедлива оценка

$$u(t) \le f_0(t) + \left| \int_0^t R(t,s)\, f_0(s)\, d\, s \right|, \quad t \in R, \tag{4.1.27}$$

где $R(t,s)$ – резольвента следующего интегрального уравнения

$$\omega(t) = f_0(t) + \int_0^t K_0(t,s)\omega(s)\, d\, s, \quad t \in R, \tag{4.1.28}$$

$$f_0(t) \equiv \max\{ f(t); f(-t)\}, \quad K_0(t,s) \equiv K(t,s) + K(-t,-s).$$

Доказательство. Неравенство (4.1.26) заменим со следующим соотношением

$$\sigma(t) \le f_0(t) + \left| \int_0^t K_0(t,s)\sigma(s)\, d\, s \right|, \quad t \in R, \tag{4.1.29}$$

где $\sigma(t) \equiv \max\{u(t);\ u(-t)\}$.

К неравенству (4.1.29) применим метод последовательных приближений. Вместо $\sigma(s)$ в правой части (4.1.29) подставим выражение

$$f_0(s) + \int_0^s K_0(s,s_1)\sigma(s_1)\, d\, s_1.$$

Тогда получим

$$\sigma(t) \le f_0(t) + \left| \int_0^t K_0(t,s)\, f_0(s)\, d\, s \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t K_0(t,s) \int_0^s K_0(s,s_1)\sigma(s_1)\, d\, s_1\, d\, s \right|.$$

Теперь в правой части последнего неравенства сделаем подстановку

$$\sigma(s_1) = f_0(s_1) + \int_0^{s_1} K_0(s_1,s_2)\sigma(s_2)\, d\, s_2$$

и продолжим этот процесс n раз. Тогда имеем

$$\sigma(t) \le f_0(t) + \int_0^t K_0(t,s)\, f_0(s)\, d\, s +$$

$$+ \int_0^t K_0(t,s) \int_0^s K_0(s,s_1)\, f_0(s_1)\, d\, s_1\, d\, s + \ldots +$$

$$+\int_0^t K_0(t,s)\int_0^s K_0(s,s_1)\ldots\int_0^{s_{n-2}} K_0(s_{n-2},s_{n-1})\, f_0(s_{n-1})\, d\,s_{n-1}\ldots d\,s+$$

$$+R_{n+1}(t)\ , \tag{4.1.30}$$

где $R_{n+1}(t)\equiv\int_0^t K_0(t,s)\int_0^s K_0(s,s_1)\ldots\int_0^{s_{n-1}} K_0(s_{n-1},s_n)\,\sigma(s_n)\,d\,s_n\ldots d\,s.$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(t)=0\,. \tag{4.1.31}$$

Исходя из условий теоремы, мы положим

$$|\,K_0(t,s)\,|\le\mu,\quad |\,f_0(t)\,|\le N\,,$$

$$|\,R_n(t)\,|\le\left|\int_0^t K_0(t,s)\int_0^s K_0(s,s_1)\ldots\int_0^{s_{n-2}} K_0(s_{n-2},s_{n-1})\, f_0(s_{n-1})\,d\,s_{n-1}\ldots d\,s\right|\le$$

$$\le N\,\frac{[\mu\, t\,]^n}{n!},\ \ t\in R.$$

Так как для ряда с общим членом вида $N\,\dfrac{[\mu\, t\,]^n}{n!},\ \forall t\in R$ применяем признак Даламбера и получаем (4.1.31).

Учитывая (4.1.31), заключаем, что правая часть (4.1.30) является решением уравнения (4.1.28). Отсюда следует оценка (4.1.27).

Теорема 4.1.6. Пусть имеет место неравенство

$$u(t)\le\alpha+\beta\left|\int_0^t\left[\,g(s)u(s)+\int_0^s\mu(s,\tau)u(-\tau)\,d\,\tau\right]d\,s\right|,\quad t\in R\,, \tag{4.1.32}$$

где $u(t)\in C(R;R^+),\ g(t)\in C(R;R^+),\ \mu(t,s)\in C(R^2;R^+),$ $0\le\alpha,\beta-$ постоянные числа.

Тогда справедлива следующая оценка

$$u(t)\le\alpha\cdot\exp\left\{\beta\left|\int_0^t\left[\,g_0(s)+\left|\int_0^s\mu_0(s,\tau)d\tau\right|\right]d\,s\right|\right\},\quad t\in R\,, \tag{4.1.33}$$

где $g_0(t)=\dfrac{1}{2}\big(\,g(t)+g(-t)\big),\ \ \mu_0(t,s)=\dfrac{1}{2}\big(\,\mu(t,s)+\mu(-t,-s)\big).$

Доказательство. Неравенство (4.1.32) заменим со следующим неравенством

$$\sigma(t)\le\alpha+\beta\left|\int_0^t\left[g_0(s)\sigma(s)+\left|\int_0^s\mu(s,\tau)\sigma(\tau)d\tau\right|\right]ds\right|,\quad t\in R.$$

Примем обозначение

$$\omega(t)=\alpha+\beta\int_0^t\left[g_0(s)\sigma(s)+\int_0^s\mu_0(s,\tau)\sigma(\tau)d\tau\right]ds.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}=\beta\left[g_0(t)\frac{\sigma(t)}{\omega(t)}+\int_0^t\mu_0(t,\tau)\frac{\sigma(\tau)}{\omega(t)}d\tau\right]\le$$

$$\le\beta g_0(t)+\beta\int_0^t\mu_0(t,\tau)d\tau.$$

Последнее соотношение проинтегрируем в пределе от a до t

$$\ln\omega(t)-\ln\alpha\le\beta\int_0^t\left[g_0(s)+\int_0^s\mu_0(s,\tau)d\tau\right]ds$$

или

$$u(t)\le\omega(t)\le\alpha\cdot\exp\left\{\beta\int_0^t\left[g_0(s)+\int_a^s\mu_0(s,\tau)d\tau\right]ds\right\},\quad t\in R\ .$$

§ 4.2. Однозначная разрешимость ССНИУ с нелинейным отражающим отклонением

В прямоугольной области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=$$

$$=f\left(t,x,u(t,x),u\big(\delta(t,x,u(-t,x)),x\big)\right)\qquad(4.2.1)$$

с начальными

$$\left[\begin{array}{l}u(t,x)_{|t\in(-\infty;-T]}=0,\ u(0,x)=\varphi_1(x),\ u(t,x)_{|t\in(T,\infty)}=0,\\ u_t(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|t=0}=\varphi_3(x),\end{array}\right.\qquad(4.2.2)$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|\,x=0} = u(t,x)_{|\,x=l} = u_{xx}(t,x)_{|\,x=0} = u_{xx}(t,x)_{|\,x=l} = 0, \qquad (4.2.3)$$

где $f(t,x,u\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\varphi_i(x)\in C^4\left(D_l\right)$, $\varphi_i(x)_{|\,x=0}=\varphi_i(x)_{|\,x=l}=$

$=\varphi_i''(x)_{|\,x=0}=\varphi_i''(x)_{|\,x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv\left[-T,T\right]$,

$D_l\equiv\left[0,l\right]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\delta(t,x)\neq t$.

Дифференциальные уравнения с отражающим аргументом имеет ряд особенностей. Например, уравнение $x'(t)=a\,x(-t)$, $a=const\neq 0$, $t\in R$ с начальным условием $x(t_0)=x^0, t_0=(4k-1)\pi/(4a)$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ при $x^0\neq 0$ не имеет решение, а при $x^0=0$ имеет бесконечное число решений $x(t)=(\cos at+\sin at)\cdot C$, $C=const$, что является общим решением данного уравнения [31].

При решении задачи будем использовать следующий алгоритм:

1). Применяем метод разделения переменных в виде ряда Фурье, т.е. искомое решение смешанной задачи будем искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, то есть первая функция зависит только от t, другая только от - x;

2). Будем искать слабо обобщенное решение, удовлетворяющее заданному интегральному тождеству;

3). Относительно коэффициентов Фурье по t получаем ССНИУ типа Вольтерра;

4). МПП доказывается однозначная разрешимость ССНИУ.

Согласно указанному выше алгоритму, решение данной задачи разыскивается в виде ряда Фурье, содержащего произведения двух функций, каждый из которых зависит только от одного аргумента, то есть первая функция зависит только от t, другая только от - x:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\quad (t,x)\in D, \qquad (4.2.4)$$

где $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$.

Будем рассматривать слабо обобщенное решение поставленной смешанной задачи в Соболевского классе функций $\hat{W}_2^3(D)$.

Определение 4.2. Для пробной функции $\overline{\Phi}(t,x)\in C^{3,4}(D)$ рассмотрим следующее интегральное тождество

$$\int_{-T}^{T}\int_0^l\left\{u(t,y)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\overline{\Phi}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)-\frac{\partial^4}{\partial y^4}\overline{\Phi}\right]-f\,\overline{\Phi}\right\}dy\,dt=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\Phi}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_3\left[\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy.$$

Если функция $u(t,x)\in\hat{W}_2^3(D)$ удовлетворяет этому интегральному тождеству, то она называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (4.2.1)-(4.2.3).

Для пробной функции $\overline{\Phi}(t,x)$ справедливы соотношения:

$$\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\overline{\Phi}(t,x)\,dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial\overline{\Phi}(t,x)}{\partial t}dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial^2\overline{\Phi}(t,x)}{\partial t^2}dx=0 \text{ при } k=3\,.$$

Из определения слабо обобщенного решения задачи (4.2.1)-(4.2.3) следует, что искомая функция $u(t,x)$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по собственным функциям $b_n(x)$ почти для всех $t\in D_T$. Следовательно, если $u(t,x)$ является слабо обобщенным решением смешанной задачи (4.2.1)-(4.2.3), то имеет место разложение (4.2.4), в котором

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,y)b_n(y)\,dy\,,\ b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x\,,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots$$

Здесь справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.1. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Отображение $f\,Q: B_2(T) \to L_2(D)$ непрерывно;

2. Функция $u(t,x)$ является искомым слабо обобщённым решением смешанной задачи (4.2.1)-(4.2.3) и

$$a_n(t) = \int_0^l u(t,y) b_n(y)\, dy\,.$$

Тогда коэффициенты Фурье $a_n(t)$ решения смешанной задачи (4.2.1)-(4.2.3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t) = \omega_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s, y, Q\vec{a}(-s)))\right) \times$$

$$\times b_n(y) G_n(t,s)\, dy\, ds,\ t \in D_T, \tag{4.2.5}$$

в котором

$$\omega_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 (1-\lambda_n^2)} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^3 \varphi_{1n} + \lambda_n (1+\lambda_n) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2 (1+\lambda_n)} e^{\lambda_n t} +$$

$$+ \frac{-\lambda_n^3 \varphi_{1n} - \lambda_n (1-\lambda_n) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2 (1-\lambda_n)} e^{-\lambda_n t},$$

$$G_n(t,s) = \frac{1}{\mu_n} \left[-e^{-\lambda_n^2 (t-s)} + 2\left(ch\lambda_n (t-s) - \lambda_n sh\lambda_n (t-s) \right) \right].$$

$$\mu_n = 2\lambda_n (1-\lambda_n^2).$$

В данном параграфе рассматривается следующая счётная система

$$a_n(t) = \omega_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s, y, Q\vec{a}(-s)))\right) \times$$

$$\times b_n(y) G_n(t,s)\, dy\, ds,\ t \in D_T, \tag{4.2.6}$$

где

$$\omega_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 (1-\lambda_n^2)} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^3 \varphi_{1n} + \lambda_n (1+\lambda_n) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2 (1+\lambda_n)} e^{\lambda_n t} +$$

$$+\frac{-\lambda_n^3\varphi_{1n}-\lambda_n(1-\lambda_n)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1-\lambda_n)}e^{-\lambda_n t},$$

$$G_n(t,s)=\frac{1}{\mu_n}\left[-e^{-\lambda_n^2(t-s)}+2\left(ch\lambda_n(t-s)-\lambda_n sh\lambda_n(t-s)\right)\right],$$

$$\mu_n=2\lambda_n(1-\lambda_n^2).$$

Теорема 4.2.2. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\left|\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(-s)))\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\right|\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{h_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\int\limits_0^t\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{h_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\int\limits_0^t\left\|h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty;$

4. $\left\|\vec{\omega}(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$

Тогда счётная система (4.2.6) имеет единственное решение в банаховом пространстве $B_2(T)$.

Доказательство. Используем МПП. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t)=\omega_n(t),\ t\in D_T, \\ a_n^{k+1}(t)=\omega_n(t)+ \\ +\dfrac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}^k(s),Q\vec{a}^k(\delta(s,y,Q\vec{a}^k(-s)))\right)\times \\ \times b_n(y)\cdot G_n(t,s)\,dy\,ds,\ k=0,1,2,3,\dots,\ t\in D_T. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

В силу первого условия теоремы, к первой разности $a_n^1(t)-a_n^0(t)$ приближения по норме применяем неравенство Гельдера и неравенство Бесселя. Тогда из (4.3.2) получаем, что

$$\left\|\vec{a}^1(t)-\vec{a}^0(t)\right\|_{B_2(t)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left|f_0\right|\cdot\left|b_n(y)\right|\cdot\left|G_n(t,s)\right|dy\,ds\right|\le$$

$$\leq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \int_0^t \int_0^l | f_0 | \cdot | b_n(y) | \, dy\, ds \right| \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \left| \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l | f_0 | \cdot | b_n(y) | \, dy \right]^2} \, ds \right| \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \left| \int_0^t \| f_0 \|_{L_2(D_l)} \, ds \right| \leq M_1 M_2 \Delta , \qquad (4.2.8^1)$$

где

$$f_k \equiv f\left(s, x, Q\vec{a}^k(s), Q\vec{a}^k(\delta(s, x, Q\vec{a}^k(-s)))\right), \ k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\max_{0 \leq s \leq t \leq T} | G_n(t,s) | \leq M_1 < \infty, \ M_2 = \left\| \frac{1}{\lambda} \right\|_{\ell_2} .$$

Аналогично $(4.2.8^1)$ получаем, что

$$\left\| \vec{a}^1(-t) - \vec{a}^0(-t) \right\|_{B_2(t)} \leq M_1 M_2 \Delta . \qquad (4.2.8^2)$$

С учётом второго условия теоремы к второй разности $a_n^2(t) - a_n^1(t)$ по норме применяем неравенство Гельдера и неравенство Бесселя. Тогда имеем оценку

$$\left\| \vec{a}^2(t) - \vec{a}^1(t) \right\|_{B_2(t)} \leq M_1 M_2 \left| \int_0^t \int_0^l | f_1 - f_0 | \, dy\, ds \right| .$$

Нам в дальнейших наших действиях понадобятся, что справедливы следующие оценки

$$\Big| f\left(s, x, Q\vec{a}^1(s), Q\vec{a}^1(\delta(s, x, Q\vec{a}^1(-s)))\right) -$$

$$- f\left(s, x, Q\vec{a}^0(s), Q\vec{a}^0(\delta(s, x, Q\vec{a}^0(-s)))\right) \Big| \leq$$

$$\leq h_1(s,x) \cdot \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| a_\nu^1(s) - a_\nu^0(s) \right| \cdot | b_\nu(x) | + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| a_\nu^1\left(\delta\left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right)\right) - a_\nu^0\left(\delta\left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right)\right) \right| \cdot | b_\nu(x) | \right];$$

$$\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|+$$

$$+\left|a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot\left|\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)-\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right|\le$$

$$\le\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot h_2(s,x)\cdot\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right|.$$

Тогда с учетом ($4.2.8^1$) и ($4.2.8^2$) получаем следующую оценку

$$\left\|\vec a^{\,2}(t)-\vec a^{\,1}(t)\right\|_{B_2(t)}\le$$

$$\le M_1M_2\left|\int_0^t\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^1(s)-a_n^0(s)\right|\int_0^l h_1(s,y)\left|b_n(y)\right|dy+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Delta\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l h_1(s,y)\left|\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)b_i(y)\right)-\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)b_i(y)\right)\right|\left|b_n(y)\right|dy\right\}ds\right|\le$$

$$\le M_1M_2\left|\int_0^t\left\{2\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec a^{1}(s)-\vec a^{0}(s)\right\|_{B_2(t)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Delta\int_0^l h_1(s,y)\left|\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)b_i(y)\right)-\delta\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)b_i(y)\right)\right|dy\right\}ds\right|\le$$

$$\le M_1M_2\left|\int_0^t\left\{2\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec a^{1}(s)-\vec a^{0}(s)\right\|_{B_2(t)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Delta\int_0^l h_1(s,y)h_2(s,y)\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)b_i(y)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)b_i(y)\right|dy\right\}ds\right|\le$$

$$\le M_1M_2\left|\int_0^t\left\{2\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec a^{1}(s)-\vec a^{0}(s)\right\|_{B_2(t)}+\right.\right.$$

$$+\Delta\left\|\vec{a}^1(-s)-\vec{a}^0(-s)\right\|_{B_2(t)}\left\|h_1(s,x)h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\Big\}ds\Bigg|. \quad (4.2.9^1)$$

Меняя в ($4.2.9^1$) t на $-t$, s на $-s$, получим

$$\left\|\vec{a}^2(-t)-\vec{a}^1(-t)\right\|_{B_2(t)}\le$$

$$\le M_1M_2\left|\int_0^t\Big\{2\left\|h_1(-s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec{a}^1(-s)-\vec{a}^0(-s)\right\|_{B_2(t)}+\right.$$

$$\left.+\Delta\left\|\vec{a}^1(s)-\vec{a}^0(s)\right\|_{B_2(t)}\left\|h_1(-s,x)h_2(-s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\Big\}ds\right|. \quad (4.2.9^2)$$

Тогда из ($4.2.9^1$) и ($4.2.9^2$) получим

$$\left\|\vec{U}^2(t)-\vec{U}^1(t)\right\|_{B_2(t)}\le$$

$$\le(M_1M_2)^2\Delta\left|\int_0^t\left\|\bar{h}(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds\right|,\ (t,x)\in D, \quad (4.2.9^3)$$

где $\left\|\vec{U}^k(t)-\vec{U}^{k-1}(t)\right\|\equiv\max\left\{\left\|\vec{a}^k(t)-\vec{a}^{k-1}(t)\right\|;\left\|\vec{a}^k(-t)-\vec{a}^{k-1}(-t)\right\|\right\}$,

$$\left\|\bar{h}(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}=\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}+\left\|h_1(-s,x)\right\|_{L_2(D_l)}+$$

$$+\frac{\Delta}{2}\left[\left\|h_1(s,x)h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}+\left\|h_1(-s,x)h_2(-s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\right].$$

Для последующей разности $a_n^3(t)-a_n^2(t)$ по норме из (4.2.7) получим аналогичную оценку

$$\left\|\vec{a}^3(t)-\vec{a}^2(t)\right\|_{B_2(t)}\le$$

$$\le M_1M_2\left|\int_0^t\Big\{2\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\vec{a}^2(s)-\vec{a}^1(s)\right\|_{B_2(t)}+\right.$$

$$\left.+\Delta\left\|\vec{a}^2(-s)-\vec{a}^1(-s)\right\|_{B_2(t)}\left\|h_1(s,x)h_2(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\Big\}ds\right|. \quad (4.2.10^1)$$

В неравенстве ($4.2.10^1$) t меняем на $-t$ и s на $-s$. Тогда имеем

$$\left\|\vec{a}^3(-t)-\vec{a}^2(-t)\right\|_{B_2(t)}\le$$

$$\leq M_1 M_2 \left| \int_0^t \left\{ 2 \left\| h_1(-s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| \vec{a}^2(-s) - \vec{a}^1(-s) \right\|_{B_2(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta \left\| \vec{a}^2(s) - \vec{a}^1(s) \right\|_{B_2(t)} \left\| h_1(-s,x) h_2(-s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \right\} ds \right|. \quad (4.2.10^2)$$

Учтём оценку ($4.2.9^3$). Тогда из неравенств ($4.2.10^1$) и ($4.2.10^2$) следует, что справедлива следующая оценка

$$\left\| \vec{U}^3(t) - \vec{U}^2(t) \right\|_{B_2(t)} \leq$$

$$\leq \left(M_1 M_2\right)^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \int_0^s \left\| \bar{h}(\theta,x) \right\|_{L_2(D_l)} d\theta\, ds \right| =$$

$$= \left(M_1 M_2\right)^3 \Delta \frac{\left[\int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right]^2}{2!}.$$

Продолжаем этот процесс для произвольного натурального k. Тогда по индукции получаем, что

$$\left\| \vec{U}^{k+1}(t) - \vec{U}^k(t) \right\|_{B_2(t)} \leq$$

$$\leq \left(M_1 M_2\right)^{k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!}. \quad (4.2.11)$$

В силу этой оценки (4.2.11) получаем, что

$$\left\| \vec{U}(t) - \vec{U}^{k+1}(t) \right\|_{B_2(t)} \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| \vec{U}(s) - \vec{U}^k(s) \right\|_{B_2(t)} ds \right| \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| \vec{U}(s) - \vec{U}^{k+1}(s) \right\|_{B_2(t)} ds \right| +$$

$$+ M_1 M_2 \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| \vec{U}^{k+1}(s) - \vec{U}^k(s) \right\|_{B_2(t)} ds \right| \leq$$

$$\leq \left(M_1 M_2\right)^{k+1} \Delta \frac{\left[\left|\int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds\right|\right]^k}{k!} +$$

$$+ M_1 M_2 \left|\int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| \bar{U}(s) - \bar{U}^{k+1}(s) \right\|_{B_2(t)} ds\right|. \quad (4.2.12)$$

Применение к (4.2.12) неравенство типа Гронуолла-Беллмана даёт, что справедлива оценка

$$\left\| \vec{U}(t) - \vec{U}^{k+1}(t) \right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq \left(M_1 M_2\right)^{k+1} \Delta \frac{\left[\max\limits_{t \in D_T} \left|\int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds\right|\right]^k}{k!} \times$$

$$\times \exp\left\{ M_1 M_2 \max_{t \in D_T} \left|\int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds\right| \right\}.$$

Воспользуемся следующим очевидным неравенством

$$\left\| \bar{a}^{k+1}(t) - \bar{a}^{k}(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \left\| \vec{U}^{k+1}(t) - \vec{U}^{k}(t) \right\|_{B_2(T)},$$

Тогда из оценки (4.2.11) следует, что при $k \to \infty$ последовательность функций $\left\{ \vec{a}^{k}(t) \right\}_{k=1}^{\infty}$ абсолютно и равномерно по t сходится к функции $\vec{a}(t) \in B_2(T)$. Отсюда следует существование решения счётной системы (4.2.6).

Теперь нам следует показать единственность этого решения в банаховом пространстве $B_2(T)$. Предположим от противного, что счётная система (4.2.6) имеет два разные решения: $\vec{a}(t) \in B_2(T)$ и $\vec{\vartheta}(t) \in B_2(T)$. Тогда для разности этих двух функций по норме в пространстве $B_2(T)$ получаем интегральную оценку

$$\left\| \bar{U}(t) - \bar{V}(t) \right\|_{B_2(t)} \leq$$

$$\le M_1 M_2 \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| \bar{U}(s) - \bar{V}(s) \right\|_{B_2(t)} ds \right|, \qquad (4.2.13)$$

где $\left\| \vec{U}(t) - \bar{V}(t) \right\| \equiv \max \left\{ \left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|; \left\| \vec{a}(-t) - \vec{\vartheta}(-t) \right\| \right\}.$

Применение к последней оценке (4.2.13) неравенство типа Гроноулла-Беллмана позволяет нам полагать, что $\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_2(T)} = 0$ для всех $t \in [-T;T]$. Следовательно, наше предположение о том, что счётная система (4.2.6) имеет два разные решения не верно. Отсюда следует единственность решения счётной системы (4.2.6).

§ 4.3. Однозначная разрешимость смешанной задачи

Решение смешанной задачи представим в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left[\omega_n(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right) b_n(y) G_n(t,s)\, dy\, ds \right], \qquad (4.3.1)$$

где

$$\omega_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 (1-\lambda_n^2)} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^3 \varphi_{1n} + \lambda_n (1+\lambda_n) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2 (1+\lambda_n)} e^{\lambda_n t} +$$

$$+ \frac{-\lambda_n^3 \varphi_{1n} - \lambda_n (1-\lambda_n) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2 (1-\lambda_n)} e^{-\lambda_n t}, \quad \mu_n = 2\lambda_n (1-\lambda_n^2),$$

$$G_n(t,s) = \frac{1}{\mu_n} \left[-e^{-\lambda_n^2 (t-s)} + 2\left(ch\lambda_n (t-s) - \lambda_n sh\lambda_n (t-s) \right) \right].$$

Теперь рассмотрим вопрос о том, при каких условиях ряд (4.3.1) будет слабо обобщенным решением смешанной задачи (4.2.1)-(4.2.3).

Теорема 4.3.1. Предположим, что выполняются все условия теоремы 4.2.2. и $\vec{a}(t) \in B_2(T)$. Тогда ряд (4.3.1) будет сходиться.

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 3.3. Справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} u^{k}(t,x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n(t)\cdot b_n(x)=u(t,x)$$

и по условию теоремы $\vec{a}(t)\in B_2(T)$. Отсюда, в силу того, что $u(t,x)\in L_2(D)$ следует

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t,x,u^{k}(t,x),u^{k}(\delta(t,x,u^{k}(-t,x)),x)\right)=$$
$$= f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x,u(-t,x)),x)\right) \qquad (4.3.2)$$

Строится следующая последовательность:

$$P_k=\int_{-T}^{T}\int_{0}^{l}\Big\{u^{k}(t,y)\left[-\overline{\Phi}_{ttt}-\overline{\Phi}_{ttyy}-\overline{\Phi}_{tyy}-\overline{\Phi}_{yyyy}\right]-$$
$$-f\left(t,y,u^{k}(t,y),u^{k}(\delta(t,y,u^{k}(-t,y)),y)\right)\cdot\overline{\Phi}(t,y)\Big\}dy\,dt+$$
$$+\int_{0}^{l}\varphi_1^{k}\left[\overline{\Phi}_{tt}+\overline{\Phi}_{tyy}+\overline{\Phi}_{yy}\right]_{t=0}dy-$$
$$-\int_{0}^{l}\varphi_2^{k}\left[\overline{\Phi}_{t}+\overline{\Phi}_{yy}\right]_{t=0}dy+\int_{0}^{l}\varphi_3^{k}\left[\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy. \qquad (4.3.3)$$

Покажем, что $\lim_{k\to\infty}P_k=0$. Действительно, с учётом начальных условий

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\ a_n'(0)=\varphi_{2n},\ a_n''(0)=\varphi_{3n},$$

интегрируем по частям отдельные слагаемые в (4.3.3). Тогда имеем:

$$P_k=\int_{0}^{l}\left(\varphi_1(y)-\sum_{n=1}^{k}\varphi_{1n}b_n(y)\right)\left[\overline{\Phi}_{tt}+\overline{\Phi}_{tyy}+\overline{\Phi}_{yy}\right]_{t=0}dy-$$
$$-\int_{0}^{l}\left(\varphi_2(y)-\sum_{n=1}^{k}\varphi_{2n}b_n(y)\right)\left[\overline{\Phi}_{t}+\overline{\Phi}_{yy}\right]_{t=0}dy+$$
$$+\int_{0}^{l}\left(\varphi_3(y)-\sum_{n=1}^{k}\varphi_{3n}b_n(y)\right)\left[\overline{\Phi}\right]_{t=0}dy+$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{l}\overline{\Phi}(t,y)\left\{f\left(t,y,Q\vec{a}(t),Q\vec{a}(\delta(t,y,Q\vec{a}(-t)))\right)-\right.$$

$$- f\left(t, y, Q\vec{a}^{k}(t), Q\vec{a}^{k}(\delta(t, y, Q\vec{a}^{k}(-t)))\right)\Big\} \cdot b_n(y)\,d\,y\,d\,t. \qquad (4.3.4)$$

Если обратим внимание на то, что $\varphi_i(x) \in L_2(D_l)$, то ясно становится, что первые три интегралы в (4.3.4) стремятся к нулю при $k \to \infty$. Сходимость последнего интеграла в (4.3.4) при $k \to \infty$ следует из (4.3.2). Следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} P_k = 0$. Теорема доказана.

§ 4.4. Заключение по главе 4

Впервые изучена однозначная слабо обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

ГЛАВА 5. СМЕШАННЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ СМЕШАННОГО ТИПА В СУПЕРПОЗИЦИИ

§ 5.1. Смешанная задача для нелинейного уравнения, содержащего параболический и гиперболический операторы в суперпозиции

В открытой прямоугольной области $D \equiv \Omega_T \times \Omega_l$ рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)+f\left(t,x,u(t,x)\right)=0 \qquad (5.1.1)$$

с начальными условиями

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ u_t(t,x)|_{t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)|_{t=0}=\varphi_3(x) \qquad (5.1.2)$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|\,x=0}=u(t,x)_{|\,x=l}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=$$

$$=u_{xxxx}(t,x)_{|\,x=0}=u_{xxxx}(t,x)_{|\,x=l}=0, \qquad (5.1.3)$$

где $f(t,x,u(t,x))\in C(D\times R)$, $\varphi_i(x)\in C\left(\Omega_l\right)$, $\varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=$

$=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $\Omega_T\equiv(0,T)$, $\Omega_l\equiv(0,l)$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

Нетривиальные решения данной смешанной задачи разыскиваются в виде следующего ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x)\,,\quad (t,x)\in D, \qquad (5.1.4)$$

где функции $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$. удовлетворяют граничным условиям

$$b_n(0)=b_n(l)=b''_n(0)=b''_n(l)=b_n^{(IV)}(0)=b_n^{(IV)}(l)=0.$$

Следовательно, искомая функция, разыскиваемая в виде ряда Фурье (5.1.4), формально удовлетворяет граничным условиям (5.1.3).

Как и в предыдущих главах рассматриваем банахово пространство $B_p(T)$, $p>1$ с нормой

$$\|\vec{a}(t)\|_{B_p(T)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\max_t|a_n(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Для каждого переменного вектора $\vec{a}(t)\in B_p(T)$ определяется оператор Q следующим образом:

$$Q\vec{a}(t)=u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x).$$

Кроме того, определяется пространство $E_p(D)$ как множество значений оператора Q. Здесь $Q:B_P(T)\to E_p(\overline{D})$.

Определение 5.1. Решением смешанной задачи (5.1.1)-(5.1.3) будем называть функцию $u(t,x)\in C(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (5.1.1) и поставленным начальным (5.1.2) и граничным условиям (5.1.3).

Подставляем ряд Фурье (5.1.4) в рассматриваемое дифференциальное уравнение (5.1.1). В результате получим следующую счетную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$a_n^{III}(t)+\lambda_n^2a_n^{II}(t)+\lambda_n^4a_n^I(t)+\lambda_n^4a_n(t)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l f\left(t,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(y)\right)b_n(y)\,dy, \qquad (5.1.5)$$

где $a_n(t)=\int_0^l u(t,x)b_n(x)dx.$

Счётная система (5.1.5) решается методом вариации произвольных постоянных. Тогда приходим к следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t)=C_{1n}e^{-\lambda_n^2 t}+C_{2n}\cos\lambda_n t+C_{3n}\sin\lambda_n t+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\cdot b_\nu(y)\right)b_n(y)G_n\left(t,s\right)dy\,ds,\ t\in\Omega_T, \qquad (5.1.6)$$

где

$$G_n(t,s)=\mu_n[e^{-\lambda_n^2(t-s)}+\lambda_n\sin\lambda_n(t-s)-\cos\lambda_n(t-s)], \qquad (5.1.7)$$

$$\mu_n=\left[\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)\right]^{-1}.$$

Следует отметить, что функции $G_n(t,s)$ (5.1.7) удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению третьего порядка

$$G_n'''(t,s)+\lambda_n^2\,G_n''(t,s)+\lambda_n^2\,G_n'(t,s)+\lambda_n^4 G_n(t,s)=0.$$

Ряд (5.1.4) подставляем в формулу (5.1.2). Тогда приходим к следующим начальным условиям

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\ a'_n(0)=\varphi_{2n},\ a''_n(0)=\varphi_{3n}, \qquad (5.1.8)$$

где $\varphi_{in}=\int_0^l\varphi_i(x)b_n(x)dx,\ i=\overline{1,3},\ x\in\Omega_l$.

Для однозначного определения произвольных постоянных воспользуемся начальными условиями (5.1.8) и из счётной системы (5.1.6) получаем, что

$$C_{1n}=\frac{\lambda_n^2\ \varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}, \qquad (5.1.9)$$

$$C_{2n}=\frac{\lambda_n^2\ \varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}, \qquad (5.1.10)$$

$$C_{3n}=\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^4)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}. \qquad (5.1.11)$$

Подставляя найденные значения (5.1.9)-(5.1.11) в счётную систему (5.1.6), получаем следующую ССНИУ:

$$a_n(t)=\psi_n(t)+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\cdot b_\nu(y)\right)b_n(y)G_n\left(t,s\right)dy\,ds, \qquad (5.1.12)$$

где $G_n(t,s)$ определяется из (5.1.7) и

$$\psi_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^4\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2+\lambda_n^4}\cos\lambda_n t+$$

$$+\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}+(1+\lambda_n^2)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{\lambda_n^3+\lambda_n^5}\sin\lambda_n t.$$

Теперь вместо смешанной задачи (5.1.1)-(5.1.3) будем рассматривать ССНИУ (5.1.12). Приступаем к изучению однозначной разрешимости этой счётной системы (5.1.12).

Теорема 5.1.1. Предположим, что выполняются следующие условия:

1. $\| \; \vec{\psi}(t) \; \|_{B_2(T)} < \infty$;

2. $\int\limits_0^t \left\| f\left(s,x,\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\psi_\nu(s)\cdot b_\nu(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega_l)} ds=\Delta<\infty$;

3. $f(t,x,u)\in Lip\{q(t,x)\,|_u\},\ \int_0^t\left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}ds<\infty,$ где

$$\left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}\equiv\left\{\int\limits_0^l q^2(s,x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда счётная система (5.1.12) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Доказательство. Применяем МПП. Итерационный процесс Пикара определяется следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t)=\psi_n(t),\ t\in\Omega_T, \\ a_n^{k+1}(t)=\psi_n(t)+\dfrac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^k(s)\cdot b_\nu(y)\right)b_n(y)\cdot G_n(t,s)d\,y\,d\,s. \end{cases}$$

В силу первых двух условий теоремы для первой разности $a_n^1(t)-a_n^0(t)$ по норме применяем неравенство Коши-Буняковского и неравенство Бесселя. Тогда получаем оценку

$$\left\|\vec{a}^1(t)-\vec{a}^0(t)\right\|_{B_2(T)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^0(s)\cdot b_\nu(y)\right)b_n(x)G_n(t,s)dx\,ds\right|\le$$

$$\leq \mathrm{M}_0\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t\int_0^l\left| f\left(s,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^0(s)\cdot b_\nu(y)\right)b_n(y)G_n(t,s)\right|d\,y\,d\,s\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq M_0M_1\int_0^t\left\| f\left(s,x,\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_\nu(s)\cdot b_\nu(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega_l)}ds = M_0M_1\Delta, \qquad (5.1.13)$$

где

$$M_0=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-4}},\;\; M_1=\max_t\left\|G_n(t,s)\right\|_{B_2(T)}.$$

С учетом оценки (5.1.13) для второй разности $a_n^2(t)-a_n^1(t)$ по норме в силу первого и третьего условий теоремы применяем несколько раз неравенство Коши-Буняковского и неравенство Бесселя. Тогда получаем следующую оценку

$$\left\|\vec a^{\,2}(t)-\vec a^{\,1}(t)\right\|_{B_2(T)}\leq$$

$$\leq M_0\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^l\left| f\left(s,y,Q\vec a^{\,1}(s)\right)-f\left(s,y,Q\vec a^{\,0}(s)\right)\right|\cdot\left|b_n(y)\right|\cdot\left|G_n(t,s)\right|d\,y\,d\,s\leq$$

$$\leq M_0M_1\int_0^t\left\{\int_0^l\left|q(s,y)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^1(s)\cdot b_\nu(y)-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^0(s)\cdot b_\nu(y)\right)\right|^2d\,y\right\}^{\frac{1}{2}}ds\leq$$

$$\leq M_0M_1\int_0^t\left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}\left\|\vec a^{1}(s)-\vec a^{0}(s)\right\|_{B_2(t)}ds\leq$$

$$\leq\left(M_0M_1\right)^2\Delta\int_0^t\left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}d\,s. \qquad (5.1.14)$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального номера *k*, по индукции аналогично (5.1.14) получим

$$\left\|\vec a^{\,k+1}(t)-\vec a^{\,k}(t)\right\|_{B_2(T)}\leq(M_0M_1)^{k+1}\Delta\,\frac{\left[\int_0^t\left\|q(s,x)\right\|_{L_2(\Omega_l)}ds\right]^k}{k!}. \qquad (5.1.15)$$

Существование решения счётной системы (5.1.12) в пространстве $B_2(T)$ следует из оценки (5.1.15) при $k\to\infty$. Покажем единственность этого решения с помощью интегральных неравенств. Предположим от противного, что ССНИУ (5.1.12) имеет два разные решения $\vec{a}(t)$ и $\vec{\vartheta}(t)$ в пространстве $B_2(T)$. Тогда для их разности по норме по аналогии (5.1.14) получаем оценку

$$\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_2(T)} \le M_0 M_1 \int_0^t \left\| q(s,x) \right\|_{L_2(\Omega_l)} \left\| \vec{a}(s) - \vec{\vartheta}(s) \right\|_{B_2(t)} d\, s. \qquad (5.1.16)$$

Применяя к (5.1.16) неравенство Гронуолла-Беллмана, получаем, что $\vec{a}(t) \equiv \vec{\vartheta}(t)$. для всех $t \in [0;T]$. Отсюда следует, что решение ССНИУ (5.1.12) единственно в пространстве $B_2(T)$.

Теорема 5.1.2. Последовательность функций $\left\{ u^k(t,x) \right\} = \left\{ Q\vec{a}^k(t) \right\}$ сходится к функции $u(t,x) = Q\vec{a}(t)$, которая является единственным решением смешанной задачи (5.1.1)-(5.1.3), где $\vec{a}(t) \in B_2(T)$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}(t) \in B_2(T)$ является решением ССНИУ (5.1.12). Сначала счётную систему (5.1.12) перепишем в следующем виде:

$$a_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \left[\bar{\psi}_n(t) + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(s) \cdot b_\nu(y) \right) b_n(y) \bar{G}_n(t,s)\, dy\, ds \right] = \frac{1}{\lambda_n} c_n(t),$$

где

$$\bar{\psi}_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n + \lambda_n^3} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n + \lambda_n^3} \cos \lambda_n t +$$

$$+ \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1+\lambda_n^2) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \sin \lambda_n t,$$

$$\bar{G}_n(t,s) = \bar{\mu}_n [e^{-\lambda_n^2 (t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n (t-s) - \cos \lambda_n (t-s)],$$

$$\bar{\mu}_n = \left[\lambda_n (1+\lambda_n^2) \right]^{-1}.$$

Легко убедиться, что

$$\left| u^k(t,x) - u(t,x) \right| \le \left| a_n^k(t) - a_n(t) \right| \cdot \left| b_n(x) \right| \le$$

$$\le \bar{M}_0 \left\| \vec{c}^k(t) - \vec{c}(t) \right\|_{B_2(T)}, \qquad (5.1.17)$$

где $\bar{M}_0 = \dfrac{2}{l} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^2}}$.

Так как

$$\left\|\vec{c}^{\,k}(t)-\vec{c}(t)\right\|_{B_2(T)} \le \left\|\vec{c}^{\,k+1}(t)-\vec{c}^{\,k}(t)\right\|_{B_2(T)} + \left\|\vec{c}^{\,k+1}(t)-\vec{c}(t)\right\|_{B_2(T)},$$

по аналогии оценок (5.1.15) и (5.1.16) получаем, что

$$\left\|\vec{c}^{\,k}(t)-\vec{c}(t)\right\|_{B_2(T)} \le (M_0\bar{M}_1)^{k+1}\Delta\,\frac{\left[\int_0^t \|q(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)}\,ds\right]^k}{k!} +$$

$$+M_0\bar{M}_1\int_0^t \|q(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)}\left\|\vec{c}^{\,k}(s)-\vec{c}(s)\right\|_{B_2(t)}ds, \qquad (5.1.18)$$

где $\bar{M}_1 = \max_t \left\|\bar{G}_n(t,s)\right\|_{B_2(T)}$.

Применяя к (5.1.18) неравенство Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\left\|\vec{c}^{\,k}(t)-\vec{c}(t)\right\|_{B_2(T)} \le (M_0\bar{M}_1)^{k+1}\Delta\,\frac{\left[\int_0^t \|q(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)}\,ds\right]^k}{k!} \times$$

$$\times M_0\bar{M}_1\exp\left\{\int_0^t \|q(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)}\,ds\right\}. \qquad (5.1.19)$$

Из (5.1.17) и (5.1.19) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|u^k(t,x)-u(t,x)\right| = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5.2. Краевая задача для одного смешанного эллиптико-гиперболического уравнения

В данном параграфе осуществляется попытка применять метод разделения переменных к изучению дифференциальных уравнений смешанного типа третьего (нечётного) порядка. Итак, в области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается смешанное дифференциальное уравнение вида:

$$0 = \begin{cases} u_{ttt}(t,x)+u_{xxx}(t,x), & (t,x)\in D_1, \\ u_{ttt}(t,x)-u_{xxx}(t,x), & (t,x)\in D_2 \end{cases} \qquad (5.2.1)$$

с граничными условиями

$$u(t,x)|_{t=-T}=\varphi_1(x),\ u(t,x)|_{t=T}=\varphi_2(x),\ u_t(t,x)|_{t=T}=\varphi_3(x), \tag{5.2.2}$$

$$u(t,x)|_{x=-1}=u(t,x)|_{x=0}=u(t,x)|_{x=1}=0, \tag{5.2.3}$$

где $D_1\equiv E_T^+\times E_0,\ D_2\equiv E_T^-\times E_0,\ E_T^-\equiv(-T,0),\ E_T^+\equiv(0,T),\ E_0\equiv(-1,1),$

$\varphi_i(x)\in C^3(E_0),\ \varphi_i(x)_{|x=-1}=\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=1}=0,\ i=\overline{1,3}.$

Задачу (5.2.1)-(5.2.3) будем изучать при следующих условиях склеивания:

$$u(+0,x)=u(-0,x),u_t(+0,x)=u_t(-0,x),u_{tt}(+0,x)=u_{tt}(-0,x). \tag{5.2.4}$$

Под решением смешанного дифференциального уравнения (5.2.1) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^3(D_1\cup D_2),$ которая удовлетворяет уравнению (5.2.1) и условиям (5.2.2)-(5.2.4).

Нетривиальные решения данной задачи разыскиваются в виде следующего произведения:

$$u(t,x)=a(t)\cdot b(x), \tag{5.2.5}$$

$a(t),\ b(x)$ – пока неизвестные функции одной переменной.

Тогда естественно предположить, что

$$\varphi_i(x)=\varphi\cdot b(x),\ i=\overline{1,3}.$$

Подставляя (5.2.5) в уравнение (5.2.1), получим следующие уравнения:

$$1)\ a'''(t)-\lambda a(t)=0,\ t\in E_T^+, \tag{5.2.6}$$

$$2)\ a'''(t)+\lambda a(t)=0,\ t\in E_T^-, \tag{5.2.7}$$

$$3)\ b'''(x)+\lambda b(x)=0,\ x\in E_0,\ 0<\lambda=const. \tag{5.2.8}$$

Сначала решаем уравнения (5.2.8). При этом граничные условия (5.2.3) принимают вид:

$$b(-1)=b(0)=b(1)=0. \tag{5.2.9}$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.2.8) записывается в виде:

$$b(x)=C_1e^{-\mu x}+C_2e^{\frac{\mu x}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu x+$$

$$+C_3e^{\frac{\mu x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu x,\quad \mu=\sqrt[3]{\lambda},\quad x\in E_2, \tag{5.2.10}$$

где коэффициенты C_i – произвольные, но подлежат определению, $i=\overline{1,3}$.

В силу условия (5.2.9) из (5.2.10) придем к следующей системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $C_{in}(i=\overline{1,3})$:

$$\begin{cases} C_1e^{\mu}+C_2e^{\frac{-\mu}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu-C_3e^{\frac{-\mu}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=0, \\ C_1+C_2=0, \\ C_1e^{-\mu}+C_2e^{\frac{\mu}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu-C_3e^{\frac{\mu}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=0. \end{cases} \tag{5.2.11}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $C_1=-C_2.$ Тогда из (5.2.11) приходим к новой системе:

$$\begin{cases} C_2\left(-e^{\mu}+e^{\frac{-\mu}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)-C_3e^{\frac{-\mu}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=0, \\ C_2\left(-e^{-\mu}+e^{\frac{\mu}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)+C_3e^{\frac{\mu}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=0 \end{cases}$$

или

$$C_2\left(-ch\mu+ch\frac{\mu}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)+C_3e^{\frac{\mu}{2}}\cdot ch\frac{\mu}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=0. \tag{5.2.12}$$

Рассмотрим соотношение (5.2.12). Так как $-ch\mu+ch\frac{\mu}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\neq 0$, при $\mu\neq 0,$ то мы положим, что $C_2=0$. Тогда из (5.2.12) получаем, что

$$C_3sh\frac{\mu}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=0. \tag{5.2.13}$$

Так как $C_1=C_2=0,$ естественно предположим, что $C_3\neq 0.$

Поскольку $sh\frac{\mu}{2} \neq 0$ при $\mu > 0,$ то из (5.2.13) получим, что $\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu = 0,$ т.е. $\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n = n\pi, n = 1,2,...$ Отсюда $\mu_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}n\pi$ или $\lambda_n = \frac{8\sqrt{3}n^3\pi^3}{9},$ $n = 1, 2, 3, ...$

Следовательно, собственная функция дифференциального уравнения (5.2.8), соответствующая собственным значениям $\lambda_n = \frac{8\sqrt{3}n^3\pi^3}{9}$ имеет вид:

$$b_n(x) = C_{3n}e^{\frac{\mu_n x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x, \quad x \in E_0. \tag{5.2.14}$$

Коэффициент C_{3n} в (5.2.14) находим из условия $\int_{-1}^{1} b_n^2(x)\,d\,x = 1.$ После вычисления интеграла получаем, что $C_{3n} = 2\sqrt{\frac{\mu_n}{(4+\sqrt{3})\,sh\mu_n}}.$

Итак, собственные функция задачи (5.2.8), (5.2.9) приобретают вид:

$$b_n(x) = 2\sqrt{\frac{\mu_n}{(4+\sqrt{3})\,sh\mu_n}}\; e^{\frac{\mu_n x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x, \quad x \in E_0. \tag{5.2.15}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (5.2.6) и (5.2.7) записываем в виде:

$$a_n(t) = B_{1n}e^{\mu_n t} + B_{2n}e^{\frac{-\mu_n t}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t + B_{3n}e^{\frac{-\mu_n t}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t, \quad x \in E_T^+, \tag{5.2.16}$$

$$a_n(t) = A_{1n}e^{-\mu_n t} + A_{2n}e^{\frac{\mu_n t}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t + A_{3n}e^{\frac{\mu_n t}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t, \quad x \in E_T^-, \tag{5.2.17}$$

где коэффициенты A_{in} и B_{in} - постоянные, которые подлежат определению, $i = \overline{1,3}$.

Условия (5.2.2) и (5.2.4) запишем в виде:

$$a_n(-T) = \varphi_{1n}, \; a_n(T) = \varphi_{2n}, \; a_n'(T) = \varphi_{3n}, \tag{5.2.18}$$

$$a_n(+0) = a_n(-0), \; a_n'(+0) = a_n'(-0), a_n''(+0) = a_n''(-0)\,. \tag{5.2.19}$$

Используя граничные условия (5.2.18), из функций (5.2.16) и (5.2.17) получаем следующую алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{in} и B_{in}, $i=\overline{1,3}$:

$$\begin{cases} A_{1n}e^{\mu_n T} + A_{2n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T - A_{3n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T = \varphi_{1n}, \\ B_{1n}e^{\mu_n T} + B_{2n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T + B_{3n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T = \varphi_{2n}, \\ B_{1n}e^{\mu_n T} - B_{2n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}} \cdot \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T - \frac{\pi}{3}\right] - B_{3n}e^{\frac{-\mu_n T}{2}} \cdot \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T - \frac{\pi}{3}\right] = \mu_n^{-1}\varphi_{3n}. \end{cases} \tag{5.2.20}$$

Из системы (5.2.20) трех уравнений невозможно однозначно определить шесть неизвестных. Поэтому дополнительно используем условие (5.2.19). Тогда получаем новую систему трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} B_{1n} + B_{2n} = A_{1n} + A_{2n}, \\ 2B_{1n} - B_{2n} + \sqrt{3}B_{3n} = -2A_{1n} + A_{2n} + \sqrt{3}A_{3n}, \\ 2B_{1n} - B_{2n} - \sqrt{3}B_{3n} = -2A_{1n} - A_{2n} + \sqrt{3}A_{3n}. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $B_{in}\,(i=\overline{1,3})$, получаем:

$$B_{1n} = \frac{2}{5}\left[A_{1n} + A_{2n} + \sqrt{3}A_{3n}\right], \tag{5.2.21}$$

$$B_{2n} = \frac{3}{5}A_{1n} + \frac{3}{5}A_{2n} - \frac{2}{5}\sqrt{3}A_{3n}, \tag{5.2.22}$$

$$B_{3n} = -\frac{11\sqrt{3}}{15}A_{1n} + \frac{4\sqrt{3}}{15}A_{2n} - \frac{1}{5}\sqrt{3}A_{3n}. \tag{5.2.23}$$

Подставляя эти результаты в систему (5.2.20), приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно следующих неизвестных коэффициентов A_{in}, $i=\overline{1,3}$:

$$\begin{pmatrix} p_{11n} & p_{12n} & p_{13n} \\ p_{21n} & p_{22n} & p_{23n} \\ p_{31n} & p_{32n} & p_{33n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{2n} \\ \mu_n^{-1}\varphi_{3n} \\ \varphi_{1n} \end{pmatrix}, \tag{5.2.24}$$

где

$$p_{11n}=\frac{2}{5}e^{\mu_n T}+\frac{3}{5}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{11}{15}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T;$$

$$p_{12n}=\frac{2}{5}e^{\mu_n T}+\frac{3}{5}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{4}{15}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T;$$

$$p_{13n}=\frac{2}{5}\sqrt{3}e^{\mu_n T}-\frac{2}{5}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{1}{5}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T;$$

$$p_{21n}=\frac{2}{5}e^{\mu_n T}-\frac{3}{5}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{11}{15}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$p_{22n}=\frac{2}{5}e^{\mu_n T}-\frac{3}{5}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{4}{15}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$p_{23n}=\frac{2}{5}\sqrt{3}e^{\mu_n T}+\frac{2}{5}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{5}\sqrt{3}e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$p_{31n}=e^{\mu_n T};\ p_{32n}=e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T;\ p_{33n}=-e^{\frac{-\mu_n T}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n T.$$

Решая систему (5.2.24) с помощью правила Крамера, получаем:

$$A_{in}=\varphi_{1n}\chi_{i1n}+\varphi_{2n}\chi_{i2n}+\frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\chi_{i3n},\ i=\overline{1,3}, \tag{5.2.25}$$

где

$$\chi_{11n}=\frac{p_{12n}p_{23n}-p_{22n}p_{13n}}{\Delta_n},\ \chi_{12n}=\frac{p_{22n}p_{33n}-p_{23n}p_{32n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{13n}=\frac{p_{32n}p_{13n}-p_{12n}p_{33n}}{\Delta_n},\quad \chi_{21n}=\frac{p_{21n}p_{13n}-p_{23n}p_{11n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{22n}=\frac{p_{23n}p_{31n}-p_{21n}p_{33n}}{\Delta_n},\quad \chi_{23n}=\frac{p_{11n}p_{33n}-p_{13n}p_{31n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{31n}=\frac{p_{11n}p_{22n}-p_{12n}p_{21n}}{\Delta_n},\quad \chi_{32n}=\frac{p_{21n}p_{32n}-p_{22n}p_{31n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{33n}=\frac{p_{12n}p_{31n}-p_{32n}p_{11n}}{\Delta_n},\quad \Delta_n=\left|p_{ijn}\right|_{\substack{i=\overline{1,3}\\ j=\overline{1,3}}}\neq 0.$$

Подставляя (5.2.25) в формулы (5.2.21)-(5.2.23), получим:

$$B_{1n} = \frac{2}{5}\left[\varphi_{1n}\rho_{11n} + \varphi_{2n}\rho_{12n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\rho_{13n}\right], \qquad (5.2.26)$$

$$B_{2n} = \frac{\sqrt{3}}{5}\left[\varphi_{1n}\rho_{21n} + \varphi_{2n}\rho_{22n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\rho_{23n}\right], \qquad (5.2.27)$$

$$B_{3n} = \frac{\sqrt{3}}{5}\left[\varphi_{1n}\rho_{31n} + \varphi_{2n}\rho_{32n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\rho_{33n}\right], \qquad (5.2.28)$$

где

$$\rho_{1in} = \chi_{1in} + \chi_{2in} + \sqrt{3}\chi_{3in}, \quad \rho_{2in} = \sqrt{3}\chi_{1in} + \sqrt{3}\chi_{2in} - 2\chi_{3in},$$

$$\rho_{3in} = -11\chi_{1in} + 4\chi_{2in} - \chi_{3in}, \; i = \overline{1,3}.$$

Теперь подставляем представления (5.2.25)-(5.2.28) в функции (5.2.16) и (5.2.17):

$$a_n(t) = \varphi_{1n}\tau_{11n} + \varphi_{2n}\tau_{12n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\tau_{13n}, \;\; x \in E_T^-, \qquad (5.2.29)$$

$$a_n(t) = \varphi_{1n}\tau_{21n} + \varphi_{2n}\tau_{22n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\tau_{23n}, \;\; x \in E_T^+, \qquad (5.2.30)$$

где

$$\tau_{1in} = \chi_{1in}e^{-\mu_n t} + \chi_{2in}e^{\frac{\mu_n t}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t + \chi_{3in}e^{\frac{\mu_n t}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t,$$

$$\tau_{2in} = \frac{2}{5}\rho_{1in}e^{\mu_n t} + \frac{\sqrt{3}}{5}\rho_{2in}e^{\frac{-\mu_n t}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t + \frac{\sqrt{3}}{5}\rho_{3in}e^{\frac{-\mu_n t}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n t.$$

Для представления нетривиальных решения задачи (5.2.1)-(5.2.4) с учетом формул (5.2.5), (5.2.15), (5.2.29) и (5.2.30) приходим в следующие ряды:

$$u(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu_n}{(4+\sqrt{3})sh\mu_n}}\left[\varphi_{1n}\tau_{11n} + \varphi_{2n}\tau_{12n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\tau_{13n}\right]\times$$

$$\times e^{\frac{\mu_n x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x, \; (t,x) \in D_2, \qquad (5.2.31)$$

$$u(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu_n}{(4+\sqrt{3})sh\mu_n}}\left[\varphi_{1n}\tau_{21n} + \varphi_{2n}\tau_{22n} + \frac{\varphi_{3n}}{\mu_n}\tau_{23n}\right]\times$$

$$\times e^{\frac{\mu_n x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_n x,\ (t,x)\in D_1. \qquad (5.2.32)$$

Ряды (5.2.31) и (5.2.32) удовлетворяют уравнению (5.2.1), краевым условиям (5.2.2), (5.2.3) и условиям склеивания (5.2.4). Величины $\tau_{in},\ i=\overline{1,3}$ конечные и функции $\varphi_i(x),\ i=\overline{1,3}$ можно задавать (выбрать) таким образом, чтобы ряды (5.2.31) и (5.2.32) сходились абсолютно и равномерно.

§ 5.3. Краевая задача для однородного уравнения, с параболическим оператором и оператором смешанного типа в суперпозиции

В данном параграфе в прямоугольной области $D \equiv D_1 \times D_2$ рассматривается дифференциальное уравнение смешанного типа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+sign\ t\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0 \qquad (5.3.1)$$

с граничными условиями

$$u(t,x)_{|t=-T}=\varphi_1(x),\ u(t,x)_{|t=T}=\varphi_2(x),\ \ u_t(t,x)_{|t=T}=\varphi_3(x), \qquad (5.3.2)$$

$$u(t,x)|_{x=0}=u(t,x)|_{x=l}=u_{xx}(t,x)|_{x=0}=u_{xx}(t,x)|_{x=l}=$$
$$=u_{xxxx}(t,x)|_{x=0}=u_{xxxx}(t,x)|_{x=0}=0,\ t\in E_T, \qquad (5.3.3)$$

где

$$\varphi_i(x)\in C^6(E_0),\ \ \varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=$$

$$=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=0}=\varphi_i^{(IV)}(x)|_{x=l}=0,\ i=\overline{1,3},\ D_1\equiv E_T^+\times E_0, D_2\equiv E_T^-\times E_0,$$

$$E_\tau^-\equiv(-T,0)\ ,\ E_\tau^+\equiv(0,T)\ ,\ E_0\equiv(0,l),\ 0<l<\infty,\ \ 0<T<\infty\ ,$$

$0<\varepsilon$ - малый параметр.

Задачу (5.3.1)-(5.3.3) будем изучать при следующих условиях склеивания

$$u(+0,x)=u(-0,x),\ u_t(+0,x)=u_t(-0,x),\ u_{tt}(+0,x)=u_{tt}(-0,x), \qquad (5.3.4)$$

при этом предположим, что

$$u(+0;0)=u(-0;0)=u(+0;\,l)=u(-0;\,l)=0.$$

Под решением уравнения (5.3.1) в области D будем понимать функцию $u(t,x)$ из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^{3,6}(D_1\cup D_2)$, которая удовлетворяет уравнению (5.3.1) и заданным условиям (5.3.2)-(5.3.4).

Решение данной задачи разыскивается в виде следующего ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x)\in D, \tag{5.3.5}$$

где функции $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}x$ удовлетворяют граничным условиям

$$b_n(0)=b_n(l)=b_n''(0)=b_n''(l)=b_n^{(IV)}(0)=b_n^{(IV)}(l)=0\ ,$$

$\lambda_n=\left(\dfrac{n\,\pi}{l}\right)^2,\ n=1,2,...$

Подставляя ряд Фурье (5.3.5) в дифференциальное уравнение (5.3.1), получим следующие две счетные системы уравнений смешанного типа:

$$1)\ a_n'''\ (t)+\varepsilon\lambda_n a_n''\ (t)-\lambda_n a_n'(t)-\varepsilon\lambda_n^2 a_n(t)=0,\ t\in E_T^+, \tag{5.3.6}$$

$$2)\ a_n'''\ (t)+\varepsilon\lambda_n\,a_n''\ (t)+\lambda_n a_n'(t)+\varepsilon\lambda_n^2 a_n(t)=0,\ t\in E_T^-. \tag{5.3.7}$$

Решая счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5.3.6) и (5.3.7), получим следующие функции

$$a_n(t)=A_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n t}+A_{2n}e^{\sqrt{\lambda_n}\,t}+A_{3n}e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t},\ t\in E_T^+, \tag{5.3.8}$$

$$a_n(t)=B_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n t}+B_{2n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_{3n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t,\ t\in E_T^-, \tag{5.3.9}$$

которые называются общими решениями счетных систем уравнений (5.3.6) и (5.3.7), соответственно.

Условия (2) и (4) запишем в виде

$$a_n(-T)=\varphi_{1n},\ \ a_n(T)=\varphi_{2n},\ \ a_n'(T)=\varphi_{3n}, \tag{5.3.10}$$

где

$$\varphi_{in=}\int_0^l\varphi_i\left(x\right)b_n\left(x\right)d\,x,\ i=\overline{1,3},\ x\in E_0; \tag{5.3.11}$$

$$a_n(+0)=a_n(-0),\ a'_n(+0)=a'_n(-0),\ a''_n(+0)=a''_n(-0). \quad (5.3.12)$$

Использую условий (5.3.10), из функций (5.3.8) и (5.3.9) приходим к следующей алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов A_{in} и B_{in}, $i=\overline{1,3}$:

$$\begin{cases} B_{1n}e^{\lambda_n \varepsilon T}+B_{2n}\cos\sqrt{\lambda_n}T+B_{3n}\sin\sqrt{\lambda_n}T=\varphi_{1n}, \\ A_{1n}e^{-\varepsilon\lambda_n T}+A_{2n}e^{\sqrt{\lambda_n}T}+A_{3n}e^{-\sqrt{\lambda_n}T}=\varphi_{2n}, \\ -A_{1n}\varepsilon\lambda_n e^{-\varepsilon\lambda_n T}+A_{2n}\sqrt{\lambda_n}e^{\sqrt{\lambda_n}T}-\sqrt{\lambda_n}A_{3n}e^{-\sqrt{\lambda_n}T}=\varphi_{3n}. \end{cases} \quad (5.3.13)$$

Система (5.3.13) состоит из трех уравнений с шестью неизвестными. Чтобы смогли однозначно решить эту систему, мы должны свести число неизвестных к трем. С этой целью используем условий (5.3.12) и получим ещё одну новую систему трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_{1n}+A_{2n}+A_{3n}=B_{1n}+B_{2n}, \\ -\lambda_n\varepsilon A_{1n}+\sqrt{\lambda_n}A_{2n}+\sqrt{\lambda_n}A_{3n}=-\lambda_n\varepsilon B_{1n}+\sqrt{\lambda_n}B_{3n}, \\ (\lambda_n\varepsilon)^2A_{1n}+\lambda_nA_{2n}+\lambda_nA_{3n}=(\lambda_n\varepsilon)^2B_{1n}-\lambda_nB_{2n}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных коэффициентов B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, получаем, что

$$B_{1n}=\frac{(1+\lambda_n\varepsilon^2)A_{1n}+2A_{2n}+2A_{3n}}{1+\lambda_n\varepsilon^2}, \quad (5.3.14)$$

$$B_{2n}=\frac{-1+\lambda_n\varepsilon^2}{1+\lambda_n\varepsilon^2}\left(A_{2n}+A_{3n}\right), \quad (5.3.15)$$

$$B_{3n}=\frac{(1+\sqrt{\lambda_n}\varepsilon)^2}{1+\lambda_n\varepsilon^2}\left(A_{2n}+A_{3n}\right). \quad (5.3.16)$$

Подставляя эти результаты (5.3.14)-(5.3.16) в систему (5.3.13), приходим к следующей системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}

$$\begin{pmatrix} p_{11n} & p_{12n} & p_{13n} \\ p_{21n} & p_{22n} & p_{23n} \\ p_{31n} & p_{32n} & p_{33n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \varphi_{3n} \end{pmatrix}, \qquad (5.3.17)$$

где

$$p_{11n} = e^{\lambda_n \varepsilon \tau};$$

$$p_{12n} = \frac{1}{1+\lambda_n \varepsilon^2}(2p_{11n} + (-1+\lambda_n \varepsilon^2)\cdot \cos\sqrt{\lambda_n}\tau - (1+\sqrt{\lambda_n}\,\varepsilon)^2 \cdot \sin\sqrt{\lambda_n}\tau);$$

$$p_{13n} = p_{12n};\ p_{21n} = e^{-\lambda_n \varepsilon \tau};\ p_{22n} = e^{\sqrt{\lambda_n}\tau};\ p_{23n} = e^{-\sqrt{\lambda_n}\tau};\ p_{31n} = -\lambda_n \varepsilon\, p_{21n};$$

$$p_{32n} = \sqrt{\lambda_n}\, p_{22n};\ p_{33n} = -\sqrt{\lambda_n}\, p_{23n}.$$

Решая систему (5.3.17) с помощью стандартного правила Крамера, получаем

$$A_{in} = \varphi_{3n}\chi_{i1n} + \varphi_{1n}\chi_{i2n} + \varphi_{2n}\chi_{i3n},\ i = \overline{1,3}, \qquad (5.3.18)$$

где

$$\chi_{11n} = \frac{p_{12n}p_{23n} - p_{22n}p_{13n}}{\Delta_n},\ \chi_{12n} = \frac{p_{22n}p_{33n} - p_{23n}p_{32n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{13n} = \frac{p_{32n}p_{13n} - p_{12n}p_{33n}}{\Delta_n}, \quad \chi_{21n} = \frac{p_{21n}p_{13n} - p_{23n}p_{11n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{22n} = \frac{p_{23n}p_{31n} - p_{21n}p_{33n}}{\Delta_n}, \quad \chi_{23n} = \frac{p_{11n}p_{33n} - p_{13n}p_{31n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{31n} = \frac{p_{11n}p_{22n} - p_{12n}p_{21n}}{\Delta_n}, \quad \chi_{32n} = \frac{p_{21n}p_{32n} - p_{22n}p_{31n}}{\Delta_n},$$

$$\chi_{33n} = \frac{p_{12n}p_{31n} - p_{32n}p_{11n}}{\Delta_n}, \quad \Delta_n = \left|p_{ijn}\right|_{\substack{i=\overline{1,3}\\ j=\overline{1,3}}} \neq 0.$$

Подставляя (5.3.18) в формулы (5.3.14)-(5.3.16), получим

$$B_{1n} = \frac{1}{1+\lambda_n \varepsilon^2}\left[\varphi_{1n}\tau_{11n} + \varphi_{2n}\tau_{12n} + \varphi_{3n}\tau_{13n}\right], \qquad (5.3.19)$$

$$B_{2n} = \frac{-1+\lambda_n \varepsilon^2}{1+\lambda_n \varepsilon^2}\left[\varphi_{1n}\tau_{21n} + \varphi_{2n}\tau_{22n} + \varphi_{3n}\tau_{23n}\right], \qquad (5.3.20)$$

$$B_{3n}=\frac{(1+\sqrt{\lambda_n}\,\varepsilon)^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\left[\varphi_{1n}\tau_{31n}+\varphi_{2n}\tau_{32n}+\varphi_{3n}\tau_{33n}\right], \qquad (5.3.21)$$

где $\tau_{11n}=\left(1+\lambda_n\,\varepsilon^2\right)\chi_{12n}+2\chi_{22n}+2\chi_{32n}$, $\quad \tau_{12n}=\left(1+\lambda_n\,\varepsilon^2\right)\chi_{13n}+2\chi_{23n}+2\chi_{33n}$,

$\tau_{13n}=\left(1+\lambda_n\,\varepsilon^2\right)\chi_{11n}+2\chi_{21n}+2\chi_{31n}$, $\quad \tau_{21n}=\chi_{22n}+\chi_{32n}$, $\quad \tau_{22n}=\chi_{23n}+\chi_{33n}$,

$\tau_{23n}=\chi_{21n}+\chi_{31n}$, $\quad \tau_{3in}=\tau_{2in}$, $i=\overline{1,3}$.

Итак, из формул (5.3.18)-(5.3.21) определяем коэффициенты A_{1n} и B_{in}, $i=\overline{1,3}$ в функций (5.3.8) и (5.3.9) и приходим к представлениям

$$a_n(t)=\varphi_{1n}\rho_{11n}(t)+\varphi_{2n}\rho_{12n}(t)+\varphi_{3n}\rho_{13n}(t),\ t\in E_T^+, \qquad (5.3.22)$$

$$a_n(t)=\varphi_{1n}\rho_{21n}(t)+\varphi_{2n}\rho_{22n}(t)+\varphi_{3n}\rho_{23n}(t),\ t\in E_T^-, \qquad (5.3.23)$$

$$\rho_{11n}(t)=\chi_{12n}e^{-\varepsilon\lambda_n t}+\chi_{22n}e^{\sqrt{\lambda_n}\,t}+\chi_{32n}e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t},$$

$$\rho_{12n}(t)=\chi_{13n}e^{-\varepsilon\lambda_n t}+\chi_{23n}e^{\sqrt{\lambda_n}\,t}+\chi_{33n}e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t},$$

$$\rho_{13n}(t)=\chi_{11n}e^{-\varepsilon\lambda_n t}+\chi_{21n}e^{\sqrt{\lambda_n}\,t}+\chi_{31n}e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t},$$

$$\rho_{21n}(t)=\frac{\tau_{11n}}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+\frac{-1+\lambda_n\,\varepsilon^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\tau_{21n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+\frac{(1+\sqrt{\lambda_n}\,\varepsilon)^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\tau_{31n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t,$$

$$\rho_{22n}(t)=\frac{\tau_{12n}}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+\frac{-1+\lambda_n\,\varepsilon^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\tau_{22n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+\frac{(1+\sqrt{\lambda_n}\,\varepsilon)^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\tau_{32n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t,$$

$$\rho_{23n}(t)=\frac{\tau_{13n}}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}e^{-\lambda_n\varepsilon t}+\frac{-1+\lambda_n\,\varepsilon^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\tau_{23n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+\frac{(1+\sqrt{\lambda_n}\,\varepsilon)^2}{1+\lambda_n\,\varepsilon^2}\tau_{33n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t.$$

Подставляя функций (5.3.22), (5.3.23) в ряд (5.3.5), получаем для $(t,x)\in D_1$

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{1n}\rho_{11n}(t)+\varphi_{2n}\rho_{12n}(t)+\varphi_{3n}\rho_{13n}(t)\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x, \qquad (5.3.22)$$

для $(t,x)\in D_2$

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{1n}\rho_{21n}(t)+\varphi_{2n}\rho_{22n}(t)+\varphi_{3n}\rho_{23n}(t)\right]\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x, \qquad (5.3.23)$$

соответственно.

Вставим условия, при которых ряды Фурье (5.3.22) и (5.3.23) будут сходиться абсолютно и равномерно. Пусть функции $\varphi_i(x)\in C^6[0;l],\ i=\overline{1,3}$ на сегменте $[0;l]$ имеют кусочно-непрерывные производные седьмого порядка и $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi_{xx}(0)=\varphi_{xx}(l)=\varphi_{xxxx}(0)=\varphi_{xxxx}(l)=0.$ Тогда из (5.3.11) получаем, что справедливы формулы

$$\varphi_{in}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^7\frac{\varphi_{in}^{(VII)}}{n^7}, \tag{5.3.24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{in}^{(VII)}\right]^2\le\frac{4}{l^2}\int_0^l\left[\varphi_{ixxxxxxx}(x)\right]^2dx, \tag{5.3.25}$$

где $\varphi_{in}^{(VII)}=\sqrt{\frac{l}{2}}\int_0^l\varphi_{ixxxxxxx}(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ i=\overline{1,3}.$

Функции $\rho_{ijn}(t),\ i=1,2,\ j=\overline{1,3}$ непрерывны на заданных отрезках. Поэтому мы сможем положить, что $\max\limits_t\left|\rho_{ijn}(t)\right|\le C_i=const<\infty,\ i=1,2.$ Применяя формул (5.3.24) и (5.3.25) и неравенство Коши-Буняковского, для рядов (5.3.22) и (5.3.23) получаем следующую оценку

$$\left|u(t,x)\right|\le\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{1n}\rho_{i1n}(t)+\varphi_{2n}\rho_{i2n}(t)+\varphi_{3n}\rho_{i3n}(t)\right|\cdot\left|\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\right|\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}C_i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{1n}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{2n}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{3n}\right|\right)\le$$

$$\le\gamma_i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left|\varphi_{1n}^{(VII)}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left|\varphi_{2n}^{(VII)}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left|\varphi_{3n}^{(VII)}\right|\right)\le$$

$$\le\gamma_i\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{14}}}\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{1n}^{(VII)}\right]^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{2n}^{(VII)}\right]^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{3n}^{(VII)}\right]^2}\right)\le$$

$$\le\frac{2\gamma_i}{l}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{14}}}\left(\sqrt{\int_0^l\left[\varphi_{1xxxxxxx}(x)\right]^2dx}+\right.$$

$$+\sqrt{\int_0^l \left[\varphi_{2xxxxxxxx}(x)\right]^2 d\,x}+\sqrt{\int_0^l \left[\varphi_{3xxxxxxxx}(x)\right]^2 d\,x}\Bigg)<\infty, \qquad (5.3.26)$$

где $\gamma_i = C_i\sqrt{\dfrac{2}{l}}\left(\dfrac{l}{\pi}\right)^3$, $i=1,2.$

Из (5.3.26) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (5.3.22) и (5.3.23). Аналогично можно доказать, что возможно почленное дифференцирование этих рядов (5.3.22) и (5.3.23) по переменным t и x и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

§ 5.4. Заключение по главе 5

Установлена разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения, содержащего операторов параболического и гиперболического типов.

Построено решение краевой задачи для одного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа третьего порядка.

Установлена классическая разрешимость краевой задачи для однородного уравнения шестого порядка, содержащего суперпозицию параболического эллиптико-гиперболического типов.

ВЫВОДЫ

Впервые изучены однозначная слабо обобщенная разрешимость смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения в аргументе; для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе; для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе. Также рассмотрены: смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего операторов параболического и гиперболического типов; краевая задача для одного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа третьего порядка; классическая разрешимость краевой задачи для однородного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего суперпозицию операторов параболического эллиптико-гиперболического типов.

1. Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и гиперболического операторов и нелинейные отклонения в аргументе.

2. Определены достаточные коэффициентные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих квадрат параболического оператора и нелинейные отклонения в аргументе.

3. Найдены достаточные условия однозначной слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных уравнений, содержащих суперпозицию параболического и эллиптического операторов и нелинейные отражающие отклонения в аргументе.

4. Обоснована разрешимость смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка, содержащего суперпозицию параболического и гиперболического операторов.

5. Построено решение в виде ряда краевой задачи для однородного уравнения третьего порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа.

6. Доказана классическая разрешимость краевой задачи для однородного уравнения шестого порядка, содержащего суперпозицию операторов параболического и смешанного эллиптико-гиперболического типов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аблабеков, Б.С.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков. – Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2013. – 291 p.

2. **Аблабеков, Б.С.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.Р. Асанов, А.К. Курманбаева. – Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.

3. **Азбелов, Н.В.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Н.В. Азбелов, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М.: Наука, 1991. – 278 с.

4. Алгазин, С.Д. Флаттер пластин и оболочек [Текст] / С.Д. Алгазин, И.А. Кийко. – М.: Наука, 2006. – 248 с.

5. **Алимов, Ш.А.** Об одной задаче управления процессом теплообмена [Текст] / Ш.А. Алимов // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезисы докладов. – М.: ФВМиК МГУ имени Ломоносова, 2009. – С. 122-123.

6. **Александров, В.М.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями [Текст] / В.М. Александров, Е.В. Коваленко. – М.: Наука, 1986. – 336 с.

7. **Алексидзе, М.А.** Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач [Текст] / М.А. Алексидзе. – М.: Наука, 1991. – 352 с.

8. **Андреев, В.К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике [Текст] / В.К. Андреев, О.В. Капцов, В.В. Пухначев, А.А. Родионов. – Новосибирск: ВО «Наука», 1994. – 319 с.

9. **Антонцев, С.Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей [Текст] / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск: СО «Наука», 1983. – 319 с.

10. **Апаков, Ю.П.** К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками и некоторые задачи в трехмерном пространстве [Текст] / Ю.П. Апаков // Автореф. дисс. … доктора физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ташкент, 2016. –73 с.

11. **Асанов, А.** Система линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, Ж.А. Зулпукаров // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С. 98–105.

12. **Асылбеков, Т.Д.** Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Асылбеков // Автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 19 с.

13. **Ахтямов, А.М.** О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне [Текст] / А.М. Ахтямов, А.Р. Аюпова // Журнал Средневолжского мат. общества. – 2010. – Том 12. – № 3. – С. 37–42.

14. **Бакушинский, А.Б.** Итеративные методы решения некорректных задач [Текст] / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Наука, 1989. – 126 с.

15. **Байкузиев, К.** Основные смешанные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными [Текст] / К. Байкузиев. – Ташкент: Фан, 1984. – 250 с.

16. **Баев, А.Д.** О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями [Текст] / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Мон Меач // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 50–55.

17. **Бараталиев, К.Б.** К теории интегральных уравнений третьего рода [Текст] / К.Б. Бараталиев. – Бишкек: КНУ, 2004. – 158 с.

18. **Бекиев, А.Б.** Краевая задача для уравнения четвертого порядка / А. Б. Бекиев [Текст] // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезисы докладов. – М.: ФВМиК МГУ имени Ломоносова, 2009. – С. 140–141.

19. **Борубаев, А.А.** Равномерные структуры на топологических пространствах и группах [Текст] / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев. – Бишкек КГПУ, 1997. – 267 с.

20. **Боташев, А.И.** Конечные методы в теории многомерного ветвления [Текст] / А.И. Боташев. – Фрунзе: Илим, 1976. – 259 с.

21. **Богаевский, В.Н.** Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений [Текст] / В.Н. Богаевский, А.Я. Вовзнер. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

22. **Быков, Я.В.** О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Я.В. Быков. – Фрунзе: КГУ, 1957. – 328 с.

23. **Бутенин, Н.В.** Введение в теорию нелинейных колебаний [Текст] / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1987. – 382 с.

24. **Васильева, А.Б.** Интегральные уравнения [Текст] / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: МГУ, 1989. – 158 с.

25. **Ведь, Ю.А.** Об асимптотических свойствах решений уравнений с последействием [Текст] / Ю.А. Ведь ⁄⁄ Дифференц. уравнения. – 1976. – № 9. – С. 1669–1682.

26. **Ведь, Ю.А.** Об устойчивости и стабилизации наследственных систем [Текст] / Ю.А. Ведь ⁄⁄ Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 3–9.

27. **Ведь, Ю.А.** Об асимптотических свойствах решений систем неявных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра [Текст] / Ю.А. Ведь ⁄⁄ Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 13–18.

28. **Ведь, Ю.А.** Предельная задача для системы разностных уравнений второго порядка [Текст] / Ю.А. Ведь, В.Г. Головина ⁄⁄ Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 303–309.

29. **Ведь, Ю.А.** Об ограниченности решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, не разрешенных относительно производной Вольтерра [Текст] / Ю.А. Ведь, С. Искандаров ⁄⁄ Исследов. по

интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 19–23.

30. **Ведь, Ю.А.** О наследственных системах с левым предельным условием [Текст] / Ю.А. Ведь, Э.С. Каптагаев // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989. – Вып. 22. – С. 62–72.

31. **Ведь, Ю.А.** Вопросы корректности, ограниченности и стабилизации решений задачи Коши для дифференциальных уравнений с отражением аргумента [Текст] / Ю.А. Ведь, М.Т. Матраимов // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989. – Вып. 22. – С. 73–86.

32. **Ведь, Ю.А.** Вопросы корректности, ограниченности и стабилизации решений предельной задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом на числовой оси [Текст] / Ю.А. Ведь, М.Т. Матраимов // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 29–48.

33. **Векуа, Н.П.** Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике [Текст] / Н.П. Векуа. – М.: Наука, 1991. – 256 с.

34. **Владимиров, В.С.** Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

35. **Владимиров, В.С.** Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений [Текст] / В.С. Владимиров, И.В. Волович // Теоретическая и математическая физика. – 1985. – Том 62. – С. 3–29.

36. **Власов, В.В.** Разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [Текст] / В.В. Власов, Н.А. Раутман, А.С. Шамаев // Докл. РАН. 2010. Том 434. № 1. С. 12–15.

37. **Власов, В.В.** Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [Текст] / В. В. Власов, Н. А. Раутман, А. С. Шамаев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2011. – Том 39. – С. 36–65.

38. **Галактионов, В.А.** Существование и отсутствие глобальных решений уравнения Курамото-Сивашинского [Текст] / В.А. Галактионов, Э. Митидиери, С.И. Похожаев // Докл. РАН. – 2008. – Том 419. – № 4. – С. 439–442.

39. **Гапоненко, Ю.Л.** Об устойчивости решения интегрального уравнения первого рода на ограниченном и компактном множествах [Текст] / Ю.Л. Гапоненко, С.Л. Логунов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Том 29. – № 1. – С. 14–25.

40. **Германович, О.П.** Линейные периодические уравнения нейтрального типа и их приложения [Текст] / О.П. Германович. – Л.: ЛГУ, 1986. – 108 с.

41. **Горицкий, А.Ю.** Уравнения с частными производными первого порядка [Текст] / А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. – М.: МГУ имени Ломоносова, 1999. – 95 с.

42. **Гребенников, Е.А.** Конструктивные методы анализа нелинейных систем [Текст] / Е.А. Гребенников, Ю.А. Рябов. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

43. **Джураев, А.М.** О состоянии современной теории возмущений [Текст] / А.М. Джураев // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 154–158.

44. **Джураев, Т.Д.** Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков [Текст] / Т.Д. Джураев, Б.В. Логинов, И.А. Малюгина // Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения. – Ташкент: Фан, 1989. – С. 24–36.

45. **Джураев, Т.Д.** К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

46. **Дыйканов, Г.А.** Краевая задача для нелинейного вырождающегося уравнения второго порядка с отражением по времени [Текст] / Г.А. Дыйканов // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып.31. – С.72–74.

47. **Дыйканов, Г.А.** Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных типа Уизема со сложным отражающим отклонением [Текст] / Г.А. Дыйканов // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып.31. – С. 147–150.

48. **Дыйканов, Г.А.** Начальная задача для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с малым параметром при интегральном коэффициенте [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. Сер. физ. мат. наук. – 2003. – № 6. – С. 141–149.

49. **Дыйканов, Г.А.** Смешанная задача для одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2017. - № 2. - С. 41–48.

50. **Дыйканов, Г.А.** О смешанной задаче для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отражающим отклонением [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2018. - № 4. - С. 9–17.

51. **Дыйканов, Г.А.** Обобщенная разрешимость смешанной задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с нелинейным отклонением [Текст] / Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2018. - № 4. - С. 17–25.

52. **Ильин, В.А.** О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений [Текст] / В.А. Ильин // Успехи математических наук. – 1960. – Том 15. – Вып. 2(92). – С. 97–154.

53. **Ильин, В.А.** Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. – 2006. – Том 42. – № 12. – С. 1699–1711.

54. **Ильин, В.А.** Оптимизация граничных управлений колебаниями струны [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // УМН. – 2005. – Том 60. – № 6. – С. 89–114.

55. **Иманалиев, М.И.** Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. –121 с.

56. **Иманалиев, М.И.** Исследование разрешимости интегральных уравнений, представляющих собой систему с дополнительным аргументом по отношению к двум квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып. 30. – С. 11–14.

57. **Иманалиев, М.И.** Начальная и предельная задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом смешанного типа на полуоси [Текст] / М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1992. – Вып 24. – С. 61–70.

58. **Иманалиев, М.И.** Об однозначной разрешимости линейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и интегралом по пространственной переменной в правой полуплоскости при начальном условии на оси [Текст] / М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 6–16.

59. **Иманалиев, М.И.** Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С. Искандаров // Доклады РАН. – 2009. – Том 425. – № 4. – С. 447–451.

60. **Искандаров, С.** О методе весовых и срезывающих функций для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка типа Вольтерра в критическом случае [Текст] / С. Искандаров // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 44–49.

61. **Искандаров, С.** Система линейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода в критическом случае [Текст] / С. Искандаров // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 50–52.

62. **Искендеров, Н.Ш.** О разрешимости одной обратной краевой задачи для эволюционного уравнения четвертого порядка, возникающего в гидроакустике стратифицированной жидкости [Текст] / Н.Ш. Искендеров, Г.А. Салимова // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезисы докладов. – М.: ФВМиК МГУ имени Ломоносова, 2009. – С. 179–180.

63. **Каристи, Г.** Теоремы Лиувилля для квазилинейных эллиптических неравенств [Текст] / Г. Каристи, Э. Митидиери, С.И. Похожаев // Доклады РАН. – 2009. – Том 424. – № 6. – С. 741–747.

64. **Колмановский, В.П.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием [Текст] / В.П. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

65. **Коломиец, В.Г.** О возбуждении колебаний в нелинейных системах со случайными запаздываниями [Текст] / В.Г. Коломиец, Д.Г. Кореневский ⁄⁄ Укр. мат. журн. – 1966. – №3. – С. 51–57.
66. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния [Текст] / Д. Колтон, Р. Кресс. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
67. **Конопелько, О.А.** Граничная задача для уравнения четвертого порядка составного типа [Текст] / О.А. Конопелько // Вестник БеларусГУ. Серия 1. – 2008. – № 3. – С. 73–79.
68. **Корзюк, В.И.** О разрешимости граничных задач в цилиндрических областях для уравнения составного типа четвертого порядка [Текст] / В.И. Корзюк, О.А. Конопелько // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезисы докладов. – М.: ФВМиК МГУ имени Ломоносова, 2009. – С. 197–198.
69. **Котляр, Я.М.** Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики [Текст] / Я.М. Котляр. – М.: Высшая школа, 1991. – 208 с.
70. **Лаврентьев, М.М.** Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М.М. Лаврентьев ⁄⁄ ДАН СССР. – 1959. – Том 127. – №1. – С. 31–33.
71. **Ладыженская, О.А.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1964. – 538 с.
72. **Ладыженская, О.А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа [Текст] / О.А. Ладыженская, В.А. Солонноков, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
73. **Лажетич, Н.** О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка [Текст] / Н. Лажетич \\ Дифференц. уравнения. – 1998. – Том 34. – № 5. – С. 682–694.
74. **Лаптев, Г.И.** Условия несуществования глобальных решений задачи Коши для параболического уравнения с интегральным нелинейным возмущением [Текст] / Лаптев Г.И. // Дифференц. уравнения. – 2002. – Том 38. – № 4. – С. 435–446.
75. **Максимов, В.П.** Разрешимость некоторых краевых задач для дифференциального уравнения с отклонением аргумента зависящим от решения [Текст] / В.П. Максимов ⁄⁄ Краевые задачи. – Пермь: Перм.ПИ, 1982. – С. 6–9.
76. **Мазья, В.Г.** Пространство С. Л. Соболева / В.Г. Мазья. – Л.: ЛГУ, 1985. – 416 с.
77. **Мартынюк, Д.И.** Лекции по теории устойчивости решений систем с последействием [Текст] / Д.И. Мартынюк. – Киев: Наукова думка, 1971. – 177 с.
78. **Матраимов, М.Т.** О существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений с отражением аргумента [Текст] / М.Т. Матраимов ⁄⁄ Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989. – Вып. 22. – С. 86–88.

79. **Матраимов, М.Т.** О существовании асимптотических решений дифференциальных уравнений первого порядка с отражением аргумента [Текст] / М.Т. Матраимов // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 177–179.

80. **Митидиери, Э.** Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств с частными производными [Текст] / Э. Митидиери, С.И. Похожаев // Труды МИ имени Стеклова РАН. – 2001. – Том 234. – 362 с.

81. **Митропольский, Ю.А.** Интегральные многообразия в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

82. **Митропольский, Ю.А.** Системы эволюционных уравнений с периодическими коэффициентами [Текст] / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк, А.М. Самойленко. – Киев: Наукова думка, 1984. – 216 с.

83. **Михайлов, В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

84. **Михайлов, В.П.** О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка [Текст] / В.П. Михайлов // Матем. сб. – 1976. – Том 100. – № 1. С. 5–13.

85. **Моисеев, Е.И.** Уравнения смешанного типа со спектральным параметром [Текст] / Е.И. Моисеев. – М.: МГУ имени Ломоносова, 1988. – 150 с.

86. **Мышкис, А.Д.** Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / А.Д. Мышкис // Успехи мат. наук. – 1949. – №5. – С. 99–141.

87. **Михлин, С.Г.** Линейные уравнения в частных производных [Текст] / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 430 с.

88. **Норкин, С.Б.** Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом [Текст] / С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1965. – 350 с.

89. **Норкин, С.Б.** Одноточечная начальная задача для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / С.Б. Норкин. – М.: МАДИ, 1992. – 103 с.

90. **Омуров, Т.Д.** Обратная задача типа Гурса для дифференциальных уравнений [Текст] / Т.Д. Омуров // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1998. – Вып. 27. – С. 257–261.

91. **Омуров, Т.Д.** Приближенные методы в теории нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого и третьего родов [Текст] / Т.Д. Омуров // Автореферат дисс. … док.физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2000.

92. **Омуров, Т.Д.** Регуляризация и единственность решения нелинейной системы особых интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / Т.Д. Омуров // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. – Вып. 28. – С. 179–184.

93. **Осмоналиев, А.Б.** Краевые задачи для гиперболических и смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст]

/ А.Б. Осмоналиев // Дисс. … канд.физ.-мат.наук: 01.01.02. – Ош, 2005. – 125 с.

94. **Панков, П.С.** Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, О.Д. Будникова // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 35–38.

95. **Панков, П.С.** Применение интервального анализа к решению операторных уравнений первого рода на компактных функциональных множествах [Текст] / П.С. Панков, Б.Д. Баячарова // Там же. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 80–83.

96. **Петухов, В.Р.** Вопросы качественного исследования решений уравнений с максимумами [Текст] / В.Р. Петухов // Известия вузов. Серия математика. – 1964. – №3. – С. 116–119.

97. **Петровский, И.Г.** Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И.Г. Петровский. – М., 1961. – 400 с.

98. **Попов, Е.П.** Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления [Текст] / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1988. – 255 с.

99. **Похожаев, С.И.** О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка [Текст] / С.И. Похожаев // Матем. сб. 1982. Том 117. № 2. С. 251–265.

100. **Роговченко, Ю.В.** Непрерывная зависимость от параметра решений импульсных эволюционных систем [Текст] / Ю.В. Роговченко // Укр. мат. журн. – 1992. – Том 44. – № 8. – С. 1078–1083.

101. **Саадабаев, А.** Методы решения интегральных уравнений первого рода [Текст] / А. Саадабаев. – Фрунзе: Илим, 1986. – 94 с.

102. **Саадабаев, А.** Оценка точности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике [Текст] / А. Саадабаев // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 77–83.

103. **Салахитдинов, М.С.** Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром [Текст] / М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов. – Ташкент: Фан, 1997. – 165 с.

104. **Салахитдинов, М.С.** Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами [Текст] / М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Том 48. – № 4. – С. 882–893.

105. **Самарский, А.А.** Введение в численные методы [Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1987. – 288 с.

106. **Самарский, А.А.** Избранные труды [Текст] / А.А. Самарский. – М.: МАКС Пресс, 2003. – 531 с.

107. **Самойленко, А.М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний [Текст] / А.М. Самойленко. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

108. **Самойленко, А.М.** Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач [Текст] / А.М. Самойленко, В.Н. Лаптинский, К.К. Кенжебаев. – Киев: ИМ НАН Укр., 1999. – 220 с.

109. **Сафина, Г.Ф.** Сохранение частот колебаний трубопровода при изменении параметров жидкости [Текст] / Г.Ф. Сафина // Журнал Средневолжского мат. общества. – 2011. – Том 13. – № 4. – С. 66 – 77.

110. **Скрыпник, И.В.** Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач [Текст] / И.В. Скрыпник. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

111. **Смирнов, М.М.** Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка [Текст] / М.М. Смирнов. – Л.: ЛГУ, 1972. – 123 с.

112. **Соболев, С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

113. **Сопуев, А.** Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н.К. Аркабаев // Вестник ТомГУ. Математика. Механика. – 2013. – Том 21. – № 1. – С. 16–23.

114. **Стеклов, В.А.** Основные задачи математической физики [Текст] / В.А. Стеклов. – М.: Наука, 1983. – 433 с.

115. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. Наука, 1979. – 285 с.

116. **Тихонов, А.Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

117. **Тодоров, Т.Г.** О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка [Текст] / Т.Г. Тодоров // Вестник Ленинигpадского государственного университета. 1975. Том 19. С. 56–63.

118. **Тышкевич, В.А.** Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / В.А. Тышкевич. – Киев: Наукова думка, 1981. – 80 с.

119. **Треногин, В.А.** Функциональный анализ [Текст] / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 495. с.

120. **Турбин, М.В.** Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли [Текст] / М.В. Турбин // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 246–257.

121. **Халанай, А.** Качественная теория импульсных систем [Текст] / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 307 с.

122. **Хатсон, В.** Приложения функционального анализа и теории операторов [Текст] / В. Хатсон, Дж. Пим. – М.: Мир, 1983. – 430 с.

123. Хейл, **Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

124. **Шабадиков, К.Х.** Исследование решений смешанных задач для квазилинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей смешанной производной [Текст] / К.Х. Шабадиков // Дисс. … канд. физ-мат. наук: 01.01.02. – Фергана, 1984. – 156 с.

125. **Шабадиков, К.Х.** Нелинейных уравнений Вольтерра второго рода с отражением аргумента и сложным пределом интегрирования [Текст] / К.Х. Шабадиков, Г.А. Дыйканов // Узб. мат. журн. – 2005. – №1. – С. 109–112.

126. **Шабров, С.А.** Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями [Текст] / С.А. Шабров // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 232–250.

127. **Шабров, С.А.** Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка [Текст] / С.А. Шабров // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 168–179.

128. **Шарко, В.В.** Топологические аспекты динамических систем [Текст] / В.В. Шарко // Укр. мат. журн. – 1992. – Том 44. – № 1. – С. 122–127.

129. **Шилов, Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс [Текст] / Г.Е. Шилов. – М.: МГУ имени Ломоносова, 1984. – 208 с.

130. **Шевело, В.Н.** Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Текст] / В.Н. Шевело. – Киев: Наукова Думка, 1978. – 150 с.

131. **Чандиров, Г.И.** Смешанная задача для квазилинейных уравнений гиперболического типа [Текст] / Г.И. Чандиров // Дисс. … док. физ.-мат. наук. – Баку, 1970. – 248 с.

132. **Чернятин, В.А.** Обоснование метода Фурье в смешанном задаче для уравнений в частных производных [Текст] / В.А. Чернятин. М.: Изд-во МГУ, 1991. 112 с.

133. **Эгамбердиев, У.** О задаче Дирихле для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерной области [Текст] / У. Эгамбердиев, Ю.П. Апаков // Известия АН УзССР. Серия физико-математические науки. – 1989. – № 3. – С. 51–56.

134. **Эльсгольц, Л.Э.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Текст] / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

135. **Юлдашев, Т.К.** Метод разделения переменных [Текст] / Т.К. Юлдашев. Учебное пособие. – Ош: ОшГЮИ, 2010. – 166 с.

136. **Юлдашев, Т.К.** Смешанная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени [Текст] / Т.К. Юлдашев // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2012. – Том 52. – № 1. – С. 112–123.

137. **Юлдашев, Т.К.** Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 277–295.

138. **Юлдашев, Т.К.** Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестн. Южно-УралГУ. Сер. Матем. Механика. Физика. – 2013. – Том 5. – № 1. – С. 69–75.

139. **Юлдашев, Т.К.** О разрешимости одной смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – № 4. – С. 46–57.

140. **Юлдашев, Т.К.** Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 153–163.

141. **Юлдашев, Т.К.** Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2015. – № 4. – С. 736–749.

142. **Юлдашев, Т.К.** Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 9. – С. 74–79.

143. **Юлдашев, Т.К.** Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром [Текст] / Т.К. Юлдашев // Укр. мат. журн. – 2016. – Том 68. – № 8. – С. 1115–1131.

144. **Юлдашев, Т.К.** Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney–Luke с вырожденным ядром [Текст] / Т.К. Юлдашев // Изв. вузов. Матем. – 2016. –№ 9. – С. 59–67.

145. **Юлдашев, Т.К.** Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырождением ядра [Текст] / Т.К. Юлдашев // Дифференц. уравнения. – 2017. – Том 53. – № 1. – С. 101–110.

146. **Юлдашев, Т.К.** Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром [Текст] / Т.К. Юлдашев // Вестник ВолГУ. Серия. Математика. Физика. – 2017. – Том 38. – № 1. – С. 42–54.

147. **Юлдашев, Т.К.** Начальная задача для дифференциальных уравнений третьего порядка с максимумами по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Современные вопросы естествознания и технических наук. – Кызыл-Кия: КИТЭП ОшТУ, 2000. – С. 11–14.

148. **Юлдашев, Т.К.** Особенности метода усреднения для нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с максимумами [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат. наук. – Ош: ОшГУ, 2003. – Вып. 6. – С. 200–202.

149. **Юлдашев, Т.К.** Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода с отражением аргумента [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы X11 межд. научн. конф., 10-12 ноября 2008 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2008. – С. 327–328.

150. **Юлдашев, Т.К.** О смешанной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – №2. – С. 164–169.

151. **Юлдашев, Т.К.** Краевая задача для однородного эллиптико-гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Складнi системи i процеси. – 2010. – №1. – С.19–24.

152. **Юлдашев, Т.К.** О смешанной задаче для нелинейного уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы XIV межд. научн. конф., 10-12 ноября 2010 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2010. – Часть 2. – С. 465–466.

153. **Юлдашев, Т.К.** Смешанная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с максимумами [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Решетневские чтения. Материалы XIV межд. научн. конф., 10-12 ноября 2011 г., г. Красноярск. – Красноярск: СибГАУ, 2011. – Часть 2. – С. 553–554.

154. **Юлдашев, Т.К.** О разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. – 2011. – №1. – С. 48–52.

155. **Юлдашев, Т.К.** Краевая задача для смешанного уравнения шестого порядка [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов // Вестник ОшГУ. - 2011. - №1. - С. 52–54.

156. **Юлдашев, Т.К.** Осцилляционные свойства решений систем дифференциальных уравнений с максимумами [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов, Г.К. Карабаджакова // Актуальные и проблемы естествознания и образования. – Кызыл-Кия: КИТЭП БатГУ, 2000. – С. 3–9.

157. **Юлдашев, Т.К.** Смешанная задача для нелинейных уравнений гиперболического типа с отражающим интегральным отклонением [Текст] / Т.К. Юлдашев, Г.А. Дыйканов, Г.К. Карабаджакова // Исследов. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 75–79.

158. **Юлдашев, Т.К.** Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества [Текст] / Т.К. Юлдашев , С.М. Овсяников // Журнал Средневолжского мат. общества. – 2015. – Том 17. – № 2. – С. 85–95.

159. **Юмагулов, М.Г.** Исследование основных сценариев бифуркаций функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа [Текст] / М.Г. Юмагулов, Д.А. Якшибаева // Уфимск. матем. журн. – 2014. – Том 6. – № 2. – С. 104–112.

160. **Уизем, Дж**. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

161. **Aftabizadex, A.R.** Bounded solutions for differential equation with reflection of the argument [Текст] / A.R. Aftabizadex, Y.K. Huang, J. Wiener //Journ. of Math. and Apll. – 1988. – Vol. 135. – P.31–37.

162. **Artsein, Z.** Continuous dependence of solution of operator equations [Текст] / Z. Artsein // Trans. of Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 231. – № 1. – P.143–166.

163. **Barlow, M.T.** One dimensional stochastic differential equations with no strong solution [Текст] / M.T. Barlow // Journ. of London Math. Soc. 1982. – Vol. 26. – № 2. – P. 335–347.

164. **Benney, D.J.** Interactions of permanent waves of finite amplitude [Текст] / D.J. Benney, J.C. Luke // Journ. of Math. Physics. – 1964. – Vol. 43. – P. 309–313.

165. **Delfour, V.C.** Hereditary differential systems with constant delays. I. General case [Текст] / V.C. Delfour, S.K. Mitter // Journ. of Differential Equations. – 1972. – Vol. 12. – P. 213–255.

166. **Gastafson, G.B.** Nonzero solutions of boundary value problems for second order ordinary and delay differential equations [Текст] / G.B. Gastafson, K. Schmitt // Journ. of Differential Equations. – 1972. – Vol. 12. – P. 129–147.

167. **Koplatadze, R.G.** On oscillating solutions of second order delay differential inequalities [Текст] / R.G. Koplatadze // Journ. of Appl. Math. – 1972. – Vol. 43. – № 1. – P. 148–157.

168. **Kusano, T.** Oscillations of functional differential equations with retarded argument [Текст] / T. Kusano, H. Onoze // Journ. of Differential Equations. – 1974. – Vol. 15. – P. 269–272.

169. **Voulov, H.D.** Uniform asymptotic stability of a scalar differential equations with maxima [Текст] / H.D. Voulov // Dokl. Bolg. AN. – 1981. – Vol. 44. – № 6. – P. 5–7.

170. **Voulov, H.D.** On the asymptotic stability of differential equations with maxima [Текст] / H.D. Voulov, D.D. Bainov // Rend. Cerc. Math. Palermo, 1991. – Ser.2. – Vol. 40. – № 3. – P. 385–420.

171. **Yuldashev, T.K.** Mixed value problem for a Boussinesq type integro-differential equation with reflecting deviation and degenerate kernel [Текст] / T. K. Yuldashev // Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang). – 2016. – Vol. 26. – № 4. – P. 723–732.

172. **Yuldashev, T.K.** Mixed value problem for a pseudoparabolic type integro-differential equation with delay and degenerate kernel [Текст] / T.K. Yuldashev // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. – 2016. – Vol. 19. – № 2. – P. 309–317.